

# Newton-Raphson 방법을 이용한 현수교의 초기평형상태 해석

## An Initial Equilibrium State Analysis of Suspension Bridge

### By Newton-Raphson Method

김 기석\*, ○ 이 해성\*\*

#### 1. 서론

현수교는 주케이블이 비선형 거동(소변형, 대변위)을 하므로 사하중으로 인한 구조계의 강성 변화가 크고, 평형상태에 이르기까지 변위가 크게 발생한다. 따라서 설계에서 주어진 초기평형상태로부터 케이블 자중으로 도입되는 초기 장력이나 무응력 상태의 길이를 구하기가 어렵다. 초기평형상태를 만족하는 초기 부재력이나 무응력 상태의 길이는 정·동적 해석과 시공단계 해석의 기본자료가 된다.

초기평형상태를 해석하는 기존 방법에는 시산법(Trial and Error)[2,3]과 Successive Iteration 을 이용한 방법[1]이 있다. 시산법은 초기 상태를 가정하고 정적 해석을 수행한 후 경험적 지식으로 가정값을 보정하는 방법이다. 근래에 탄성현수선 케이블(Elastic Catenary Cable) 요소가 개발되고, 이를 현수교에 적용하면서 보다 정밀한 해석 방법이 제안되었다. 최근에 제안된 Successive Iteration 방법은 초기상태를 가정하여 평형방정식을 풀고, 그 결과로 기하학적 제한조건식(설계에서 주어진 새그와 행어의 수평방향 좌표)을 만족하도록 초기상태를 보정한다. 이 방법은 이중 반복계산 과정이 필요한데, 안쪽 반복계산에서는 비선형 평형방정식을 풀고 바깥쪽 반복계산에서는 기하학적 제한조건식으로 보정량을 계산한다.

이 논문에서는 평형방정식과 기하학적 제한조건식을 동시에 푸는 Newton-Raphson 방법에 기초한 초기평형상태 해석을 제안한다. 즉, 기하학적 제한조건식의 개수만큼 부재의 무응력 상태의 길이를 미지수로 추가하여 평형방정식과 기하학적 제한조건식을 동시에 풀고 부재의 무응력 상태의 길이를 변위와 동시에 보정하는 방법이다. 제안된 방법은 방정식의 미지수는 증가하지만 단일 반복계산이므로 Successive Iteration 보다 수렴 횟수가 적고, Newton-Raphson 방법에 기초하여 이차 수렴성(Quadratic Convergence)을 보장하므로 수렴 속도가 빠르다.

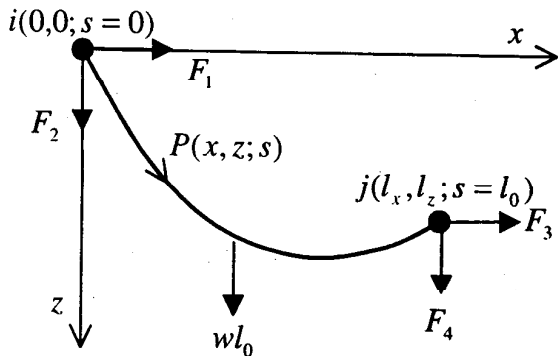


그림 1 자중을 받는 탄성현수선케이블

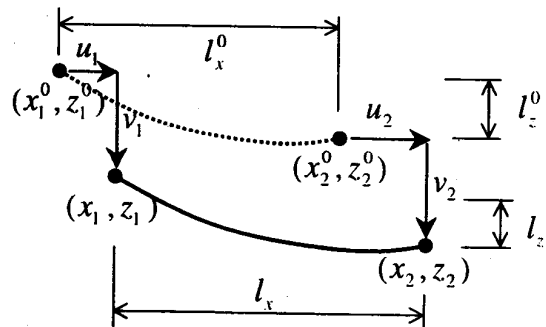


그림 2 변형 전·후의 기하형상

\* 서울대학교 토목공학과 석사과정

\*\* 서울대학교 토목공학과 조교수

## 2. 탄성현수선 케이블(Elastic Catenary Cable)

그림 1 과 같이 무응력 상태의 길이가  $l_0$  인 탄성현수선 케이블 양단의 좌표가 주어지면, 케이블 미분방정식을 적분하여 다음과 같이 케이블의 좌표를 결정할 수 있다.

$$x(s) = -\frac{F_1}{EA} s - \frac{F_1}{w} \left\{ \sinh^{-1} \left( \frac{F_2 + ws}{F_1} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{F_2}{F_1} \right) \right\} \quad (1)$$

$$z(s) = -\frac{F_2}{EA} s - \frac{w}{2EA} s^2 - \frac{1}{w} \left\{ \sqrt{(F_1)^2 + (F_2 + ws)^2} - \sqrt{(F_1)^2 + (F_2)^2} \right\}$$

여기서,  $s$  는 변형 전 Lagrangian 좌표계의 일차원 변수이고,  $F_1$  과  $F_2$  는 왼쪽 단의 부재력이다.  $EA$  는 케이블의 탄성계수 이고,  $w$  는 단위길이 당 중량이다.

