일계신뢰도법과 GEV 를 이용한 구조응답의 극치분포 추정

Estimation of Tail Distribution of Structural Response by Using the First-Order Reliability Method and the Generalized Extreme-Value Distribution

전호진* · 김기석** · 이해성***
Jeon, Ho Jin · Kim, Ki-Seok · Lee, Hae Sung

1. 서 론

구조신뢰성 문제에서는 주어진 한계상태에 대해 파괴확률을 정확하고 효율적으로 산정하는 것이 중요하다 [1,2]. 특히, 구조 설계에서는 하나의 하중레벨에 대한 하나의 파괴확률을 산정하는 것보다 하중레벨의 변화에 따른 구조 응답의 극치분포 또는 확률밀도함수를 제공하는 것이 더욱 중요하다. 기존의 확률모멘트를 추정하거나 파괴확률을 산정하는 확률해석법들 즉, 몬테카를로 모사법, 일계신뢰도법, 확률모멘트법 등은 단독으로는 극치분포를 추정하는데 한계가 있다. GEV(Generalized Extreme-Value Distribution) [3]에 대한 기존의 연구성과를 반영하여 몬테카를로 모사법으로 극치자료를 생성하고 이를 GEV 모수추정법[4]에 적용하여 극치분포를 추정할 수 있다. 그러나 몬테카를로 모사법은 파괴확률이 매우 작은 영역에서는 계산량이 많아지는 한계가 있다 [1]. 이 논문에서는 상대적으로 적은 계산으로 구조응답의 극치분포를 추정하기 위하여 일계신뢰도법과 GEV 를 이용하는 방법을 제안한다. 3 경간 트러스 구조물에서 하중과 물성치의 확률분포를 동시에 고려하는 수치 예제를 통하여 제안된 방법의 타당성과 효율성을 보였다.

2. GEV 기법을 이용한 구조응답의 극치분포 추정

임의의 확률분포에서 추출한 극치들의 분포는 그 모분포의 종류에 관계없이 Frechet, Weibul, Gumbel 의 세가지 극치분포의 하나를 따른다고 알려져 있다[3]. 세 가지 극치분포는 다음과 같은 하나의 Von-Mises form 또는 GEV 로 기술할 수 있다.

$$H_c(x) = \exp\left\{-\left[1+c\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)^{-1/c}\right]\right\}, \qquad 1+c\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right) \geq 0 \tag{1}$$

여기서, c , δ 그리고 λ 는 극치분포의 모수들이다. 식 (2)에서 $c>0$, $c<0$, $c=0$ 인 경우에 각각 Frechet, Weibul, Gumbel 분포로 변환된다. 이론적으로는 확률변수 x 에 대한 3 개 이상의 극치자료가 주어지면 GEV 의

* 학생회원 · 서울대학교 지구환경시스템공학부 석사과정 · 공학사 · E-mail: hjjeon98@snu.ac.kr
** 정회원 · 포항산업과학연구원 강구조연구소 선임연구원 · 공학박사 · E-mail: kskim93@rist.re.kr – 발표자
*** 정회원 · 서울대학교 지구환경시스템공학부 부교수 · 공학박사 · E-mail: chslee@plaza.snu.ac.kr

세가지 모수를 추정할 수 있다. Park 등 [4]은 GEV 의 세가지 모수를 추정하기 위하여 다음과 같은 가중 최소 자승법(weighted least squares method)를 제안하였다.

$$\underset{\boldsymbol{\theta}}{\text{Minimize}}\ \pi = \frac{1}{2}[\mathbf{F}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{p}]^T \mathbf{W}[\mathbf{F}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{p}] \quad \text{subject to } \mathbf{R}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) \le 0 \tag{2}$$

여기서, $\mathbf{F}$ 와 $\mathbf{p}$ 는 각각 계산된 GEV 의 분포함수(CDF)와 관측된 실제 분포함수이고, $\mathbf{x}$ 와 $\boldsymbol{\theta}$ 는 각각 GEV 의 확률변수와 모수이다. $\mathbf{W}$ 와 $\mathbf{R}$ 은 각각 극치분포를 보정해 주기 위한 가중치 행렬과 구속조건이다.

