유한체 내부영역 물성치 결정을 위한 L_1-TSVD의 최적 절단번호 결정

Determination of an Optimal Truncation Number in the L_1-TSVD for Estimating Material Properties of an Inclusion in a Finite Body

박만우[*] ·안병규[**] ·박현우[***] ·이해성[****]

Park, Man Woo ·Ahn, Byung Kyu ·Park, Hyun Woo ·Lee, Hae Sung

1. 서론

구조물의 손상을 나타내는 물성치의 분포는 구조물의 이산화 된 요소들 사이에서 불연속적인 특성을 갖는다. 시스템확인기법을 손상탐지에 사용할 경우, 이러한 불연속적인 속성을 잘 나타낼 수 있는 L_1-TSVD(Truncated Singular Value Decomposition) (안병규, 2002) 를 사용하는 것이 효과적이다. L_1-TSVD에서는 민감도 행렬의 singular value들 중 일정부분을 잘라내는 과정이 나오는데, 잘라낼 부분을 결정해 주는 절단번호(truncation number)가 해의 안정성과 정확도에 큰 영향을 준다. 절단번호는 민감도 행렬에서 어느 정도의 rank를 확보하여 사용할 지를 정해주는 지표가 된다. 이 절단번호를 결정하는 방법으로 discrepancy principle (Morozov, 1993) 이 있다. 이 방법은 측정치의 최소 자승 오차를 알고 있다는 가정하에서 사용할 수 있는 방법이다. 실제로는 측정치의 오차를 알 수 없기 때문에 GCV(Generalized Cross Validation) (Hansen, 1998) 를 이용하여 측정치의 최소 자승 오차를 예측한 후 discrepancy principle을 사용할 수 있다. 그러나, GCV 과정은 많은 계산량과 시간이 필요하다. 절단번호에 따른 오차함수 분포의 특성을 고려하여 선형회귀분석을 이용한 간단한 계산으로 절단번호를 결정하는 방법을 도입하였다. 평면 응력 예제를 통해 제안된 방법의 타당성을 검증한다.

2. L_1-TSVD

L_1-TSVD는 TSVD를 이용하여 오차함수를 최소화 하는 과정에 L_1 정규화 조건을 부과한 것이다. 먼저 오차함수를 선형화 한 이차종속 문제로부터 시스템변수의 증분해를 구하고, 그 중 오차가 많이 포함된 부분을 잘라 버린다. 마지막으로, 정규화 조건을 부과하여 버려진 부분의 해를 복구한다. 이 과정은 다음과 같이

[*] 서울대학교 지구환경시스템공학부 석사과정 · 공학사 · 02-880-8740 (E-mail:mwpark97@snu.ac.kr)
[**] 한국종합기술개발공사 사원 · 공학석사 · 02-3403-8979 (E-mail: 4kyoko@hitel.net)
[***] 정회원 · 한국원자력연구소 박사후과정 · 공학박사 · 042-868-8132 (E-mail:ex-hwpark@kaeri.re.kr)
[****] 정회원 · 서울대학교 지구환경시스템공학부 부교수 · 공학박사 · 02-880-8740 (E-mail:chslee@plaza.snu.ac.kr)

정식화할수 있다.

$$\underset{\mathbf{X}}{\text{Minimize}}\ \Pi_R = \left\|\mathbf{L}(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)\right\|_1$$
$$\text{subject to } \mathbf{R}(\mathbf{X}) \le 0 \text{ and } \underset{\mathbf{X}}{\text{Minimize}}\ \Pi_E = \frac{1}{2}\left\|\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{X})-\overline{\mathbf{U}}\right\|_2^2 \tag{1}$$

여기서, X, X_0, R는 시스템변수, 시스템변수의 기저값, 시스템변수에 대한 구속조건이고, L은 이산화된 2차원 유한요소모델에서의 1차 미분 연산행렬이며, $\tilde{\mathbf{U}}$ 와 $\overline{\mathbf{U}}$ 는 각각 기준화된 계산 변위벡터와 측정 변위벡터를 각 하중단계에 대해 행방향으로 정렬한 벡터들이다. 또한 $\|\cdot\|_2$ 와 $\|\cdot\|_1$ 는 각각 벡터의 L_2-norm과 L_1-norm이다.

