균열 기하형상의 일차 테일러 급수를 이용한 피로 균열 성장의 확률분포 추정

Estimation of the Probabilistic Distribution of Fatigue Crack Propagation using the First-Order Taylor Expansion of Crack Geometry

김기석* · 이해성**

Kim, Ki-Seok · Lee, Hae Sung

1. 서 론

피로하중을 받는 구조물은 매우 작은 균열이 성장하여 파괴에 이르게 된다. 구조물 내에 존재하는 작은 균열들은 확률적인 분포를 가지므로, 균열 성장을 확률론적으로 해석하거나 피로 파괴확률을 추정하기 위해서 작은 균열의 기하형상을 확률 변수로 취급한 연구들[1-3]이 있었다. 선형탄성파괴역학(LEFM)에서 피로균열에 대한 기존의 확률론적 연구는 주로 파괴확률을 추정하기 위한 것이었다. 모의실험(Monte Carlo Simulation)으로 피로균열의 파괴확률을 산정하는 방법과 한계 상태식을 정의하고 파괴확률의 간접적인 지표인 신뢰도지수를 최적화로 산정하는 방법이 있다.

이 연구에서는 피로 균열을 점진적으로 진전시키면서 초기의 균열에 대한 확률분포로부터 진전후의 균열의 확률분포를 추정하는 방법을 제시한다. 이때, 테일러 급수를 이용하여 진전후의 평균과 분산을 추정한다. 제안된 확률분포 추정법을 모의실험과 비교하여 제안된 방법의 정확성과 효율성을 검증하였다.

2. 확률분포의 추정

균열 성장 곡선은 초기 균열 길이와 같은 초기 기하 형상에 의해 결정된다. 초기 균열각은 초기 균열길이에 비하여 구조물의 잔류수명에 미치는 영향이 미미하다고 알려져 있다[2]. 현재의 연구에서는 초기 균열길이만을 확률변수로 사용 하였지만 초기 균열각에 대해서도 같은 방법을 적용할 수 있다. 일정한 횟수의 피로하중 재하 후의 균열의 길이에 대한 1 차 테일러 급수는 다음과 같다.

$$a_N(a_0) \approx a_N(\bar{a}_0) + \left.\frac{\partial a_N}{\partial a_0}\right|_{a_0=\bar{a}_0} (a_0 - \bar{a}_0) \tag{1}$$

여기서, $a_0, \bar{a}_0, a_N$ 는 각각 초기 균열의 길이와 그 평균 그리고 N 회의 하중 재하 후의 성장한 균열 길이이다. 초기균열의 확률을 $P(a_0)$라고 하면, 성장후의 균열 길이의 평균은 다음과 같다.

* 정회원 · 서울대학교 토목공학과 박사과정· 공학석사 · 02-880-8740 (E-mail: kskim93@snu.ac.kr) – 발표자

** 정회원 · 서울대학교 지구환경시스템공학부 부교수 · 공학박사 · 02-880-8388 (E-mail: chslee@plaza.snu.ac.kr)

$$E[a_N] = \int_{-\infty}^{+\infty} a_N(a_0) P(a_0) da_0 \approx a_N(\bar{a}_0) \tag{2}$$

식 (2)는 균열이 평균에서 평균으로 성장함을 말해준다. 균열 길이의 분산은 식 (1)로부터 다음과 같이 산정한다.

$$\mathrm{Var}[a_N] = \left(\frac{\partial a_N}{\partial a_0}\bigg|_{a_0=\bar{a}_0}\right)^2 \mathrm{Var}[a_0] \tag{3}$$

식 (3)에 사용된 초기균열에 대한 민감도는 다음의 Paris 방정식으로부터 얻을 수 있다.

$$N = \int_{a_0}^{a_N} \frac{1}{CK^m(a)} da \tag{4}$$

여기서, C와 m은 피로균열 성장률을 결정하는 재료의 고유한 상수이고, K는 응력확대계수로서 균열 길이의 함수이다. 식 (4)의 적분식을 초기길이에 대하여 편미분하여 얻어진 민감도는 다음과 같다.

$$\frac{\partial a_N}{\partial a_0} = \frac{K^m(a_N)}{K^m(a_0)} \tag{5}$$

제안한 방법으로 균열의 분포를 추정하기 위해서는 식 (1)의 근사가 유효하여야 한다. 즉, 균열의 진전이 충분히 작아야 하고, 초기 균열의 분포가 정규분포와 같이 평균을 중심으로 분포되어 있어야 한다.