제안한 GEV 모수추정법[4]은 극치에 대한 실측자료가 주어진 경우에 적용하여 극치분포를 추정하는데 적용되었으나, 구조 설계에서는 극치 자료가 항상 주어지는 것이 아니기 때문에, 수학적 모델을 이용하여 수치모사를 통하여 극치 자료를 생성해야 한다. 구조 응답의 극치자료를 해석적인 방법으로 생성하기 위하여, 몬테카를로 모사법과 일계신뢰도법을 고려할 수 있다. 몬테카를로 모사법은 기본 개념이 매우 단순하고 기존의 구조해석을 그대로 이용할 수 있는 장점이 있지만, 극치영역에서 파괴확률을 정확히 추정하기 위해서는 엄청난 계산량이 필요하다는 단점이 있다. 추출 개수를 줄이기 위하여 중요도 추출법 등이 개발되었지만, 중요도 추출함수의 선택에 따라 추정된 파괴확률이 영향을 받는 문제와 파괴확률이 큰 영역을 미리 파악해야 하는 문제점이 있다 [1,2]. 이 논문에서는 몬테카를로 모사법의 단점을 극복하고자 개선된 일계이차모멘트법 등의 일계신뢰도법을 이용하여 상대적으로 적은 계산으로 극치자료를 생성하여 GEV 모수추정법 [4]을 적용하는 방법을 제안한다.

3. 일계신뢰도법을 이용한 구조응답의 극치자료 추출

구조 응답의 극치자료를 생성하기 위하여, 하중레벨을 변화시켜서 한계상태식의 수준에 따라 변하는 파괴확률을 각각 산정하고, 생성된 자료를 GEV 모수추정법에 적용하여 구조 응답의 극치분포를 추정한다. 주어진 하중레벨에 대하여 일계신뢰도법을 이용하여 한계상태식을 만족하는 확률변수의 최빈점과 이에 대한 신뢰도지수 및 파괴확률을 산정하고 이로부터 구조 신뢰성을 평가할 수 있다. 하중레벨 j 에 대한 구조물의 파괴확률은 다음과 같은 다변수 결합확률밀도함수 $\phi_{\mathbf{X}}$ 의 적분으로 정의된다.

$$P_f^j = \int_{g_j(\mathbf{x}) \le 0} \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \Phi(-\beta_j) \tag{3}$$

여기서, x , Φ , β_j 그리고 g_j 는 각각 다변수 확률변수, 표준정규분포함수, 하중레벨 j 에 대한 신뢰도지수와 한계상태함수이다. 한계상태함수로 정의되는 한계상태식은 다음과 같이 정의 된다.

$$g_j(\mathbf{x}^*) \equiv R_j(\mathbf{x}^*) - L_j(\mathbf{x}^*) = 0 \tag{4}$$

여기서, L_j 은 주어진 j 번째 하중레벨이고, R_j 은 이에 대한 구조물의 저항 또는 응답이다. 식 (3)과 같이 일계신뢰도법에서는 확률변수의 확률분포가 정규분포라는 가정하에 간접적인 지표인 신뢰도지수(reliability index)를 이용하여 파괴확률을 산정한다. 즉, 확률변수의 표준정규분포 공간에서 한계상태식 (4)을 만족하면서 신뢰도 지수 β_j 를 최소화하는 최빈점을 찾는 최적화 과정이 수행된다. 하중레벨을 변화시켜가며

일계신뢰도법을 적용함으로써 다음과 같은 일련의 극치자료를 생성할 수 있다.

$$\{(R_j, F_j) \mid j = 1, 2, \Lambda\ , n\} \tag{4}$$

여기서, F_j 는 극치분포(CDF)의 함수값으로서 $F_j = 1 - P_f^j$ 이고, n 은 하중레벨의 개수이다.

