PP-TSVD에 의한 유한체 내부영역의 물성치 결정을 위한 시스템확인기법

System Identification for Determining Material Properties of an Inclusion in a finite body using PP-TSVD

안병규* · **박현우**** · **이해성*****

Ahn, Byung Kyu · Park, Hyun Woo · Lee, Hae Sung

1. 서론

시스템확인기법에서 측정치의 빈곤함과 측정치오차에 의한 해의 비유일성과 불연속성을 극복하기 위해 사용되는 L_2 norm에 근거한 정규화 함수는 해가 부드러운 모양을 가질 때 효과적이라고 알려져 있다. 실제 시스템확인기법이 자주 활용되는 손상탐지문제에서 L_2 norm에 근거한 정규화 함수를 이용하는 경우 실제 손상이 가지고 있는 불연속적인 속성을 상실하기 쉬우므로 실제손상위치와 정도의 판단이 어려워질 수 있다. 이러한 기존 정규화 방법의 단점을 보완하여 측정치의 빈곤함과 오차에 의한 영향을 최소화하는 동시에 손상과 같이 해가 불연속성을 가지는 문제에서도 적용될 수 있는 PP-TSVD를 도입하였다. 제안된 시스템확인기법에서는 유한체 내부에 포함된 매우 이질적인 미지의 함유체의 위치를 PP-TSVD를 이용하여 추정하고 그 위치에 해당하는 물성치만을 시스템변수로 가정하여 기존의 시스템확인기법을 사용하여 그 값을 추정한다. 간략한 예제를 통해 제안된 방법의 타당성을 검증한다.

2. 오차함수와 TSVD

유한체의 시스템변수추정기법에서는 식 (1)과 같이 유한체의 외부 경계면에 위치한 측정점에서 측정된 변위와 계산된 변위의 최소 자승 오차를 최소화함으로써 유한체의 미지 시스템 변수를 추정한다.

$$\underset{\boldsymbol{\xi}}{\text{Minmize}}\, \pi_E = \frac{1}{2}\left\|\widetilde{\mathbf{U}}(\boldsymbol{\xi}) - \overline{\mathbf{U}}\right\|^2 \quad \text{subject to} \;\; \mathbf{R}(\boldsymbol{\xi}) \le 0 \tag{1}$$

여기서, $\widetilde{\mathbf{U}}$ 와 $\overline{\mathbf{U}}$ 는 각각 기준화된 계산 변위벡터와 측정 변위벡터를 각 하중단계에 대해 행방향으로 정렬

* 정회원 · 서울대학교 지구환경시스템공학부 석사과정 · 02-880-8740 (E-mail:bkahn96@snu.ac.kr)
** 정회원 · 서울대학교 지구환경시스템공학부 박사수료 · 공학석사 · 02-880-8740 (E-mail:hwpark91@snu.ac.kr)
*** 정회원 · 서울대학교 지구환경시스템공학부 부교수 · 공학박사 · 02-880-8740 (E-mail:chslee@plaza.snu.ac.kr)

함으로써 얻어진 벡터들이고, $\boldsymbol{\xi}$와 **R**은 기준화된 시스템 변수와 시스템 변수에 대한 구속조건이다. $\|\cdot\|$는 벡터의 Euclidean norm이다.

식 (1)은 시스템변수에 대한 비선형 최적화문제이므로 식(1)을 선형화 시킨 이차 종속문제에 대한 식(2)와 같은 일차 필요조건을 반복적으로 풀어서 최적해를 구하게 된다 .

$$\mathbf{S}^T\mathbf{U}^r + \mathbf{S}^T\mathbf{S}\Delta\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \tag{2}$$

여기서 S는 각 반복단계에서의 시스템변수에 대한 측정치의 민감도 행렬이고, $\Delta\xi$는 구속조건이 없는 상태에서 시스템변수의 증분이다. 헤시안은 계산상의 간편함을 위해서 Gauss-Newton 헤시안을 사용하였다.
식(1)은 측정치의 빈곤함에 의해서 해가 유일하지 않을 수 있고, 약간의 오차에 대해서도 추정된 해의 크기가 심하게 변하는 해의 불연속성을 갖는 문제이다 (Park and Lee, 2001). 이 논문에서는 측정치의 오차뿐만 아니라 독립적인 측정치의 개수가 시스템변수보다 작아짐으로써 생기는 해의 빈곤함까지 고려한다. 이러한 문제들에 대한 접근과 해결을 위해 식(2)의 민감도 행렬에 대한 SVD(Singular value decomposition)을 사용한다 (Hansen, 1998).

