정규화를 이용한 정적측정 변위에 대한 Parameter Estimation 기법

장승필*,°여인호**,신수봉***, 이해성****

1. 서론

지금까지 구조물의 System Identification 과 손상진단 과정에서 output error estimator 가 parameter estimator 로써 주로 사용되어왔다. Output error estimator 는 측정변위와 구조물의 수학적 모델의 계산변위 사이의 차를 최소하는 Least Squared Collocation 법을 이용하여 구조물의 부재특성을 추정하는 방법이다. 일반적으로 토목 구조물의 변위는 전 자유도에서 측정될 수 없다. 또한 측정된 변위에는 측정하는 사람의 개인적 특성이나 측정기기의 특성등에 의해 오차가 포함되기 마련이다. Parameter estimator 를 System Identification 과 구조물 손상진단에 적용하기 위해서는 이러한 정보의 부족과 측정정보에 포함되는 오차의 영향을 고려하여야 한다. 이러한 영향을 고려하기 위하여 수치적 simulation 법이 제안되었다 [1]. 그런데, output error estimator 는 Least Squared Collocation 에 적용하기 위하여 미지의 부재특성으로부터 측정자유도에서의 계산변위를 구해야 하는 역해석 문제가 된다. 그리고, 측정정보에 오차가 포함되면 그 역해석 문제는 해가 존재하지 않거나, 여러 개의 해가 존재할 수 있다는 ill-posed 특성을 갖게 된다 [2]. 특히 현재와 같은 구조역학의 문제에서는 측정정보에 포함된 오차의 영향으로 해가 존재하는 구간이 매우 평평해 질 수 있다. 지금까지의 output error estimator 에서는 목적함수의 해가 존재하는 공간을 축소하는 방법으로 역해석 문제의 ill-posed 특성을 해결하려 하였다. 그러나 이러한 방법으로는 ill-posed 특성을 해결할 수 없고 이것을 해결하기 위해서는 정규화 기법이 적용되어야 한다는 것이 밝혀졌다[3]. 이 연구에서는 기존의 output error estimator 에 정규화를 적용하는 Regularized estimator 를 제안하고, 예제를 통해 제안된 estimator 의 거동을 파악하고, 앞으로 System Identification 과 손상진단에 적용되어 향상된 결과를 제공할 수 있음을 보인다.

2. 제안된 목적함수

이 연구에서 제안되는 미지의 변수인 구조물의 부재특성을 구하기 위한 비선형 최적화문제는 다음과 같다.

$$\text{minimize} \quad \Pi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\sum_{ilc=1}^{nlc}\alpha_{ilc}\left\|\mathbf{u}_{ilc} - \hat{\mathbf{u}}_{ilc}\right\|^2 + \beta \mathbf{f}_r(\mathbf{x}) \qquad (1)$$

$$\text{subject to} \quad \underline{x} \le x \le \overline{x}$$

여기서, nlc, α_{ilc}, $\overline{x}$, 와 $\underline{x}$ 는 각각 채택된 load case 의 수, 하중 case 에 대한 가중치, 그리고 파라미터의 공간을 제한하는 미지 설계변수의 상.하한 값이다. 그리고, 첫번째 항은 기존의 output error estimator 의 목적함수와 동일한데, $\mathbf{u}$ 와 $\hat{\mathbf{u}}$ 는 각각, 구조물의 수학적모델에서 계산된 측정자유도에서의 변위와 오차를 포함하는 실제 측정변위이다. 두번째 항은 이 연구에서 제안되는 정규화 항인데, β 는 정규화 계수이고, $\mathbf{f}_r$ 은 정규화 함수이다. 정규화 계수란 식(2)에서 보듯이 목적함수에 기여하는 오차함수와 정규화 함수의 기여율을 나타내는 계수이다. 이 정규화 계수를 결정하는 방법에는 Generalized cross-validation 과 L-curve method 등의 방법이 있는데, 이 연구에서 적용된 방법은 L-curve method 를 변형시킨 것으로 정규화 함수의 norm 이 error function 의 norm 보다 항상 작아지도록 최적화 과정의 각 iteration 마다 수정되는 정규화 계수가 선택된다.

$\mathbf{f}_r$ 는 정규화 함수를 나타내는데, 이 연구에서는 다음과 같은 Frobenius Norm 을 사용한다.

