

Energy Formulation에 의한 정적응답에 대한 Parameter Estimation 기법

° 여인호*, 장승필**, 이해성***

1. 서론

Energy formulation에서 출발하는 새로운 파라미터 추정기법이 제시되고, 기존의 파라미터 추정기법 중 하나인 Output Error Estimator와 비교된다. 기존의 Output error estimator는 Least Squared Collocation법을 사용하기 때문에 구조물의 국부적인 거동만이 반영된다. 반면에 에너지 형태의 추정기법은 수학적 모델로부터의 해석적인 에너지와, 측정된 변위에 의한 에너지를 최소화하는 방법이다. 이 방법은 에너지를 이용하기 때문에 전체적인 거동이 반영될 수 있다. 평면트러스 구조물의 예제로 기존의 Output error estimator와 energy type estimator의 거동을 비교한다. 목적함수의 최소값을 구하기 위한 최적화 기법으로는 R.Q.P(Recursive Quadratic Programming)을 사용하였고, 통계적 자료 비교를 위해 Monte Carlo Simulation을 이용하였다.

2. 제안된 목적 함수

Energy 형태의 목적 함수가 사용되는 Estimator의 경우, 상 하한값이 구속되는 비선형 최적화문제는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{목적함수 } \Pi(D) &= \sum_{i=1}^{ncl} \frac{1}{2} \alpha_i \{(\mathbf{u}) - (\bar{\mathbf{u}})\}^T [\mathbf{K}] \{(\mathbf{u}) - (\bar{\mathbf{u}})\} \\ \text{subject to } & \underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $\underline{\mathbf{x}}$ 와 $\bar{\mathbf{x}}$ 는 미리 설정된 미지 설계변수의 상 하한값이다. α_i 는 i 번째 하중 Case와 연관되는 가중치이고, $[\mathbf{K}]$ 는 강도 행렬, D 는 파라미터인데, 이 연구에서는 부재의 단면 특성을 나타낸다. \mathbf{u} 는 매번 추정되는 부재 단면특성에 의한 변위벡터이다. $\bar{\mathbf{u}}$ 는 측정 변위와 미측정 변위 두 가지로 나뉜다.

RQP가 최적화문제 (1)을 풀기위해 선택된다. RQP는 설계변수 D 에 대한 목적함수 Π 의 gradient와 Hessian이 요구되는데, 식 (2)와 식 (3)이 각각 목적함수의 gradient와 Hessian이다.

$$\frac{\partial \Pi(D)}{\partial D} = \sum_{i=1}^{ncl} \alpha_i \{(\mathbf{u}) - (\bar{\mathbf{u}})\}^T [\mathbf{K}] \{(\mathbf{u})_{,m} - (\bar{\mathbf{u}})_{,m}\} + \sum_{i=1}^{ncl} \frac{1}{2} \alpha_i \{(\mathbf{u}) - (\bar{\mathbf{u}})\}^T [\mathbf{K}]_{,m} \{(\mathbf{u}) - (\bar{\mathbf{u}})\} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial D_i \partial D_m} &= \frac{1}{2} (\mathbf{u})^T [\mathbf{K}] (\mathbf{u}_{,im}) - (\mathbf{u})^T [\mathbf{K}] (\bar{\mathbf{u}}_{,mi}) + (\bar{\mathbf{u}}_{,mi})^T [\mathbf{K}] (\bar{\mathbf{u}}) \\ &+ (\bar{\mathbf{u}}_{,m})^T [\mathbf{K}_{,i}] (\bar{\mathbf{u}}) + (\bar{\mathbf{u}}_{,m})^T [\mathbf{K}] (\bar{\mathbf{u}}_{,i}) + \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{u}}_{,i})^T [\mathbf{K}_{,m}] (\bar{\mathbf{u}}) + \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{u}})^T [\mathbf{K}_{,m}] (\bar{\mathbf{u}}_{,i}) \end{aligned} \quad (3)$$

이 연구에서는 기존의 파라미터 추정법중 널리 쓰이는 두 가지인, EEE(Equation Error Estimator)와 OEE(Output Error Estimator)중 보다 유리한 것으로 생각되는 OEE와 여기서 제안된 에너지 형태의 목적 함수를 이용한 추정기법이 주로 비교된다.

