

# 영역 변수화에 의한 2 차원 투수문제에서의 자유표면의 결정

## Analysis of 2-dimensional Seepage Problem in Earth Dams by the Domain Parameterization Technique

이 해성\*, 오 김 용한\*\*

### 1. 서론

어떤 공학적문제에서는 정의영역과 그 경계면이 주어지지 않고, 문제 자체의 해에 의하여 결정되는 경우가 있다. 이런 문제를 자유표면 문제라고 정의하며 대표적인 예로서 고체역학 분야의 균열의 전파예측 문제와[1] 유체역학 분야의 흙 댐내에서의 투수현상등을 들 수 있다. 자유 표면 문제에서는 경계조건이 미지의 경계에서 정의되기 때문에 경계조건을 주어진 문제의 지배방정식에 직접 적용하여 해를 구할 수 없다. 이를 해결하기 위하여 기존의 연구에서는 적절한 검사체적을 가정하여 주어진 지배방정식을 풀고, 그 해에 의하여 자유표면의 기하학적 형상을 수정하여 수렴할 때까지 반복하는 방법을 사용하였다. 그러나 이러한 방법은 수렴속도가 느리고, 수렴성여부도 보장되지 않는 단점이 있다. 이를 극복하기 위하여 고체 역학분야에서는 영역 변수화 기법(Domain Parameterization technique)[2] 에 기초한 오일러리언-라그란지언 운동학적 모형(Eulerian-Lagrangian Kinematic Description, ELD)[1,3,4]이 제안되어 균열전파 해석에 성공적으로 적용되었다. ELD에서는 미지의 경계의 기하적 형상이 변위와 함께 미지량으로 취급되어, 변위와 미지의 자유 표면 형상을 동시에 구하는 반복계산법을 사용한다. 이 방법은 Newton-Raphson 방법에 기초하기 때문에 수렴속도가 대단히 빠르며, 수렴성도 보장된다.

본 연구에서는 ELD의 기본적 개념인 영역 변수화 기법을 유체역학 분야인 흙 댐내에서의 투수문제 해석에 적용하려 한다. 흙 댐내에서의 유체흐름에 있어서 자유표면인 최상단 유선의 형상이 미리 주어지지 않으므로 즉 검사체적이 미리 정의되지 않기 때문에 검사체적과 무관한 기지의 기준체적을 기준좌표계에서 정의하고 일대일 사상을 이용하여 검사체적을 기준체적에 대하여 표시한다. 정의된 일대일 사상은 기준좌표와 검사체적에서의 미지의 최상단 유선의 좌표로 표시된다. 최상단 유선의 좌표를 미지의 포텐셜 함수로 표시하여 주어진 지배방정식을 포텐셜에 대하여 풀므로써 최상단 유선의 형상과 검사체적 내에서의 포텐셜 함수를 결정한다. 이를 위하여 2 차원 투수 현상에 대한 기준체적에서의 변분식을 유도하고, Newton-Raphson 방법에 의하여 증분식을 유도하여, 이를 등매개변수 유한요소를 사용하는 2 단계 사상에 의하여 기준체적에서 이산화한다. 예제로써 등변 사다리꼴 흙 댐에 대하여 정상상태의 최상단 유선의 위치를 구하고 천이 상태의 결과가 시간의 흐름에 따라 정상상태로 수렴함을 보인다. 또한 천이상태에서 댐 허류부의 침투면에서의 자유표면의 변화를 알아본다.

### 2. 영역 변수화 기법 (Domain Parameterization Technique)

영역 변수화 기법에서는 미지의 자유표면의 기하학적 형상을 미지수로 취급하게 되어 지배방정식의 해와 동시에 구한다. 영역 변수화를 위하여 검사체적  $V$ 와는 무관한 기지의 기준체적  $\Omega$ 를 정의한다. 자유표면이 시간에 따라 변화하므로 검사체적은 시간에 따라 변할 수 있으나 기준체적은 시간과 무관한 일정한 형상을 갖는다. 검사체적 내에서의 고정된 공간 위치는 공간 좌표  $X$ 로 표시되며 기준 형상에서의 위치는 기준좌표  $r$ 로 표시된다

검사체적의 미지경계의 좌표는 미지경계에 대응하는 기준체적의 경계면에서의 기준좌표로 나타낼 수 있다.

$$\eta(t) = (x^f(r^f, t), y^f(r^f, t)) \quad (1)$$

여기서,  $r^f, x^f, y^f$ 는 각각 미지형상 표면에 대응하는 기준형상의 경계면의 좌표, 미지형상 표면의  $x$  좌표와  $y$  좌표이다.

