내압을 받는 파이프에서 소성 물성치를 결정하기 위한 역해석

An Inverse Analysis for Identifying Plastic-Material Properties in a Pipe Subjected to Internal Pressure

이 해성*, o박 현우**

1. 서론

시간이 지남에 따라 대부분의 구조물은 제작시에 지니고 있던 초기 재료의 성질이 외부에서 작용하는 물리적 화학적 요인으로 인해서 변화를 일으킨다. 이로 인해서 구조물은 설계되었던 강성을 잃게 되고 안전성과 사용성에 문제를 일으킬 수 있다. 구조물의 변위와 같은 응답변수로부터 변화된 구조물의 재료 물성치을 추정함으로써, 설계시 구조물의 재료 물성치와 거동에 대해 현재 구조물의 재료 물성치와 거동을 비교 분석할 수 있다.

이 논문에서는 재료의 이력의존성 거동을 고려한 유한요소 역해석 기법을 제안한다. 제안된 기법은 내부에 고온 고압을 받고 있는 구조물이나 파이프등의 초기 물성치가 구조물의 응답변수가 측정되는 시점에서 얼마만큼의 변화를 일으켰는지를 예측할 수 있다. 또한 소성영역의 변화를 예측할 수 있기 때문에 구조물의 안전성 여부에 대한 합리적 판단에 필요한 기초자료를 제공할 수 있다.

소성해석 부분에서 소성변형도-응력 관계식을 일반화된 중앙값 정리에 의해 수치적분하였을 때 유도되는 Consistent Tangent Moduli 를 이용하였다[1]. 역해석 기법에는 반드시 응답변수의 설계변수에 대한 민감도를 계산하여야 한다. 민감도를 계산하기 위한 방법에는 유한차분법, 직접미분법, Adjoint 방법등이 있다. 유한차분법은 간단하지만, 정확한 민감도를 구하기 위한 차분의 크기를 결정하기 어렵고, 민감도의 계산을 위해서 정해석을 다시 수행해야하는 단점이 있다. Adjoint 방법은 상반의 정리에 기초한 방법으로 계산도 간편하고 수학적으로 잘 정립된 방법이긴 하지만 이력의존성 재료에는 적용하기 어려운 단점이 있다. 이 논문에서는 계산도 비교적 간단하고, 이력 의존성 재료에도 적용할 수 있는 직접 미분법을 사용한다. 그리고 실제로 측정된 곳에서 측정 응답변수와 정해석에 의한 응답변수의 오차자승을 목적함수로 사용한다. 그리고 목적함수를 최소화하는 설계변수를 구하기 위해서는 Recursive Quadratic Programming(RQP) 방법을 사용한다[3]. RQP 방법은 목적함수의 2 차미분값이 필요한데, 탄소성재료에서는 응답변수의 2 차 민감도를 구하기가 어려우므로 반복계산을 통해 목적함수의 1 차 미분값과 설계변수의 변화량만으로 2 차 미분값을 근사한다[3].

본 논문에서 제안된 방법을 수치적으로 모사된 변위를 사용한 내압을 받는 파이프 문제에 적용하여 제안된 방법의 타당성을 검증할 예정이다.

2. 지배방정식과 Consistent Tangent Moduli

재료가 소성거동을 보이는 경우 응력-변형도 관계는 고전적인 변화율 형태의 소성변형도 관계를 수치적분하면 선형화된 응력-변형도 관계식인 Consistent Tangent Moduli 를 유도할 수 있다. 계산된 변형도로부터 Return Mapping Algorithm 에 의하여 재료의 항복조건과 일반화된 Hooke 의 법칙을 동시에 만족시키는 응력과 소성변형도 관계를 구하였다.

소성재료에서 지배방정식의 변분식은 다음과 같다.

$$\int_V \delta\varepsilon_{ij}{}^{t+\Delta t}\sigma_{ij}\,dV = \int_V \delta u_i b_i\,dV + \int_{A_t} \delta u_i \overline{T}_i\,dA \tag{1}$$

* 서울대학교 토목공학과 조교수

** 서울대학교 토목공학과 석사과정

여기서 ${}^{t+\Delta t}\sigma_{ij}$, $\delta\varepsilon_{ij}$, δu_i 는 시간 $t+\Delta t$ 에서 응력텐서, 가상변형도, 가상변위를 나타내고, b_i, $\overline{T}_i$ 는 체적력, 경계면에서 정의되는 표면력을 나타내며, V, A_t 는 정의영역, 표면력 경계조건이 주어신 경계를 나타낸다.

등방성 경화의 특성의 가지는 소성재료의 항복함수는 다음과 같다.

$$\Psi = \phi(\sigma_{ij}) - k(\bar{e}^{p}) = 0 \tag{2'}$$

σ_{ij} 는 응력텐서, ϕ 는 식 (2')에 따라 주어지는 함수, k 는 경화함수, $\bar{e}^{p}$ 는 유효 소성변형도이다.