* 서울대학교 토목공학파과 박사과정

** 서울대학교 토목공학파과 교수

*** 서울대학교 토목공학파과 조교수

3. 통계학적 처리

데이터의 측정시 noise 는 피할 수 없는 요소이고, 그 분포는 무작위로 간주할 수 있다. 어떤 주어진 데이터가 무작위 분포를 갖는다면 그 데이터에 의한 파라미터도 무작위 분포를 갖게된다. 따라서 이러한 무작위 분포로부터 특성을 파악하기 위해 통계학적 처리가 요구된다. 통계적 처리를 위해서는 Monte Carlo simulation 이 좋은 해결방법이다.

측정 데이터에 난수 분포의 오차를 적용하여 모의 시행 횟수만큼의 연속적인 새로운 데이터 집단을 형성하고, 각 데이터 집단에 대한 파라미터(부재단면 특성)를 추정한다. 모의시행 횟수만큼 얻어진 파라미터(부재단면 특성)들의 통계학적 특성을 조사한다. 이 때 난수 발생된 데이터 집단이 많으면 많을 수록 추정된 통계학적 신뢰성은 증가된다. 제안된 파라미터 추정기법의 거동을 연구하기 위해 제시되는 통계학적 지수들은 다음과 같다.

추정치 평균

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{x}^t$$

평균의 표준편차 (SDEV)

$$SDEV = \left[\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (\bar{\mathbf{x}}^t - \hat{\mathbf{x}})^2 \right]^{1/2}$$

Average QuadraticBias (RQB)

$$RQB = \frac{\|\bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}\|}{n_p \|\hat{\mathbf{x}}\|_i}$$

Average Sstandard Deviation (SD)

$$SD = \frac{\left[\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{n_p} (\mathbf{x}_i^t - \hat{\mathbf{x}}_i)^2 \right]^{1/2}}{n_p \|\hat{\mathbf{x}}\|}$$

Average Root Mean SquareError (RMS)

$$RMS = \frac{\left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{n_p} (\bar{\mathbf{x}}_i^t - \hat{\mathbf{x}}_i)^2 \right]^{1/2}}{n_p \|\hat{\mathbf{x}}\|}$$

Average Identification Error (AIE)

$$AIE = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{n_p} |\bar{\mathbf{x}}_i^t - \hat{\mathbf{x}}_i|}{n_p \|\hat{\mathbf{x}}\|}$$

여기서, \mathbf{x} 는 i 번째 시행에서 추정치 벡터이고, $\hat{\mathbf{x}}$ 는 파라미터의 참값이고, n_p 는 파라미터의 갯수, 그리고 T 는 모의시행 횟수이다.

다음 예제에서 제안된 추정 기법과 기존의 Output Error Estimator 가 비교된다.

4. 예제

예제 구조물인 2 차원 트러스가 그림 1.에 주어져 있다. 총 4 개의 서로 다른 단면을 갖는 25 개의 부재로 구성되고, 총 21 개의 자유도를 갖는다. 부재의 단면적이 표 1에 제시되어 있다. 구조물에 적용된 하중 case 는 3 가지이다.

Young 계수는 모든 부재에 대해 일정한 것으로 가정되었고, 추정되어야 하는 파라미터는 부재의 단면적으로 하였다. 이 예제 구조물에 대한 결과치는 설계 변수를 4 개로 한 경우와 25 개로 한 경우에 대해 제시한다. 설계 변수가 4 개인 경우는, 상현재, 하현재, 수직재, 그리고 사재로 구분되고, 이때는 21 개의 자유도중 13 개의 자유도에서 측정되었고, 25 개인 경우는 각 부재가 하나의 설계 변수로 취급되며 21 개 전 자유도에서 측정된 경우이다.

