2007 대한토목학회 정기학술대회

# 케이블의 동적해석을 위한 가상일 원리의 정식화

## A Formulation of the Principle of Virtual Work for the Dynamic Analyses of Cables

정길제* · 류근원** · 윤상훈***· 이해성****

Jung, Kil-Je · Lyu, Keun-Won · Yoon Sang-Hoon · Lee, Hae Sung

### 1. 서 론

케이블은 무게가 가벼우면서도 강한 인장력에 저항할 수 있기 때문에 장대 교량을 포함하여 해양구조물이나 전기 분야에서 많이 사용되고 있다. 케이블은 휨 강성이 작으므로 외적 여건의 변화에 따라 쉽게 진동하는 특성이 있으며 자유 진동 특성이 일반적인 뼈대 구조물과는 상당히 다르다. 최근 들어 케이블 지지 교량의 장대화 추세에 따라 과거에 비하여 긴 케이블이 사용되기 시작하면서 케이블의 진동제어가 케이블 지지 교량의 설계에서 중요한 문제로 부각되기 시작하였다. 케이블의 동적 거동 특성을 파악하기 위하여 Irvine 등은 수평 케이블이 정적 평형상태에서 포물선 형상을 가진다고 가정하고 선형이론을 사용하여 케이블의 자유진동 특성을 연구하였다[1]. 또한 Irvine 은 케이블의 새그-경간비의 변화에 따라 대칭 모드와 비대칭 모드의 진동수가 일치하는 진동수 교차점(cross-over point)이 나타나고, 이 부근에서 동적 장력이 증폭되는 현상을 연구하였다[1],[2]. 그러나 이러한 연구에서는 지배 방정식을 선형화하기 위하여 여러 가지 가정을 도입하였다. 케이블의 동적 거동을 정확히 해석하기 위해서는 가정을 가능한 적게 적용하는 것이 바람직하다. 그러나 가정을 도입하지 않으면 케이블 운동 방정식을 선형화할 수 없거나 혹은 해석적으로 풀 수 없게 된다. 이 연구에서는 케이블 거동에 대한 가정을 가능한 도입하지 않고 정확히 풀기 위하여 고체 역학에서 정의되는 각종 역학적 변수의 정의를 정확히 사용하여 엄밀한 가중잔차식 및 가상일 원리를 유도하였다. 제안된 방법을 케이블의 주파수영역 해석에 적용하기 위하여 미소 동적 변위 가정만을 도입하였고, 제안된 가상일 원리에 Rayleigh-Ritz 형식의 이산화를 적용하여 케이블 구조물의 고유진동수를 간편하게 계산할 수 있는 방법을 제시하였다.

### 2. 케이블의 동적해석을 위한 가상일 원리의 유도

정식화의 편의를 위하여 정적 평형상태에서 케이블이 놓이게 되는 평면을 $x$-$y$ 평면으로 정하고, 케이블의 무응력 길이는 $L_0$ 이다. 정적 평형상태에서 동적 변위가 발생한 케이블의 공간 위치는 라그랑지 좌표 $s$ 에 대하여 다음과 같이 표시 할 수 있다.

* 학생회원 · 서울대학교 건설환경공학부 박사과정 · 공학사 · E-mail: kjjung01@snu.ac.kr
** 학생회원 · 서울대학교 건설환경공학부 석사과정 · 공학사 · E-mail: kwlyu01@snu.ac.kr
*** 학생회원 · 서울대학교 건설환경공학부 석사과정 · 공학사 · E-mail: shyoon98@snu.ac.kr
**** 정회원 · 서울대학교 건설환경공학부 교수 · 공학박사 · E-mail: chslee@snu.ac.kr – 발표자

$$x(s) = x_s(s) + x_d(s), \quad y(s) = y_s(s) + y_d(s) \tag{1}$$

여기서 $x$, $y$, $x_s$, $y_s$, $x_d$, $y_d$ 는 각각 라그랑지 좌표 $s$ 에 대한 동적 평형상태에서의 위치, 정적 평형상태에서의 위치 그리고 정적 평형상태에 대한 동적 변위를 표시한다. 동적 상태에서의 케이블 길이 $p$ 는 다음과 같다.

$$p(s) = \int_0^s ((\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2)^{0.5} ds, \quad \frac{dp}{ds} = (\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2 \tag{2}$$

