

경계요소법과 영역변수화를 이용한 유한체내부 미지영역의 기하학적 형상과 물성치 결정을 위한 역해석

An Inverse Analysis for Determining Geometric Shape and Material Properties of Unknown Inclusion in a Finite Body Using Boundary Element Method and Domain Parameterization

오바 천중*, 이 해성**

1. 서론

구조물의 손상을 진단할 때 유한체내부의 기하학적 형상과 물성치를 추정하는 것은 매우 중요하다. Tanaka 와 Yamagiwa 는 고유진동수를 이용한 경계요소법에 의해 내부결합의 형상을 추정하는 역해석 기법을 제안하였다[1]. Schnur 와 Zabarar 는 정적응답을 이용한 유한요소법에 의해 유한체내부의 원형 영역의 위치와 크기를 결정하였다[2]. 그러나 기존의 연구들은 내부영역의 기하학적 형상을 미리 원형으로 가정하였다.

이 논문은 내부영역의 형상을 미리 결정하지 않고 유한체내부의 기하학적 형상과 탄성물성치를 결정하는 역해석기법을 제안한다. 표면력은 유한체경계면에서 정의되었고, 변위는 유한체경계면의 관측점에서 계측되었다. 제안된 기법은 경계요소법에 의해 계산된 변위와 계측된 변위간의 오차의 제곱을 최소화한다. Modified Levenberg-Marquardt 방법[3]과 Fletcher's active set 방법[3]에 의해 최적화를 수행한다.

영역변수화기법은 설계문제에서의 민감도해석[4,5]과 균열전파예측문제[6]에서 성공적으로 적용되어왔다. 이 논문에서는 구조물의 형상을 나타내는 기하변수들이 설계변수 즉, 독립변수로 고려되었다. 복잡한 remeshing 작업을 거치지않고 영역형상의 변화를 나타낼 수 있는 것이 영역변수화 기법의 장점이다. 최적화 과정에서 내부형상의 변화를 다루는데 영역변수화기법을 사용하였다. 경계적분식(boundary integral equation)을 직접미분하여 설계변수에 대한 변위의 민감도를 구하였다.

여러가지 내부형상을 가진 문제에 제안된 기법을 적용시켰다.

2. 목적함수와 최적화

2 개의 subdomain V_1, V_2 와 경계 S 로 이루어진 2 차원 평면 영역 V 를 정의한다(그림 1). Subdomain V_1 (matrix) 의 물성치는 미리 주어지고 subdomain V_2 (inclusion) 의 경계와 물성치는 주어지지 않는다. 경계 S 에 정적하중 \bar{T} 가 주어지고 경계 S 의 유한개의 위치에서(\bullet 로 표시) 측정변위를 구한다. 이 논문에서 제안된 parameter estimation 기법에는 측정변위 \bar{u} 와 경계요소모델에 의해 측정점에서 구한 변위 u 의 오차의 제곱을 최소화하는 least-square method 를 이용한다.

$$\text{Minimize } \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_c} (u_i(\mathbf{M}, f(\mathbf{X})) - \bar{u}_i)^2 \quad \text{subject to } c(\mathbf{M}, f(\mathbf{X})) \leq 0 \quad (1)$$

여기서, n_c 는 하중 종류의 개수, \mathbf{M} 은 내부영역의 탄성물성치, $f(\mathbf{X})$ 는 내부영역의 기하학적 형상이며 c 는 구속조건이다. 경계요소법으로 변위를 계산하기 위해서는 내부영역의 경계면을 이산화해야 한다. 경계요소법에서는 기하학적 형상을 이산화된 절점들과 절점간의 connectivity 로 표현할 수 있으므로 내부경계 면을 control node 들로 이산화한다. Control node 간의 connectivity 는 이미 알고있는 것으로 가정한다. 이산화된 내부경계면은 이러한 가정과 control node 들의 좌표에 의해 완전하게 정의할 수 있다. 이후로 control node 들의 좌표는 χ 로 표시한다.