식 (1)의 선형화된 변분식은 다음과 같다.

$$\int_V \delta\varepsilon_{ij}\Delta\sigma_{ij}dV = \int_V \delta u_i b_i dV + \int_{A_t} \delta u_i \overline{T}_i dA - \int_V \delta\varepsilon_{ij}{}'\sigma_{ij}dV \tag{2}$$

여기서 $\Delta\sigma_{ij} \equiv {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} - {}^{t}\sigma_{ij}$ 이고, ${}^{t}\sigma_{ij}$ 는 시간 t 에서의 응력텐서이다.

변화율 형태의 소성변형도 관계를 일반화된 중앙값정리로 수치적분해서 얻어진 응력-변형도 관계식인 Consistent Tangent Moduli 에 의해 $\Delta\sigma_{ij}$ 는 다음과 같이 나타내진다.

$$\Delta\sigma_{ij} = D^{ep}_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl} \tag{3}$$

D^{ep}_{ijkl} 은 Consistent Tangent Moduli 로 등방성 경화의 특성을 갖는 재료의 경우 다음과 같이 나타내진다[1].

$$D^{ep}_{ijkl} = \Xi_{ijkl} - \frac{\Xi_{ijmn}\dfrac{\partial\underline{\phi}}{\partial\sigma_{mn}}\left(\dfrac{\partial\underline{\underline{\phi}}}{\partial\sigma_{pq}} - \alpha\underline{\underline{\kappa'\lambda}}\dfrac{\partial\underline{\underline{\varphi}}}{\partial\sigma_{pq}}\right)\Xi_{pqkl}}{\left(\dfrac{\partial\underline{\underline{\phi}}}{\partial\sigma_{ij}} - \alpha\underline{\underline{\kappa'\lambda}}\dfrac{\partial\underline{\underline{\varphi}}}{\partial\sigma_{ij}}\right)\Xi_{ijkl}\dfrac{\partial\underline{\phi}}{\partial\sigma_{kl}} + \underline{\underline{\kappa'\varphi}}} \tag{4}$$

$$\underline{(\;)} = (1-\alpha)^{t}(\;) + \alpha^{t+\Delta t}(\;)$$

$$\underline{\underline{(\;)}} = {}^{t+\Delta t}(\;)$$

$$\Xi_{ijkl} = \left(C^{-1}_{ijkl} + \alpha\underline{\underline{\lambda}}\frac{\partial^2\underline{\phi}}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\right)^{-1}$$

$$\underline{\varphi} = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{\partial\underline{\phi}}{\partial\sigma_{kl}}\frac{\partial\underline{\phi}}{\partial\sigma_{kl}}}$$

C_{ijkl} 은 탄성상태의 응력-변형도 관계텐서, α 는 적분매개변수, λ 는 lagrangian multiplier, κ 는 경화변수이다.

3. 목적함수와 민감도의 계산

이 논문에서는 정해석에 의한 변위와 측정 변위와의 오차를 최소화하는 설계변수를 최소자승법에 의하여 결정한다. 이를 위하여 목적함수를 다음과 같이 다음과 같이 정의한다.

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(u_i - \bar{u}_i)^2 \tag{5}$$

여기서 u_i는 측정점에서 정해석에 의한 변위이고, $\bar{u}_i$는 측정점에서 측정된 변위이며 N은 측정점의 갯수이다. 식 (5)에 정의된 목적함수를 최소화하기 위해서 RQP 방법을 쓴다. RQP 방법에서 설계변수에 대한 목적함수의 2차 미분값이 필요한데, 이를 계산하기 위해서 설계변수에 대한 변위의 2차 민감도가 필요하다. 설계변수에 대한 변위의 2차 민감도를 구하기가 어려우므로 반복계산을 통해 설계변수에 대한 목적함수의 1차 미분값과 설계변수의 변화량으로 2차 미분값을 근사할 수 위해 제안되어 있는 Hessian Matrix Update Algorithm을 이용한다[3].

식 (5)를 설계변수 X_m에 대해서 미분하면 설계변수에 대한 목적함수의 1차 미분값을 구할 수 있고 다음과 같다.

$$\Pi_{,m} = \sum_{i=1}^{N} u_{i,m}(u_i - \bar{u}_i) \tag{6}$$

여기서,

$$(\cdot)_{,m} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial X_m}$$

$u_{i,m}$는 측정점에서 설계변수에 대한 변위의 1차 민감도이다.

설계 변수에 대한 변위의 1차민감도는 정해석상에서 반복계산을 통해 시간 $t+\Delta t$에서 수렴된 식 (1)을 설계변수 X_m에 대해 직접 미분하여 얻을 수 있다.

