

크리프 및 건조수축을 고려한 콘크리트 사장교의  
최적화 기법을 이용한 초기평형상태 해석

Initial Equilibrium States Analysis by Optimization of  
Concrete Cable-stayed Bridges Considering Creep and Shrinkage

정길제\* · 이승한\*\* · 이해성\*\*\*

Jung, Kil-Je · Lee, Seung-Han · Lee, Hae Sung

1. 서 론

최근 사장교의 건설이 기하급수적으로 증가하면서 사장교의 설계 및 시공 기술은 크게 발전하였고, 강재의 가격 상승으로 콘크리트 사장교의 건설이 증가하고 있다. 콘크리트는 재료적 특성으로 인하여 시간이 지남에 따라 구조물의 기하적 형상이 변화하게 되고 이에 따라 케이블의 장력 및 구조물의 응력 상태가 변하게 된다. 케이블지지 구조물에서는 구조물의 변위장과 함께 주어진 설계 조건을 만족시키는 케이블의 장력이나 초기 길이를 결정하는 해석이 필요하며, 이러한 해석을 초기평형상태 해석이라고 정의한다. 기존의 초기평형상태 해석은 기하학적 구속조건을 이용한 방법[1], 그리고 구조물의 변형 에너지를 최소화하면서 목표 형상을 만족시키는 초기평형상태 해석법[2] 등이 있으나, 이는 강사장교에 적용 가능한 방법이다. 콘크리트의 크리프 현상 및 사장교의 시공단계를 고려한 목표형상 해석법이 있으나[3], 주어진 목표형상을 만족시키기 위한 Newton-Raphson 법을 이용하여 케이블 부재나 뼈대 부재에 과도한 부재력이 발생할 수 있다. 이 연구에서는 김창현 등이 제안한 최적화를 이용한 초기평형상태 해석법[2]을 콘크리트 사장교에 적용한다. 콘크리트 부재의 시간의존성 거동이 완료된 목표시점을 설정하고 주어진 목표형상 및 뼈대구조물에서 발생하는 휨 모멘트를 최소화하는 초기평형상태 해석법을 제안한다. 초기평형상태 해석을 위한 민감도를 구하기 위하여 크리프 및 건조수축, 그리고 재령효과를 고려한 콘크리트 사장교의 평형 방정식을 유도하고, 직접 미분하여 케이블 무응력 길이에 대한 변위 및 모멘트 민감도를 계산한다.

2. 콘크리트 사장교의 평형방정식

콘크리트 사장교의 평형방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{F}_F(\mathbf{L}_0, \mathbf{u}^n(\mathbf{L}_0)) + \mathbf{F}_C(\mathbf{L}_0, \mathbf{u}^n(\mathbf{L}_0)) = \mathbf{P} \tag{1}$$

\* 학생회원 · 서울대학교 건설환경공학부 박사과정 · 공학사 · E-mail: kjjung01@snu.ac.kr - 발표자

\*\* 학생회원 · 서울대학교 건설환경공학부 석사과정 · 공학사 · E-mail: shleeu02@snu.ac.kr

\*\*\* 정회원 · 서울대학교 건설환경공학부 교수 · 공학박사 · E-mail: chslee@snu.ac.kr

여기서  $\mathbf{F}_F$ ,  $\mathbf{F}_C$ ,  $\mathbf{P}$  는 각각 뼈대구조물과 케이블에 발생한 부재력, 구조물에 작용하는 외력을 의미한다. 사장교의 부재력은 케이블의 무응력 길이  $\mathbf{L}_0$  와 콘크리트 사장교는 시간에 따라 구조물의 기하형상이 변하기 때문에 시간이력 해석의  $n$  번째 단계에서 발생한 변위  $\mathbf{u}^n$  에 의하여 결정된다.

콘크리트 사장교의 뼈대구조물에 발생한 부재력을 계산하기 위해서 콘크리트의 크리프 및 건조수축, 그리고 재령효과를 고려한다. 크리프의 정확한 계산을 위하여 크리프의 중첩 법칙에 기반하는 중첩 적분식을 이용하고, 수치해석을 위하여 황재웅이 제안한 일반화된 중앙값 정리를 적용한다[3].

$$\Delta \varepsilon_{c,k}^{n+1} \approx \sum_{i=k}^{n-1} (C_{i+\alpha-k}^{n+1-k} - C_{i+\alpha-k}^{n-k}) \Delta \sigma^{i+1} + C_{n+\alpha-k}^{n+1-k} \Delta \sigma^{n+1} = f_{c,k}^{n+1} + C_{n+\alpha-k}^{n+1-k} \Delta \sigma^{n+1} \quad (2)$$

여기서  $\Delta \varepsilon_{c,k}^{n+1}$  시간이력 해석의  $k$  번째 단계에서 설치된 부재가  $n+1$  번째 단계에서 발생하는 크리프 변형도의 증분량을 의미한다.  $C_{\alpha}^{\beta}$  는  $\alpha$  단계에서 재하된 하중으로 인하여  $\beta$  단계에 발생하는 비크리프 계수를 나타내고,  $\Delta \sigma^n$  은  $n$  번째 단계에서 발생한 응력의 증분량을 나타낸다.

