베르누이 들보의 역해석에 기반한 변형도 측정으로부터의 변위,속도 및 가속도 재구성

Reconstruction of Displacements, Velocities and Accelerations from Measured Strains using Inverse Analysis of Bernoulli Beam Equation

전상범* · 박광연 · 이해성*****

Jeon, Sang Bum · Park, Kwang Yeun · Lee, Hae Sung

본 논문은 변형도를 측정하여 동적/정적 변위를 재구성하는 새로운 기법을 제안한다. 들보의 지배방정식과 지점조건을 동시에 고려한 역해석을 이용하면 변형도로부터 변위를 얻을 수 있다. 동적/정적 모드형상을 만족하지 못하는 잡음이 억제되므로 수치적분이 갖는 저주파잡음 증폭 현상이 발생하지 않으며, 지점 적합조건을 만족하는 변위형상을 얻을 수 있다. 재구성된 변위에 기 개발된 시간필터를 적용하여 속도와 가속도 역시 재구성할 수 있다.

핵심용어 : 변형도, 변위, 속도, 가속도, 베르누이 들보, 동적/정적 모드형상

1. 서 론

대부분의 들보 구조물, 특히 교량의 변위는 직접 측정하기 매우 어렵다. 변위를 간접적으로 측정하기 위해 광섬유 변형도센서 (FBG)의 여러 장점에 힘입어 변형도(strain)를 이용해 변위를 계산하는 연구가 활발하다[1,2]. 하지만 기존 연구들은 구조물 모델에 대한 의존성이 높기 때문에 모델기반 역해석이 갖는 여러 문제점을 동반한다. 이 논문에서는 베르누이 들보의 역해석을 이용해 모델 의존도가 비교적 낮은 새로운 기법을 제시한다. 베르누이 들보 지배방정식의 역해석에 지점조건을 구속조건으로 적용하여 문제를 풀며, 박광연[3]이 제안한 시간필터로 속도와 가속도를 구한다. 기법의 타당성을 검증하기 위해 단순지지보 수치예제를 이용하였다.

2. 변형도를 이용한 변위, 속도, 가속도 재구성

베르누이 들보 가정이 유효한 들보의 한쪽면상의 여러 점에서 변형도를 측정한다(그림1). 지점에서는 여러 이유로 인해 변형도를 측정할 수 없으므로 모든 종류의 지점에서는 변형도를 측정하지 않는다.

그림 1. 변형도 측정방법

지배방정식에 의하면 측정한 변형도를 길이방향으로 2회 수치 적분하고 중립축과 측정기 사이의 거리를 곱하면 변위를 얻을 수 있다. 하지만 일반적인 수치적분을 이용할 경우 지점에 변형도정보가 없어 적분이 불가능하며, 지점에서 변형도를 측정 하였다 해도 측정치에 포함된 잡음의 저주파성분이 증폭되어 그림3과 같은 결과를 만든다. 이렇게 얻은 변위는 지점의 적합조건을 맞추지 못하므로 유효한 변위로 볼 수 없다. 들보의 지배방정식과 지점조건을 동시에 고려하면 지점상의 변형도정보가 없어도 적합조건에 맞는 변위를 얻을 수 있으며 이를 위해 다음과 같은 최적화 식을 제안한다.

$$\min \prod(w) = \frac{1}{2}\int_0^L \left\| \frac{d^2\tilde{w}}{dx^2} y - \bar{\varepsilon} \right\|_2^2 dx \quad \text{subjected to } \tilde{w} = 0 \text{ and/or } \tilde{w}' = 0 \text{ at supports} \tag{1}$$

여기서 $\tilde{w}$, $\tilde{w}'$, y, $\bar{\varepsilon}$, L 은 각각 재구성된 변위, 변위의 공간 1계미분, 중립축과 변형도측정점간의 거리,

* 서울대학교 건설환경공학부, 석사과정 (E-mail:sbjeon11@snu.ac.kr)
** 서울대학교 건설환경종합연구소, 공학박사 (E-mail:kypark03@snu.ac.kr) - 발표자
*** 서울대학교 건설환경공학부 교수, 공학박사 (E-mail:chslee@snu.ac.kr)

측정 변형도, 들보의 전체 길이를 의미한다. 식 (1)의 변분을 유한요소로 이산화하고, 지점 적합조건을 반영하면 변형도로부터 변위를 구할 수 있다. 변위의 지점 적합조건을 맞추도록 되어 있으므로 변위가 가질 수 있는 동적/정적 모드형상을 만족하지 못하는 잡음은 완전히 억제되며, 이로 인해 일반적인 수치적분이 보여주는 문제점인 저주파잡음 증폭 현상이 발생하지 않는다.