$$\mathbf{S} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{V}^T \tag{3}$$

여기서, **Z**는 $m\times n$ 직교행렬, **V**는 $n\times n$ 직교행렬, $\boldsymbol{\Omega} = diag(\omega_j)$ 이고, ω_j 는 **S**의 고유치(singular value)라고 한다. 단, $\omega_r = \omega_{\max} \geq \ldots \geq \omega_2 \geq \omega_1 = \omega_{\min} \geq 0$이고, r은 numerical rank이다. 측정치의 빈곤함 때문에 $r<n$인 경우가 발생하면 독립적인 측정치의 개수가 시스템변수의 개수보다 적게되는 rank-deficient문제가 된다. 이 문제를 해결하기 위해서는 TSVD(Truncated singular value decomposition)방법을 써서 확보된 rank에 대해서만 다음 식(4)와 같이 해를 구하게 된다 (Hansen, 1998).

$$\Delta\boldsymbol{\xi}^{TSVD} = \sum_{j=1}^{t} \mathbf{v}_j \omega_j^{-1} \mathbf{z}_j^T \mathbf{U}^r \tag{4}$$

여기서 t는 최적의 truncation number로 Tikhonov정규화 함수의 정규화계수와 같은 역할을 하고 정규화 계수를 결정하는 방법과 유사한 방법으로 결정할 수 있다..

3. PP -TSVD와 연산행렬 L

PP-TSVD는 TSVD와 L_1 norm에 기초를 두고 있다. TSVD를 통해 Tikhonov 정규화 방법과 같이 오차를 걸러내고 L_1 norm을 이용한 최적화를 통해 불연속적인 해를 판별한다 (Hansen and Mosegaard, 1996).

$$\min_{\Delta\boldsymbol{\xi}} \|\mathbf{L}\Delta\boldsymbol{\xi}\|_1 \qquad \text{subject to} \qquad \|\mathbf{S}_t\Delta\boldsymbol{\xi} - \mathbf{U}^r\|^2 = \text{minimum} \tag{5}$$

여기서 **L**은 시스템변수추정을 위해서 유한체 내부의 시스템변수 이산화과정에서 구성되는 연산행렬로써 PP-TSVD에서 TSVD의 truncation number와 더불어 PP-TSVD에서 매우 중요한 역할을 하게 된다.

식(5)의 연산행렬 **L**은 Total Variation(TV)을 이산화하여 구할 수 있다. (Hansen and Mosegaard, 1996). 그림 1은 유한체 내부에서 하나의 경계면을 공유하는 두개의 서로 다른 시스템변수 (ξ_j, $\xi_{j'}$)를 나타낸 것이다. Ω_j

는 j번째 시스템변수의 영역이고, Γ_k는 $\Omega_j, \Omega_{j'}$ 의 영역을 가지는 임의의 두 변수 사이의 공유경계면이다.

TV을 이산화시킨 후 시스템변수벡터로 표현하면 다음과 같다.

$$\min_{\xi}\int_{\Omega}\|\nabla\boldsymbol{\xi}\|d\Omega=\min_{\xi}\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega_j}\|\nabla\boldsymbol{\xi}\|\,d\Omega}_{0}+\min_{\xi}\sum_{k=1}^{n_b}\int_{\Gamma_k}\|\nabla\boldsymbol{\xi}\|\,d\Gamma=\min_{\xi}\sum_{k=1}^{n_b}\int_{\Gamma_k}\|\nabla\boldsymbol{\xi}\|\,d\Gamma \tag{6}$$