오차함수 Π_E의 최소화에 대한 증분해는 다음의 이차종속 문제로부터 구한다(Park and Lee, 2001) .

$$\underset{\Delta\mathbf{X}}{\text{Minimize}}\ \left\|\mathbf{S}\Delta\mathbf{X}-\mathbf{U}_{k-1}^r\right\|_2^2 \tag{2}$$

여기서, ΔX는 시스템변수의 증분해, S는 각 반복단계에서의 시스템변수에 대한 측정치의 민감도 행렬이고, k는 반복회수, $\mathbf{U}_{k-1}^r$ 는 전 반복단계에서의 기준화 된 측정변위와 계산변위 간의 차이에 해당하는 벡터이다. TSVD를 통해서 시스템변수의 증분해 중 오차가 섞여있는 부분, 즉 작은 고유치와 관련된 부분들을 제거한다.

$$\Delta\mathbf{X} = \sum_{j=1}^{t}\frac{\mathbf{z}_j^T\mathbf{U}^r}{\omega_j}\mathbf{v}_j + \sum_{j=t+1}^{n}\gamma_j\mathbf{v}_j = \Delta\mathbf{X}_t + \mathbf{q} \tag{3}$$

여기서, ω_j 는 내림차순으로 정렬한 S의 특이치이고, $\mathbf{z}_j$ 와 $\mathbf{v}_j$ 는 ω_j 와 관련된 좌측 특이벡터(left singular vector, LSV)와 우측 특이벡터(right singular vector, RSV)이며(Golub and Van Loan, 1996), γ_j는 정해지지 않은 상수이다. 그리고, t 가 본 논문에서 정하고자 하는 절단번호이다. 민감도 행렬 S를 절단번호 만큼의 rank만을 사용하여 증분해의 일부인 $\Delta\mathbf{X}_t$ 를 구하며, 증분해의 나머지 부분 q는 L_1 정규화를 이용한 최적화를 이용하여 구하는 것이다. 식(3)을 이용하여 식(1)을 q에 관한 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\underset{\mathbf{q}}{\text{Minimize}}\ \left\|\mathbf{L}[\mathbf{q}-(\mathbf{X}_0-\mathbf{X}_{k-1}-\Delta\mathbf{X}_t)]\right\|_1$$
$$\text{subject to } \mathbf{V}_t^T\mathbf{q}=0 \text{ and } \mathbf{X}_l-\mathbf{X}_{k-1}-\Delta\mathbf{X}_t \le \mathbf{q} \le \mathbf{X}_u-\mathbf{X}_{k-1}-\Delta\mathbf{X}_t \tag{4}$$

여기서, $\mathbf{V}_t = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_t)$ 이며, 등식형 구속조건은 q가 제거된 RSV들의 선형조합으로 이루어져야 한다는 것을 나타낸다. 이 식(4)를 simplex 방법으로 풀며, 보다 빠른 수렴을 위해 line search를 수행한다.

3. Truncation Number의 결정

이 논문에서는 비교적 간단한 계산으로 절단번호를 결정하는 방법을 제안한다. 절단번호에 따라서 수렴된 오차함수 Π_E의 분포를 보면, 그림 1과 같이 절단번호가 작은 영역과 큰 영역에서의 경향이 다른 것을 볼 수가 있다. 영역 I은 함유체의 정보가 많아지면서 오차함수가 빠르게 감소하는 부분이고, 영역 II는 오차

함수가 실제 계측오차의 크기와 비슷해지면서 오차함수가 천천히 감소하는 부분이다. 이 두 영역의 경계가 되는 부분을 최적의 절단번호로 정하는 것이다. 이곳이 함유체의 정보를 가능한 많이 포함하면서, 계측오차에 의한 잘못된 해의 정보를 최소로 하는 부분이 되기 때문이다.