3. 균열의 성장 모델링

균열진전을 해석하는 수치해석 방법론으로 이중경계요소법(DBEM)[4]을 사용하였고, 균열 선단의 J-integral로부터 응력확대계수를 산정하였다. 식 (4)의 Paris 방정식의 적분식에 대해서는 Trapezoidal rule 을 사용하여 균열의 진전량을 산정하였다. 혼합모드의 응력상태에서는 균열 선단에서 최대 주응력 방향의 직각방향으로 균열이 진정한다고 가정하였다. 즉, 균열이 곡선을 이루며 성장하더라도 균열 선단에서 항상 Opening Mode로 균열이 성장한다. 곡선 균열의 성장을 포물선으로 가정하여 새로운 균열 선단에서의 균열 진전 방향과 포물선의 접선각이 일치하도록 반복적으로 곡률을 수정해 주었다. 균열의 진전은 포물선의 양단을 잇는 직선의 이차요소로 이산화하여 모델링하였다. 균열의 성장은 균열 선단에 절점과 요소를 추가하여 모델링하였다. 응력의 특이를 보여주는 균열 선단에서는 불연속 특이 요소를 사용하였다.

4. 예 제

그림 1 은 16.5 kN/cm^2 의 인장을 받는 강판(E = 21,000 kN/cm^2, v = 0.3)이다. 식 (4)의 균열 성장률에 사용되는 물성치는 C = 1.886×10^{-10}, m = 3.0 이다. 강판 내부에 구멍이 없는 경우에는 직선으로 균열이 성장하고, 2 cm 의 구멍이 있는 경우는 그림 2 처럼 균열이 곡선을 이루며 성장한다. 초기균열은 평균이 0.2cm, 표준편차

가 0.02cm 인 정규분포이다. 구멍이 없는 경에는 293 개의 절점과 140 개의 이차 경계요소를 사용하여 모델링 하였다. 균열면은 12 개의 불연속 요소를 사용하였다. 강판 내부의 구멍은 8 개의 이차 경계요소를 사용하였다. 구멍이 없는 경우에는 피로하중을 ΔN = 40,000 회씩 재하하여 10 번을 진전시켰고, 구멍이 있는 경우에는 ΔN = 10,000 회씩 15 번을 진전시켰다.

표 1 은 초기 균열과 성장 후의 균열의 분포인데, 모의실험 결과와 제안된 방법의 결과를 비교해 볼 수 있다. 그림 3 과 4 는 각각 균열 성장에 따른 균열 길이의 평균과 표준편차를 도시한 것이다. 구멍이 있는 경우가 구멍이 없는 경우에 비해 2 배 이상 빠르게 균열이 성장한다. 모의실험 결과만을 살펴보면, 성장 후의 평균은 초기 평균의 크기에 영향을 받고, 표준편차는 초기 표준편차 뿐만 아니라 초기 평균의 크기에도 영향을 받음을 알 수 있다. 모의 실험의 평균과 표준편차가 제안된 방법에 비하여 약간 큰 경향을 보여준다. 이것은 균열의 성장률과 균열의 길이의 비선형 관계로부터 유추하면, 모의실험의 경우 평균보다 큰 초기 균열이 평균보다 작은 초기 균열에 비해 훨씬 더 많이 성장하기 때문이라고 판단된다.

5. 결 론

균열 성장에 따른 균열 길이의 확률 분포를 제안된 방법을 사용하여 효과적으로 산정할 수 있었다. 기존의 컴퓨터를 이용한 모의실험이나 신뢰도지수를 이용하는 최적화방법과 함께, 피로균열로 인한 파괴확률을 예측할 수 있는 방법으로서 제안된 방법을 이용할 수 있을 것이다. 파괴확률을 추정하기 위해서는 우선 구조물이 파괴에 이르는 균열 길이를 산정하고, 이로부터 일정한 피로하중을 받아 성장한 균열의 분포를 추정하여 파괴확률을 산정할 수 있다.

