이계삼차모멘트법을 이용한 이차원 균열체의 피로수명의 확률해석

Probabilistic Analysis of Fatigue Life of Two-dimensional Cracked Body by Second-Order Third-Moment Method

김기석* · 이해성**

Kim, Ki-Seok · Lee, Hae Sung

1. 서 론

설계에서 구조물의 피로 수명은 실험으로부터 얻어진 피로-강도 곡선에 기초하여 고려된다. 그런데 같은 조건의 피로 시험이라도 재료의 비균질성이나 미세구조의 결함을 포함한 여러 가지 요인에 의하여 구조물의 피로수명은 확률분포를 갖게 되고 그 분산이 매우 큰 것으로 보고 되었다 [1]. 피로 균열 성장을 선형탄성균열역학과 Paris 방정식에 기초하여 해석하려는 연구가 1960 이후 이루어져 왔다. 피로 균열의 확률해석에 대한 연구 동향은, 일계신뢰도법(First-Order Reliability Method)을 적용하여 구조물의 파괴확률을 산정하는 연구들이 대부분이지만, 최근 들어 균열 길이나 피로 수명의 확률분포를 추정하려는 연구가 이루어지고 있다. Hong 등 [2]은 이계삼차모멘트법(Second-Order Third-Moment Method)을 이용하여 균열 길이의 확률분포를 추정하였다. 그러나 그들의 연구에서는 무한 균열판의 해석해를 이용하였기 때문에 유한 균열판의 피로 성장에 따른 기하형상의 변화는 고려되지 않았다. 이 연구에서는 유한 균열체의 피로 성장을 이중경계요소법(Dual Boundary Element Method) [3]과 Paris-Erdogan 방정식으로 수치모사하고, 이계삼차모멘트법을 이용하여 균열 길이의 확률분포를 추정한다. 또한 제안된 모멘트법을 이용하여 미세균열과 거시균열의 전체 피로수명의 확률분포를 추정하여 피로-강도 곡선을 수치적으로 산정한다.

2. 피로 균열의 성장 해석

이 연구에서는 선형탄성균열역학(Linear Elastic Fracture Mechanics)의 적용 가능성을 기준으로 미세균열과 거시균열을 구분한다. 선형탄성균열역학을 적용할 수 있는 최소 균열 길이(또는 하한계 균열 길이)는 다음과 같다 [4].

$$l_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\Delta K_{\mathrm{th}}}{Y_{\mathrm{g0}}\Delta\sigma_{\mathrm{e}}}\right)^2 \tag{1}$$

여기서, K_{th}는 임계응력확대계수(threshold)이고, σ_{e}는 피로 한계(fatigue limit)이다. Y_{g0}는 초기의 기하형상함수이다. 미세균열의 피로수명은 하한계 균열 길이 이하에서는 성장률이 일정하다고 가정하여 근사 한다. 거시 균

* 정회원 · 서울대학교 지구환경시스템공학부 · 공학박사 · E-mail: kskim93@snu.ac.kr – 발표자
** 정회원 · 서울대학교 지구환경시스템공학부 부교수 · 공학박사 · E-mail: chslee@plaza.snu.ac.kr

열에 대해서는 Paris-Erdogan 방정식을 적분하여 산정한다. 미세균열과 거시균열의 전체 피로수명은 다음과 같다.

$$N_{\mathrm{T}} = N_{\mathrm{micro}} + N_{\mathrm{macro}} = \frac{l_0}{C(Y_{g0}\sigma\sqrt{\pi a_0})^m} + \int_{l_0}^{a_{cr}} \frac{1}{CK^m(a)} da \tag{2}$$

여기서, C 와 m 은 성장률 계수이고, a_{cr} 는 파괴에 대한 임계 균열길이이다. 거시 균열에 대해서는 균열체를 이중경계요소법으로 수치해석하고, 균열 선단에서 변위외삽법으로 응력확대계수를 산정한다. Paris-Erdogan 방정식을 주어진 ΔN 에 대하여 이산화하면 다음과 같다.

$$N_{\mathrm{macro}} = \sum_{p=1}^{n} \Delta\hat{N}_p = \sum_{p=1}^{n} \int_{a_{p-1}}^{a_p} \frac{1}{CK^m} da \tag{3}$$

이산화된 Paris-Erdogan 방정식 (3)으로부터 각각의 성장 단계의 균열 증분(Δa_p)을 산정하여 피로 성장을 수치모사한다.