* 서울대학교 토목공학과 교수 ** 서울대학교 토목공학과 교량연구실 연구원
*** 동아대학교 토목공학과 전임강사 ****서울대학교 토목공학과 조교수

$$f_r(x) = \|K^k - K^0\|^2 = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(K_{ij}^k - K_{ij}^0)}\right)^2 \quad (2)$$

여기서, K^k, K^0은 각각 k 번째 비선형 최적화 단계에서의 강도행렬, baseline value 에 의한 초기 강도 행렬이다. 이것은 목적함수를 최소화 하는 파라미터를 추정할 때 baseline value 에서부터의 거리가 가장 가까운 공간에서 파라미터를 찾겠다는 의미이고, 이 항이 더해져 최적화 문제에서 파라미터의 상한치를 제한하는 upper constraint 가 필요 없어진다. Regularized estimator 에서는 파라미터의 상한치는 제한하지 않더라도 항상 유일하게 수렴하는 해를 구할 수 있다. 다만, 최적화 과정에서 필요한 목적함수의 Hessian 이 singular 가 되는 것을 방지하기 위해 하한치는 제한할 필요가 있다. 이 연구에서는 0.01 을 택하였다.

Constraint nonlinear optimization problem 을 풀기위해서 Fletcher active set strategy 와 Recursive quadratic programming 이 채용되었다.

3. Monte Carlo Trials

아무리 측정기기의 성능이 발달한다 하더라도 측정정보는 항상 noise 를 포함할 수 밖에 없으므로, System Identification 과 손상진단에서는 noise 의 영향을 고려할 수 있어야 한다. 자연상태에서 발생하는 noise 는 무작위로 발생한다고 간주할 수 있다. 또 어떤 주어진 측정정보가 무작위 분포를 갖는다면 그 측정정보에 의해 추정되는 파라미터도 무작위 분포를 갖게된다. 따라서 이러한 무작위 분포인 noise 의 영향을 고려하면서 부재특성을 파악하기 위해 통계학적 처리가 요구된다[1]. 제안된 알고리듬을 실제 적용하기에 앞서 수치적으로 발생된 측정정보를 이용하는 Monte Carlo simulation 기법이 적용된다. 반복되는 Monte Carlo trial 의 횟수가 많을수록 안정된 값을 주지만, 무한히 반복할 수는 없으므로 효율적인 계산수행과 수렴되는 해의 안정성을 고려하여 이 연구에서는 30 회의 Monte Carlo trial 를 선택한다.

4. 예제

예제 구조물인 2 차원 트러스가 그림 1 에 주어져 있다. 총 4 개의 서로 다른 단면을 갖는 25 개의 부재로 구성되고, 총 21 개의 자유도를 갖는다. 부재의 단면적이 표 1 에 제시되어 있다. noise 의 영향에 따른 추정치의 변화를 보기 위해 선택된 측정변위는 그림 2 에서 보는 바와 같이 7 개 자유도 이고, 예제에 적용된 하중 case 는 그림 3 에 주어진 3 가지이다.

Young 계수는 모든 부재에 대해 일정한 것으로 가정되었고, 추정되어야 하는 파라미터는 부재의 단면적으로 하였고 채용된 설계변수는 상현재, 하현재, 수직재, 그리고 사재의 단면적등 4 개이다. 이 예제에서는 regularized estimator 를 사용하는 경우에 측정자유도의 희소성과 noise 의 크기의 영향을 조사하였다.