일반적으로 어떤 변위장에 대한 정의영역 혹은 물성치는 유일하게 존재하지 않을 수 있다. 측정변위에 대응하는 내부경계면의 기하학적 형상과 물성치는 유일하지 않으며 또한 같은 내부경계

* 서울대학교 토목공학과 석사과정

** 서울대학교 토목공학과 조교수

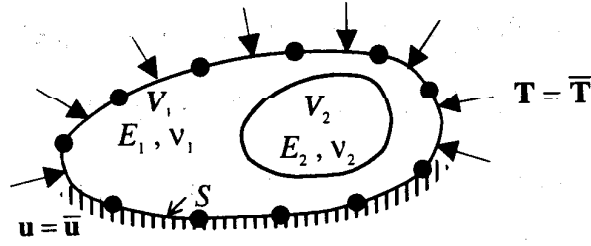


그림 1. 영역변수 결정 문제의 정의

면상의 control node 들의 좌표도 유일하지 않다. 또한, 최적화과정중에는 mesh 의 distortion 또는 overlap 이 발생할 수도 있다. 이러한 문제점들을 해결하기 위해 control node 들 간의 거리의 제곱합으로 이루어진 regularization function R 을 사용하였다

$$R = \alpha \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{nc} (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1})^2 \quad (2)$$

여기서, α 는 regularization factor, nc 는 control node 의 수이다. α 는 목적함수에 큰 영향을 주지 않는 범위에서 수치적 문제점들을 해결할 수 있는 값을 선택한다. 식(2)을 구속조건과 regularization 을 고려한 라그랑지안 함수의 최적화 문제로 바꾸면 다음과 같다.

$$\Pi_l = \sum_{i=1}^{nc} (\mathbf{u}_i(\mathbf{D}) - \bar{\mathbf{u}}_i)^2 + R + \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{c}(\mathbf{D}) \quad (3)$$

여기서 $\mathbf{D} = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\chi})$ 는 설계변수, $\boldsymbol{\lambda}$ 는 라그랑지안 계수벡터이다. 식(3)을 최적화하기 위해서 modified Levenberg-Marquardt 방법[3]과 Fletcher's active set 알고리즘[3]을 이용하였다. 식(3)의 최소화 에 대한 선형화된 first-order necessary condition 은 다음과 같다.

$$\left(\sum_{i=1}^{nc} \nabla_{\mathbf{D}} \mathbf{u}_i^k \cdot \nabla_{\mathbf{D}} \mathbf{u}_i^k + 2\alpha \mathbf{I} + \Lambda \mathbf{I} \right) \cdot \Delta \mathbf{D} + \boldsymbol{\lambda}^{k+1} \cdot \nabla_{\mathbf{D}} \mathbf{c}(\mathbf{D}^k) = - \sum_{i=1}^{nc} \nabla_{\mathbf{D}} \mathbf{u}_i^k \cdot (\mathbf{u}_i^k - \bar{\mathbf{u}}_i^k) - \nabla_{\mathbf{D}} R \quad (4)$$

$$\nabla_{\mathbf{D}} \mathbf{c}(\mathbf{D}^k) \cdot \Delta \mathbf{D} = -\mathbf{c}(\mathbf{D}^k)$$

여기서, 윗첨자 k 는 반복횟수, $\nabla_{\mathbf{D}}$ 는 \mathbf{D} 에 대한 미분연산자, Λ 는 Levenberg-Marquardt 계수이다.