한쪽 단( $s = L_0$ )의 경계조건을 적용하여 다음과 같은 케이블의 적합방정식을 얻는다.

$$l_x = f(F_1, F_2, l_0) \quad l_z = g(F_1, F_2, l_0) \quad (2)$$

## 3. 초기평형상태 해석

현수교에서 주탑을 강체로 가정하면 새들(saddle)을 수평이동이 가능한 지점으로 해석할 수 있다. 주형이나 행어의 강성을 무시하여 그림 3 과 같이 주형의 사하중을 집중하중으로 치환한다.  $N-1$  개의 행어로 주케이블을  $N$  개의 탄성현수선 케이블 요소로 분할하면,  $2N-2$  개의 평형방정식이 같은 수의 변위성분으로 표현된다. 사하중 상태에서 중앙경간의 새그와 행어의 각 수평방향 위치가 설계에서 주어지므로  $N$  개의 기하학적 제한조건식이 추가된다. 따라서  $N$  개의 케이블 요소의 무응력 길이를 미지수로 추가하면 평형방정식과 기하학적 제한조건식을 동시에 쓸 수 있다.

기하학적 제한조건은 새그와 행어의 수평방향 좌표 값으로 다음과 같이 식(2)의 탄성현수선 케이블 적합방정식의 조합으로 표현할 수 있다.

$$S = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^s l_z^k - \sum_{k=s+1}^N l_z^k \right) \quad X_i = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^i l_x^k - \sum_{k=i+1}^N l_x^k \right) \quad (3)$$

여기서,  $s$  는 새그를 포함하는 왼쪽 케이블 요소이고  $i$  는  $x$  방향 좌표가  $X_i$  인 절점의 왼쪽 케이블 요소이다. 두 방정식의 첫 항은 주어진 절점의 왼쪽에 위치한 케이블 적합방정식의 합이고, 둘째 항은 오른쪽에 위치한 케이블 적합방정식의 합이다.

식(3)으로부터 미소 변화량을 고려한 기하학적 제한조건식을 얻는다

$$dS = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^s dl_z^k - \sum_{k=s+1}^N dl_z^k \right) \quad dX_i = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^i dl_x^k - \sum_{k=i+1}^N dl_x^k \right) \quad (4)$$

여기서,  $dl_z^k$  는  $k$  번째 케이블 요소의 수평길이 미소 변화량이고,  $dl_x^k$  는  $k$  번째 케이블 요소의 수직길이 미소 변화량이다.

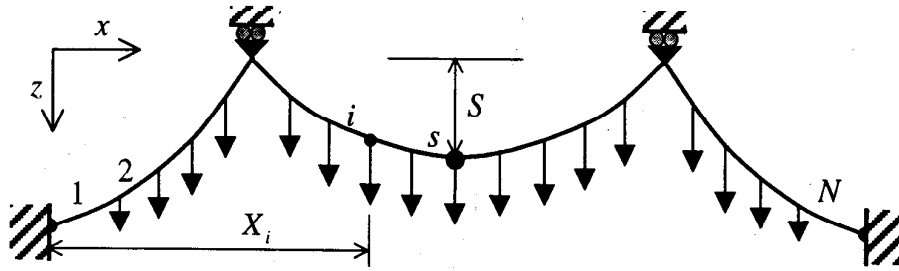


그림 3 현수교 모델링

식(4)에 필요한 케이블 적합방정식의 미소 변화량은 그림 2의 변형 전·후의 기하형상으로부터 다음과 같이 전체자유도에 대한 미소변위로 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} dl_x \\ dl_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du_1 \\ dv_1 \\ du_2 \\ dv_2 \\ dl_0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

케이블 요소의 강성도 행렬식은 증분 변위에 대한 식이므로 무응력 상태의 길이에 대한 항을 추가 해야 한다. 식(2)에서 무응력 상태의 길이를 포함한 각 변수에 대해 미분하여 유연도 행렬식을 얻고, 식(5)와 그림 1에서 보인 자중과 부재력의 평형관계로부터 케이블 요소의 강성도 행렬식을 얻는다.

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_1 \\ \Delta F_2 \\ \Delta F_3 \\ \Delta F_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{K}(F_1, F_2, l_0) \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta v_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta v_2 \\ \Delta l_0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

식(5)과 식(6)을 적합조건과 식(4)의 기하학적 제한조건에 따라 전체 방정식을 구성하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{X} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_U & \mathbf{E}_L \\ \mathbf{C}_U & \mathbf{C}_L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{U} \\ \Delta \mathbf{L}_0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

여기서,  $\mathbf{E}_U$ 는 Tangent Stiffness 이고,  $\mathbf{E}_L$ 는 무응력 상태 길이의 증분에 대한 평형방정식의 변화량이다.  $\mathbf{C}_U$ 는 변위의 증분에 대한 기하학적 제한조건식의 변화량이고,  $\mathbf{C}_L$ 는 무응력 상태 길이의 증분에 대한 기하학적 제한조건식의 변화량인데 식(5)에서 알 수 있듯이 영행렬이 된다.  $\Delta \mathbf{P}$ 는 외력과 부재력의 차이이고,  $\Delta \mathbf{X}$ 는 기하학적 제한조건식의 오차이다.  $\Delta \mathbf{U}$ 는 변위의 증분 벡터이고,  $\Delta \mathbf{L}_0$ 는 무응력 상태 길이의 증분 벡터이다.