케이블에서는 변형 전 형상을 정의할 수 없기 때문에 변형도를 변위에 대하여 표시할 수 없다. 따라서 케이블의 변형도는 일반적인 Green 변형도의 정의에 의하여 라그랑지 좌표 $s$ 에 대응하는 동적평형상태 위치에 대하여 표시하여야 한다. $()' = d()/ds$ 이며, 이는 케이블의 변형 그래디언트로 정의할 수 있다.

$$\varepsilon = \frac{1}{2}((x')^2 + (y')^2 - 1) = \frac{1}{2}((p')^2 - 1) \tag{3}$$

위 식에서 $\varepsilon$ 는 총변형도이고, 동적 변위에 의하여 발생한 동적 Green 변형도는 다음과 같다.

$$\varepsilon_d = \varepsilon - \varepsilon_s = \frac{1}{2}((\frac{dp}{ds})^2 - (\frac{dp_s}{ds})^2) = x_s' x_d' + y_s' y_d' + \frac{1}{2}((x_d')^2 + (y_d')^2) \tag{4}$$

동적 상태에서 케이블에 작용하는 장력은 Hooke 의 법칙에 적용하여 표시할 수 있다. 변형 전후의 형상 차이를 무시하는 소변형 문제와는 달리 변형전의 형상을 정의할 수 없는 케이블에서는 이차 Piola-Kirchhoff (이차 P-K) 응력($\tilde{\sigma}$)과 Green 변형도 관계를 정의하여야 한다[3].

$$\tilde{T} = \int_A \tilde{\sigma} dA = \int_A E\varepsilon dA = EA\varepsilon = \frac{EA}{2}((x')^2 + (y')^2 - 1) = \frac{EA}{2}((p')^2 - (p_s')^2 + (p_s')^2 - 1) = \tilde{T}_s + \tilde{T}_d \tag{5}$$

여기서 $\tilde{T}$ 는 이차 P-K 응력을 적용하여 산정된 이차 P-K 장력이며, $E$ 와 $A$ 는 각각 탄성계수와 케이블 단면적이다.

동적상태에서의 평형방정식은 정적 평형방정식에 관성력을 고려하여 구성한다.

$$T\frac{dx}{dp} + F_x^1 - \int_0^p \rho\ddot{x} dp = 0, \quad T\frac{dy}{dp} + F_y^1 + \int_0^p w dp - \int_0^p \rho\ddot{y} dp = 0 \tag{6}$$

동적 상태에서의 Cauchy 장력 $T = p'\tilde{T}$ 이고, $F_x^1$, $F_y^1$ 은 각각 1 번 절점에서 각 좌표 방향으로 작용하는 재단력이다. $w$ 와 $\rho$ 는 각각 동적상태에서의 단위 길이 당 무게와 질량으로 질량보존의 법칙을 이용하여 변형전의 단위 길이 당 무게 $w_0 (= wp')$ 와 질량 $\rho_0 (= \rho p')$ 으로 표시할 수 있다.

동적 문제의 수치적 해를 구하기 위하여 동적운동방적식에 가중잔차법을 적용한다. 식 (6)을 $p$ 에 대하여 미분하고, 미소 가상 동적 변위를 곱하여 적분하면 가중 잔차식을 구할 수 있다. 양단이 고정된 케이블의 양단에서의 동적 가상 변위는 영이라는 경계조건을 적용하고, 적분 변수를 라그랑지 좌표 $s$ 에 대하여 표시한다. 또한 $x$-방향 및 $y$-방향의 가상 동적 변위는 서로 독립적이므로 하나의 가중잔차식으로 구성하여

표시할 수 있다. 따라서 다음과 같은 케이블의 동적 평형방정식에 대한 최종적인 가중잔차식을 구할 수 있다.

$$\int_{L_0} \rho_0(\delta x_d \ddot{x} + \delta y_d \ddot{y})ds + \int_{L_0} \tilde{T}(x'\delta x_d' + y'\delta y')ds - \int_{L_0} \hat{y}w_0 ds = 0 \tag{7}$$

식 (7)은 Total Lagrangian description(TLD)에 의하여 표시된 케이블의 동적운동에 대한 가상일 원리를 표시하고 있으며, 관성력에 의한 동적 가상일, 내적 가상일 그리고 외적 가상일의 합이 영이 된다는 것을 의미한다. 식 (7)에서 정의된 가상일 원리는 동적 평형상태에서 가상 동적 변위가 발생하였을 때 케이블에서 발생하는 가상일을 고려하여 직접 유도할 수 있고, 역시 동일한 가상일 원리를 구할 수 있다[4].

