모멘트 추정법에 의한 사장교 거동의 통계적 해석법

Statistical Analysis Method of Cable-stayed Bridges Behavior by Method of Moment Estimation

전호진[*] · 김기석[**] · 김종서[***]· 이해성[****]

Jeon, Ho Jin · Kim, Ki-Seok · Kim, Jong Seo· Lee, Hae Sung

1. 서 론

사장교는 여타 형식의 교량에 비하여 세장한 구조물로서 복잡한 비선형 거동을 하기 때문에 구조형식과 설계변수에 따른 정밀한 구조해석이 필수적이다[3]. 즉, 설계변수의 불확실성을 고려한 확률해석을 통해 사장교 구조물의 정확한 거동을 파악을 해야 한다. 모멘트 추정법은 구조물의 설계변수를 확률변수로 하여 응답의 확률분포를 추정함으로써 비교적 정확한 확률해석을 수행한다[2]. 기존의 몬테카를로 모사법(MCS)은 반복적 구조해석을 통해 구조물 응답의 확률해석을 수행하기 때문에, 시간이 과다하게 소요되는 단점이 있어 복잡한 구조물의 해석에는 적합하지 않다[1,4]. 이 논문에서는 이계삼차모멘트법을 도입하여 단 한번의 구조해석으로 사장교 구조물을 대상으로 응답의 평균, 표준편차, 왜도 등 분산 특성을 파악하고, 응답확률분포를 추정한다. 이계삼차모멘트법에 필요한 민감도 계산은 탄성현수선 요소를 사용하여 직접 계산한다. 사장교 예제를 통해 몬테카를로 모사법과 비교하여 타당성과 효율성을 검증하였다.

2. 이계삼차모멘트법

모멘트법을 다 변수 확률변수를 갖는 비선형 응답 함수에 적용하여 확률분포를 추정한다[2]. $\mathbf{z}$ 의 확률분포가 주어져 있을 때, 응답의 확률분포를 추정하기 위해 다음과 같이 확률변수의 평균 $\bar{\mathbf{z}}$ 에서 2 차 테일러 급수로 응답 ψ 을 근사 한다.

$$\psi = \psi_0 + \psi_{,i}(z_i - \bar{z}_i) + \psi_{,ij}(z_i - \bar{z}_i)(z_j - \bar{z}_j) \tag{1}$$

응답 ψ 의 평균은 다음과 같다.

$$E[\psi] = \bar{\psi} = \psi_0 + \psi_{,ij}C_{ij} \tag{2}$$

여기서, C_{ij} 는 확률변수 $\mathbf{z}$ 의 2 차 공분산 행렬이다.

---

[*] 학생회원 · 서울대학교 건설환경공학부 석사과정 · 공학사 · E-mail: hjjeon98@snu.ac.kr
[**] 정회원 · 포항산업과학연구원 강구조연구소 선임연구원 · 공학박사 · E-mail: kskim93@rist.re.kr
[***] 학생회원 · 서울대학교 건설환경공학부 석사과정 · 공학사 · E-mail: jskim99@snu.ac.kr
[****] 정회원 · 서울대학교 건설환경공학부 교수 · 공학박사 · E-mail: chslee@snu.ac.kr – 발표자

$$C_{ij} = E[(z_i - \bar{z}_i)(z_j - \bar{z}_j)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (z_i - \bar{z}_i)(z_j - \bar{z}_j)\phi_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})dz_i dz_j \tag{3}$$

여기서, $\phi_{\mathbf{Z}}$ 는 $\mathbf{z}$ 의 결합확률밀도 함수로서 $\mathbf{z}$ 의 확률 변수들이 서로 독립인 경우에는 각각의 확률밀도 함수의 곱이 된다. 응답 ψ 의 k 차 중심 모멘트는 다음과 같이 확률변수 $\mathbf{z}$ 의 확률밀도 함수로부터 산정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu_{\Psi}^{(k)} &= E[(\psi - \overline{\psi})^k] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\psi - \overline{\psi})^k \phi_{\Psi}(\psi)d\psi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_{,i}(z_i - \bar{z}_i) + \psi_{,ij}(z_i - \bar{z}_i)(z_j - \bar{z}_j) - \psi_{,ij}C_{ij})^k \phi_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})d\mathbf{z} \end{aligned} \tag{4}$$

3. 응답의 민감도 계산

이계삼차모멘트법에 의한 사장교 거동의 통계적 특성치를 계산하기 위해 케이블지지 구조물의 해석을 위한 강성도 방정식을 확률변수에 따른 민감도를 계산한다[3]. 이 연구에서는 케이블 탄성계수가 확률변수인 경우에 대하여 유도된 방정식을 이용하여 직접 미분법에 의해 구한다. 케이블의 적합조건식은 다음과 같이 매트릭스 형태로 표시할 수 있다.

