# 신경망 이론을 이용한 근사 최소자승 오차함수의 최적화를 통한 구조물 손상탐지

# Minimization of Truncated Least Square Error Function using Neural Network for Structural Damage Detection

고영곤* · 이해성**

Ko, Young Kon · Lee, Hae Sung

## 1. 서론

신경망을 통한 구조물의 손상탐지 기법 개발에 많은 연구들이 진행되어 오고 있다. 신경망의 가장 큰 장점은 훈련이 완료된 후, 미지의 입력값에 대한 해를 빠르고 정확하게 구할 수 있다는 점이다. 하지만, 일반적인 신경망 방법을 대형 토목구조물의 손상탐지 기법에 적용하기에는 방대한 훈련자료가 필요하기 때문에 대상부재를 한정해야 하는 문제가 발생하게 된다. 한정된 대상 부재를 통하여, 적절한 훈련자료 선택에 관한 연구가 현재 여러 가지로 진행되고 있다[2]. 이 연구에서는 대상부재를 한정하지 않고 모든 부재에 대한 손상정도를 구하기 위해 근사 최소자승 오차함수의 최적화 과정을 신경망에 적용하였다. 선형화된 수학적 모델의 학습 자료를 신경망의 입력값으로 사용하고, 연결강도를 부재 손상정도로 이용한다. 출력값인 변위를 목표값인 측정 변위를 비교하여 최소자승 오차함수를 정의한다[3]. 손상정도에 대한 오차함수의 최적화 과정을 통해 손상정도를 구하는데, 이 과정에서 신경망의 델타 학습법[1]을 이용하였다. 간략한 예제를 통하여 제안된 방법의 타당성을 검토한다.

## 2. 근사 최소자승 오차 함수

이 연구에서는 식 (1)과 같이 대상 구조물의 측정점에서 측정된 변위와 계산된 변위에 대한 최소 자승 오차함수가 목적함수로 정의된다[3].

$$\underset{\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{Min}}\ \Pi_E = \frac{1}{2}\left\| \tilde{\mathbf{U}}(\boldsymbol{\alpha}) - \overline{\mathbf{U}} \right\|^2 \tag{1}$$

여기서, $\tilde{\mathbf{U}}$ 와 $\overline{\mathbf{U}}$ 는 각각 계산 변위벡터와 측정 변위벡터를 각 하중단계에 대해 행방향으로 정렬함으로써

* 서울대학교 지구환경시스템공학부 석사과정 · 02-880-8740 (E-mail:ykko94@snu.ac.kr)
** 정회원 · 서울대학교 지구환경시스템공학부 부교수 · 공학박사 · 02-880-8388 (E-mail:chslee@plaza.snu.ac.kr)

얻어진 벡터들이고, $\alpha$는 부재 손상정도 이다. $\|\cdot\|$는 벡터의 Euclidean norm이다.

식(1)에서 계산된 변위 벡터는 식(2)의 수학적 모델을 선형화 하여 얻어지는데, 손상은 부재별 기준 강성값의 변화량으로 표현한다.

$$\mathbf{U}(X_i + \alpha_i X_i) = \mathbf{K}^{-1}(X_i + \alpha_i X_i)\mathbf{P} \tag{2}$$

여기서 $X_i$는 부재별 기준 강성 이고, $\alpha_i$는 부재별 기준 강성에 대한 변화량, 즉 손상정도를 나타낸다.

식(2)에서 강성도 행렬을 $\alpha_i$에 대하여 Taylor Expansion한 후, 이를 변위에 대해 표현하면 계산된 변위 벡터를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^{-1}(X_i + \alpha_i X_i) = \mathbf{K}^{-1}(X_i) + \sum_i \frac{\partial \mathbf{K}^{-1}}{\partial x_i}\alpha_i X_i + \frac{1}{2}\sum_j \sum_i \frac{\partial^2 \mathbf{K}^{-1}}{\partial x_j \partial x_i}\alpha_i \alpha_j X_i X_j + \\ \frac{1}{6}\sum_m \sum_j \sum_i \frac{\partial^3 \mathbf{K}^{-1}}{\partial x_m \partial x_j \partial x_i}\alpha_i \alpha_j \alpha_m X_i X_j X_m + \cdots\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(X_i + \alpha_i X_i) &= \mathbf{K}^{-1}(X_i)\mathbf{P} - \sum_i \alpha_i X_i \hat{\mathbf{K}}_i \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P} + \frac{1}{2}\sum_j \sum_i \alpha_i \alpha_j X_i X_j \hat{\mathbf{K}}_{ij}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P} - \\ &\quad \frac{1}{6}\sum_m \sum_j \sum_i \alpha_i \alpha_j \alpha_m X_i X_j X_m \hat{\mathbf{K}}_{ijm}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P} + \cdots \\ &= \mathbf{U}_u - \sum_i \alpha_i X_i \hat{\mathbf{K}}_i \mathbf{U}_u + \frac{1}{2}\sum_j \sum_i \alpha_i \alpha_j X_i X_j \hat{\mathbf{K}}_{ij}\mathbf{U}_u - \\ &\quad \frac{1}{6}\sum_m \sum_j \sum_i \alpha_i \alpha_j \alpha_m X_i X_j X_m \hat{\mathbf{K}}_{ijm}\mathbf{U}_u + \cdots\end{aligned} \tag{4}$$

