

현 방향 진동의 영향을 고려한 경사케이블의 자유 진동 특성에 관한 연구

Effect of Axial Vibration on Dynamic Characteristics of Inclined Cables

박연철* · 이해성**

Park, Yeun Chul · Lee, Hae Sung

1. 서 론

19세기 이래 케이블 지지 교량이 건설된 이래로 케이블의 진동 특성에 대한 많은 연구가 이루어져왔다. 케이블은 휨강성이 약하고 인장력에 대한 강성이 강한 특성을 가지므로 다른 구조물과는 차별화되는 진동 특성을 보인다.

Irvine (1974, 1978) 등은 케이블의 형상을 포물선으로 가정하고 선형이론을 도입하여 수평 케이블의 진동 특성에 대한 깊은 연구를 수행하여 케이블의 특정 새그비에 대한 고유진동수에서 대칭 진동 모드와 비대칭 진동 모드가 혼합되는 cross-over point를 밝혀내었다. 또한 수평 케이블을 경사 케이블로 좌표변환을 하여 경사 케이블에 대해서도 같은 결과를 얻었다. Irvine의 이론적인 연구는 Ramberg (1982) 등에 의하여 실험적으로 검증되었다. Triantafyllou (1984)는 경사 케이블의 빠른 진동, 느린 진동이라는 두 가지 진동 특성을 이용하여 근사적 이론해를 구하여 cross-over point에서 대칭모드와 비대칭 모드의 고유진동수가 일치하지 않고 새그비가 증가할수록 가까워지다가 다시 증가하는 현상을 보인다고 하고 이러한 현상을 복합모드형상이라고 명명하였다. 이러한 결과는 Lin과 Perkins (1995)에 의해 실험적으로 증명되었다. 한편, 안상섭 (1998)은 cross-over point와 복합모드형상이라는 서로 다른 현상이 발생하는 원인을 경사케이블의 현 방향 자중 성분에 있다고 보고 현 방향 자중 성분을 고려한 경사케이블의 진동 특성을 연구하였다.

본 연구에서는 경사케이블의 현 방향 자중 뿐만 아니라 현 방향 진동을 고려하고 운동방정식 내에서 각 방향 동적 변위가 서로 결합된 효과를 고려한 경우의 복합모드 형상, 진동형상, 동적 장력 등의 진동 특성을 통하여 보다 정확한 경사케이블의 진동 특성을 제시하였다.

2. 지배 방정식

포아송 비가 0.5, 단위 길이당 질량 ρ , 단면적이 A 이며, 탄성계수가 E 인 케이블 요소가 3차원 공간상에 놓여있다고 할 때 각 방향의 운동방정식은 다음과 같다.

* 정회원 · 서울대학교 지구환경시스템공학부 석사과정 · 공학사 · E-mail : ycpark97@snu.ac.kr

** 정회원 · 서울대학교 지구환경시스템공학부 부교수 · 공학박사 · E-mail : chslee@plaza.snu.ac.kr-발표자

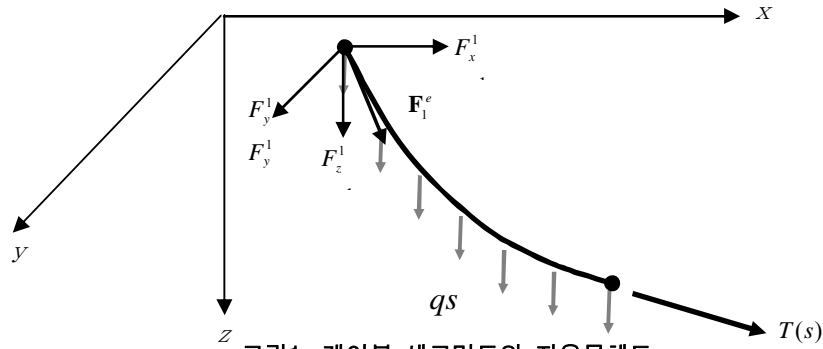


그림1. 케이블 세그먼트의 자유물체도

$$\begin{aligned}
 T \frac{dx}{dp} + F_x^1 - \int_0^s \rho \ddot{x} ds &= 0 \\
 T \frac{dy}{dp} + F_y^1 - \int_0^s \rho \ddot{y} ds &= 0 \\
 T \frac{dz}{dp} + F_z^1 + qs - \int_0^s \rho \ddot{z} ds &= 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 T 는 케이블 단면에서의 장력, F_i^1 은 지점에서의 장력, p 는 케이블의 동적 변형 상태에서의 변형 후 케이블 길이, p_s 는 정적 평형 상태에서의 변형 후 케이블 길이, s 는 케이블의 무응력 길이를 나타낸다.

