

# 기초의 부등 침하 최소화를 위한 최적 말뚝 배치

## Optimal Pile Placement for Minimizing Differential Settlements in Piled Raft Foundations

김 경남\* 정 중기\*\* 오이 해성\*\*\*

### 1. 서론

현재 일반적인 군말뚝 설계에서 말뚝의 역할은 구조물 하중을 지지하기 위한 충분한 지지력을 확보하고, 절대 침하량을 허용 범위 한도까지 제한하는 것이다. 실제 구조물의 거동에 중요한 영향을 미칠 수 있는 부등 침하량은 절대 침하량을 제한함으로써 제한된다고 가정하였으나 실제로는 절대 침하량의 감소가 반드시 부등 침하량의 감소를 의미하는 것은 아니다. 부등 침하량은 구조물의 사용성을 저하시키고, 상부 구조물에는 휨 모멘트를 유발시켜 구조물에 손상을 줄 수 있다. 이 논문에서는 부등 침하량을 최소화하는 말뚝의 최적 위치를 찾는 최적 설계 방법을 제안했다. raft와 같은 2차원 평면 구조물에서는 부등 침하량이 작아질수록 기초의 처짐 곡면 형상이 평면을 이루어 곡면의 면적은 작아진다. 기초의 처짐 곡면이 이루는 면적을 목적 함수로 정하고, 목적 함수의 최소값을 구하기 위한 최적화 기법으로 Recursive Quadratic Programming(RQP)을 이용하였다. 예제를 통해 제안된 방법의 타당성을 검증했다.

### 2. 기초 구조물의 유한 요소 해석

Raft는 군말뚝 위에 설치 되어 상부 구조물로부터의 하중을 말뚝 전체에 분포 시키기 위하여 두께가 다른 쪽 치수에 비하여 매우 작기 때문에 판으로 이상화할 수 있다. Raft는 일반적으로 콘크리트로 시공되고 상부 구조물로부터의 하중을 각 말뚝에 균등하게 분산시켜야 하므로 판의 두께가 상당히 두껍다. 판의 두께가 두꺼우므로 Mindlin 판이론을 적용하여 2차원 유한요소로 나타내고, 말뚝은 판을 지지하는 스프링으로 모델링하였다. 지반의 강성은 무시 하였으며, 말뚝의 강성은 Randolph와 Wroth가 제안한 방법으로 구하였다.[1][2] Raft와 말뚝으로 구성된 기초 구조물의 강성도 방정식은 유한요소법을 이용하여 다음과 같이 주어진다.

$$(K_r + T^T K_p T)(\Delta) = f \quad (1)$$

여기서,  $(\Delta)$ 과  $f$ 는 유한요소 모델의 각 절점에서의 절점 변위 벡터와 하중 벡터이고  $K_r$ 와  $K_p$ 는 raft와 말뚝의 강성도 행렬이고,  $T$ 는 말뚝의 변위를 유한요소 모델의 절점 변위로 표시하기 위한 변환 행렬이다.

말뚝의 강성을 구할 때, 지반에 의한 말뚝 사이의 상호 작용을 고려하는 경우는 군말뚝

\* 서울 대학교 토목 공학과 석사 과정

\*\* 서울 대학교 토목 공학과 부교수

\*\*\* 서울 대학교 토목 공학과 조교수

해석 방법을 이용하고, 고려하지 않는 경우는 단말뚝 해석 방법을 이용한다. 단말뚝 해석에서는 사용되는 말뚝의 강성을 Randolph 와 Wroth(1978)가 제안한 다음의 식으로 구한다.[2]

$$K_p = G_s r_0 \left( \frac{4}{1-\nu_s} + \frac{2\pi l \tanh(b)}{r_0 b \ln(r_m/r_0)} \right) \left( 1 + \frac{4l \tanh(b)}{r_0 b (1-\nu_s) \pi (E_p/G_s)} \right)^{-1} \quad (2)$$

$$b = \sqrt{2(l/r_0)^2 / (\ln(r_m/r_0) \times E_p/G_s)}, \quad r_m = 2.5l(1-\nu_s)$$

여기서,  $\nu_s$  와  $G_s$  는 지반의 포아송 비와 전단 강성이고,  $l$  과  $r_0$  는 말뚝의 길이와 반경을 나타낸다.