이 경계는 다음과 같이 선형회귀모델을 이용하여 찾는다. 각각의 절단번호 t 에 대해서 L_1-TSVD를 통해서 수렴한 오차함수의 값을 $\hat{y}_i (1 \le i \le N)$ 라고 하자. 절단번호 t $(2 \le t \le N-1)$ 를 기준으로 그림 1과 같이 두개의 영역으로 나눈 후, 각 영역에 대해서 선형회귀를 하여 y_i^I 과 y_i^{II} 를 구한다. 단, 두 직선이 경계에서 만난다는 조건을 주어 연속이 되게 한다. 즉, 임의의 절단번호에서 만나는 두 개의 직선으로, 절단번호에 따른 오차함수의 그래프를 가장 근접하게 표현하는 경우를 찾는 것이다.

$$\begin{aligned} & y_i^I \sim \text{Linear\_Regression}\ (\hat{y}_1, \hat{y}_2, ..., \hat{y}_t) \\ & \text{and}\ \ y_i^{II} \sim \text{Linear\_Regression}\ (\hat{y}_t, \hat{y}_{t+1}, \hat{y}_{t+2}, ..., \hat{y}_N) \\ & \text{subject to}\ y_t^I = y_t^{II} \end{aligned} \tag{5}$$

여기서의 y_i^I, y_i^{II} 와 $\hat{y}_i$ 간의 오차를 구하고, 그 오차를 최소화하는 t 를 최적 절단번호로 결정한다.

$$\pi_t = \pi_t^I + \pi_t^{II} = \sum_{i=1}^{t} (y_i^I - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=t}^{N} (y_i^{II} - \hat{y}_i)^2 \tag{6}$$

$$t_{opt} \equiv \min_t \pi_t \tag{7}$$

4. 예제 및 결론

제안된 절단번호를 결정하는 방법의 사용성을 검증하기 위하여 그림 2와 같이 2차원 평면응력상태에 있는 2차원 판 모델의 탄성계수(Young's Modulus, E)를 시스템변수로 하여 추정하는 예제를 적용시켜 보았다. 모델은 225개의 절점과 64개의 요소로 이루어진 정사각형 판이다. 이 정사각형 판은 철(E=210 GPa)로 이루어져 있고, 34, 35, 42, 43번 요소에 위치한 내부 함유체는 알루미늄(E=70 GPa)으로 이루어져 있다고 가정하였다. 하중조건은 x방향과 y방향의 두 단계로 나누어 각각 1.44 GPa의 인장응력을 가해주고, 측정치는 각 하중조건에 대하여 32개의 측정점, 총 64개의 측정점으로부터 5%의 측정오차를 가지는 128개의 자유도를 측정한 상황으로 모사하였다.

그림 3은 식(6)의 π_t 의 절단번호에 따른 분포이다. 최적 절단번호는 최소값을 갖는 9에서 결정이 된다. GCV로 측정오차를 예측한 후, discrepancy principle을 적용시켰을 경우에는 절단번호가 13으로 결정되었다. 이 두 경우에 대한 시스템변수의 추정 결과는 그림 4와 같다. 두 경우의 결과 모두 함유체에 해당하는 34, 35, 42, 43번 요소들의 탄성계수가 70 GPa에 근접하게 추정되고 있고, 나머지 다른 부분들은 기본값인 210 GPa에서 많이 벗어나지 않고 그대로 잡혀 있는 것을 볼 수가 있다. 그러나 GCV를 이용한 결과를 보면, 함유체가 아닌 요소의 시스템변수가 기본값인 210 GPa에서 눈에 띄게 위아래로 벗어나고 있는 점들을 볼 수가 있다. 이로부터, 제안된 방법이 GCV에 비해 10배 이상 시간을 줄일 수 있으며, 보다 더 안정적이고, 정확한 해를 추정하고 있음을 알 수 있다.