\* 서울대학교 토목공학과 조교수

\*\* 서울대학교 토목공학과 석사과정

시간  $t$  에서 검사체적 내부의 좌표  $\mathbf{x}$  는 일대일 사상에 의하여 기준좌표  $\mathbf{r}$  과 미지경계의 위치에 대하여 표시된다.

$$\mathbf{x}(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}, \eta(t)) \quad (2)$$

식 (2)에서 주어진 사상은 자유표면의 변화에 따른 검사체적의 변화를 나타낸다. 검사체적에서 정의되는 모든 변수는 식 (2)에 의하여 기준좌표에 대하여 표시할 수 있다.

$$F(\mathbf{x}(\mathbf{r}, t)) = F(\mathbf{r}, t) \quad (3)$$

시간에 대한 변화율은 검사체적이 정의되어 있는 공간좌표계와 기준좌표계에서 각각 정의되며 공간좌표계에서는 고정된 공간 좌표에서의 시간에 대한 미분이며, 기준좌표계에서는 고정된 기준 좌표에서의 시간에 대한 미분이다. 공간좌표계와 기준좌표계에서의 시간에 대한 변화율의 관계는 다음과 같다 [4].

$$(\dot{\phantom{x}}) = (\dot{\phantom{x}}) + \nabla(\phantom{x}) \cdot \dot{\mathbf{X}} = (\dot{\phantom{x}}) + \nabla_r(\phantom{x}) \cdot \bar{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{X}} \quad (4)$$

여기서  $\dot{\phantom{x}}$  와  $\nabla$  는 각각 공간 좌표계와 기준 좌표계에서의 시간에 대한 변화율이며  $\bar{\mathbf{J}}$  는 역 Jacobian 이다.  $\nabla$  와  $\nabla_r$  은  $\mathbf{X}$  와  $\mathbf{r}$  에 대한 gradient 연산자이다.

### 3. 흙땀내에서의 천이상태 투수 현상에 대한 지배방정식 및 변분식

등방성 투수계수를 가지는 흙 땀내에서의 천이상태의 투수현상은 다음과 같은 지배방정식과 경계조건 그리고 초기조건에 의하여 표시된다.

$$S \dot{\Phi} = k \nabla^2 \Phi \quad \text{in } V(\eta(t)) \times ]0, \Pi[ \quad (5)$$

$$\Phi = p \quad \text{on } A_p(\eta(t)) \times ]0, \Pi[ \quad (6a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = f \quad \text{on } A_f(\eta(t)) \times ]0, \Pi[ \quad (6b)$$

$$\Phi(\mathbf{X}(\mathbf{r}, 0)) = {}^0\Phi(\mathbf{X}(\mathbf{r}, 0)) \quad \text{in } {}^0V \quad (7a)$$

$$\eta(0) = {}^0\eta \quad (7b)$$

여기서,  $\Phi$ ,  $V$ ,  $A$ ,  $S$ ,  $k$ ,  $\eta(t)$  는 각각 포텐셜 함수, 검사체적과 경계면, 저류계수, 투수계수 그리고 시간  $t$  에서의 자유표면의 형상이다.  ${}^0\eta$  와  ${}^0V$  는 초기 자유표면의 형상 그리고 초기 자유표면 형상에 의하여 정의되는 초기 검사체적이다.  $A_p$  와  $A_f$  는 각각 포텐셜과 플럭스가 정의된 경계면이며  $p$  와  $f$  는 각각  $A_p$  와  $A_f$  에서 정의된 함수이다.  $A_p$  는 상류측 경계면, 하류측 경계면 그리고 천투면 (seepage face) 으로 이루어져 있다.

