

변형도-처짐 관계식과 시간필터를 사용하여 변형도로 베르누이 들보의 변위, 속도 및 가속도 재구성

Reconstruction of Displacements, Velocities and Accelerations of Bernoulli Beam from Strains using Strain-Displacement Relationship and Time Filter

전상범* · 박광연** · 이해성***

Jeon, Sang Bum · Park, Kwang Yeun · Lee, Hae Sung

본 논문은 측정 변형도를 사용하여 동적/정적 변위를 재구성하는 것과 이 변위를 사용하여 속도와 가속도 재구성하는 방법을 제안한다. 변위를 재구성하는 과정에서 수치적분으로 인해 저주파잡음 증폭은 들보의 지배방정식과 지점조건으로 들보의 동적/정적 모드형상에 포함되지 않는 잡음은 억제되어 문제점이 해결된다. 재구성된 변위에 수치미분을 할 경우 발생하는 고주파잡음 증폭은 기 개발된 시간필터를 사용하여 증폭을 억제 후 속도와 가속도를 재구성 한다.

핵심용어 : 변형도, 변위, 지점조건, 동적/정적 모드형상, 속도, 가속도, 시간필터

1. 서론

들보 구조물의 변위를 직접 측정하기에는 여러 가지의 어려움이 있다. 따라서 변형도를 측정하여 변위를 간접적으로 계산하는 연구가 진행되고 있다. 그러나 기존의 연구는 변형도와 처짐의 모드를 기반으로 역해석하여 모델 의존도가 높을 뿐만 아니라 모드를 가정하여 계산하는 한계점을 가지고 있다[1,2]. 이 논문에서는 베르누이 들보 지배방정식에 지점조건을 적용하여 역해석시에 모델 의존도가 기존연구보다 낮은 방법을 제시한다. 지점조건에 맞지 않는 잡음은 제거되어 변위재구성을 하며, 속도와 가속도 재구성시 증폭하는 고주파잡음은 시간필터로 억제가 가능하다[3]. 기법의 타당성은 2경간 연속보 수치예제로 검증하였다.

2. 변위-변형도 관계식을 이용한 변위재구성

변형도 측정기

그림 1. 변형도 측정방법

지배방정식인 변형도-변위 관계식을 보면 변위는 측정 변형도를 두 번 길이 방향으로 수치적분 후 중립축에서 변형도 측정기까지의 거리를 나누면 된다. 이때 적분에 의해 저주파잡음이 증폭하게 되는 결과를 얻게 되며 변위는 지점조건에 맞지 않아 변위가 유효하지 못하다. 다음의 최적화식은 들보의 지배방정식과 지점조건을 모두 적용하여 저주파잡음이 억제되어 적합조건에 맞는 변위 계산이 가능하다.

$$\text{Min } \Pi(w) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} y - \bar{\epsilon} \right)^2 dx \quad \text{subjected to support condition} \quad (1)$$

여기서 \tilde{w} , y , $\bar{\epsilon}$, L 는 각각 재구성된 변위, 중립축과 변형도 측정점 사이의 거리, 변형도 측정값, 들보의 총 길이를 의미한다. 식 (1)에 변분을 취한 후 유한요소 이산화와 지점조건을 적용하면 측정 변형도로부터 변위를 추정 할 수 있다. 변형도를 수치적분에서 발생하는 저주파잡음이 증폭하는 문제점은 변위의 지점조건으로 인해 변위가 가질 수 없는 모드형상의 잡음은 사라지게 되어 해결이 가능하다. Proper Orthogonal Decomposition(POD)으로 구조물의 동적응답의 모드형상과 잡음의 모드형상을 비교한 결과 백색잡음의 경우 모드형상을 가지고 있지 않지만 재구성된 변위에 포함된 잡음의 경우 구조물의 모드형상과 동일한 모드형상을 가지고 있는 것을 확인 할 수 있다. 즉 모드형상에 포함되어 있지 않은 잡음성분들은 모두 억제가 되는 것을 확인 가능하다.

* 서울대학교 건설환경공학부 석사과정 (E-mail: sbjeon11@snu.ac.kr)