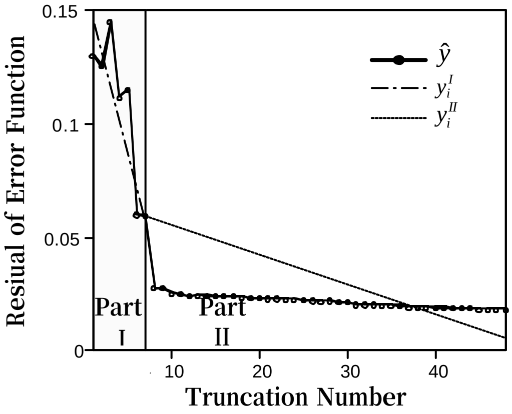

그림 1. Truncation number에 따른 오차 함수의 분포와 선형회귀모델

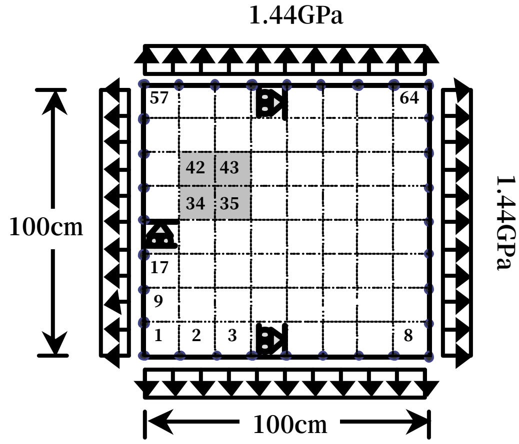

그림 2. 예제를 위한 유한요소 모델

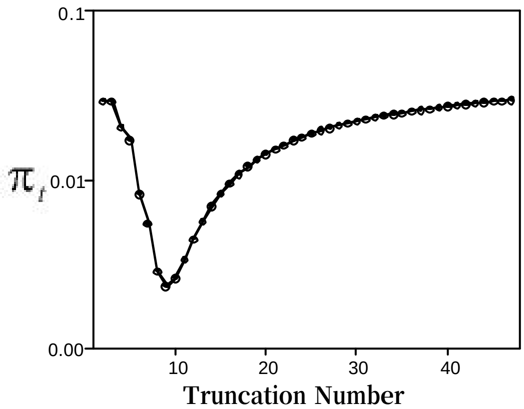

그림 3. Truncation Number에 따른 선형회귀모델과 실제 그래프 간의 오차

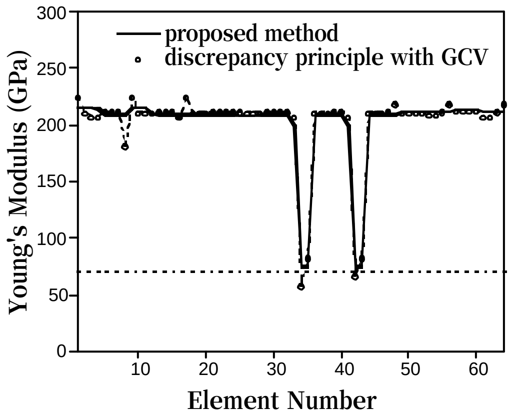

그림 4 Truncation number 결정방법에 따른 시스템변수들의 추정 결과

참고문헌

1. H.W. Park, S.B. Shin, and H.S. Lee, (2001) Determination of an optimal regularization factor in system identification with Tikhonov function for linear elastic continua. *International Journal for Numerical Methods in Engineering,*Vol. 51, No.10, pp.1211-1230

2. Golub, G. H., and Van Loan, C. F. 1996. *Matrix computations, 3rd ed.*, The Johns Hopkins University Press, London.

3. P.C. Hansen, (1998) *Rank-deficient and Discrete Ill-Posed Problems, Numerical Aspects of Linear Inversion,*.SIAM : Philadelphia

4. V. A. Morozov, (1993) *Regularization methods for ill-posed problem,*.M. Stessin, translator, CRC Press, Boca Raton.

5. 안병규, (2002) PP-TSVD에 의한 유한체 내부영역의 물성치 결정을 위한 시스템확인기법, 석사학위 논문, 서울대학교