이 연구에서는 상류측 수위와 하류측 수위는 시간에 따라 변하지 않는다고 가정한다. 식 (5), (6), (7) 은 미지의 자유표면에 대하여 표시되어 있으므로, 자유표면을 정의하는 조건식이 필요하다. 자유표면에서는 포텐셜 함수가 자유표면의 높이 즉  $y$  좌표와 같으므로 다음과 같이 포텐셜 함수를 표시할 수 있다.

$$\Phi(y^f) = y^f \quad (8)$$

식 (8)에 의하여는 자유표면의  $y$  좌표만 정의되므로, 자유표면의  $x$  좌표는 다음과 같이 주어진 함수  $f$  와 자유표면의  $y$  좌표에 의하여 결정된다고 가정한다.

$$x^f(\mathbf{r}^f, t) = \zeta(\mathbf{r}^f, y^f(\mathbf{r}^f, t)) \quad (9)$$

식 (5), (8), (9) 에 경계조건과 초기조건을 적용하여 포텐셜 함수와 미지의 자유표면 형상에 대하여 풀면 흙땀 내부에서의 투수문제의 해를 구할 수 있다. 식 (6a) 에서 주어진 포텐셜에 대한 경계조건은 비균일 경계조건이다. 비균일 경계조건을 갖는 문제에 대한 변분식은 유도하기가 어려우므로 다음과 같이 포텐셜 함수를 치환하여 비균일 경계조건을 균일 경계조건으로 치환한다.

$$\varphi = \Phi - h \quad (10)$$

여기서  $h$  는 다음과 같이 정의되는 기지의 함수이다

$$h = p \quad \text{on } A_p \quad (11)$$

식 (4)를 식 (1)에 대입하여 균일 경계조건을 가지는 미분방정식으로 바꾼후 이를 기준좌표계에 대하여 나타내면 다음과 같은 변분식을 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
& S \int_V \hat{\phi} \tilde{J} d\Omega + k \int_V (\nabla_r \hat{\phi} \cdot \bar{J}) \cdot (\nabla_r \phi \cdot \bar{J}) \tilde{J} d\Omega - S \int_V \hat{\phi} \nabla_r \phi \cdot \bar{J} \cdot \dot{X} \tilde{J} d\Omega - S \int_V \hat{\phi} \nabla_r h \cdot \bar{J} \cdot \dot{X} \tilde{J} d\Omega = \\
& - S \int_V \hat{\phi} \dot{h} \tilde{J} d\Omega - k \int_V (\nabla_r \hat{\phi} \cdot \bar{J}) \cdot (\nabla_r h \cdot \bar{J}) \tilde{J} d\Omega \quad \forall \hat{\phi} \in v_\phi
\end{aligned} \tag{12}$$

#### 4. 영역 이산화 및 등매개변수 유한요소를 사용한 변분식의 이산화 및 증분식

등매개변수 유한요소를 사용하여 포텐셜 함수와 기준체적을 이산화한다. 검사체적의 기하학적 형상을 정의하기 위하여 2 단계 사상을 사용한다. 첫번째 사상은 이산화된 기준체적의 절점 위치에 대한 검사체적에서의 절점 좌표를 자유표면상의 절점 좌표에 의하여 표시하기 위하여 사용되며, 두번째 사상은 첫번째 사상에 의하여 결정된 검사체적에서의 절점좌표에 의하여 기준체적에서의 유한요소에 대응하는 검사체적에서의 유한요소의 기하학적 형상을 나타내기 위하여 사용된다. 두번째의 사상에는 등매개 변수 사상을 적용한다.

식 (12) 은 포텐셜 함수에 대한 비선형 방정식이기 때문에 적절한 반복 계산법을 사용하여야 한다. 반복 계산에 필요한 증분식을 포텐셜 함수와 자유표면의 기하적 형상에 관련된 변수를 증분 형태로 표시하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
& S \int_V \hat{\phi}^{i+\Delta t} \tilde{J}^{i+\Delta t} d\Omega + k \int_V (\nabla_r \hat{\phi}^{i+\Delta t} \cdot \bar{J}) \cdot (\nabla_r \phi^{i+\Delta t} \cdot \bar{J}) \tilde{J}^{i+\Delta t} d\Omega \\
& - S \int_V \hat{\phi} \nabla_r \phi^{i+\Delta t} \cdot \bar{J} \cdot \dot{X}^{i+\Delta t} \tilde{J}^{i+\Delta t} d\Omega - S \int_V \hat{\phi} \nabla_r h^{i+\Delta t} \cdot \bar{J} \cdot \dot{X}^{i+\Delta t} \tilde{J}^{i+\Delta t} d\Omega = \\
& - S \int_V \hat{\phi} \dot{h}^{i+\Delta t} \tilde{J}^{i+\Delta t} d\Omega - k \int_V (\nabla_r \hat{\phi}^{i+\Delta t} \cdot \bar{J}) \cdot (\nabla_r h^{i+\Delta t} \cdot \bar{J}) \tilde{J}^{i+\Delta t} d\Omega \quad \forall \hat{\phi} \in v_\phi
\end{aligned} \tag{13}$$