### 3. 주파수영역 해석

식 (7)은 비선형 방정식이기 때문에 주파수영역 해석을 통한 고유진동수를 계산하기 위하여 선형화 과정이 필요하다. 식 (7)에서 첫번째 항과 세번째 항은 선형 항이므로 선형화 과정이 필요하지 않고, 두번째 항에 대한 선형화 과정이 필요하다. 식 (7)의 선형화된 식은 다음과 같이 행렬식 형태로 표시할 수 있다.

$$\int_{L_0} \begin{pmatrix} \delta x_d & \delta y_d \end{pmatrix} \rho_0 \begin{pmatrix} \ddot{x}_d \\ \ddot{y}_d \end{pmatrix} ds + \int_{L_0} \begin{pmatrix} \delta x_d' & \delta y_d' \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}_s + EA(x_s')^2 & EAx_s' y_s' \\ EAx_s' y_s' & \tilde{T}_s + EA(y_s')^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_d' \\ y_d' \end{pmatrix} ds = 0 \tag{8}$$

식 (8)에서 정적 평형상태에 대한 장력 및 위치는 케이블의 정해석을 이용하여 구할 수 있다. 따라서 동적 변위를 적절한 함수로 가정하여 식 (8)에 대한 고유치 해석을 수행하면 정적평형 위치 부근에서의 케이블의 고유진동수를 근사적으로 구할 수 있다.

식 (8)은 전체 좌표계에서 정의되어 있지만, 변위 성분을 가정할 때에서는 케이블의 현 방향과 현 수직방향의 변위 성분을 기저함수를 가정하여 이산화한다.

$$\tilde{x}_d \approx \sum_{i=1}^{n} A_{xi} \tilde{\phi}_{xi}(s) \sin \omega t, \quad \tilde{y}_d \approx \sum_{i=1}^{n} A_{yi} \tilde{\phi}_{yi}(s) \sin \omega t \tag{9}$$

여기서 $\omega$ 및 $n$ 은 케이블의 각 진동수와 기저함수의 개수이고, $\tilde{x}_d$, $\tilde{y}_d$, $\tilde{\phi}_{xi}$ 그리고 $\tilde{\phi}_{yi}$ 는 각각 현 방향 및 현 수직방향에 대한 동적변위와 기저함수이다. 식 (9)에서는 현 방향 및 현 수직방향의 동적 변위에 대하여 동일한 개수의 기저함수를 사용하였으나, 일반적으로 반드시 동일한 개수의 기저함수를 사용할 필요는 없다. 식 (9)에서 정의된 동적변위는 반드시 양단에서 영이 되어야 한다.

현 방향 및 현 수직방향의 동적 변위는 2 차원 변환행렬을 이용하여 전체 좌표계에서의 $x$-방향 및 $y$-방향 변위로 표시할 수 있고, 이를 식 (8)에 대입하여 고유치 문제의 특성방정식을 정의할 수 있다. 제안한 방법을 적용하여 케이블의 고유진동수를 간단히 구할 수 있는 프로그램인 KBRCCAB 을 개발하였다.

### 4. 예제

제안된 방법의 타당성을 검증하기 위하여 제 2 진도대교에 적용된 케이블의 고유진동수를 계산하여 시간영역 해석 결과와 스트링에 대한 해석적 해와 비교하였다. 예제의 해석을 위하여 KBRCCAB 에서 지정된 기본값(현 방향 및 현 수직방향 기저함수 각각 20 개)을 사용하였다. 그림 1 은 제안된 방법에서

계산된 고유진동수를 시간영역의 해석 결과와 함께 보이고 있다. 두 해석 결과는 잘 일치하며, 새그비가 증가하면서 진동수 교차점이 발생하는 것을 보이고 있다. 그림 2 는 케이블의 경사각 변화에 따른 진동수 변화를 검토하기 위하여 경사각을 변화시키면서 각 새그비에 따른 1 차 고유진동수를 계산하였다. 비교를 위하여 장력의 공간적 변화와 자중에 의한 정적 처짐 효과를 무시한 스트링의 1 차 고유진동수를 같이 도시하였다.