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}_0^e + \mathbf{u}^e) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{F}_1^e, E_i^e) \tag{5}$$

식(5)를 케이블의 탄성계수에 대하여 미분하고 장력에 대한 민감도로 표시한다.

$$\frac{\partial \mathbf{F}_c^e}{\partial E_i^e} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_c^e & \mathbf{k}_c^e \\ \mathbf{k}_c^e & -\mathbf{k}_c^e \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial E_i^e} + \begin{pmatrix} \mathbf{k}_m^e \\ -\mathbf{k}_m^e \end{pmatrix} = \mathbf{K}_c^e \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial E_i^e} + \mathbf{K}_m^e \tag{6}$$

식(6)을 케이블 지지 구조물의 강성도 방정식에 대입하여 변위의 1 차 민감도를 구한다.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{E}_i} = -(\mathbf{K}_F + \mathbf{K}_c)^{-1}\mathbf{K}_m \tag{7}$$

케이블 탄성계수에 대한 2 차민감도를 구하기 위하여 식 (5)의 적합조건식을 케이블의 탄성계수에 대하여 두 번 미분하고 장력에 대한 2 차민감도로 표시하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_c^e}{\partial E_j^e \partial E_i^e} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_c^e & \mathbf{k}_c^e \\ \mathbf{k}_c^e & -\mathbf{k}_c^e \end{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^e}{\partial E_j^e \partial E_i^e} + \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{m2}^e \\ -\mathbf{k}_{m2}^e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{k}_n^e \\ -\mathbf{k}_n^e \end{pmatrix} = \mathbf{K}_c^e \frac{\partial^2 \mathbf{u}^e}{\partial E_j^e \partial E_i^e} + \mathbf{K}_{m2}^e + \mathbf{K}_n^e \tag{8}$$

식(8)를 전체 구조물에 대한 민감도 식으로 조합하면 변위의 케이블의 탄성계수에 대한 2 차민감도 관계식을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{E}_j \partial \mathbf{E}_i} = -(\mathbf{K}_F + \mathbf{K}_c)^{-1}(\mathbf{K}_{m2} + \mathbf{K}_n) \tag{9}$$

식(7), (9)를 응답 ψ에 대한 2, 3차 중심모멘트를 구하는 식(4)에 대입하여 응답 ψ의 평균 표준편차, 왜도를 구할 수 있다.

4. 예제

제안된 테일러 급수를 이용한 이계삼차모멘트법과 몬테카를로 모사법(MCS)으로 거더 수직처짐 대한 평균과 표준편차, 왜도를 추정하였다. 그림 1 은 12 개의 케이블을 갖는 팬 타입 사장교 모델로서 시공직후의 형상이다. 모든 케이블 탄성계수(E)는 각각 변동계수가 5%인 정규분포를 따르는 확률변수이고, 사장교 거더 중앙의 수직처짐을 구조물 응답으로 고려하였다. 몬테카를로 모사법에서는 탄성계수에 대하여 100 만개의 자료를 Latin hypercube sampling 법으로 추출하였다. 모멘트 추정법에서는 거더 수직처짐에 대하여 1 차, 2 차 테일러 급수를 고려하였고, 삼변수 대수정규분포로 거더 수직처짐의 확률밀도함수를 추정하였다. 몬테카를로 모사법에 의한 거더 수직처짐의 평균과 표준편차, 왜도는 각각 2.633cm, 2.133cm, -0.112 이다. 1 차 테일러 급수를 이용한 모멘트법은 평균, 표준편차, 왜도가 각각 2.471cm, 2.123cm, 0 이고, 2 차 테일러 급수를 이용한 모멘트법 결과는 각각 2.673cm, 2.127cm, -0.110 이다. 즉, 2 차 테일러 급수를 이용할 경우 거더 수직처짐의 평균에 대한 결과가 6.15%에서 1.52%로 향상되는 것을 알 수 있다. 특히, 왜도의 경우 1 차 모멘트법으로는 비선형성에 의한 왜도를 설명할 수 없으므로 2 차 이상의 모멘트법이 필요하게 된다. 2 차 모멘트법으로 계산한 왜도가 몬테카를로 모사법과 비교해 1.79%의 상대오차를 보이고 있다. 따라서 2 차 테일러 급수를 이용한 모멘트법으로도 충분히 왜도를 추정할 수 있다.