#### 5. 예제 및 결론

본 연구에서 제안된 방법을 천이상태 및 정상상태에 대한 해석을 수행하였다.  $t=0$  에서 하류측 수심이 상류측 수심과 같고, 해석이 시작되는 순간 즉  $t=0^+$  에서 하류측 수심이 순간적으로 강하하여 댐 하류부의 일정한 수심을 유지한다고 가정하였다. 그림 1 은 댐의 기하적형상,재료의 물성치, 경계조건을 보여준다. 그림 2.에서 천이상태에서의 요소형상은 시간에 따라 초기상태의 요소형상과 정상상태의 요소형상 사이에서 변화함을 보인다. 그림 3 은 초기상태,천이상태,정상상태의 자유표면의 위치를 나타내며 충분한 시간(약 300 일)이 흐른 후에는 정상상태와의 오차가 3% 정도로 거의 정상상태로 수렴함을 보인다. 그림 4 에서는 댐 하류부에서의 자유수면의 시간에 따른 변화를 알 수 있다.

제안된 방법은 기존의 연구에서 나온 결과와 비교할 때 빠른 수렴성과 수치적 안정성을 보였다.[5] 현 단계 연구에서는 흙댐내의 투수계수가 일정한 문제만 취급하였으나, 제안된 방법은 흙댐이 서로 다른 투수계수를 가지는 여러 층으로 구성된 경우에 대하여도 쉽게 확장할 수 있다. 이 연구에서는 영역 변수화 기법을 흙댐내의 흐름 문제에 적용하였으나, 제안된 방법은 자유표면을 포함하는 많은 공학적 문제에 적용할 수 있으리라 판단된다.

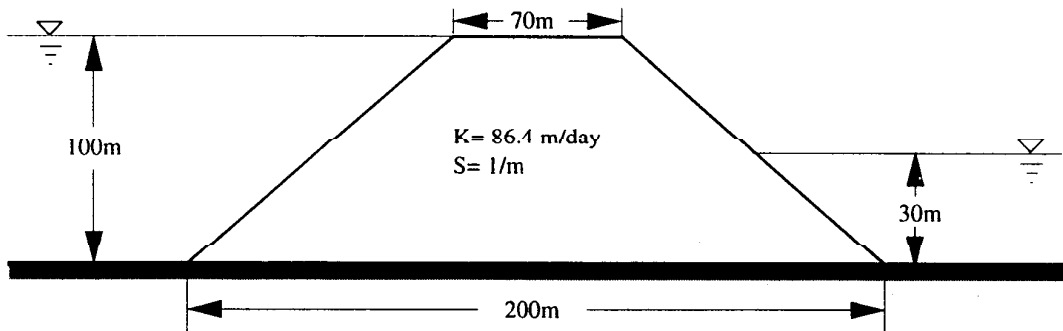
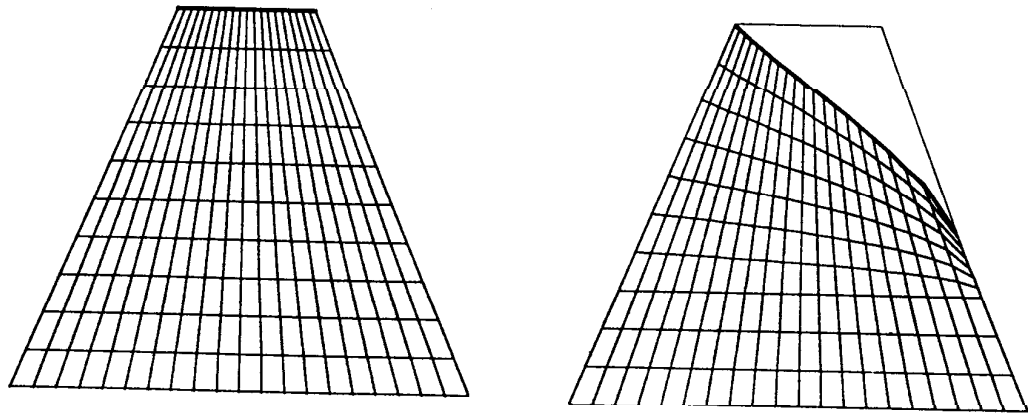


