2003 대한토목학회 정기학술대회

Bayesian Theory를 적용한 손상 탐지에서의 L_1-정규화 기법

L_1-Regularization Technique in System Identification for Damage Assessment Based on Bayesian Theory

박재형* · 박만우** · 이해성***

Park, Jae-Hyoung · Park, Man Woo · Lee, Hae Sung

1. 서 론

SI (System Identification)에 의한 구조물의 손상 진단 기법이 최근 20년간 국내외의 여러 연구자에 의하여 진행되어 왔다. SI에 기초한 손상탐지 기법은 역해석 문제이기 때문에 많은 불안정성이 존재하게 되며 이러한 불안정성을 적절한 기법을 통하여 안정화하지 않는 한 실제 문제에 적용하기가 어렵다. 최근 SI 기법에 의한 손상탐지 기법의 수학적 불안정성에 대한 기초적인 연구가 집중적으로 이루어져 불안정성의 원인과 해결책이 제시되었고, 이러한 불안정성의 제거에 관한 연구가 지속적으로 수행되어 많은 새로운 방법이 시도되고 있다.

오차함수의 최소화를 이용하는 기존의 SI 기법은 주어진 측정값과 강성변수의 정규조건에 의하여 시스템 변수를 추정하는 결정론적인 방법이다. 그러나, 하중, 물성치, 변위, 해석 모델 등의 모든 구조 시스템의 변수들은 임의의 확률 분포를 갖는 확률적 변수이다. 따라서 측정값과 강성변수의 확률분포를 알고 있거나 혹은 적절히 가정할 수 있다면 보다 효과적인 시스템 변수의 추정이 가능할 것이다. 이 논문에서는 지금까지 연구된 최소 자승오차에 의한 SI 문제를 Bayesian Theory를 적용한 확률론적 관점에서 재조명한다.

2. Bayesian Theory를 적용한 확률론적 SI 기법

확률론적 관점에서의 SI는 임의의 측정값들이 주어졌을 때의 시스템 변수에 대한 확률분포에서 maximum likelihood에 해당하는 시스템변수를 결정하는 과정으로 정의된다. 이 시스템 변수의 조건부 확률 분포는 Bayesian Theory에 의하여 다음과 같이 정의된다.

$$p(\mathbf{X}\,|\,\bar{\mathbf{u}}) = c\left[\int_{\mathbf{U}} p(\bar{\mathbf{u}}\,|\,\mathbf{u})\,p(\mathbf{u}\,|\mathbf{X})\,d\mathbf{u}\right]p(\mathbf{X}) \tag{1}$$

* 서울대학교 지구환경시스템공학부 석사과정 · 공학사 · 02-880-8740 (E-mail:jhpark95@snu.ac.kr)
** 동일기술공사 사원 · 공학석사 · 02-880-8740 (E-mail:manus37@nownuri.net)
*** 정회원 · 서울대학교 지구환경시스템공학부 부교수 · 공학박사 · 02-880-8740 (E-mail:chslee@plaza.snu.ac.kr)

여기서, $\mathbf{X}$는 시스템 변수, $\overline{\mathbf{u}}$는 측정변위, $\mathbf{u}$는 실제변위를 의미한다. 식 (1)에서 조건부 확률 분포는 세 가지 종류의 확률분포 - 측정 오차에 대한 확률분포 $p(\overline{\mathbf{u}}\,|\,\mathbf{u})$, 이상화 된 수치해석 모델과 실제 구조물 사이의 차이에 의한 모델링 오차에 대한 확률분포 $p(\mathbf{u}|\mathbf{X})$, 시스템 변수에 대한 확률분포 $p(\mathbf{X})$ - 의 조합으로 이루어져 있다. 이와 같이, posterior 확률분포는 측정오차, 모델링 오차, 선지식에 의한 시스템 변수의 분포의 조합으로 결정된다. 이러한 통계적인 관점에서의 접근은 각 변수에 대한 확률분포를 독립적으로 정의할 수 있기 때문에 기존의 확정론적 접근 방법에 비하여 실제 상황을 보다 합리적으로 모사할 수 있는 장점이 있다.