3. 영역변수화 와 민감도

영역변수화기법에서는 정의영역 V 와는 무관한 기지의 기준영역 Ω 를 정의한다. 미지의 기하학적 형상이 매 반복단계에 따라 변화할 때 정의영역은 변할 수 있으나 기준영역은 반복단계와 무관한 일정한 형상을 갖는다(그림 2). 정의영역내에서의 고정된 공간위치는 공간좌표 \mathbf{X} 로 나타내며 기준형상에서의 위치는 기준좌표 \mathbf{r} 로 나타낸다. 정의영역과 기준체적에 대한 일대일 사상을 정의한다. 영역 변수화 기법에서는 기준좌표 \mathbf{r} 을 시간과 공간에 따라 불변이며 유일한 독립적인 공간변수로 취급하며 모든 변수를 일대일 사상에 의해 기준좌표에 대하여 표시한다. 정의영역내의 미지경계면의 좌표는 미지경계에 대응하는 기준영역의 경계면에서의 기준좌표와 $\boldsymbol{\chi}$ 로 나타낼 수 있다. 경계요소법에서는 체적력이 없으면 모든 적분이 경계면에서 이루어지므로 기준좌표계를 일차원으로 표현할 수 있다. 정의영역경계면의 기준영역경계면으로의 사상과 Jacobian, inverse Jacobian 그리고 Jacobian 의 determinant 는 다음과 같다.

$$\mathbf{X} = \Psi(\xi, \boldsymbol{\chi})$$

$$J_i^L = \nabla_{\xi} X_i = \nabla_{\xi} \Psi_i(\xi, \boldsymbol{\chi})$$

$$J_i^{L-1} = \bar{J}_i^L = \frac{1}{J_i^L} \quad (5)$$

$$\tilde{J}^L = \sqrt{(J_1^L)^2 + (J_2^L)^2}$$

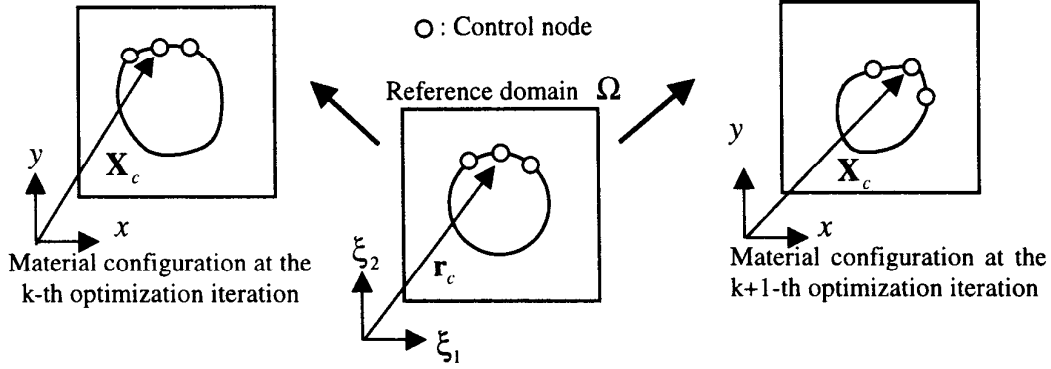


그림 2. 영역의 변화와 사상

여기서, ξ 는 기준좌표계에서의 유일한 독립변수이며, ∇_{ξ} 는 ξ 에 대한 미분 연산자이다. 식(5)를 이용하여 source point와 field point 간의 거리 r , 경계면의 outer normal vector \mathbf{n} , 그리고 r 의 미분 값을 기준좌표 ξ 와 control node의 좌표 χ 로 표기할 수 있다. Traction kernel p_{ik}^* 와 displacement kernel u_{ik}^* 는 기준좌표계에서 각각 다음과 같이 표기된다.

$$\begin{aligned}
 u_{ik}^* &= C_1 [C_2 \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ik} + (\nabla_{\xi} r)^2 \bar{J}_i^L \bar{J}_k^L] \\
 p_{ik}^* &= C_3 \frac{1}{r} \left[\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} (C_4 \delta_{ik} + 2(\nabla_{\xi} r)^2 \bar{J}_i^L \bar{J}_k^L) + C_4 \nabla_{\xi} r (n_i \bar{J}_k^L - n_k \bar{J}_i^L) \right]
 \end{aligned} \tag{6}$$