4. 예제

몬테카를로 모사법(MCS)과 GEV 모수추정법을 이용하는 극치분포 추정법과 일계신뢰도법(FORM)과 GEV 모수추정법을 이용하는 제안된 방법의 두 가지 접근법을 수치 예제를 통하여 비교하였다. 그림 1 은 중앙에 수직 집중 하중을 받고 있는 3 경간 연속 트러스이다. 탄성계수(E)와 하중(P)는 각각 변동계수가 10%인 정규분포를 따르는 확률변수이고, 트러스 중앙의 수직 처짐 δ 를 구조물 응답으로 고려하였다. 한계상태식은 $g(E, P) \equiv \delta(E, P) - \delta_{cr} = 0$ 으로 설정하였다. 몬테카를로 모사법에서는 탄성계수와 하중에 대하여 5 만개의 자료를 Latin hypercube sampling 으로 추출하였다. 확정론적 해석결과로서의 수직처짐은 1.208cm 이지만, 몬테카를로 모사법으로 구한 수직처짐의 평균과 표준편차는 각각 1.221cm 와 0.176cm 이다. 5 만개의 자료 중에서 0.13%의 자료(657 개) 만이 수직처짐이 3σ 이상의 결과를 보여주었다. 일계신뢰도법을 이용하는 제안된 방법에서는 3σ에서 6σ 사이의 극치영역에서 임계 수직처짐 δ_{cr} 을 변화시켜가며 10 개에서 8,000 개까지 식 (4)의 자료를 추출하였다.

그림 2 는 제안된 방법에서 추출 자료의 개수에 따라 추정된 GEV 의 모수 c 값의 수렴성을 보여주고 있다. 그림에서 추출개수가 증가할수록 c 값이 급격하게 0 에 가까운 값에 수렴하고 있고, 이로부터 수직처짐의 극치분포가 세가지 극치분포 중에서 Gumbel 분포에 점근함을 알 수 있다. 그림 3 에서는 몬테카를로 모사법과 일계신뢰도법을 각각 이용하여 추정한 누적확률분포를 보여주고 있다. 그림에서 점선은 몬테카를로 모사법에 의해 추출된 자료 중에서 3σ 이상인 675 개의 극치자료를 이용하여 수직 처짐 δ 의 GEV 를 추정한 것이고, 실선은 일계신뢰도법으로 3σ에서 6σ 사이에서 10 개의 (R_j, F_j) 자료를 추출하여 GEV 를 추정한 것이다. 일계신뢰도법으로 8,000 개의 자료를 추출한 경우와 10 개의 자료를 추출한 경우를 비교하면 추정한 GEV 에서 파괴확률 1/10,000 과 1/100,000 에 해당하는 임계 수직처짐은 각각 0.04%와 0.01%로서 거의 차이가 없다. 그림에서 점선의 몬테카를로 모사법과 실선의 일계신뢰도법을 비교하면 파괴확률 1/10,000 과 1/100,000 에 해당하는 임계 수직처짐은 차이가 각각 0.52%와 2.33%로서 두 가지 방법이 거의 동일한 추정 결과를 보여주고 있다. 그림 2 와 그림 3 에서 보여주고 있듯이 제안된 방법의 경우 매우 적은 추출자료를 이용하여 중앙부 수직 처짐의 극치분포를 비교적 정확하게 추정하고 있다.

5. 결론

이 논문에서는 일계신뢰도법(FORM)과 GEV 모수추정법으로 구조응답의 극치분포를 추정하는 방법을 제안하였다. 3 경간 트러스에서 하중과 물성치의 확률분포를 고려하여 중앙부의 최대 처짐의 극치분포를 추정하는 문제를 통해 제안된 해석법의 정확성과 타당성을 검증하였다. 제안된 방법은 구조물의 신뢰성 해석이나 구조물 설계에서 효과적으로 적용될 수 있을 것이다.

감사의 글

이 연구는 교량설계핵심기술연구단을 통하여 지원된 건설교통부 건설핵심기술연구개발사업에 의하여 수행되었습니다. 연구 지원에 감사 드립니다.

참고문헌

1. 양영순, 서용석, 이재옥. 2002. “구조 신뢰성 공학”, 서울대학교출판부.
2. Haldar, A. and Mahadevan S. (2000) “Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design,” New York: John Wiley & Sons, Inc.
3. Castillo, E. (1988) “Extreme Value Theory in Engineering,” Boston: Academic Press, Inc.
4. Park, H.W., Sohn, H. (2005) “Parameter estimation of the generalized extreme value distribution for structural health monitoring,” *Journal of Probabilistic Engineering Mechanics* (in press).