콘크리트의 건조수축 및 재령효과는 국내의 콘크리트 구조설계기준을 따른다.

$$\Delta \varepsilon_{sh,k}^{n+1} = \varepsilon_{sh,k}^{t+\Delta t} - \varepsilon_{sh,k}^t = \varepsilon_{sho} (\beta_s (t + \Delta t - t_s) - \beta_s (t - t_s)) = \varepsilon_{sho} \Delta \beta_s^{n+1} \quad (3)$$

$$E_k^{n+1} = \sqrt{\beta_{cc} (t + \Delta t - t^k)} E_{ci} \quad (4)$$

여기서  $\Delta \varepsilon_{sh,k}^{n+1}$ ,  $E_k^{n+1}$  은 각각  $n+1$  번째 단계에서 발생하는 건조수축 변형도의 증분과 콘크리트의 강도를 의미하고, 식 (3), (4)의  $\beta_s, \beta_{cc}, t_s, E_{ci}$  는 각각 국내 콘크리트 구조설계기준을 따르고 있다[4].

콘크리트의 전체 변형은 외부 하중에 의해 발생하는 탄성 변형과 시간에 따라 발생하는 크리프 변형과 건조수축 변형으로 나뉘므로 구조물에 작용하는 실제 응력은 전체 변형도에서 크리프 및 건조수축 변형도와 같은 비역학적 변형도를 제외한 역학적 변형도를 이용하여 구한다.

$$\Delta \sigma^{n+1} = E_k^{n+1} (\Delta \varepsilon_k^{n+1} - \Delta \varepsilon_{c,k}^{n+1} - \Delta \varepsilon_{sh,k}^{n+1}) = E_k^{n+1} (\Delta \varepsilon_k^{n+1} - f_{c,k}^{n+1} - C_{n+\alpha-k}^{n+1-k} \Delta \sigma^{n+1} - \varepsilon_{sho} \Delta \beta_s^{n+1}), \quad \Delta \tau^{n+1} = G_k^{n+1} \Delta \gamma_k^{n+1} \quad (5)$$

$$\Delta \sigma^{n+1} = \frac{E_k^{n+1}}{1 + E_k^{n+1} C_{n+\alpha-k}^{n+1-k}} (\Delta \varepsilon_k^{n+1} - f_{c,k}^{n+1} - \varepsilon_{sho} \Delta \beta_s^{n+1}) = E_{e,k}^{n+1} (\Delta \varepsilon_k^{n+1} - f_{c,k}^{n+1} - \varepsilon_{sho} \Delta \beta_s^{n+1}) \quad (6)$$

$G_k^{n+1}$  은 전단강성계수이고, 식 (6)에서  $E_{e,k}^{n+1}$  은 유효탄성계수로서  $n+1$  번째 단계에서 발생한 응력 증분량  $\Delta \sigma^{n+1}$  로 인한 크리프 변형도를 비크리프 계수를 이용하여 탄성계수의 감소 형태로 나타내는 변수이다.

위에서 구한 응력 성분을 단면에 대하여 적분하여 단면력을 구할 수 있다. 베르누이 들보 가정에 의해 변형도-변위 관계식을 적용하면 부재의 단면력( $N^{n+1}$ ,  $M_x^{n+1}$ ,  $M_y^{n+1}$ ,  $M_z^{n+1}$ )은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$N^{n+1} = \int_A (\sigma^n + \Delta \sigma^{n+1}) dA = N^n + E_{e,k}^{n+1} A \frac{d\Delta u_x^{n+1}}{dx} - E_{e,k}^{n+1} \left( \sum_{i=k}^{n-1} (C_{i+\alpha-k}^{n+1-k} - C_{i+\alpha-k}^{n-k}) \Delta N^{i+1} + A \varepsilon_{sho} \Delta \beta_s^{n+1} \right) \quad (7-1)$$

$$M_x^{n+1} = \int_A (\tau^n + \Delta \tau^{n+1}) \rho dA = M_x^n + G_k^{n+1} J \frac{d\Delta \theta_x^{n+1}}{dx} \quad (7-2)$$