여기서, C_1, C_2, C_3, C_4 는 물성치에 관계되는 계수들이다. 기준좌표계에서의 경계적분식은 다음과 같다.

$$c_{ik}^i u_k^i + \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_k \tilde{J}^L d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ik}^* p_k \tilde{J}^L d\Gamma \tag{7}$$

설계변수에 대한 변위의 민감도를 계산하기 위해 식(7)을 설계변수에 대해 미분하였다.

$$\begin{aligned}
 c_{ik,m}^i u_k^i + c_{ik}^i u_{k,m}^i + \int_{\Gamma} p_{ik,m}^* u_k \tilde{J}^L d\Gamma + \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_{k,m} \tilde{J}^L d\Gamma + \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_k \tilde{J}_{,m}^L d\Gamma - \\
 \int_{\Gamma} u_{ik,m}^* p_k \tilde{J}^L d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{ik}^* p_{k,m} \tilde{J}^L d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{ik}^* p_k \tilde{J}_{,m}^L d\Gamma = 0
 \end{aligned} \tag{8}$$

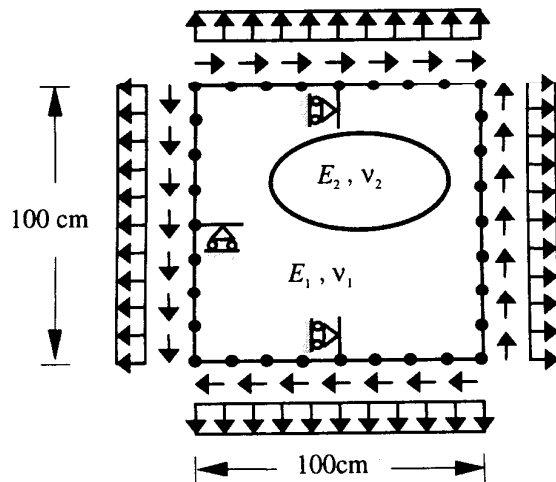
여기서, $(\cdot)_{,m}$ 은 설계변수에 대한 미분을 의미한다

5. 예제

제안된 방법을 이용해 한 변의 길이가 1m인 판내부의 반지름 20cm인 원(예제 1)과 한 변의 길이가 28cm인 마름모(예제 2)영역의 물성치와 기하학적 형상을 결정하는 예제에 적용해보았다.

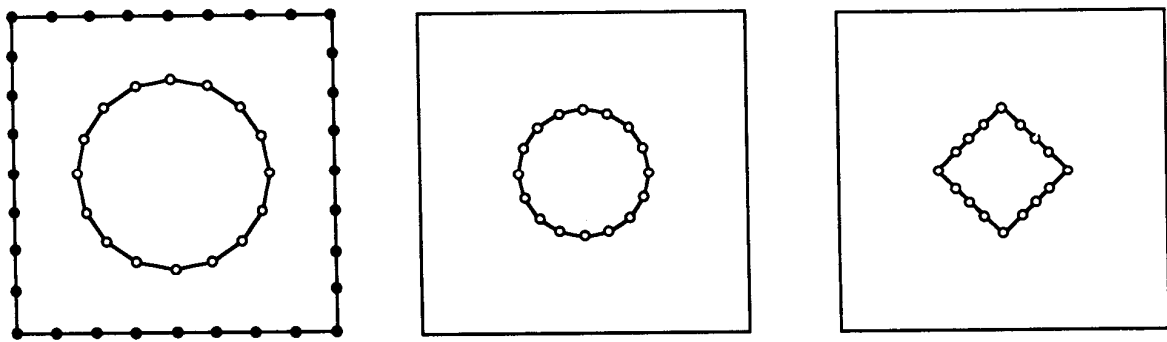
경계조건과 기하학적 형상 그리고 물성치는 그림 3과 같다. 내부영역(inclusion)과 외부영역(matrix)는 각각 Naval Brass와 Steel이다. 세 가지의 각각 다른 정적하중을 독립적으로 가하였으며 각각의 하중단계에 대해 32개의 측정점에서 변위를 측정하였다. 측정변위로는 경계요소법으로 모사한 변위를 이용하였다. 초기 가정형상으로는 반지름 30cm의 원(그림 4a)이며 물성치는 각각 150Gpa와 0.32이다. 주어진 영역을 48개의 경계요소와 96개의 node로 이산화하였으며 변위장은 2차, 기하형상은 선형 형상함수를 각각 사용하였다.