표 1. 부재 단면적

부재	단면적 (in ²)
상현재	18
하현재	15
수직재	10
사재	12

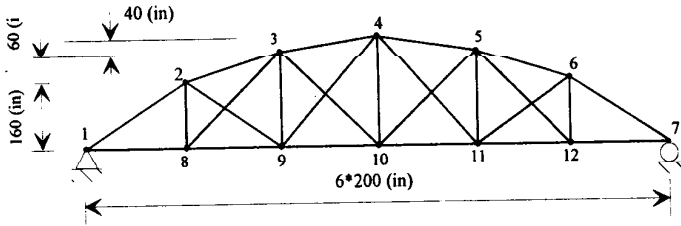
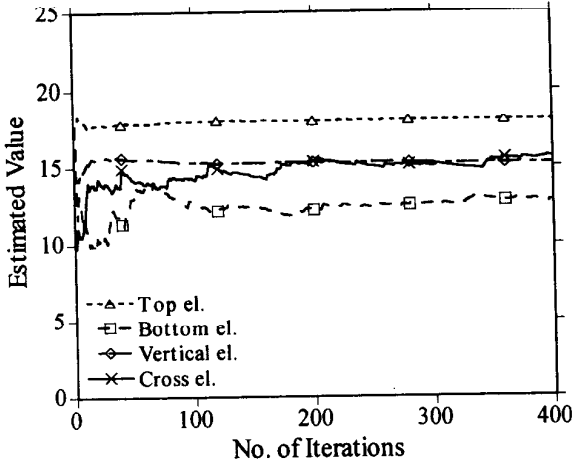
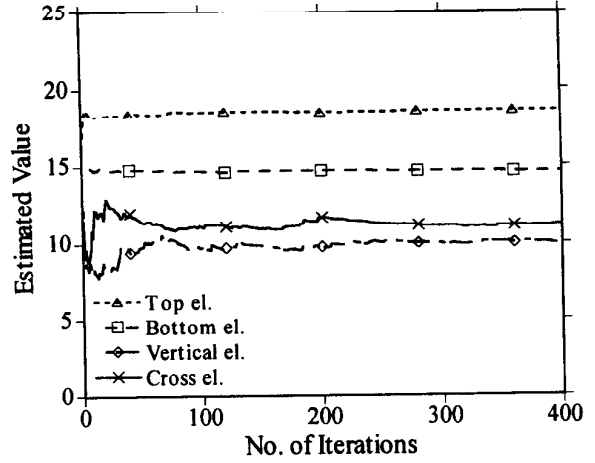


그림 1. 예제구조물

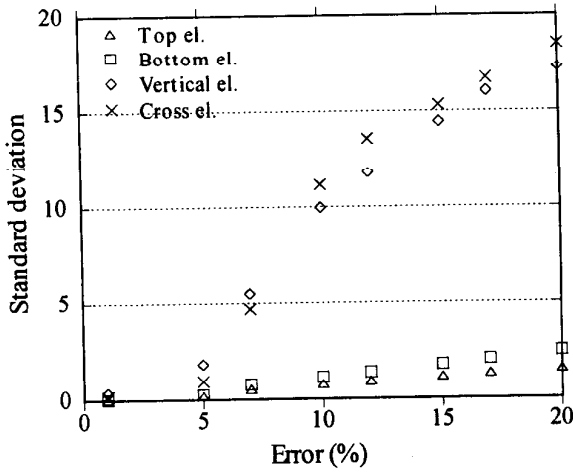


a) Output Error Estimator

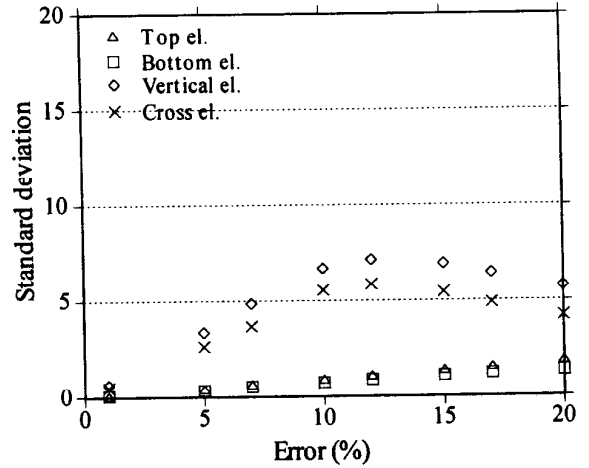


b) Energy type Estimator

그림 2. 추정된 부재 단면 평균값



a) Output Error Estimator



b) Energy type Estimator

그림 3. 추정된 부재 평균 단면적의 표준편차

파라미터를 4 개로 취한경우의 추정된 파라미터의 평균값이 그림 2에 주어져 있다. 이때의 오차의 Amplitude는 측정치의 10%로 가정하였다. 그림에서 알수 있듯이 상현재와 하현재 같이 매우 민감한 요소들은 계산되는 파라미터값이 변폭이 작으면서도 참값에 잘 일치한다. 그러나 수직재와 사재 같이 둔감한 부재는 파라미터값이 참값에 정확히 일치하지 않을 뿐더러 그 변폭도 크다. Energy Type Estimator를 사용한 경우가 더 참값에 근접하고 변폭도 작음을 알 수 있다. 파라미터의 변폭을 보기 위해 모의 시행에 대한 추정치 평균의 표준편차를 그림 3에 제시하였다. 이 때 오차의 크기를 측정치의 1%에서 20%까지 단계적으로 증가시켰다. 오차가 7% 이상으로 커지는 경우 Energy Type Estimator Output Error Estimator에 비해 표준편차가 현저히 작아져 안정된 값을 계산함을 알 수 있다.