$$M_y^{n+1} = -\int_A (\sigma^n + \Delta\sigma^{n+1}) z dA = M_y^n + E_{e,k}^{n+1} I_y \frac{d^2 \Delta u_z^{n+1}}{dx^2} - E_{e,k}^{n+1} \sum_{i=k}^{n-1} (C_{i+\alpha-k}^{n+1-k} - C_{i+\alpha-k}^{n-k}) \Delta M_y^{i+1} \quad (7-3)$$

$$M_z^{n+1} = -\int_A (\sigma^n + \Delta\sigma^{n+1}) y dA = M_z^n + E_{e,k}^{n+1} I_z \frac{d^2 \Delta u_y^{n+1}}{dx^2} - E_{e,k}^{n+1} \sum_{i=k}^{n-1} (C_{i+\alpha-k}^{n+1-k} - C_{i+\alpha-k}^{n-k}) \Delta M_z^{i+1} \quad (7-4)$$

$$\mathbf{F}_F^{n+1} = \mathbf{F}_F^n + \mathbf{K}_F^{n+1} \Delta \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n+1} \quad (8)$$

여기서  $A, J, I_y, I_z$ 는 부재의 물성치를 의미하고,  $\Delta u_x^{n+1}, \Delta u_y^{n+1}, \Delta u_z^{n+1}, \Delta \theta_x^{n+1}$ 는  $n+1$  번째 단계에서 발생한  $x, y, z$  방향 변위 성분의 증분, 그리고  $x$  방향 회전 변위 성분의 증분을 의미한다. 식 (8)은 식 (7)을 행렬식 형태로 나타낸 것이고,  $\mathbf{Q}^{n+1}$ 은 콘크리트의 시간의존성 거동을 나타내는 부재력을 의미한다.

콘크리트 사장교의 평형방정식은 식 (8)을 식 (1)에 대입하여 다음과 같이 구할 수 있다. 식 (9)에서 케이블 부재의 부재력은 탄성현수선 요소 또는 등가 트러스 요소를 이용하여 구할 수 있다.

$$\mathbf{K}_F^{n+1} \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{F}_C = \mathbf{P} - \mathbf{F}_F^n + \mathbf{Q}^{n+1} \quad (9)$$

### 3. 콘크리트 사장교의 복합 초기평형상태 해석법

콘크리트 사장교의 초기평형상태 해석을 위하여 김창현 등이 제안한 최적화를 이용한 복합 초기평형상태 해석법을 적용한다[2]. 콘크리트 사장교에 적용하기 위하여 목표시점  $\bar{t}$ 을 설정하고 목표시점에서 발생한 변위와 모멘트를 최소화하기 위하여 다음과 같은 최적화 문제로 정의할 수 있다.

$$\text{Min}_{\mathbf{L}_0} \Pi = \frac{(1 - \alpha_{opt})}{2} \frac{1}{\hat{u}^2} \sum_{j=1}^{ncons} (u_{c,j}(\mathbf{L}^0, \bar{t}) - \bar{u}_{c,j})^2 + \frac{\alpha_{opt}}{2} \frac{1}{\hat{M}^2} \int_{L_f} (M(\mathbf{L}^0, \bar{t}))^2 dL_f \quad (10)$$

여기서 첫번째 적분항은 목표형상을 이용한 초기평형상태 해석법을 의미하고, 두번째 적분항은 모멘트를 최소화하는 초기평형상태 해석법을 의미한다.  $\alpha_{opt}$ 는 가중치로서 0 과 1 사이의 값을 가지며,  $\hat{u}, \hat{M}$ 은 각 항을 무차원화 하기 위한 표준화 계수이다. 가중치가 0 이면 첫번째 항을 최적화하여 목표형상( $\bar{u}_c$ )에 의한 초기평형상태 해석과 동일하게 되며, 가중치가 1 이면 두번째 항을 최적화하여 모멘트를 최소화하는 초기평형상태 해석을 수행하게 된다. 가중치 값을 0 과 1 사이에서 적절히 조정하면 기하학적 목표형상을 만족시키는 초기평형상태와 모멘트를 최소화하는 초기평형상태 사이에서 목표상태를 정의할 수 있다.

식 (10)의 최적화 문제를 풀기 위해서는 케이블 무응력 길이에 대한 변위 및 모멘트 민감도 해석이 필요하다. 이는 식 (8)과 식 (9)를 직접 미분하여 민감도를 계산할 수 있다[5].

$$\mathbf{K}_F^{n+1} \frac{\partial \Delta \mathbf{u}^{n+1}}{\partial L_j} + \frac{\partial \mathbf{F}_C}{\partial L_j} = -\frac{\partial \mathbf{F}_F^n}{\partial L_j} + \frac{\partial \mathbf{Q}^{n+1}}{\partial L_j} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_F^{n+1}}{\partial L_j} = \frac{\partial \mathbf{F}_F^n}{\partial L_j} + \mathbf{K}_F^{n+1} \frac{\partial \Delta \mathbf{u}^{n+1}}{\partial L_j} - \frac{\partial \mathbf{Q}^{n+1}}{\partial L_j} \quad (12)$$

식 (11)과 식 (12)를 축차적으로 계산하면 목표시점에서 원하는 민감도 값을 계산할 수 있다.