3. 이계삼차모멘트법에 의한 피로 균열의 확률 해석

초기 균열 길이와 성장률 계수 C 가 확률 변수일 때, 이산화된 Paris 방정식 (3)에서 성장 후의 균열 길이는 다음과 같이 이전 단계(p–1)의 균열 길이와 성장률 계수 C 의 함수가 된다.

$$a_p = y(\mathbf{x}) = y(a_{p-1}, C) \tag{4}$$

성장 후의 균열 길이를 확률변수에 대하여 2 차의 테일러 급수로 근사하고 이로부터 성장 후의 균열 길이의 평균과 k 차 공분산을 다음과 같이 확률변수 $\mathbf{x}$ 의 확률분포로부터 근사 한다.

$$\bar{y} = y(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2} y_{ij} C_{ij} \tag{5}$$

$$\mu_Y^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \bar{y})^k f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} (y(\mathbf{x}) - \bar{y})^k f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{6}$$

여기서, y_{ij} 와 C_{ij} 는 각각 균열 길이의 2 차 편미분과 확률변수의 2 차 공분산 행렬이고, $f_{\mathbf{X}}$ 는 $\mathbf{x}$ 의 결합확률밀도이다. 식 (5)와 (6)를 이용하여, 이산화된 피로 성장 과정에서 이전 단계 (p–1)의 균열의 확률분포로부터 다음 단계 (p)의 균열의 확률분포를 추정할 수 있다. 각각의 성장 단계에서 균열 길이의 평균, 표준편차, 왜도를 추정하고 이로부터 균열 길이의 확률분포를 모멘트추정법(Method of Moment Estimation)에 의하여 삼변수 대수정규분포나 Weibull 분포로 추정한다.

신뢰도 평가를 위한 한계상태식은 다음과 같이 파괴에 대한 임계균열길이 a_{cr} 와 성장 후의 균열 길이 a 로 정의 된다.

$$g(\mathbf{x}) = g(a_0, C, a_{\mathrm{cr}}) = a_{\mathrm{cr}} - a(a_0, C) \tag{7}$$

파괴확률은 식 (7)의 한계상태식이 0 보다 작은 영역의 적분으로 다음과 같이 산정한다.

$$P_f = \int_{g<0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{\infty} F_{cr}(a) f_a(a)da \qquad (6)$$

여기서, F_{cr} 와 f_a 는 각각 a_{cr} 의 누적밀도함수와 균열 길이 a 의 확률밀도함수이다.

식 (2)의 전체 피로수명은 하한계 균열길이와 성장률 계수의 함수이다. 전체 피로수명을 응답함수로 하여 제안된 이계삼차모멘트법을 적용하면, 하한계 균열 길이와 성장률 계수 C 의 확률분포로부터 피로수명의 확률분포를 추정할 수 있다. 이때, 하한계 균열길이의 확률분포는 임계응력확대계수 K_{th} 와 피로한계 σ_e 로부터 결정된다. 피로 응력(σ)의 크기를 변화시켜서 95% 신뢰한계선의 피로-강도 곡선을 수치적으로 산정한다.

4. 예제

그림 1 에서 편측 균열을 포함한 강판이 인장 피로 응력(σ = 16.5 kN/cm^2)을 받고 있다. 하한계 균열길이는 평균이 0.0336cm 이고 변동계수가 5%인 정규분포이다. 0.0336cm 의 초기 균열이 0.2cm 로 성장할 때까지는 기하형상함수 Y_g 의 변화량이 0.3% 정도로 매우 작다. 따라서 무한 균열판(Y_g=1.12)으로 가정하여 Paris-Erdogan 방정식을 해석적으로 적분하여 피로수명을 산정한다. 0.2cm 이후의 거시균열에 대해서는 추가적인 40 만회의 피로 하중을 20 등분으로 나누어 재하하여 피로 성장을 수치모사 하였다. 미세균열의 피로수명이 대략 82 만회이고 전체 피로수명은 대략 220 만회이다.