여기서 $\mathbf{U}_u$는 기준 강성을 이용한 변위벡터이고, $\hat{\mathbf{K}}_i$와 $\hat{\mathbf{K}}_{ij}$는 식(5),(6)과 같이 정의된 값이다.

$$\hat{\mathbf{K}}_i = \hat{\mathbf{K}}_{,i} = \mathbf{K}^{-1}\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \tag{5}$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{ij} = \hat{\mathbf{K}}_{,j}\hat{\mathbf{K}}_{,i} + \hat{\mathbf{K}}_{,i}\hat{\mathbf{K}}_{,j} = \mathbf{K}^{-1}\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i}\mathbf{K}^{-1}\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_j} + \mathbf{K}^{-1}\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_j}\mathbf{K}^{-1}\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \tag{6}$$

계산된 변위는 Taylor Expansion에 의해 근사한 값이므로, 목적함수가 근사 최소자승 오차함수가 된다. 목적함수의 최적화 과정은 이후에 설명할 신경망을 통하여 수행하였다.

## 3. 신경망을 통한 손상탐지

이 연구에서는 $\alpha_i$에 대한 2차항까지 이용해서 근사한 값을 계산 변위로 사용한다. 식(4)에서 2차항까지 고려하면 다음과 같다.

$$\tilde{\mathbf{U}}(\alpha) = \mathbf{U}_u - \sum_i \alpha_i X_i \hat{\mathbf{K}}_i \mathbf{U}_u + \frac{1}{2}\sum_j \sum_i \alpha_i \alpha_j X_i X_j \hat{\mathbf{K}}_{ij} \mathbf{U}_u \tag{7}$$

여기서 $\tilde{\mathbf{U}}(\alpha)$ 는 근사화된 계산 변위이다. 식(7)의 우변에서 $\mathbf{U}_u, X_i$ 는 기준변위와 기준강성으로 주어진 값이고, $\hat{\mathbf{K}}_i, \hat{\mathbf{K}}_{ij}$ 는 기준강성 값을 이용하여 식 (5),(6)에서 구한 값이다. 즉, 식(7)에서 손상정도 $\alpha_i$ 를 제외하곤 모두 기지값인데, 선형화된 수학적 모델에서 기지값을 신경망의 입력값으로 사용하고, 미지수인 손상정도를 연결강도로 사용한다. 식(7)을 보면 임의의 변위는 손상 대상 부재 수 만큼의 성분들로 구성되어짐을 알 수 있다. 이 연구에서는 모든 부재의 손상정도를 구하므로, 임의의 자유도에 대한 변위가 하나의 훈련 패턴이 되고, 구조물의 부재수가 하나의 패턴을 구성하고 있는 성분들이 된다. 입력값과 연결가중치의 선형합은 근사화된 출력 변위인데, 이 출력 변위와 목표값인 측정 변위의 차이에 의해 최소자승 오차함수가 정의된다. 오차함수의 최적화 과정은 신경망의 델타학습법[2]을 사용하는데, 식(8)의 과정을 통해 연결강도를 재조정한다. 델타학습법[2]은 입력층과 출력층만 있는 단층 신경망에서 오차를 역방향으로 전달함으로써 연결강도를 조정해 나가는 반복 학습법이다.

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_i &= -\eta\nabla E = -\eta\frac{\partial E}{\partial \alpha_i} = -\eta\frac{\partial E}{\partial (v)}\frac{\partial (v)}{\partial \alpha_i} \\ &= -\eta\frac{\partial E}{\partial y}\frac{\partial [f(v)]}{\partial (v)}\frac{\partial (v)}{\partial \alpha_i} \end{aligned} \tag{8}$$

여기서 $\eta$ 는 학습률, $v$ 는 입력층과 연결가중치의 연결가중합, $y$ 는 출력변위, $f$ 는 활성화 함수, $\alpha_i$ 는 연결강도 즉, 손상정도를 나타내는 값이다.

## 4. 예제

이 연구에서 제안한 방법을 검증하기 위해 그림 1과 같은 구조물[3]의 손상을 추정하고자 한다. 구조물은 12개의 절점과 25개의 부재로 구성된 트러스 구조물이다. 손상의 기준값은 0.0 즉, 손상이 없는 상태의 값을 기준으로 하였고, 실제 손상은 3번 부재가 50%이고 9번 부재가 70%의 손상이 있는 상태이다. 탄성계수는 1000 N/㎡이고, 단면적은 상현재의 경우 112.5 ㎠ , 하현재 93.6 ㎠, 수직재 62.5 ㎠,사재 75.0 ㎠ 이다. 측정점은 그림 1에서 보듯이 하현부의 7개 지점이고, 측정 변위는 수치적으로 구하였다. 측정변위의 noise가 없는 경우, 1%와 3%의 noise가 포함된 경우를 각각 이용해서 noise에 대한 적용성을 검토하고자 한다. 측정변위 정보가 부재 수 보다 적기 때문에 다른 종류의 하중을 이용하여 정보를 얻는데, 각 하중 단계별 재하 조건은 그림 2와 같다. 각 하중 단계별로 7개의 측정정보가 얻어지므로, 총 28개의 정보를 얻는다.