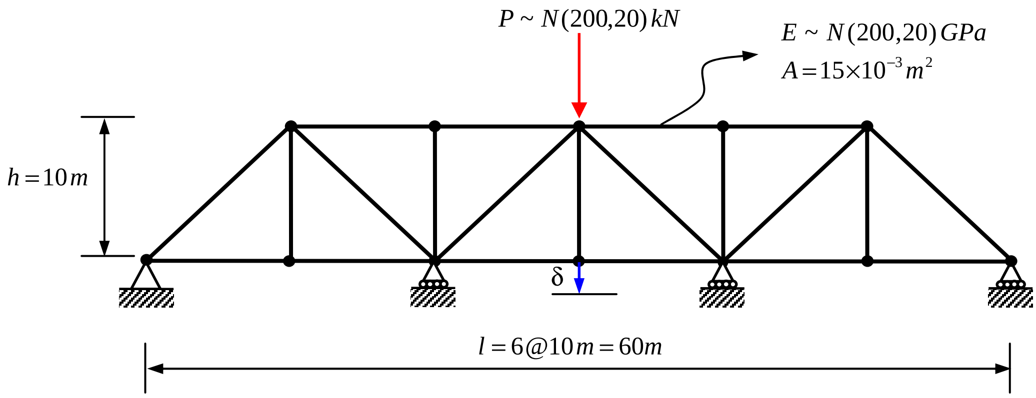

그림 **1.** 집중하중과 물성치의 확률분포를 고려한 **3** 경간 트러스 예제

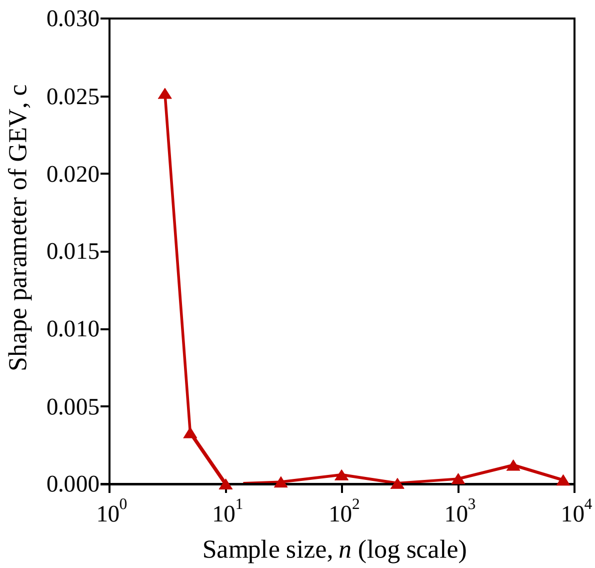

그림 **2.** 추정된 모수 ***c*** 의 수렴성

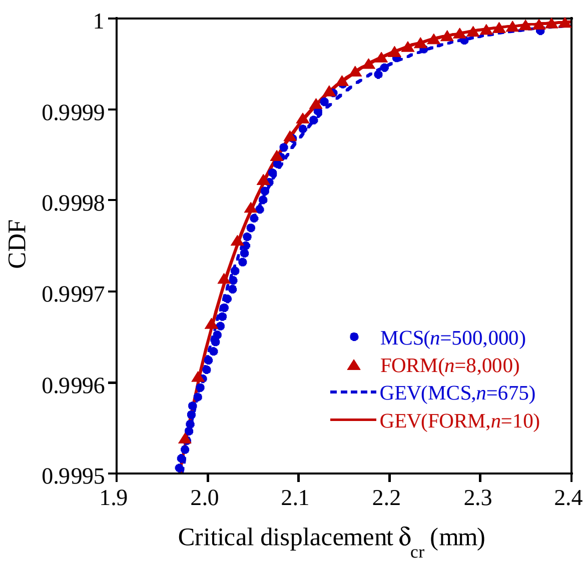

그림 **3.** 최대 처짐의 극치분포 추정