Monte-Carlo Simulation (MCS)과 제안된 모멘트법으로 균열 길이의 확률분포를 추정하여 비교하였다. MCS 는 10,000 개의 임의 자료를 Latin Hypercube Sampling 법으로 추출하여 균열 성장을 모사하였다. MCS 에 대한 K-S 테스트의 결과 성장 후 균열 길이를 삼변수 대수정규분포로 가정하였다. 그림 2 는 MCS 와 제안된 모멘트법으로 추정한 균열 길이의 확률분포이다. 변동계수가 30%인 18 번째 하중 재하 단계까지는 MCS 의 결과와 잘 일치한다. 이때의 평균, 표준편차, 왜도의 차이는 각각 0.1, 1.4, 14.8 % 로서 평균과 표준편차를 거의 정확하게 추정하고 있다. 그림 3 은 제안된 모멘트법과 일계신뢰도법으로 산정한 파괴확률을 비교한 것이다. 제안된 모멘트법과 일계신뢰도법의 결과를 비교할 때, 0.01%의 파괴확률에 대한 공용피로수명의 차이는 약 3% 이다. 성장률 계수 C, 임계응력확대계수 K_{th}, 피로한계 σ_e 의 확률분포를 변동계수 3%, 5%, 10%의 대수정규분포로 가정하여 피로수명의 확률분포를 제안된 이계삼차모멘트법으로 추정하였다. 그림 4 에서 물성치의 변동계수가 5%일 때 추정한 피로-강도 곡선이 설계치에 가장 가까워 진다.

5. 결론

이 연구에서는 이계삼차모멘트법을 이용하여 피로 성장에 따른 균열 길이의 확률분포를 추정하고 이로부터 신뢰도 평가를 수행하여 주어진 파괴확률에 대한 피로 수명을 산정하였다. 제안된 모멘트법은 성장 후 균열 길이의 변동 계수가 약 30%까지는 확률분포를 매우 잘 추정하였다. 또한 물성치의 확률분포에 따른 피로수명의 확률분포를 추정하여 피로-강도 곡선을 수치적으로 도출하였다.

참고문헌

1. Liao M., Shun Q., Yang Q., 1996, "Large sample size experimental investigation on the statistical nature of fatigue crack

initiation and growth", International Journal of Fatigue 18, pp. 87-94.

2. Hong Y. J., Xing J., Wang J. B., 1999, “A Second-order Third-moment Method for Calculating the Reliability of Fatigue”, Int. J. Pressure Vessels Piping 76, pp.567-570.

3. Portela A., Aliabadi M. H., Rooke D. P., 1993, “Dual Boundary Element Incremental Analysis of Crack Propagation”, Comput. Struct. 46, pp.237-247.

4. Hudak S.J., "Small crack behavior and the prediction of fatigue life", ASME Journal of Engineering Materials and Technology Vol 103, pp. 26-35, 1981