그림 4는 파라미터 갯수를 25 개로 한경우의 Monte Carlo 모의 시행에 따른 통계학적 index이다. 역시 여기서도 Energy type estimator가 Output Error Estimator보다 작고 안정된 값들을 보임을 알 수 있다.

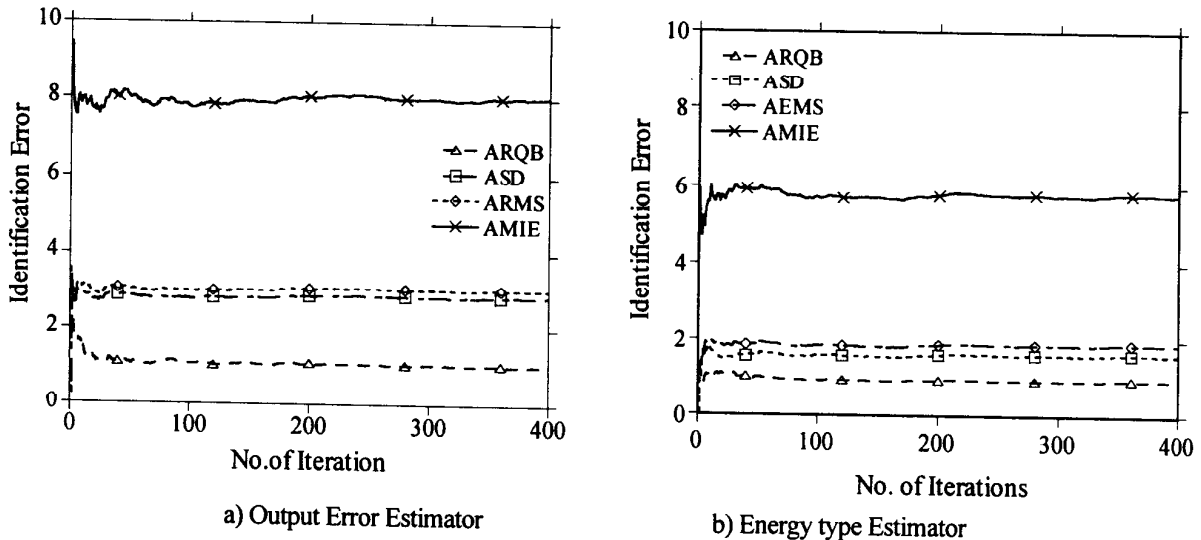


그림 4. 통계학적 Index

5. 결론

기존의 parameter estimation 방법인 output error estimator와 새로 제안되는 energy type estimator를 비교해 보았다. 오차의 크기가 작은 경우 두가지 방법 모두 정확한 파라미터를 추정하였다. 그러나 오차의 크기가 커지면 energy type estimator가 더 정확한 추정치를 제공하고, 평균 추정단면적의 표준편차도 output error estimator에 비해 작은 값을 보여준다. Monte Carlo 모의시행에 의한 통계학적 Index들도 energy type estimator에서 더 작고 일관된 값을 보여준다. 이것은, parameter estimation이 system identification에 사용될때 파라미터 추정법의 안정성이 매우 중요한 요소가 되는데, energy type estimator가 output error estimator보다 훨씬 안정된 거동을 보이므로 손상탐색에 이 추정기법을 적용할 경우 기존의 것보다 더 향상된 결과를 제공할 것으로 기대된다.

REFERENCES

1. David G. Luenberger. (1989) Linear and nonlinear programming, 2th ed., Addison Wesley Co.
2. Shin, Soohong. (1994) Damage detection and assessment of structural systems form measured response, Ph. D. thesis, The Univ. of Illinois at Urbana-Champaign.
3. R. Banan, M. R. Banan, and K. D. Hjelmstad (1994), "Parameter estimation of structure from static response," J. of Structural Engineering, Vol 120, No. 11, November, 3243-3283
4. Fletcher, R. (1971). A general quadratic programming algorithm. J. of Institute of Mathematics and its Applications. 7. 76-91