** 서울대학교 건설환경종합연구소, 공학박사 (E-mail: kypark03@snu.ac.kr)

*** 정희원 · 서울대학교 건설환경공학부 교수, 공학박사 (E-mail: chslee@snu.ac.kr)

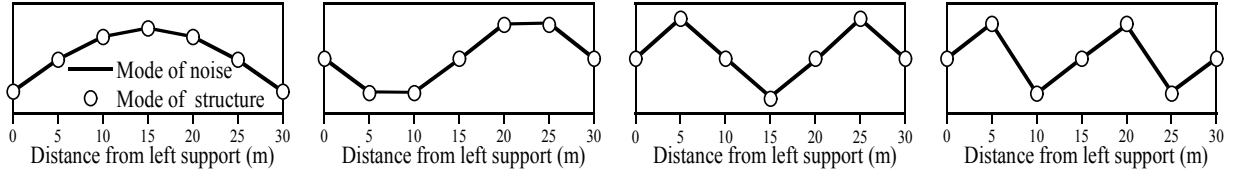


그림 2. 구조물과 변위재구성기법을 통과한 잡음의 POD비교

지점조건으로 잡음이 억제된 공간방향과는 다르게 시간방향 잡음은 제어되지 않고 남아 있기 때문에 변위의 시계열 방향으로 잡음이 남아있다. 따라서 변위를 수치미분을 통해서 속도와 가속도를 계산하게 되면 고주파 성분이 증폭하게 되어 결과 값을 사용할 수 없게 된다. 변위를 수치미분 할 때 증폭되는 고주파성분을 박광연이 제안한 시간필터로 억제하여 문제점을 해결 할 수 있다.

$$Min \Pi(w) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\hat{w}_i - \tilde{w}_i)^2 dt + \frac{\lambda \Delta t^4}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d^2 \hat{w}_i}{dt^2} \right)^2 dt \quad (2)$$

여기서 \hat{w}_i , β , t_1 , t_2 는 각각 잡음이 제거된 i 번째 자유도의 변위, 정규화 계수, 시간창의 시작과 끝 시간을 의미 한다. 식 (2)를 사용하여 시계열의 잡음이 억제된 변위에서 속도를 계산 할 수 있으며 가속도는 속도를 중앙차분법으로 한번 미분을 하여 계산을 한다.

3. 예제

그림1의 2경간 연속보의 강성과 단위길이 질량밀도는 각각 $6.02 \times 10^{10} \text{ Nm}^2$ 과 1500 kg/m 이며 중립축과 전체 길이는 각각 1 m 와 80 m 이다. 변형도의 측정점의 개수는 총 9개로 설정하고 하중은 조화하중으로 왼쪽 경간의 중앙에 $2.1\sin(\pi t) + 1.2\sin(3.8\pi t) + \sin(9.6\pi t) \text{ kN}$ 을 가진시킨다. 감쇠율은 0.1%이며 측정 잡음은 신호대비 상대오차와 신호 절대값의 평균대비 절대오차를 같은 비율로 섞어 5%를 적용하였다.

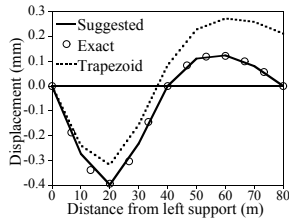


그림 3. 교량 공간방향 변위 (3.7초)

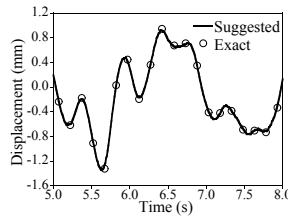


그림 4. 교량 중앙의 시간방향 변위

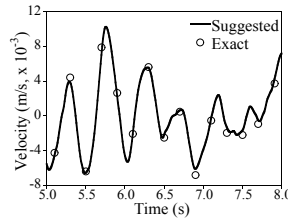


그림 5. 교량 중앙의 시간방향 속도

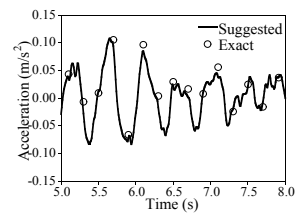


그림 6. 교량 중앙의 시간방향 가속도

4. 결론

본 연구에서는 변형도-변위 관계와 변위-속도-가속도 관계를 이용하여 측정 변형도로 변위, 속도, 가속도를 재구성하는 방법을 제시한다. 변형도-변위 관계식에 지점조건이 있어 변형도 적분시 저주파잡음이 억제되며, 기 개발된 시간필터로 변위 미분시 고주파잡음을 억제하여 변위, 속도, 가속도 재구성을 할 수 있다.

참고문헌

1. Fodd, G., Haugse, E., "Using modal test results to develop strain to displacement transformations", Proceedings of the 13th Int. Modal Analysis Conf (1995)
2. Soojin Cho, Chung-Bang Yun, Sung-Han Sim, "Displacement estimation of bridge structures using data fusion of acceleration and strain measurement incorporating finite element model", Smart Structures and System, Vol. 15, No. 3 (2015) 645-663
3. Park K Y, "Acceleration-Energy Filter and Bias Compensation for Stabilizing Equation Error Estimator in Inverse Analysis Using Dynamic Displacement", Ph. D thesis, Seoul National University, Korea, 2015.8