군말뚝 해석에서는 Randolph 와 Wroth(1979)가 제안한 근사적 탄성 해법의 중첩 원리를 이용하여 말뚝의 강성을 구한다. [1]

### 3. 최적화 (Optimization)

raft 와 같은 2 차원 평면 구조물에서는 부등 침하량이 작아질수록 처짐 곡면의 형상이 평면을 이루어 처짐 곡면의 면적(A)이 작아지므로 목적 함수로서 곡면의 면적을 이용한다.

$$A = \int_A \sqrt{1 + \|\nabla w\|^2} dA \quad (3)$$

계산상 편의를 위해 식(3)을 다음과 같이 간편화하여서 목적 함수로 사용한다.

$$\text{Minimize } \Pi = \frac{1}{2} \int_A \|\nabla w\|^2 dA \quad \text{subject to } \mathbf{R}(\mathbf{D}) \leq 0 \quad (4)$$

여기서,  $w$  와  $\mathbf{D}$  는 각각 raft 의 처짐 함수와 말뚝 위치를 나타내는 설계 변수 벡터이고,  $\mathbf{R}$  은 말뚝 위치가 기초를 벗어나지 못하게 하는 말뚝 위치에 대한 구속 조건의 벡터로서 판의 형상에 따라 선형이거나 비선형이다.

유효 구속 조건법(active set method)을 이용한 Recursive quadratic programming(RQP)에서 선형화된 비선형 구속 조건을 가지는 다음의 quadratic subproblem 을 반복적으로 풀어서 식(4)를 최적화한다.

$$\text{Minimize } \nabla_D \Pi^{m-1} \cdot \mathbf{d}^m + \frac{1}{2} \mathbf{d}^m \cdot \mathbf{H}^{m-1} \cdot \mathbf{d}^m \quad \text{subject to } \mathbf{R}_a^{m-1} + \nabla_D \mathbf{R}_a^{m-1} \cdot \mathbf{d}^m = 0 \quad (5)$$

여기서,  $m$  은 반복 횟수(iteration count),  $\mathbf{H}^{m-1}$ ,  $\mathbf{d}^m$ ,  $\nabla_D$  과  $\mathbf{R}_a$  는 각각 설계 변수에 대한 헤시안(hessian matrix), 방향 벡터(direction vector), 그래디언트 연산자(gradient operator)와 유효 구속 조건(active constraints)을 나타낸다.

유효 구속 조건 집합은 Fletcher 의 active set algorithm 에 의해 결정된다. 식(5)에서 목적 함수의 헤시안을 계산상 편의를 위해 Gauss-Newton hessian 으로 근사한다.

$$\mathbf{H}^{m-1} = \sum_{i=1}^{n_c} \nabla_D (\mathbf{u}_i^{m-1}) \cdot \mathbf{M} \cdot \nabla_D (\mathbf{u}_i^{m-1}) \quad (6)$$

quadratic subproblem 인 식(5)에 대한 1 차 필요 조건은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{m-1} \cdot \mathbf{d}^m + \lambda^m \cdot \nabla_D \mathbf{R}_a^{m-1} &= -\nabla_D \Pi^{m-1} \\ \nabla_D \mathbf{R}_a^{m-1} \cdot \mathbf{d}^m &= -\mathbf{R}_a^{m-1} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서  $\lambda^m$  은  $m$  번째 반복 단계에서 라그랑지안 계수 벡터이다.

설계 변수에 대한 변위의 1차 민감도는 식(1)을 설계 변수에 대해 직접 미분하여 다음과 같이 구한다.

$$\frac{\partial(\Delta'')}{\partial \mathbf{D}} = -(\mathbf{K}_r + \mathbf{T}^T \mathbf{K}_p \mathbf{T})^{-1} \frac{\partial(\mathbf{T}^T \mathbf{K}_p \mathbf{T})}{\partial \mathbf{D}} (\Delta'') \quad (8)$$

헤시안을 근사함으로써 발생하는 느린 수렴성과 불안정성을 해결하기 위한 방법으로 golden section 기법에 기초한 최적화 기법인 line search 방법을 사용한다

$$\text{Minimize } \Pi(\mathbf{D}^{m-1} + \theta \mathbf{d}^m) \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (9)$$

여기서  $\theta$ 는 line search의 step length를 나타낸다.  $m$ 번째 반복 단계에서 식(4)의 해는 다음과 같다.