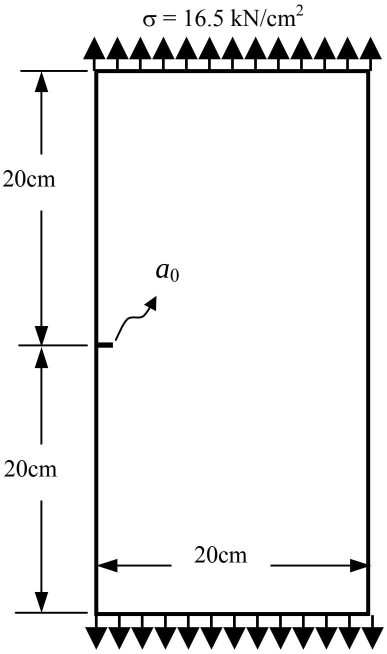

그림 1. 인장 응력을 받는 편측 균열 예제

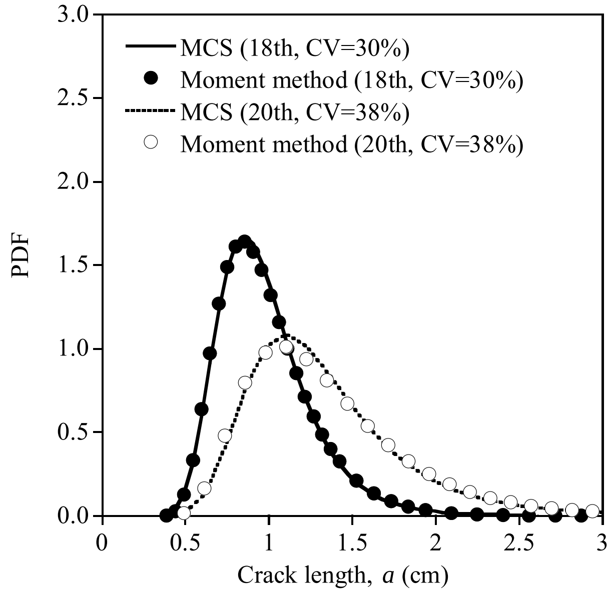

그림 2. 성장 후의 균열 길이의 확률 분포

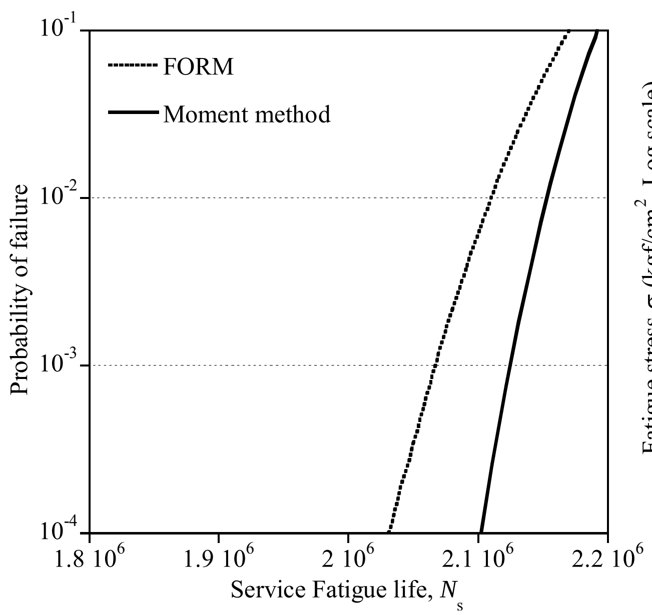

그림 3. 공용피로수명에 대한 파괴확률

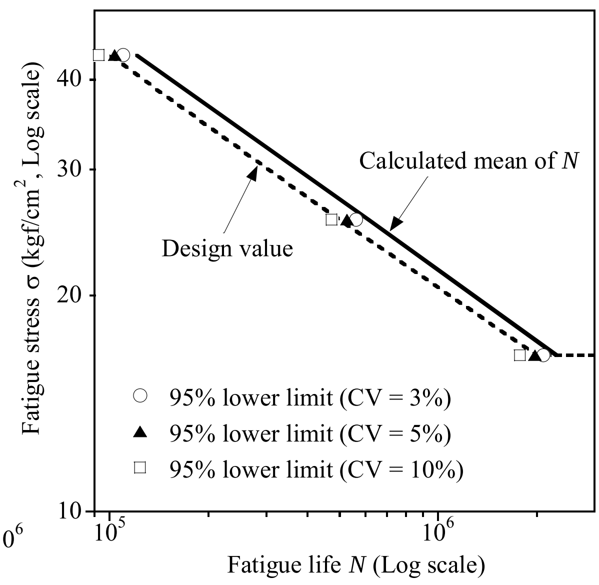

그림 4. 피로-강도 곡선