동적 변형 상태의 각 방향 좌표를 정적평형상태의 좌표와 동적 변위로 나누면 각 방향의 좌표는 다음과 같이 정의된다.

$$x = x_s + u_d, \quad y = y_s + v_d, \quad z = z_s + w_d \tag{2}$$

케이블이 소변형 거동을 할 경우 케이블의 변형도는 다음과 같다.

$$\varepsilon = \frac{dp^2 - ds^2}{2ds^2} \cong \frac{dp - ds}{ds} = \frac{dp}{ds} - 1 \tag{3}$$

후크의 법칙으로부터 인장력을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 T &= EA\varepsilon \\
 (1 + \varepsilon)ds &= dp \rightarrow \frac{ds}{dp} = \frac{1}{1 + \varepsilon} = \frac{1}{1 + T/EA} \approx 1
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$T = EA\varepsilon = EA\left(\frac{dp}{ds} - 1\right) = EA((x'^2(s) + y'^2(s) + z'^2(s))^{0.5} - 1)$$

케이블의 변형 후 길이로부터 정적 평형상태와 동적 변형상태의 케이블 길이를 케이블의 무응력 길이로 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 p(s) &= \int_0^s (x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t))^{0.5} dt \\
 \frac{dp}{ds} &= (x'^2(s) + y'^2(s) + z'^2(s))^{0.5} = ((x'_s + u'_d)^2 + (y'_s + v'_d)^2 + (z'_s + w'_d)^2)^{0.5} \\
 \frac{dp_s}{ds} &= ((x'_s)^2 + (y'_s)^2 + (z'_s)^2)^{0.5}
 \end{aligned} \tag{5}$$

식 (2) 부터 (5)를 이용하여 케이블의 동적 장력을 구할 수 있다.

$$T_d = T - T_s = EA[x'_s u'_d + \frac{1}{2} u'^2_d + y'_s v'_d + \frac{1}{2} v'^2_d + z'_s w'_d + \frac{1}{2} w'^2_d] \quad (6)$$

위 식에서 동적 변위의 제곱 항을 무시한 후, 식(6)을 식(1)에 대입하고 각 방향의 가상의 동적 변위를 곱하여 유한요소법에 의한 동적 평형방정식을 구성하였다.

$$\begin{aligned} \int_l \hat{u}_d \left[\frac{d}{ds} (T_d \frac{dx_s}{ds}) + \frac{d}{ds} (T_s \frac{du_d}{ds}) - \rho \ddot{u}_d \right] ds &= 0 \\ \int_l \hat{v}_d \left[\frac{d}{ds} (T_d \frac{dy_s}{ds}) + \frac{d}{ds} (T_s \frac{dv_d}{ds}) - \rho \ddot{v}_d \right] ds &= 0 \\ \int_l \hat{w}_d \left[\frac{d}{ds} (T_d \frac{dz_s}{ds}) + \frac{d}{ds} (T_s \frac{dw_d}{ds}) + q - \rho \ddot{w}_d \right] ds &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

카르테시안 좌표계를 기준으로 식이 정의되었으므로 좌표 변환을 통하여 면내진동의 경우 현 방향과 현 직각방향의 진동으로 나타낼 수 있고, 자중 또한 마찬가지이다. 그리고 식 (6)의 동적 장력이 세 방향의 동적 변위의 변화율로 정의되므로 각 평형방정식의 동적 변위가 서로 결합되었다.

3. 해석 예제

해석 예제로서 경사 60도, 길이 92.38 m, 탄성계수 $2.067 \times 10^{11} N/m^2$, 단면적 $4.12 \times 10^{-2} m^2$, 자중 $3.223 \times 10^3 N/m$ 인 경사케이블을 사용하였다. 96개의 3절점 포물선 요소를 사용하여 해석을 수행하였다. 결과의 타당성 검증은 위하여 가장 최근의 연구 결과인 안상섭 (1998)의 결과와 비교하였다.

그림 2는 1, 2차 면의 진동수를 1차 면내 진동수로 나누어 무차원화 시킨 값을 새그비에 따라 나타낸 그래프이다. 새그비가 작을수록 즉, 케이블이 팽팽할 수록 두 연구 결과는 일치한다 그러나 새그비가 커질수록 cross-over point 부근부터 점점 차이가 발생하며, 새그비가 1/50 이상 되는 부분부터는 그 차이가 확연히 보이게 되며 진동수비가 정수배에 미치지 못한다. 경사케이블의 현 방향 진동 모드는 새그비가 커질수록 커지게 되는데 새그비가 1/30인 경우 현 방향 최대 진폭이 현 수직방향에 비하여 10% 정도의 크기를 가지게되므로 무시할 수 없다.

그림 3은 새그비에 따른 무차원화된 동적 장력의 변화를 나타낸 것이다. 무차원화된 동적 장력은 케이블 내에 발생하는 최대 동적 장력을 정적평형상태의 케이블 양단 장력의 산술 평균으로 나눈 값이다. 완전한 대칭 또는 완전한 비대칭 진동형상을 보일 경우 동적 장력은 케이블 양단의 정적 평형상태에서의 장력에 비하여 매우 작은 값을 가지지만 새그비가 커지면서 대칭형 진동 형상에서 비대칭형 진동형상으로 전이가 발생할 때 상대적으로 큰 동적 장력이 발생한다. 그림 3을 보면 안상섭의 결과는 cross-over point 이전부터 동적 장력이 감소하여 cross-over point에서는 동적 장력이 0이 되는 현상을 보이지만 식 (6)에 따르면 동적 장력은 정적 평형상태에서 케이블 형상의 기울기와 동적 변위의 s에 따른 따라 결정되므로 동적 장력이 0이 될 수는 없다.