$$\mathbf{D}^m = \mathbf{D}^{m-1} + \theta \mathbf{d}^m \quad (10)$$

#### 4. 예제

raft는 두께가 1m이고, 탄성 계수와 포아송 비는 각각  $2.1 \times 10^6 (\text{ton}/\text{m}^2)$ , 0.2이고, 직판의 전단 강성과 포아송 비는 각각  $250 \text{ ton}/\text{m}^2$ , 0.4이다. 25개의 말뚝을 사용하였고, 각 말뚝은 직경과 길이가 각각 40cm, 8m이고 탄성 계수는  $2.1 \times 10^6 (\text{ton}/\text{m}^2)$ 이다. 기초의 가장자리에서 5.45m 떨어진 위치에 선하중이  $17.60 \text{ ton}/\text{m}$  작용하고, 지중은  $2.0 \text{ ton}/\text{m}^2$ 이다. raft는 Q8 등매개 유한요소 121개로 모델링하였고 말뚝은 기초를 지지하는 스프링으로 모델링하였다. 말뚝의 강성을 각각 단말뚝 해석 방법과 군말뚝 해석 방법으로 구하여 그 결과를 비교하였다.

부등 침하량이 최소가 되는 말뚝의 최적 위치는 그림 1에 나타내었다. 그림 2와 표 1에서 제시했듯이 선하중 세하 면(A-A'면)에서 단말뚝 해석 방법으로 말뚝 강성을 구한 경우에는 최적화 후 부등 침하량은 최적화 전의 1%이고 군말뚝 해석 방법으로 말뚝 강성을 구한 경우에는 최적화 후 부등 침하량은 최적화 전의 12.6%이다. 기초 전체에서는 각각 2%, 11%로 최적화 후 부등 침하량이 최적화 전보다 크게 감소하였다. 표 2에 최대 휨 모멘트의 절대값을 나타내었다. 최적화 후 말뚝의 위치에서 휨 모멘트는 최적화 전보다 3분의 1 수준으로 감소하였다.

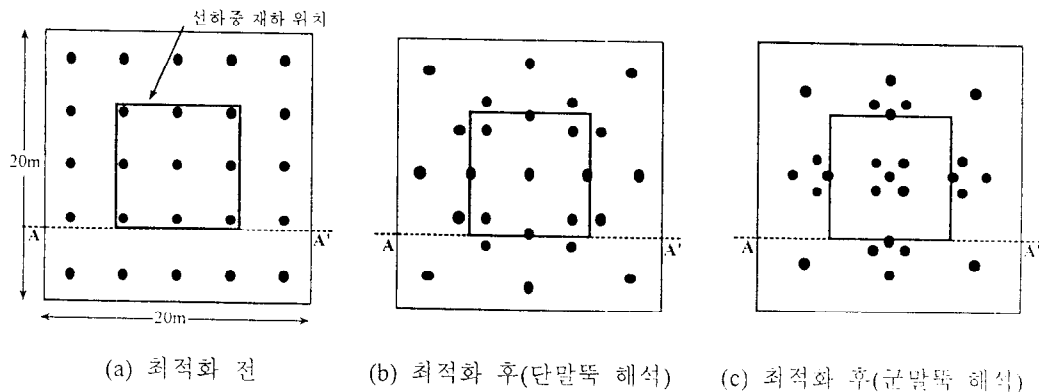
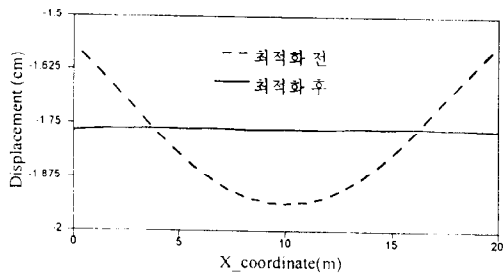
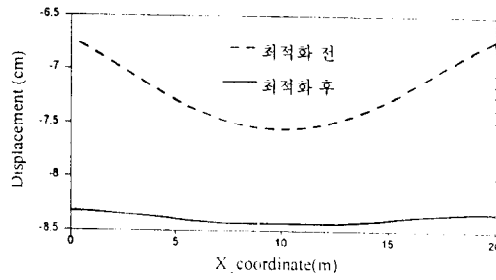


그림 1. 말뚝 배치 상태



(a)단말뚝 해석



(b)균말뚝 해석

그림 2. 변위 형상(A-A' 단면)

표 1. 부등 침하

(단위 : cm)

	단말뚝 해석		균말뚝 해석	
	최적화 전	최적화 후	최적화 전	최적화 후
A-A'단면 최대 변위차	0.367	0.004	0.834	0.105
기초 전체 최대 변위차	0.675	0.013	1.514	0.170

표 2. 최대 휨 모멘트의 절대값

(단위 : ton-m / m)

	단말뚝 해석		균말뚝 해석	
	최적화 전	최적화 후	최적화 전	최적화 후
$M_{xx}$	23.3	7.2	47.7	17.0
$M_{yy}$	23.3	7.2	47.7	17.0

## 5. 결론

raft와 같은 2차원 평면 구조물에서는 부등 침하량이 작아질수록 처짐 곡면의 형상이 평편을 이루어 처짐 곡면의 면적이 작아진다. 기초의 처짐 곡면을 목적 함수로 정하여 말뚝의 최적 위치를 결정하는 부등 침하 최적화 방법을 제안하였다. 제안된 방법은 부등 침하량을 감소시켜 구조물의 사용성을 증진 시키고, 부등 침하에 의해서 상부 구조물에 유발되는 휨 모멘트를 줄여서 구조물 손상을 줄일수 있다.