이 논문에서는 측정 오차와 모델링 오차가 정규분포를 이루는 것으로 가정하였다. Bayesian Theory 에 의한 SI 기법에서는 시스템 변수에 대한 확률분포 $p(\mathbf{X})$가 정규화와 같은 역할을 한다. 확률분포 $p(\mathbf{X})$를 정규분포로 가정할 경우 L_2-정규화 효과를, symmetric exponential 분포로 가정할 경우 L_1-정규화 효과를 얻을 수 있다. symmetric exponential 분포는 식(2)와 같이 정의된다.

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma} \exp\left[-\frac{|x - x_0|}{\sigma} \right] \tag{2}$$

그림 1. 은 정규 분포와 symmetric exponential 분포의 특성을 나타낸 그래프이다. symmetric exponential 분포는 정규분포에 비하여 평균값 부근과 양쪽 끝 부분에서 보다 큰 확률 밀도를 가진다. 이러한 특성은 각각의 확률함수를 사용한 경우의 시스템변수 추정에서도 그대로 나타난다. L_1-정규화가 L_2-정규화에 비하여 구조물 내에 존재하는 이질의 물성치를 보다 뚜렷하게 구분해주는 것이다. symmetric exponential 분포의 경우 평균값 부근의 밀도가 높기 때문에, 측정변위에 섞여있는 오차로 인해 시스템 변수가 작게 변동하는 부분을 보다 평균값쪽으로 잡아주는 효과가 나타나게 된다. 이는 수치해석 예제에 나온 결과로도 확인할 수 있다. 선지식에 의한 시스템 변수의 확률분포를 symmetric exponential 분포로 가정할 경우 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} p(\mathbf{X}\,|\,\overline{\mathbf{u}}) = & \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det \mathbf{C}_m}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det \mathbf{C}_d}\,(2\sigma_X)^n} \times \\ & \exp\left[-\frac{1}{2}(\overline{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))^T \mathbf{C}_D^{-1} (\overline{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X})) - \frac{1}{\sigma_X} \sum_{i=1}^{n} \left| x_i - (x_0)_i \right| \right] \end{aligned} \tag{3}$$

여기서, $\mathbf{C}_D = \mathbf{C}_d + \mathbf{C}_m$ 인 관계식으로 주어지며(Tarantola, 1987), $\mathbf{C}_d$는 측정오차의 covariance 행렬, $\mathbf{C}_m$은 모델링오차의 covariance 행렬이다. 주어진 확률분포 함수를 최대로 하기 위해서는 지수함수 내의 부분을 최대로 하는 시스템 변수를 결정해주면 된다. 따라서 이는 다음과 같은 최적화 문제로 간략화된다.

$$\underset{\mathbf{X}}{\text{Min}}\left[\frac{1}{2}(\overline{\mathbf{u}}-\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_D^{-1}(\overline{\mathbf{u}}-\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))+\frac{1}{\sigma_X}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-(x_0)_i\right|\right] \tag{4}$$

이는 L_1-정규화를 Tikhonov 방법으로 도입한 경우와 유사한 형태의 식이다. 이를 L_1-TSVD 방법으로 다음과 같이 풀 수 있다.

$$\underset{\mathbf{X}}{\text{Min}}\left\|\mathbf{X}-\mathbf{X}_0\right\|_1 \ \text{ subject to } \ \underset{\mathbf{X}}{\text{Min}}\{(\overline{\mathbf{u}}-\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_D{}^{-1}(\overline{\mathbf{u}}-\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))\} \ \text{ and } \ \mathbf{R}(\mathbf{X})\le 0 \tag{5}$$

$\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}_k)=\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}_{k-1})+\mathbf{S}_{k-1}\Delta\mathbf{X}$ 의 관계를 이용하여 첫번째 종속조건을 풀면 다음의 식을 얻는다.