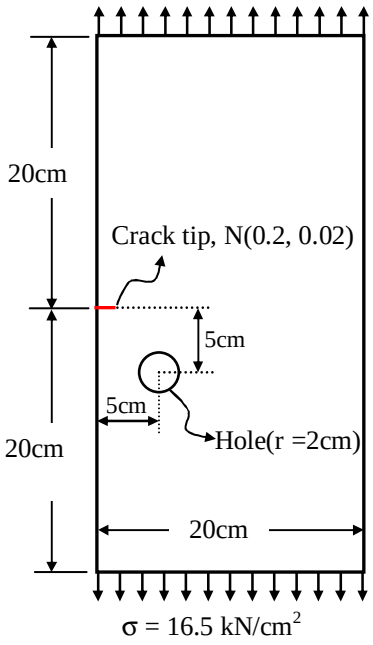

그림 1. 인장을 받는 균열판

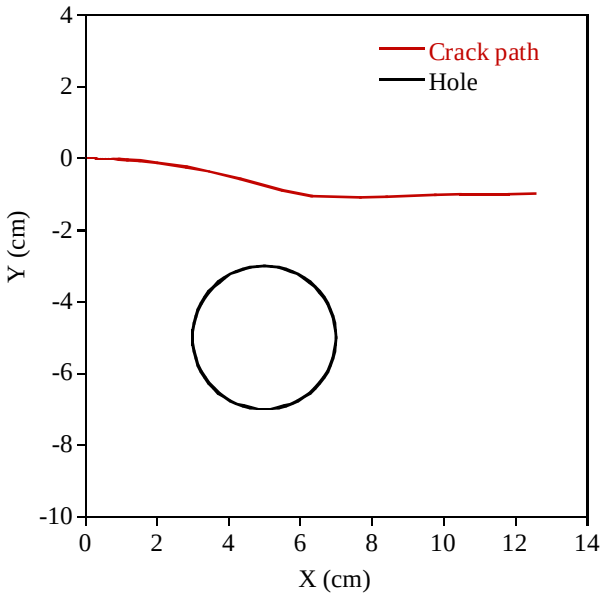

그림 2. 균열의 성장 곡선

표 1. 초기균열과 성장후의 균열의 분포 (단위: cm)

	초기균열 (N = 0)		구멍이 없는 경우 (N = 400,000)		구멍이 있는 경우 (N = 150,000)	
	평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차
제안된 방법	0.2000	0.0200	1.2509	0.3333	1.2949	0.3019
MCS (Size=50)	0.1987	0.0201	1.2738	0.3371	1.2648	0.3835
MCS (Size=100)	0.2002	0.0199	1.2998	0.3405	1.3086	0.3492
MCS (Size=500)	0.2002	0.0206	1.3034	0.3646	1.3134	0.3655
MCS (Size=1000)	0.1996	0.0206	1.2928	0.3569	1.3051	0.3605

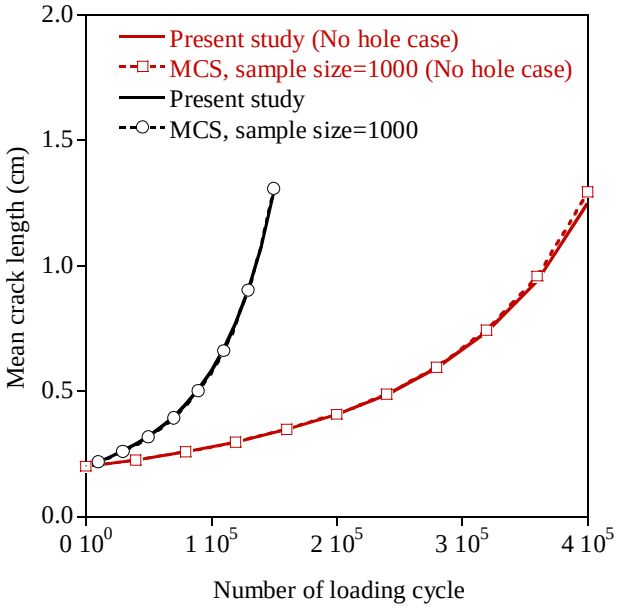

그림 3. 균열성장에 따른 균열 길이의 평균

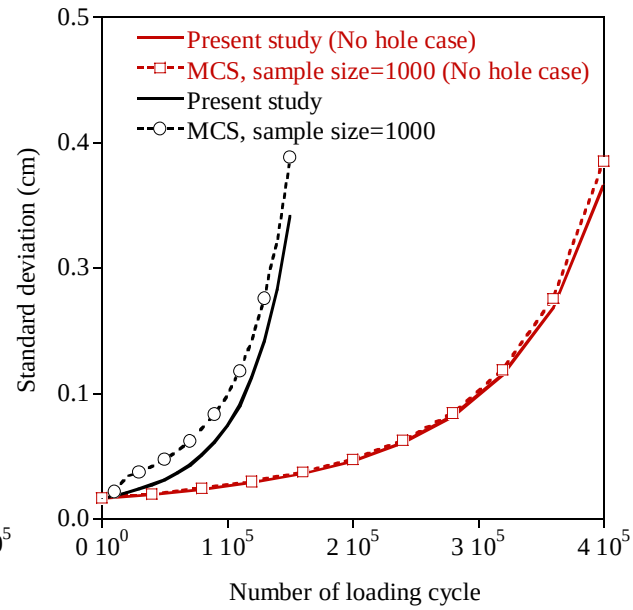

그림 4. 균열성장에 따른 균열 길이의 표준편차

참고문헌

1. G.H. Besterfield, W.K. Liu, M.A. Lawrence, T. Belytschko, Fatigue crack growth reliability by probabilistic finite elements, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 86, pp. 297-320, 1991.

2. Y.J. Lua, W.K. Liu, T. Belytschko, Curvlinear fatigue crack reliability analysis by stochastic boundary element method, *International journal for numerical methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 3841-3854, 1993.

3. D.W. Nicholson, P. Ni, Y. Ahn, Probabilistic theory for mixed mode fatigue crack growth in brittle plates with random cracks, *Engineering fracture mechanics*, Vol. 66, pp. 305-320, 2000.

4. A. Portela, M.H. Aliabadi, D.P. Rooke, Dual boundary element incremental analysis of crack propagation, *Computers & Structures*, Vol. 46, pp. 237-247, 1993.