최종 mesh 형상은 그림 4b, 그림 4c와 같다. 제안된 방법은 내부영역의 기하학적 형상과 물성치를 정확하게 결정하였다. 목적함수가 10^{-20} 까지 수렴하기까지 각각 10회와 15회의 반복계산을 하였다. 예제 2의 반복계산회수가 예제 1보다 많은 것은 초기기하학적 형상이 해에서 멀리 떨어져 있기 때문이다.



- Load Case
- Case 1: $q_x=1.8\text{GPa}$
- Case 2: $q_y=1.8\text{GPa}$
- Case 3: $\tau_{xy}=1.8\text{GPa}$
- Material property
- 1) Matrix - Steel
- $E_1=210\text{GPa}$
- $\nu_1=0.3$
- 2) Inclusion - Naval brass
- $E_2=100\text{GPa}$
- $\nu_1=0.34$

그림 3. 예제의 기하학적 형상, 물성치, 경계조건



a) 초기 mesh 형상 b) 예제 1의 최종 mesh 형상 c) 예제 2의 최종 mesh 형상

그림 4. 각 예제의 최종 mesh 형상과 초기 mesh 형상

6. 결론

내부영역의 기하학적 형상과 물성치를 기하학적 형상에 대한 가정없이 구조물의 정적응답으로부터 결정하였다. 영역이 변화를 다루기 위해 영역변수화기법을 이용하였다. 미지의 내부영역의 경계면을 control node 와 connectivity 에 의해 이산화 하였다. 설계변수에 대한 변위의 민감도는 직접미분법으로 계산하였다. 측정변위와 경계요소법에 의해 계산된 변위의 최소자승오차를 최적화하기 위해 Modified Levenberg-Marquardt 방법을 이용하였다. 두개의 예제를 통해 제안된 방법의 타당성을 검증하였으며, 각각의 예제에서 정확한 기하학적 형상과 물성치를 결정할 수 있었다.

참고문헌

1. Tanaka, M., Yamagiwa, K., 1989, "A Boundary Element Method for Some Inverse Problems in Elastodynamics", *Applied Mathematical Modeling* 13: 307-312
2. Schnur, D. S., Zabarav N., 1992, "An Inverse Method for Determining Elastic Material Properties and a Material Interface", *International Journal for Numerical Mechanics and Engineering* 33: 2039-2057
3. Luenberger, D. G. 1989, *Linear and Nonlinear Programming*, 2nd edition. Addison-Wesley: Reading, Massachusetts.
4. Pelan, D. G., Haber, R. B., 1989, "Sensitivity Analysis of Linear Elastic System Using Domain Parameterization and a Mixed Mutual Potential Energy Principle", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 77: 31-59
5. Vidal, C. A., Lee, H. S. & Haber, R. B., 1992, "The Consistent Tangent Operator for Design Sensitivity Analysis of History-Dependent Response", *Computing Systems in Engineering* 2, No. 5/6: 509-523
6. Koh, H. M., Lee, H. S. & Jeong, U. Y., 1995, "An Incremental Formulation of the Moving-Grid Finite Element Method for the Prediction of Dynamic Crack Propagation", *Nuclear Engineering and Design* 158: 295-309