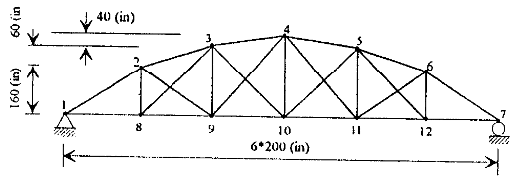


그림 1. 예제구조물

표 1. 부재 단면적

부재	단면적 (in^2)
상현재	18
하현재	15
수직재	10
사재	12

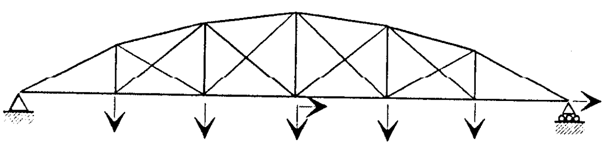


그림 2 측정자유도

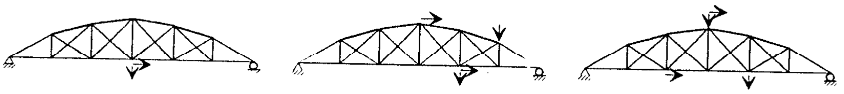


그림 3 load cases

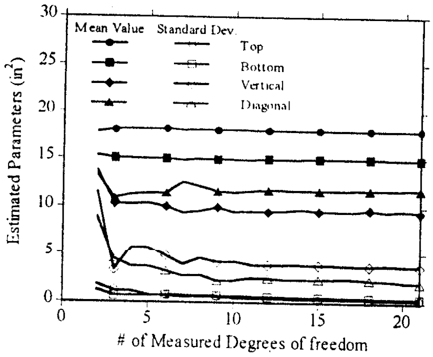


그림 4 측정자유도 개수에 따른 추정치

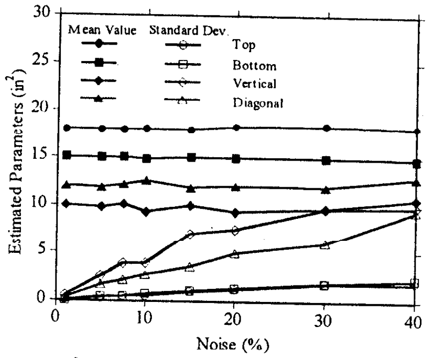
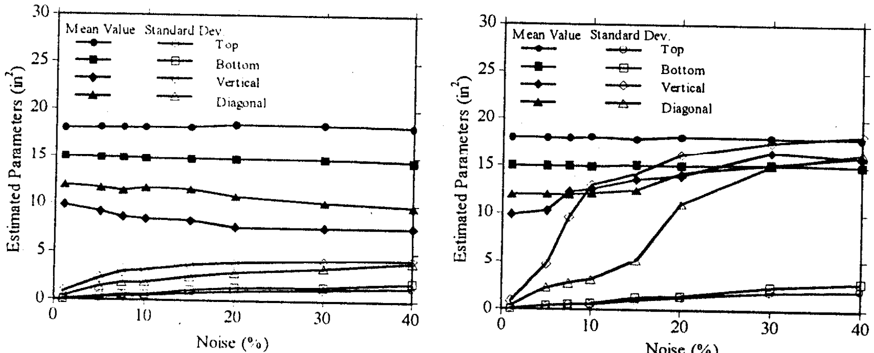


그림 5 Regularized estimator 에 의한 오차에 따른 추정치와 표준편차

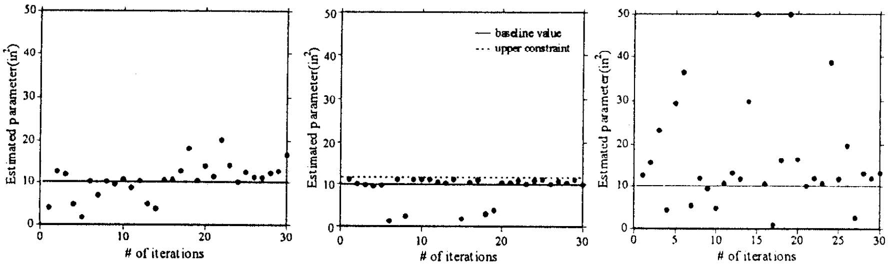


a) $\bar{\mathbf{x}} = 1.1\mathbf{x}$ b) $\bar{\mathbf{x}} = 5\mathbf{x}$

그림 6 Output error estimator 에 의한 오차에 따른 추정치와 표준편차

그림 4 는 Regularized estimator 에 의한 측정자유도의 개수에 따른 30 회 Monte Carlo trial 의 추정치 평균과 표준편차를 나타낸다. 여기서 가정된 noise 는 측정변위의 10%의 amplitude 를 갖는 proportional noise 이다. 이 예제에서는 하중 case 가 3 개이기 때문에 측정자유도가 2 개 이상이면 설계변수를 추정할 수 있다[4]. 그림 4 에서 전자유도를 측정하지 않더라도 믿을 수 있는 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 측정자유도가 많아질수록 추정치의 표준편차가 작아져 좀 더 안정된 값을 얻을 수 있음을 알 수 있다. 그림 5 와 그림 6 은 각각 noise 의 크기에 따른 추정치와 표준편차의 변화를 정규화를 사용하는 경우와 output error estimator 를 사용하는 경우에 대해 나타낸 것이다. 그림 5 에서 정규화를 사용하는 경우는 오차에 큰 관계없이 모든 부재의 단면적을 잘 추정하고 있슴을 알 수 있다. 오차가 증가할수록 표준편차는 커진다. 반면 그림 6 (a)와 그림 6 (b)는 각각 파라미터의 상한치가 참값의 1.1 배와 5 배일 때의 output error estimator 에 의한 추정치와 표준편차인데, 그림에서 수직재와 사재의 경우 상한치의 영향을 크게 받고 있슴을 알 수 있다. 즉 상한치가 1.1 배인 경우에는 오차가 커짐에 따라 수직재와 사재의 추