### 4. 예제

제안된 방법의 타당성을 검증하기 위하여 우두-종화교에 CFT 합성 거더를 적용한 모델에 적용하였다. 총 케이블의 수는 52 개이고 균형 캔틸레버 공법으로 시공되며 공사 후 550 일 후에 폐합이 이루어지고 목표시점은 약 1 년 뒤인 900 일로 정하였다. 그림 1 은  $\alpha_{opt}$  값과 제어 절점의 수를 변경한 경우 거더의 수직 변위를 비교한 것이다. 가중치 값이 0 인 경우 목표형상을 만족하지만, 1 에 가까워짐에 따라 목표형상에서 벗어남을 볼 수 있다. 그림 2 는 주탑에 발생하는 모멘트를 비교한 것이다. 가중치 값이 1 인 경우 계산된 모멘트 norm 은 가중치 값이 0 인 경우에 비하여 약 25.2%가 감소하였다.

5. 결론

이 연구에서는 콘크리트 사장교의 최적화를 이용한 초기평형상태 해석법을 제시하였다. 최적화 문제로 정의된 초기평형상태 해석을 위하여 민감도 해석을 하였다. 콘크리트 사장교의 평형방정식을 유도하고, 이를 직접 미분하여 민감도를 계산하였다. 또한 CFT 합성 거더를 채용한 사장교를 통해 제안된 방법의 적용 가능성과 타당성을 검증하였다.

감사의 글

이 연구는 교량설계핵심기술연구단을 통하여 지원된 건설교통부 건설핵심기술연구개발사업과 서울대학교 SIR BK21(안전하고 지속가능한 사회기반건설)사업단의 연구비 지원으로 수행되었습니다. 연구 지원에 감사 드립니다.

참고문헌

1. Kim, K.S. and Lee, H.S. (2001), Analysis of target configurations under dead loads for cable-supported bridges, Journal of Computers and Structures, Vol. 79, Issue 29-30, pp. 2681-2692.
2. 김창현, 이해성 (2005), 최적화 기법을 이용한 사장교의 초기평형상태 해석, 토목학회논문집, Vol. 25, No. 6A, pp. 1071-1084.
3. 황재웅 (2006), 시공단계와 크리프 현상을 고려한 콘크리트 사장교의 목표형상 해석법, 공학석사학위논문, 서울대학교
4. 건설교통부 (2000), 콘크리트구조설계기준-해설, 한국콘크리트학회
5. 이민권, 이해성 (2006), 대형 강 사장교의 폐합해석과 시공오차 예측, 대한토목학회논문집, Vol. 25, No. 6A, pp. 1071-1084.

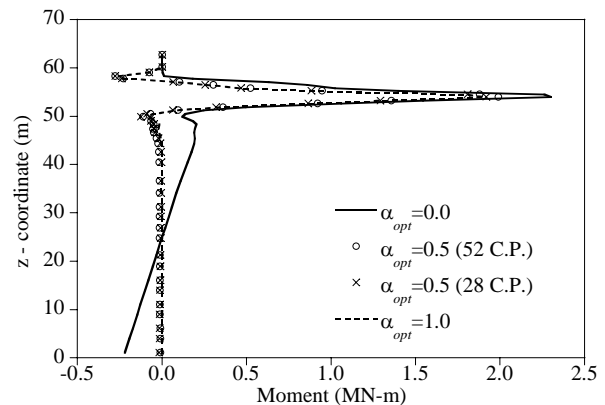
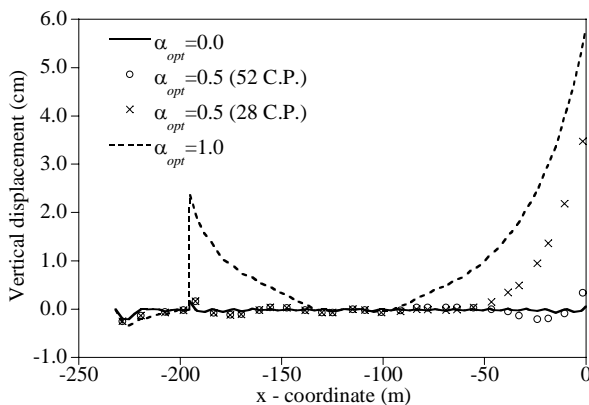


그림 1. 목표시점에서 목표상태에 따른 거더 수직 변위 그림 2. 목표시점에서 목표상태에 따른 주탑 모멘트