여기서 Ω는 유한체의 전영역을 나타내고, n_b는 임의의 서로 다른 두개의 시스템변수에 의해서 공유되는 공유경계면의 총개수이다. 각 변수의 영역에서 시스템변수는 일정하다고 가정했기 때문에 각 영역내에서의 TV는 0가 된다. 식 (6)은 각각의 공유경계면의 길이와 각 시스템변수의 증분의 차로 식 (7)과 같이 나타낼 수 있고 약간의 수치적조작을 통해서 구하고자하는 연산행렬 L을 얻을 수 있다.

$$\min_{\xi}\sum_{k=1}^{n_b}\int_{\Gamma_k}\|\nabla\boldsymbol{\xi}\|\,d\Gamma=\min_{\Delta\xi}\sum_{k=1}^{n_b}|\,\Delta\xi_{k_1}-\Delta\xi_{k_2}\,|\cdot l_k=\min_{\Delta\xi}\|\mathbf{L}\Delta\boldsymbol{\xi}\| \tag{7}$$

여기서 $\Delta\xi_{k1}$ 와 $\Delta\xi_{k2}$는 k번째 공유경계면을 공유하는 시스템변수의 증분을 나타내고, l_k는 k번째 공유경계면의 길이를 나타낸다.

4. 예제 및 결론

제안된 PP-TSVD 방법의 사용성을 검증하기 위하여 그림 2와 같이 2차원 평면응력상태에 있는 2차원 판 모델의 시스템 변수를 추정하였다. 그림 2의 평면응력 상태에 있는 정사각형판은 총 341개의 절점과 100개의 부재로 이루어져 있다. 이 정사각형판은 철(210GPa)로 이루어져 있고, 63, 64, 73, 74번 요소에 위치한 내부 함유체는 알루미늄(70GPa)으로 이루어져 있다고 가정하였다. 하중조건은 x방향과 y방향의 두 단계로 나누어 각각 1.8GPa의 인장응력을 가해주고, 측정치는 각 하중조건에 대하여 20개의 측정점, 총 40개의 측정점으로부터 5%의 측정오차를 가지는 80개의 자유도를 측정한 상황으로 모사하였다.

그림 3은 첫번째 반복단계에서 TSVD와 PP-TSVD에 의해서 각각 계산된 해의 증분을 기저값(baseline value)에 대해 기준화하여 나타냈다. TSVD와 PP-TSVD에서 사용된 truncation number는 GCV를 사용하여 구했다. 그림 3에서 TSVD의 경우 이질적인 함유체 위치에 해당하는 63, 64, 73, 74번 부재를 중심으로 증분해가 부드럽게 분포하므로 함유체 안팎의 경계에서 나타나는 물성치의 불연속적인 분포를 관찰할 수 없다. 반면에, PP-TSVD의 경우는 함유체 내부와 외부의 경계에 나타나는 물성치의 불연속적인 분포를 TSVD보다 명확하게 보여준다. 특히 그림 3에서 회색원 안에 들어있는 PP-TSVD 증분해들은 서로 이웃하면서 같은 값을 가지는 동시에 다른 요소들의 증분해와 비교했을 때 훨씬 떨어지는 같은 값을 가짐으로써, 이 증분해를 가지는 요소들의 위치에 이질적인 함유체가 위치하고 있음을 예상할 수 있다.

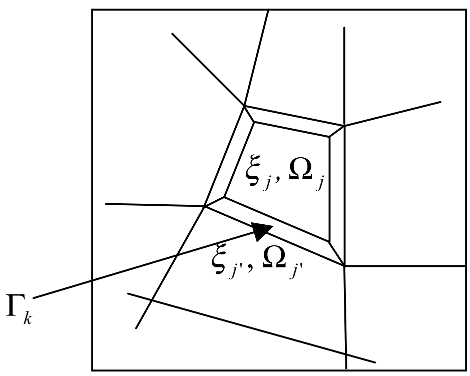
그림 4는 모든 요소의 물성치를 시스템 변수로 가정한 후 기존의 시스템변수추정법에 Tikhonov 정규화 방법을 적용하여 구한 영의 계수 값과, 그림 3의 회색원안의 증분해를 가지는 9개(62, 63, 64, 72, 73, 74, 82, 83, 84번)의 요소들만을 시스템변수로 놓고 기존의 시스템변수 추정법을 사용하여 구한 영의 계수 값을 비교한 것이다. 그림 4에서 점선으로 나타나는 영의 계수 값이 미지의 내부 함유체가 가지는 물성치의 정해이다. Tikhonov정규화를 적용한 기존의 시스템변수추정방법에서는 정규화에 의한 영향으로 추정된 함유체의 영의