그림 1. 댐의 기하적 형상, 재료의 물성치,경계조건



a) 초기상태 요소형상

b) 정상상태 요소형상

그림 2. 초기상태 요소형상과 정상상태에서의 자유표면 형상에 따라 변형된 요소형상

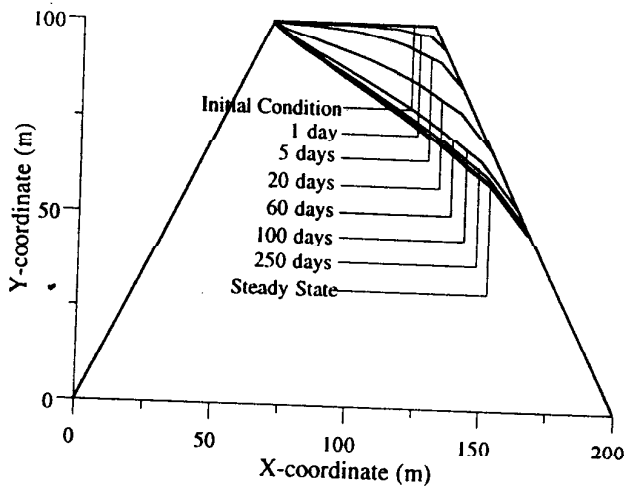


그림 3. 초기상태, 전이상태, 정상상태에서의 자유표면의 결정

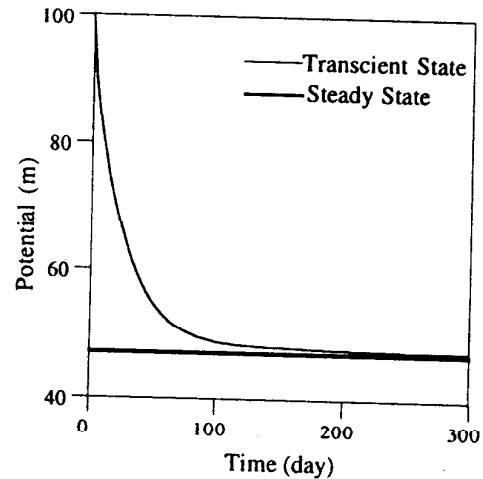


그림 4. 전이상태에서의 댐 배면의 자유표면 위치변화

### 참고문헌

1. Koh, H. M., Lee, H. S., and Jeong, U. Y., "An Incremental Formulation of the Moving-Grid Finite Element Method for the Prediction of Dynamic Crack Propagation," in Nuclear Engineering and Design, Vol. 158 (1995), pp. 295-309,
2. Phelan and Haber, R. B., "Sensitivity Analysis of Linear Elastic Systems using Domain Parameterization and a mixed Mutual Energy Principle." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* Vol. 77 (1989), pp. 31-59.
3. H. S. Lee and R. B. Haber, "Eulerian-Lagrangian Methods For Crack Growth in Creeping Materials, in: Advanced Computational Methods for Material Modeling," ASME AMD 180, ed. D. J. Benson and R. A. Asaro, ASME, New York (1993), pp. 141-153.
4. H. M. Koh and R. B. Haber, "Elastodynamic Formulation of the Eulerian-Lagrangian Kinematic Description," *Journal of Applied Mechanics* 53 (1986), pp. 839-845.
5. L.C. Wrobel and Brebbia, "Computational Modelling of Free and Moving Boundary Problems", Computational Mechanics Publications, Vol 1(1991), pp.3-36