$$\underset{\Delta\mathbf{X}}{\text{Min}}\{\Delta\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_{\mathrm{k}-1}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_D^{-1}\mathbf{S}_{\mathrm{k}-1}\,\Delta\mathbf{X}-2\Delta\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_{\mathrm{k}-1}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_D^{-1}\mathbf{U}_{\mathrm{k}-1}^{r}\} \tag{6}$$

$\mathbf{C}_D^{-1}$ 이 positive definite 일 경우 이 행렬은 Cholesky Decomposition 이 된다.

$$\mathbf{C}_D^{-1}=\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{L} \tag{7}$$

식 (7)의 결과를 식 (6)에 대입하여 이를 $\Delta\mathbf{X}$ 에 대하여 풀면 식 (8)을 얻는다.

$$(\mathbf{LS})^{\mathrm{T}}(\mathbf{LS})\Delta\mathbf{X}=(\mathbf{LS})^{\mathrm{T}}(\mathbf{LU}^{r}) \tag{8}$$

여기서, $\mathbf{LS}=\mathbf{S}',\mathbf{LU}^{r}=\mathbf{U}^{r}{}'$ 으로 치환하면 일반적인 L_1-TSVD 방법으로 문제를 풀 수 있다. 식 (8)의 풀이에 있어서는 별도의 기준화가 필요하지 않다. covariance 행렬 $\mathbf{C}_D$ 이 오차함수와 시스템 변수에 대한 기준화 역할을 하고 있기 때문이다.

$$\Delta\mathbf{X}=\sum_{j=1}^{t}\mathbf{v}_j{}'\mathbf{w}'^{-1}_j\,\mathbf{z}'^{\mathrm{T}}_j\,\mathbf{U}^{r}{}'+\sum_{j=t+1}^{n}\gamma_j\,\mathbf{v}_j=\Delta\mathbf{X}_t+\mathbf{z} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\underset{\mathbf{z}}{\text{Min}}\left\|\mathbf{z}+(\mathbf{X}_{k-1}-\mathbf{X}_0+\Delta\mathbf{X}_t)\right\|_1\\&\text{subject to } \mathbf{v}_t^{\mathrm{T}}\mathbf{z}=0 \text{ and } \mathbf{X}_l-\mathbf{X}_{k-1}-\Delta\mathbf{X}_t\le\mathbf{z}\le\mathbf{X}_l-\mathbf{X}_{\mathrm{k}-1}-\Delta\mathbf{X}_t\end{aligned} \tag{10}$$

등식형 구속조건은 $\mathbf{z}$ 가 제거된 RSV 들의 선형조합으로 이루어져야 함을 나타낸다. 식(9)는 Simplex 방법으로 풀 수 있으며, 빠른 수렴을 위하여 line search 를 실시한다.

3. 모델링 오차를 고려한 수치해석 예제

모델링 오차는 실제 구조물의 변위와 해석모델을 통해 계산된 변위 간의 차이인 $\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X})$ 로 표현되며, 실제 구조물을 이상화 하는 과정에서 발생하는 오차이다. 모델링 오차는 측정 오차와는 달리 시스템의 구조적 특성에 따라서 유기적인 관계를 갖고 발생하는 오차이다. 기존의 결정론적 SI 기법에서와 같이 모델링 오차를 별도로 고려하지 않는 경우, 즉 모델링 오차가 없다고 가정할 경우에 모델링 오차를 나타내는 조건부 확률분포 $p(\mathbf{u}|\mathbf{X})$ 는 Dirac-delta 함수로 표현된다. 복잡한 모델링 오차를 간단한 확률분포로 정확하게 묘사하는 것은 매우 힘들지만, 이번 연구에서는 측정 오차와 같이 정규분포를 이루는 것으로 가정하고 이를 필터링하는 covariance 행렬 $\mathbf{C}_m$ 을 고려하였다.