계수값이 정해와 비교했을 때 많은 차이가 발생한 반면에, PP-TSVD에 의해서 선택된 9개의 요소들에 해당하는 영의 계수값만을 시스템변수로 놓고 추정한 경우 요소들중 실제 함유체가 위치하고 있는 63, 64, 73, 74번 4개의 요소만이 내부 함유체의 물성치에 가장 근접하는 값을 가진다. 이로부터 물성치를 이용하여 유한체 내부의 이질적인 함유체를 추정하는 문제를 제안된 방법을 이용하면 기존의 시스템확인 기법보다 적은 수의 시스템변수로 보다 정확하고 효율적으로 접근할 수 있다는 것을 알 수 있다.

참고문헌

1. H.W. Park, S.B. Shin, and H.S. Lee, (2001) Determination of an optimal regularization factor in system identification with Tikhonov function for linear elastic continua. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 51, No.10, pp.1211-1230
2. P.C. Hansen and K. Mosegaard, (1996) Piecewise polynomial solutions without a priori break points, *Numerical Linear Algebra with Applications*, Vol. 3(6), pp.513-524
3. P.C. Hansen, (1998) *Rank-deficient and Discrete Ill-Posed Problems, Numerical Aspects of Linear Inversion*,.SIAM : Philadelphia

.



$\xi_j = \xi_{k1}$, $\xi_{j'} = \xi_{k2}$

그림 1. 경계면을 가지는 두 유한요소

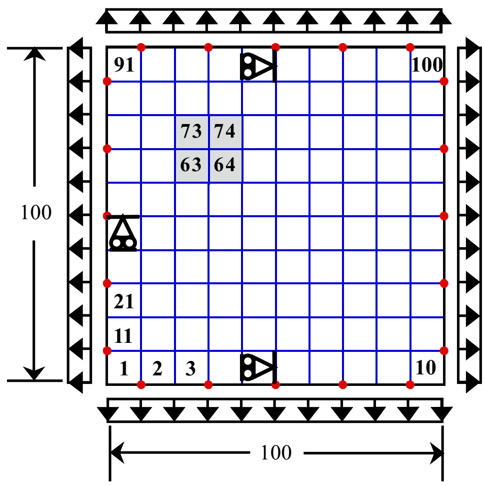


그림 2. 예제를 위한 유한요소모델

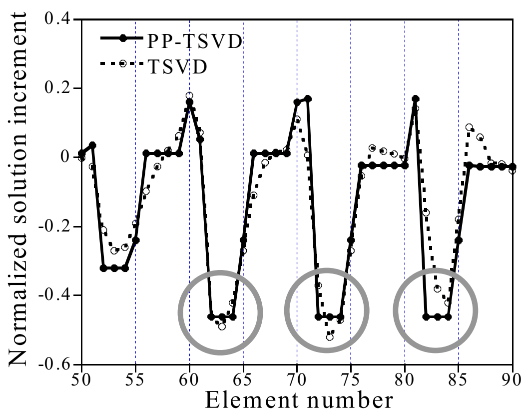


그림 3. PP-TSVD와 TSVD의 증분해

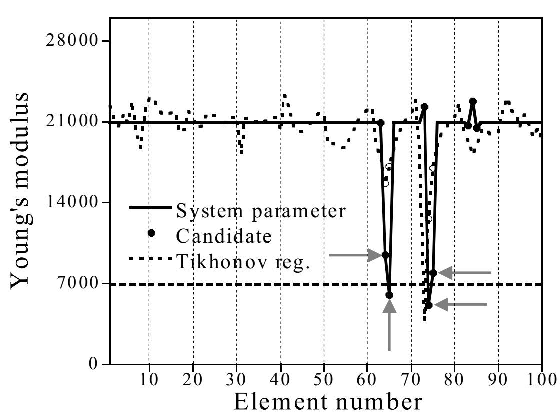


그림 4. PP-TSVD에 의해 선택된 후보 변수들의 추정결과