4. 결 론

본 연구에서는 3차원 공간상에 존재하는 경사 케이블을 3 절점 포물선 요소로 모델링하고 유한요소해

석을 수행하였다. 제안된 해석법은 현 방향의 진동을 고려하였고, 각 자유도 방향의 운동방정식에 세 방향 동적 변위가 서로 결합되어 나타나는 효과를 고려하였다. 그 결과 케이블의 새그비의 증가에 따라 대칭형 진동 모드에서 비대칭형 진동모드로의 전이가 발생하는 현상을 보였으며, 새그비가 커질수록 진동수비가 정수 배를 이루지 못하였고, cross-over point 부근에서의 동적 장력이 기존의 연구 결과와는 다르게 평가되었다. 따라서, cross-over point를 갖는 경사케이블의 진동 특성을 합리적으로 평가하기 위해서는 현 방향 진동 모드와 각 방향 변위의 상호 결합 효과를 고려하여 해석을 수행해야한다.

감사의 글

본 연구는 교량설계핵심기술연구단을 통하여 지원된 건설교통부 건설핵심기술연구개발사업에 의하여 수행되었으며 이에 깊은 감사를 드립니다.

참고문헌

1. Irvine, H.M. and Caughey, T.K. (1974). "The Linear Theory of Free Vibration of a Suspended Cable." *Proceedings of the royal society, London. England. Series A.* vol. 341, pp 299-315.
2. Triantafyllou, M.S. (1984). "The Dynamics of Taut Inclined Cables." *Quarterly journal of applied mathematics.* 37. pp 421-440.
3. 안상섭 등 (1998), "경사 케이블의 자유진동 특성", 대한토목학회논문집, Vol. 18, pp 615-623.
4. Irvine, H.M. (1978). "Free Vibrations of Inclined Cables." *Proceedings of the American society of civil engineers*, Vol. 104. No. ST2. February.
5. Lin, H.P. and Perkins, N.C. (1995). "Free Vibration of Complex Cables/Mass Systems : Theory and Experiment." *Journal of Sound and vibration*, 179(1), pp 131-149.
6. Ramberg, S.E. and Bartholomew, C.L. (1982). "Vibrations of Inclined Slack Cables." *Proceedings of the American society of civil engineers*, Vol. 108, No. ST7, July.

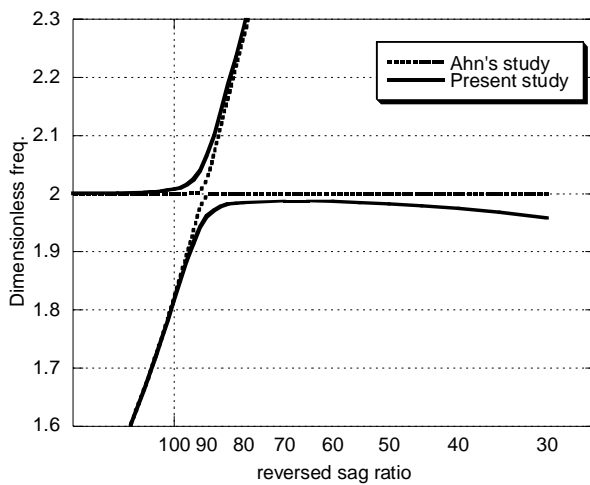


그림 2. cross-over point 근처의 진동수 곡선 비교 ($\theta=60^\circ$)

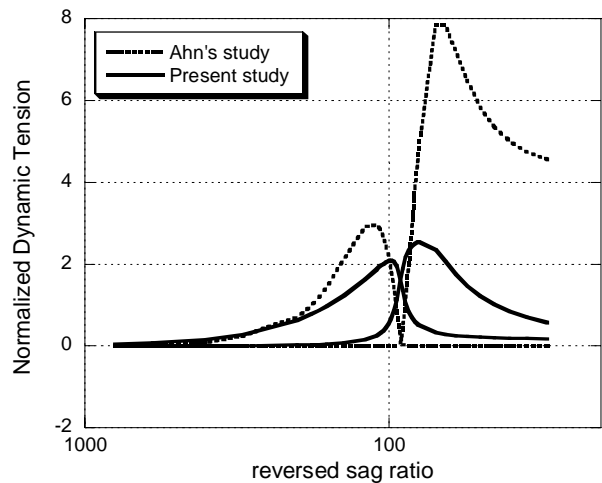


그림 3. 무차원화된 동적 장력 비교 ($\theta=60^\circ$)