강성 $\mathbf{K}$ 의 모델링 오차로서 경계조건의 이상화를 생각해 볼 수 있다. 해석 모델에 사용되는 힌지는 실제 구조물에서는 존재하지 않는다. 여기서 모델링 오차가 발생하게 된다. 이는 회전강성이 0 이 아닌 부분을 회전강성이 0 인 힌지로 모델링 함으로써 발생하는 오차이다. 이러한 모델링 오차를 다음의 그림과 같이 힌지인 지점과 회전 스프링이 있는 지점간의 차이로 정의하면 다음과 같은 모델링 오차의 벡터를 얻을 수 있다.

$$\mathbf{e}_m = \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u} = \mathbf{S}_s \Delta\mathbf{K}_s \tag{11}$$

여기서, $\mathbf{S}_s$ 는 계산변위에 대한 회전강성 $\mathbf{K}_s$ 의 민감도 행렬이고, $\Delta\mathbf{K}_s$ 는 회전스프링의 강성 확률분포와 평균값의 차이이다. 따라서 모델링 오차의 covariance 행렬 $\mathbf{C}_m$ 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_m &= E(\mathbf{e}_m\mathbf{e}_m^T) - E(\mathbf{e}_m)(E(\mathbf{e}))^T = E(\mathbf{e}_m\mathbf{e}_m^T) \\ &= E(\mathbf{S}_s\Delta\mathbf{K}_s\Delta\mathbf{K}_s^T\mathbf{S}_s^T) = \mathbf{S}_s E(\Delta\mathbf{K}_s\Delta\mathbf{K}_s^T)\mathbf{S}_s^T = \mathbf{S}_s diag(Var(\Delta k_{s,i}))\mathbf{S}_s^T\end{aligned} \tag{12}$$

수치해석 예제에서는 그림 2. 에서와 같이 3 경간 연속 들보를 사용하였다. 한 경간의 길이는 20m 이고, 각 경간은 10 개의 부재로 구성되어 있다. 관측점은 한 경간에 3 개씩, 총 9 개의 관측점을 전 부재에 걸쳐 균등하게 배치하여 사용하였으며, 3 번의 실험을 실시하여 총 27 개의 측정 데이터를 이용하여 손상 탐지를 실시하였다. 측정 데이터는 Monte-Carlo simulation 을 이용하여 3%의 측정 오차가 포함된 것을 사용하였다. 이 예제에서 추정할 시스템 변수는 들보의 휨강성인 EI 값이다. 총 30 개의 부재중 13 번째 부재가 손상을 입어 휨강성이 감소한 상태이다. 손상이 없는 부재의 EI 값은 420(10^6KNm^2), 손상이 있는 부재의 EI 값은 140(10^6KNm^2)이다. 스프링 강성의 평균값은 손상이 없는 부재의 휨강성의 10%인 42(10^6KNm^2)로 하였으며, 표준편차는 4.2(10^6KNm^2)이다. 측정변위는 스프링 강성이 평균값으로부터 표준 편차만큼 감소한 값을 가진

모델로부터 계산된 변위에 인위적으로 오차를 더한 값으로 시뮬레이션 하였다.

4. 결론

그림 3. 과 그림 4. 에는 L_1-정규화와 L_2-정규화에 의한 시스템 변수의 추정결과가 도시되어 있다. Bayesian Theory 를 적용한 구조물의 손상탐지 이론이 타당함을 알 수 있다. 또한 L_1-정규화가 L_2-정규화에 비하여 보다 더 안정적이고 정확한 손상탐지 결과를 보여주고 있다. 예제에서 검증한 경계조건의 이상화에 의한 모델링 오차 외에도 다양한 종류의 모델링 오차를 생각해 볼 수 있다. 외부하중이나 온도하중의 이상화에 의한 모델링 오차나 좀더 일반적인 모델링 오차 역시 이에 포함될 것이다. 만일 타당한 측정 오차, 모델링 오차, 선지식에 의한 시스템 변수의 확률분포와 covariance 행렬을 구성할 수 있다면 보다 효율적인 각종 에러의 필터링이 가능할 것으로 예상된다.