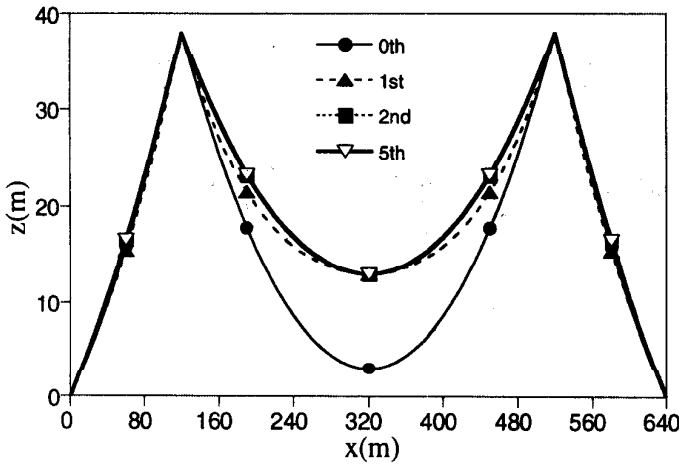


그림 4 주케이블 처짐 형상

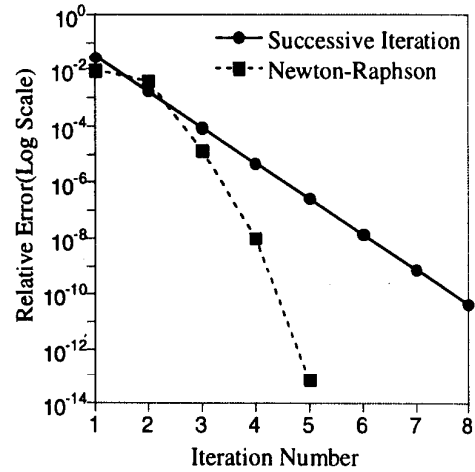


그림 5 기하학적 제한조건의 상대오차

#### 4. 예제

중앙경간이 400m, 측경간이 120m, 주탑의 높이가 38m 이고 새그가 33m 인 타정식 현수교에 대해 초기평형상태 해석을 수행하였다. 주케이블의 EA 값은  $1.67 \times 10^6$  ton, 자중은 0.69 ton/m 이고 주형의 자중은 4.2 ton/m 이다.

그림 4는 제안된 방법으로 새그의 초기값을 35m로 가정하여 초기평형상태 해석 후, 변위의 크기를 5 배로 과장한 처짐 형상이다. 그림 4에서 알 수 있듯이 3 번째 반복 계산부터는 정해에 수렴한다. 그림 5은 Successive Iteration 과 제안한 방법으로 각각 해석한 후, 기하학적 제한조건식의 상대오차를 비교한 것이다. 제안된 방법은 완벽한 이차 수렴성을 보이는 반면, 기존의 Successive Iteration 방법으로 얻은 결과는 일차 수렴성을 보인다. Successive Iteration 에 의한 결과는 기하학적 제한조건식의 바깥쪽 반복계산 횟수만을 보인 것이다. 안쪽 반복계산에서 평형방정식을 푸는데 4~5 번 정도의 계산이 필요하므로, 수렴하는데 필요한 반복 계산 횟수는 전부 30~40 번 정도이다.

#### 5. 결론

주케이블을 탄성현수선 케이블 요소로 모델링한 현수교의 초기평형상태 해석을 위하여 평형방정식과 기하학적 제한조건식을 동시에 푸는 Newton-Raphson 방법을 제안하였다. 제안된 방법에서는 방정식의 미지수가 기하학적 제한조건식만큼 증가하지만 Successive Iteration 보다 적은 반복계산으로 원하는 정도의 결과를 얻을 수 있다. 이 논문에서는 2 차원 현수교에 대한 초기평형상태 해석을 Newton-Raphson 방법에 기초하여 정식화 하였으나, 일반적인 케이블 구조물의 설계와 해석에도 제안된 방법을 적용할 수 있다.

#### 참고문헌

- [1] 이명재, 1998, 초기평형상태를 이용한 현수교의 시공단계 해석 및 시공오차 관리, 공학박사학위논문, 서울대학교
- [2] 김호경, 1993, 시공상태를 고려한 현수교의 3 차원 해석, 공학박사학위논문, 서울대학교
- [3] Bang, M.S., 1993, Suspension Bridges in Today, Construction Press(Translated in Korea)
- [4] Irvine, H.M., 1981, Cable Structures, MIT Press