### [참고 문헌]

- [1] M.F.Randolph and C.P.Wroth, "An analysis of the vertical deformation of pile groups", Geotechnique 29, No.4, 1979, P423-439
- [2] Mark F. Randolph and C. Peter Wroth, "Analysis of Deformation of Vertically Loaded Piles", Journal of the geotechnical Engineering Division, December, 1978, P1465-1488
- [3] M.F. Randolph, "Design Methods for pile Groups and piled rafts", Int. Conf. On Soil Mech. And Found. Eng. 1994, P61-82
- [4] Luenberger, D.G., In Linear and Nonlinear Programming, Addison-Wesley Publishing Co., 1989

1. 서

말뚝  
공식으  
로 부  
각한지  
이적 후  
계측에  
따라  
해버려  
하디언  
값과 비  
역 모

2. PH

2.1 PI

PH  
말뚝의  
내진설  
비로서  
없으며  
있다.

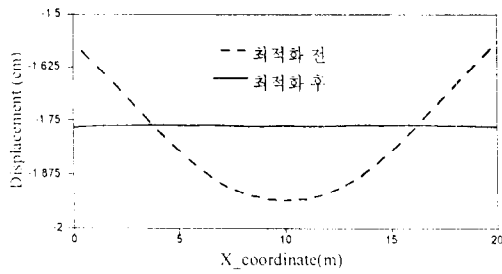
과

P

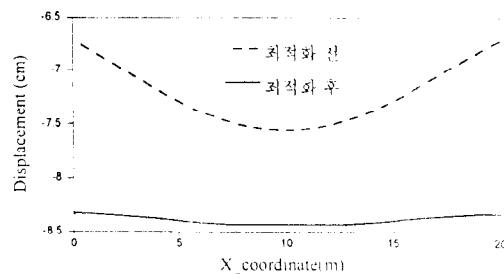
2.2 후

분  
사  
정

조  
조  
조



(a)단말뚝 해석



(b)군말뚝 해석

그림 2. 변위 형상(A-A' 단면)

표 1. 부등 침하

(단위 : cm)

	단말뚝 해석		군말뚝 해석	
	최적화 전	최적화 후	최적화 전	최적화 후
A-A'단면 최대 변위차	0.367	0.004	0.834	0.105
기초 전체 최대 변위차	0.675	0.013	1.514	0.170

표 2. 최대 휨 모멘트의 절대값

(단위 : ton-m<sup>2</sup>/m)

	단말뚝 해석		군말뚝 해석	
	최적화 전	최적화 후	최적화 전	최적화 후
$M_{xx}$	23.3	7.2	47.7	17.0
$M_{yy}$	23.3	7.2	47.7	17.0

## 5. 결론

raft와 같은 2차원 평면 구조물에서는 부등 침하량이 작아질수록 처짐 곡면의 형상이 평면을 이루어 처짐 곡면의 면적이 작아진다. 기초의 처짐 곡면을 목적 함수로 정하여 말뚝의 최적 위치를 결정하는 부등 침하 최적화 방법을 제안하였다. 제안된 방법은 부등 침하량을 감소 시켜 구조물의 사용성을 증진 시키고, 부등 침하에 의해서 상부 구조물에 유발되는 휨 모멘트를 줄여서 구조물 손상을 줄일수 있다.

### [참고 문헌]

- [1] M.F.Randolph and C.P.Wroth, "An analysis of the vertical deformation of pile groups", Geotechnique 29, No.4, 1979, P423-439
- [2] Mark F. Randolph and C. Peter Wroth, "Analysis of Deformation of Vertically Loaded Piles", Journal of the geotechnical Engineering Division, December, 1978, P1465-1488
- [3] M.F. Randolph, "Design Methods for pile Groups and piled rafts", Int. Conf. On Soil Mech. And Found. Eng, 1994, P61-82
- [4] Luenberger, D.G., In Linear and Nonlinear Programming, Addison-Wesley Publishing Co., 1989