## 5. 결론

이 연구에서는 가상일 원리에 기초한 케이블의 동적해석법을 제시하였다. 제시된 가상일 방정식을 유도하기 위하여 어떠한 가정도 도입하지 않았으며, 고체 역학에서 기본적인 관계식을 사용하였다. 케이블의 운동방정식에 대한 가상일 원리를 선형화하여 주파수영역 해석법을 제안하였으며, 이를 기초하여 케이블의 고유진동수와 진동형상을쉽게 계산할 수 있는 KBRCCAB 을 개발하였다. 시간영역에서의 비선형 해석을 위한 증분형 방정식을 유도하였으나, 추후 느슨한 케이블의 불안정성에 대한 정밀한 검증에 대한 연구가 필요하다.

## 감사의 글

이 연구는 교량설계핵심기술연구단을 통하여 지원된 건설교통부 건설핵심기술연구개발사업과 서울대학교 SIR BK21(안전하고 지속가능한 사회기반건설)사업단의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

## 참고문헌

1. Irvine, H.M. and Caughey, T.K. (1974) The linear theory of free vibrations of a suspended cable, *Proceedings of the Royal Society, Series A*, Vol. 341, pp. 299-315.
2. Irvine, H.M. (1978) Free vibrations of inclined cables, *Journal of Structural Division, ASCE*, Vol. 104, No.2, pp. 343-347.
3. Malvern, L.E. (1969) *Introduction to the mechanics of a continuous medium*, Prentice- Hall, New Jersey
4. 정길제, 박연철, 김현겸, 이해성. (2007) 케이블의 동적해석을 위한 가상일 원리의 정식화, 교량설계핵심기술연구단
5. 박연철 (2006) 느슨한 케이블의 동적 해석을 위한 안정화 기법, 석사학위논문, 서울대학교

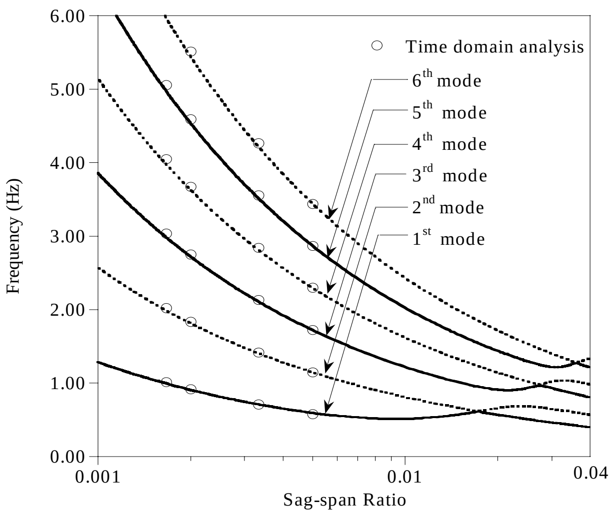


그림 1. 새그비에 따른 케이블의 고유진동수 변화

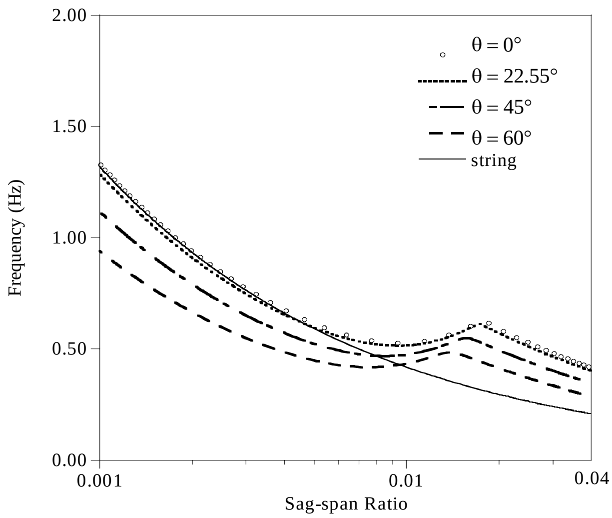


그림 2. 경사각에 따른 1차 고유진동수의 변화