그림 3은 식(4)의 변위에 대한 Taylor Expansion에서 $\alpha_i$ 에 대한 1차항까지의 전개를 사용한 경우와, 2차항 까지 사용한 경우를 비교한 것이다. 1차항까지의 전개는 실제 손상 발생 부재의 위치는 찾을 수 있지만, 손상 정도 및 손상 부재 개수의 산정에 어려움이 있음을 알 수 있다. 2차항까지 사용한 경우에는 1차항 보다 손상 정도가 많이 개선되었고, 손상 위치 및 손상 부재 개수 판단도 어렵지 않다.

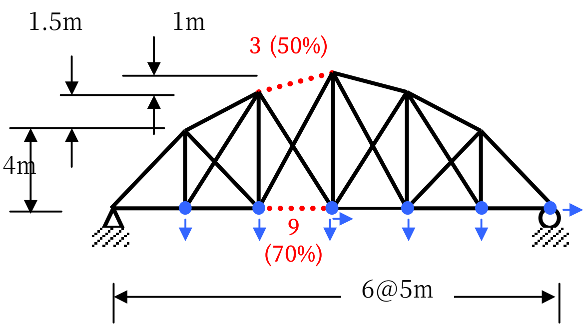


그림 1. 수치해석 예제 모델

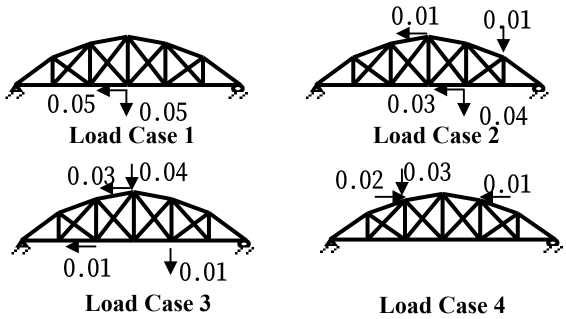


그림 2. 단계별 작용하중

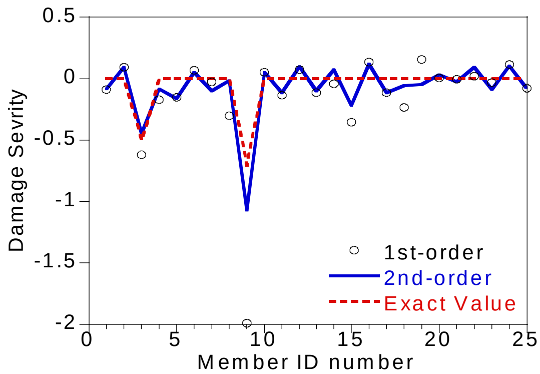


그림 3. 근사 차수에 따른 손상정도

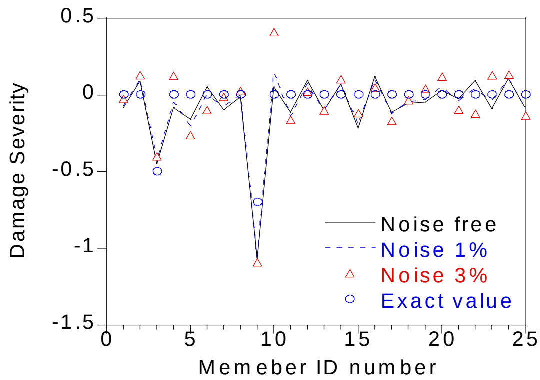


그림 4. Noise에 따른 손상정도

그림 4는 $\alpha_i$ 에 대한 2차항까지의 전개에서 noise가 없는 경우와, 1%와 3%의 noise가 있는 경우의 손상정도를 나타낸 것인데, noise가 없거나 1%정도일 때는 손상위치 및 정도를 어렵지 않게 파악할 수 있다. 3%의 경우 noise에 의해 해가 진동하지만, 손상위치에 대한 정보를 찾을 수 있다.

## 4. 결론

이 연구 방법으로 구조물의 손상에 대한 위치와 정도를 계산하면, 측정정보에 noise가 없는 경우에는 손상의 정도와 위치를 잘 찾을 수 있다. 측정정보에 noise가 있는 경우에도, 손상 정도에는 약간의 오차가 있지만, 손상된 부재의 위치에 대한 정보는 충분히 얻을 수 있다.

## 참고문헌


1. Chris Bishop, Neural networks for pattern recognition, New York, : Oxford University Press, 1995.
2. C.B.Yun, E.Y.Bahng, “Substructural identification using neural networks”, *Computers & Structures*, Volume 77, Issue 1, 1 June 2000, Pages 41-52.
3. I.H.Yeo, S.B.Shin, H.S.Lee, S.P.Chang, "Statistical damage assessment of framed structures from static responses," *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 126, No. 4, pp. 414-421, 2000.4.