공간방향 잡음은 적합조건으로 인해 완전히 제거 되었으나 시간방향 잡음은 적절히 제거되지 않았기 때문에 이 변위를 시계열로 늘어놓으면 적지 않은 잡음이 남아있게 된다. 때문에 이를 수치미분하여 속도와 가속도를 구하면 심각한 고주파 증폭이 발생하게 되어 사용할 수 없다. 고주파증폭의 문제점을 해결한 변위, 속도, 가속도는 박광연이 제안한 시간필터를 이용해 구할 수 있다[3].

$$\min \prod(w) = \int_{t_1}^{t_2} (\hat{w}_i - \tilde{w}_i)^2 dt + \frac{\beta \Delta t}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\frac{d^2 \hat{w}_i}{dt^2})^2 dt \qquad (2)$$

여기서 $\hat{w}_j$, β, t_1, t_2는 각각 잡음이 제거된 i번째 자유도의 변위, 정규화 계수, 시간창의 시작과 끝시간을 시간을 의미 한다. 정규화계수와 시간창을 결정하고 사용하는 방법은 참고문헌에 자세히 소개되어 있다. 식 (2)를 이용하면 시계열 잡음이 제거된 변위와 속도를 얻을 수 있으며, 속도를 중앙차분법으로 1회 미분하면 가속도를 얻을 수 있다.

3. 예 제

그림1과 같은 단순보 예제를 활용하여 제안한 기법의 타당성을 검증한다. 들보의 강성과 질량은 각각 3.02 GNm^2 과 1500 kg/m 이며 전체 길이는 30 m로 하였다. 20 t 차량이 시속 60 km로 왼쪽에서 오른쪽으로 이동하며 총 2대의 차량이 23.16m 간격으로 통과한다. 들보의 동해석을 위해 24개 요소로 이산화 하였으며 평균가속도 가정의 뉴마크-베타 기법을 100 Hz로 적용 하였다. 식 (1)은 8개 요소로 이산화 하여 7개 변형도만 측정 된 상황을 가정하였으며 100 Hz 측정빈도를 사용 하였다. 측정잡음을 모사하기 위해 변형도의 최대값 기준 최대 5% 크기를 갖는 백색잡음을 추가하였다. 그림 2, 3, 4, 5 는 각각 측정한 변형도, 재구성한 변위의 공간방향 형상, 중앙절점의 시계열 변위이력, 중앙절점의 가속도 이력이다. 속도는 지면관계상 생략하였다. 모든 경우 사다리꼴 적분에 비해 높은 정확도를 보인다.

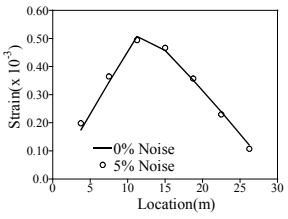

그림 2. 교량 전체 변형도(4.9초)

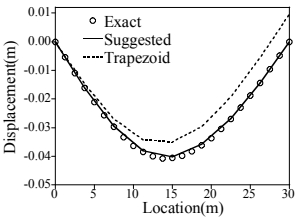

그림 3. 교량 전체 변위(4.9초)

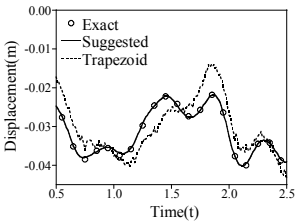

그림 4. 교량 중앙의 시계열 변위

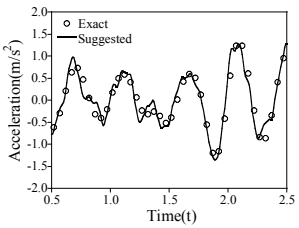

그림 5. 교량 중앙 절점의 가속도

4. 결 론

본 연구에서는 베르누이 들보의 변형도를 측정하여 변위, 속도, 가속도를 재구성 하는 기법을 제시한다.

1. 베르누이 들보의 지배방정식을 역해석해 변형도로 변위를 구한다. 지점을 구속조건으로 고려한다.
2. 지점 적합조건에 맞지 않는 잡음이 억제되고, 수치적분이 갖는 단점이 발생하지 않는다.
3. 기 개발된 시간필터를 사용해 속도와 가속도를 구한다.

참고문헌

1. Soojin Cho, Chung-Bang Yun, Sung-Han Sim, “Displacement estimation of bridge structures using data fusion of acceleration and strain measurement incorporating finite element model”, Smart Structures and Systems, Vol. 15, No. 3 (2015) 645-663
2. Foss, G., Haugse, E., “Using modal test results to develop strain to displacement transformations’, Proceedings of the 13th Int. Modal Analysis Conf (1995)
3. Park K Y, “Acceleration-Energy Filter and Bias Compensation for Stabilizing Equation Error Estimator in Inverse Analysis Using Dynamic Displacement”, *Ph. D thesis*, *Seoul National University*, *Korea*, 2015.8