정치가 감소하고, 상한치가 5 배인 경우에는 반대로 추정치가 오차에 따라 급격히 증가함을 보여준다. 이것은 output error estimator 를 이용하는 경우에는 추정되는 파라미터가 목적함수의 최소값에서 수렴하는 것이 아니고, 최소값을 찾아가는 도중 상한 constraint 에 닿는 종료 조건을 만족하기 때문이다. 이것은 그림 7 에서 잘 보여준다. 그림 7 은 수직재의 단면적이 각 Monte Carlo trial 에서 추정된 값들을 나타낸다. 그림 7(a)에서 제안된 estimator 를 사용하는 경우에는 추정된 단면적이 baseline value 를 중심으로 균등한 분포로 추정되는 것을 알 수있다. 그림 7(b)와 (c)로부터 output error estimator 를 사용하는 경우에는 상한치를 크게하더라도 상한치에 도달하는 파라미더 값이 존재하고, 그러한 경우의 목적함수는 해의 근처에서 매우 평평한 형상을 갖으리라는 것을 알 수 있다.



a) Regularized estimator b) Oee ($\bar{\mathbf{x}} = 1.1\mathbf{x}$) c) Oee($\bar{\mathbf{x}} = 5\mathbf{x}$)

그림 7 각 Monte Carlo trial 에서 수직재 추정치의 분포

5. 결론

구조물의 System Identification 과 손상진단의 parameter estimator 로 널리 사용되어온 output error estimator 는 inverse analysis 의 ill-posed 특성을 무시하고 있다. 이것을 해결하기 위해 Tikhonov 에 의해 제안된 Regularization 기법을 적용하여 Regularized estimator 를 제안하였다. 예제를 통하여 제안된 estimator 가 구조물의 측정정보가 전자유도에서 얻어지지 않더라도 믿을 수 있는 결과를 준다는 것을 보였고, 측정정보에 noise 가 포함되더라도 noise 의 크기에 관계없이 부재특성의 참값을 일정하게 추정하는 것을 보였다. 반면에 기존의 Output error estimator 는 부재특성을 구하기 위한 최적화 문제를 풀 때 부과되는 상한치의 영향을 크게 받는 추정치를 산출한다는 것을 알았다. 적당한 상한치를 채택한다면 output error estimator 에 의해서도 참값에 잘 부합하는 추정치를 얻을 수는 있다. 그러나 적당한 상한치를 객관적으로 설정하기 어렵고, 구조물마다, 또 noise 의 크기에 따라 달라지므로 output error estimator 에 의해서는 좋은 결과를 얻기 힘들다. 측정자유도의 개수가 제한되고, noise 가 포함되는 측정정보로부터 구조물의 손상을 진단하기 위해서는 통계적 방법이 적용되어야 하는데, output error estimator 에 의해서는 상한치의 영향으로 이 방법을 적용하기 힘들다. 그러므로 구조물의 System Identification 과 손상진단을 위해서는 안정적인 결과를 주고, noise 의 영향을 고르게 반영할 수 있도록 구조물의 Parameter estimator 에 정규화 기법이 적용되어야 한다.

REFERENCES

1. Shin, Soobong. (1994) Damage detection and assessment of structural systems form measured response, Ph. D. thesis, The Univ. of Illinois at Urbana-Champaign.
2. Antoninette M. Maniatty, Nicholas J. Zabaras, "Inverstigation of regularization parameters and error estimating in inverse elastic problems" Int. J. for Numerical Method in Engineering. Vol. 37, 1039-1052(1994)
3. Shlomo P. Neumann, Sidney Yakowitz, "A statistical approach to the inverse problem of aquifer hydrology I. Theory", Water Resources Research. Vol. 15, No. 4, 845-859(1979)
4. R. Banan, M. R. Banan, and K. D. Hjelmstad (1994), "Parameter estimation of structure from static response," J. of Structural Engineering, Vol 120, No. 11, November, 3243-3283