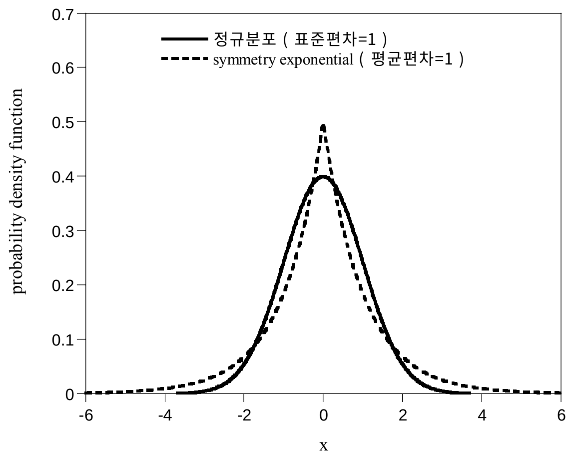

그림 1. 정규분포와 symmetric exponential 분포

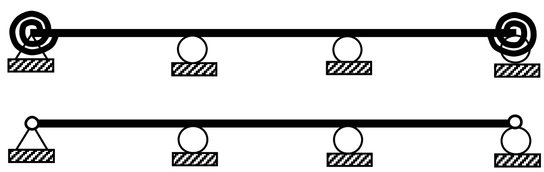

그림 2. 모델링 오차의 정의 – 경계 조건의 이상화

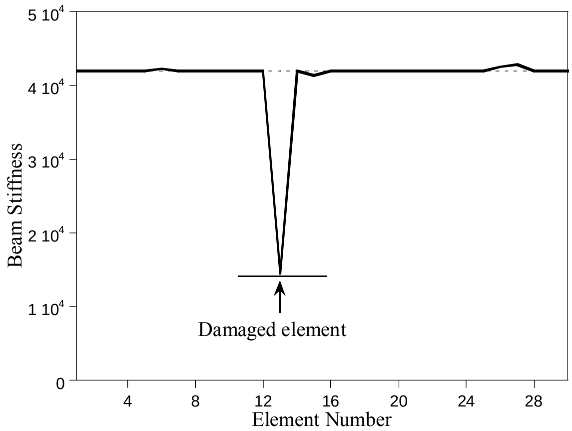

그림 3. L_1-정규화를 사용한 경우

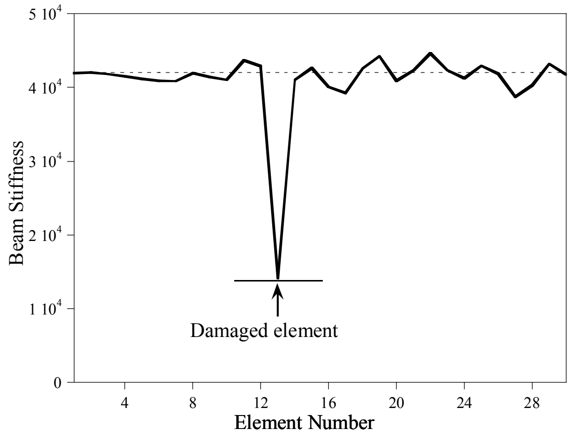

그림 4. L_2-정규화를 사용한 경우

참 고 문 헌

1. H.W. Park, S.B.Shin, and H.S.Lee, (2001) Determination of an optimal regularization factor in system identification with Tikhonov function for linear elastic continua. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 51, No.10, pp.1211-1230

2. P. C. Hansen, (1998) Rank-deficient and Discrete Ill-Posed Problems, Numerical Aspect of Linear Inversion, .SIAM : Philadelphia

3. Tarantola, A. (1987) Inverse Problem Theory – Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation, Elsvier Science Publisher B. V., New York

4. 박현우 (2002), "구조물의 손상진단을 위한 SI 기법에서의 정규화 기법", 서울대학교 토목공학과

5. 안병규 (2002). "PP-TSVD 에 의한 유한체 내부영역의 물성치 결정을 위한 시스템확인기법", 서울대학교 지구환경시스템공학부

6. 박만우 (2003). "Bayesian Theory 에 기초한 손상탐지 기법", 서울대학교 지구환경시스템공학부