식 (1)의 양변을 설계변수 X_m에 대해서 미분하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial X_m}\int_V \delta\varepsilon_{ij}\, {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij}\, dV = \frac{\partial}{\partial X_m}\int_V \delta u_i b_i\, dV + \frac{\partial}{\partial X_m}\int_{A_T} \delta u_i \bar{T}_i\, dV \tag{7}$$

설계변수 X_m은 정의영역과 체적력, 표면력에 독립적인 변수라고 가정하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_V \delta\varepsilon_{ij}\, {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij,m}\, dV = 0 \tag{8}$$

설계변수 X_m에 대한 시간 $t+\Delta t$에서 수렴된 응력텐서의 ${}^{t+\Delta t}\sigma_{ij}$의 민감도 ${}^{t+\Delta t}\sigma_{ij,m}$은 일반화된 Hooke의 법칙과 Flow rule을 일반화된 중간값 정리로 적분한 소성변형도 관계식으로 부터 구해지고, 여기서 ${}^{t+\Delta t}\sigma_{ij,m}$를 알고 있는 값들과 ${}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{kl,m}$으로 나타낼 수 있다[2].

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij,m} &= {}^{t}\sigma_{ij,m} + D^{ep}_{ijkl,m}\, {}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{kl} + D^{ep}_{ijkl}\, {}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{kl,m} \\ &= {}^{t}\sigma_{ij,m} + {}^{t}\tilde{\sigma}_{ij,m} + D^{ep}_{ijkl}\, {}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{kl,m} \end{aligned} \tag{9}$$

여기서

$$\tilde{\sigma}_{ij,m} \equiv D^{ep}_{ijkl,m}\, {}^{t+\Delta t}\Delta\varepsilon_{kl}$$

D^{ep}_{ijkl}는 $t+\Delta t$에서 수렴된 기지의 Consistent Tangent Moduli이고, $\tilde{\sigma}_{ij,m}$도 $t+\Delta t$에서 알고 있는 기지의 텐서이다.

식 (9)를 식 (8)에 대입하면,

$$\int_V \delta\varepsilon_{ij} ({}^t\sigma_{ij,m} + {}^t\tilde{\sigma}_{ij,m} + D_{ijkl}^{ep\ t+\Delta t} \Delta\varepsilon_{kl,m}) dV = 0 \tag{10}$$

여기서,

$$\varepsilon_{kl,m} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{k,m}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_{l,m}}{\partial x_k}\right)$$

식 (10)를 이산화하여 유한요소법을 적용시키면 이산화된 요소들의 절점에서 설계변수 X_m 에 대한 변위의 민감도 $(u)_{,m}$ 를 구할 수 있다. 여기서 (u) 는 이산화된 요소들의 절점의 변위벡터이다.

4. 예제

이 논문에서 제안한 방법을 수치적으로 모사된 변위를 사용하는 다음의 예제에 적용시켜서 그 타당성을 검증하려고 한다.

예제(그림 1)는 크기가 알려진 내부 반지름 R_i, 외부 반지름 R_o 인 파이프 내벽에 내압 P_0 t/m/m 로 작용하고 파이프는 등방성경화의 특성을 갖는 Von-Mises 의 항복조건을 따른다. 이 때 설계변수로 등방성경화의 특성을 갖는 Von-Mises 의 항복조건을 결정짓는 변수인 초기 항복응력 σ_y, 경화변수 H' 를 고려한다.

측정점에서의 측정치는 기지의 σ_{y0}, H'_0, 로 위의 문제를 정해석 해서 산출된 변위로 잡고, 그 위치는 파이프의 바깥쪽 절점들로 한정한다. 실제 해석시에는 문제 자체가 축대칭성의 문제이므로 파이프의 대칭축을 중심으로 1/4 영역만을 해석영역으로 고려한다.

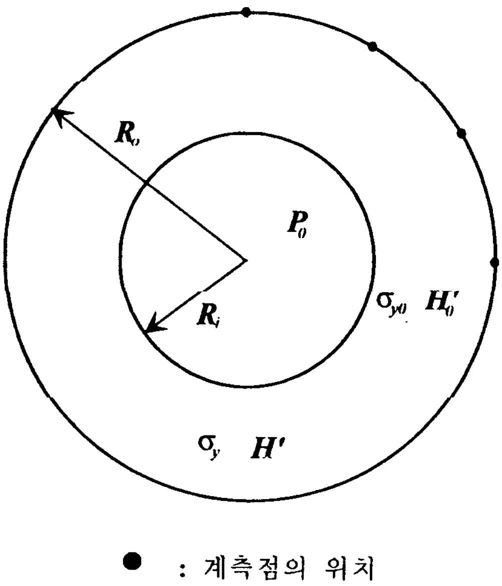

그림 1. 내압을 받는 파이프

참고문헌

1. Simo, J.C. and Taylor, R.L., 1985, "Consistent Tangent Operators for Rate Independent Elastoplasticity", *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol.48, pp101-118

2. Vidal, C. A and Haber, R. B. (1993). "Design Sensitivity Analysis for Rate-independent Elastoplasticity," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* Vol. 107, pp. 393-431.

3. Banan, M. R., Banan, M. R. and Hjelmstad, K. D. (1994). "Parameter Estimation of Structures From Static Response. I. Computational Aspects," *Journal of Structural Engineering*, Vol 120, No. 11, pp. 3243-3283.