그림 2 는 절점 별 거더 수직변위의 분산 특성을 몬테카를로 모사법과 비교하였다. 모든 절점에서의 평균값을 비교한 결과, 1 차 모멘트법에 의해 추정된 근사값 보다 2 차 모멘트법에 의한 결과가 몬테카를로 모사법과 비교해 더 정확한 값을 가지는 것을 확인하였다. 또한, 2 차 모멘트법에 의해 추정된 평균값을 ±2σ(95.45%) 신뢰수준의 응답분포로 표현함으로써 사장교 거동의 거더 수직처짐에 대한 분산 특성을 파악할 수 있다. 그림 3 은 몬테카를로 모사법으로 얻어진 도수분포와 2 차 모멘트법으로 산정한 평균, 표준편차, 왜도로부터 추정한 확률밀도함수를 비교한 것이다. 케이블 탄성계수가 확률변수일 경우, 몬테카를로 모사법에 의해 추정된 응답분포가 음수의 왜도를 갖는 오른쪽으로 치우친 확률분포를 갖는다. 이를 오른쪽으로 치우친 삼변수 대수정규분포로 가정하여 추정한 결과, 몬테카를로 모사법에 의한 확률분포를 비교적 정확히 추정 할 수 있었다.

5. 결론

이 논문에서는 탄성현수선 요소를 이용한 민감도 계산을 통해 모멘트 추정법에 의한 사장교 응답의 평균과 분산 등의 통계적 특성을 얻을 수 있었다. 팬 타입 사장교 예제를 통해 모멘트 추정법에 의한 사장교 거동의 응답을 MCS 와 비교하여 타당성을 검증하였다. 제안된 방법은 사장교 구조물의 설계변수에 따른 거동의 특성을 효과적으로 파악할 수 있을 것이다.

감사의 글

이 연구는 교량설계핵심기술연구단을 통하여 지원된 건설교통부 건설핵심기술연구개발사업과 서울대학교 SIR BK21(안전하고 지속가능한 사회기반건설)사업단의 연구비 지원으로 수행되었습니다. 연구 지원에 감사 드립니다.

참고문헌

1. 양영순, 서용석, 이재옥. 2002. "구조 신뢰성 공학", 서울대학교출판부.
2. 김기석. 2004. 이계삼차모멘트법을 이용한 균열 길이의 분포 추정에 의한 피로수명의 확률해석, 공학박사학위논문, 서울대학교.
3. 이민권. 2005. 사장교의 형상 관리를 위한 역해석 및 폐합 해석, 공학석사학위논문, 서울대학교.
4. A. Haldar, S. Mahadevan. 2000. Probability, Reliability, and Statistical Methods in Engineering Design, John Wiley & Sons, New York.
5. B. M. Ayyub, and K. L. Lai. 1991. "Selective Sampling in Simulation-Based Reliability Assessment", International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 46, pp. 229-249.

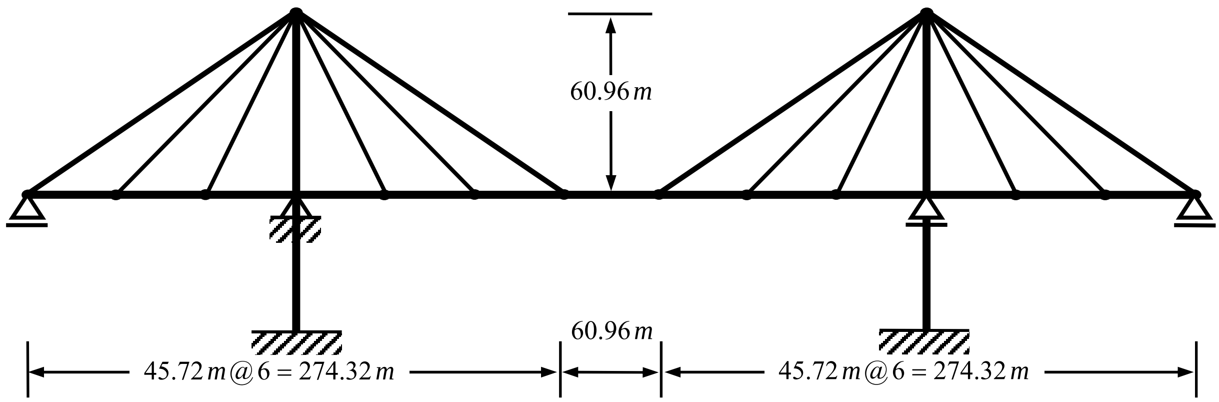

그림 1. 팬 타입 사장교의 기하형상

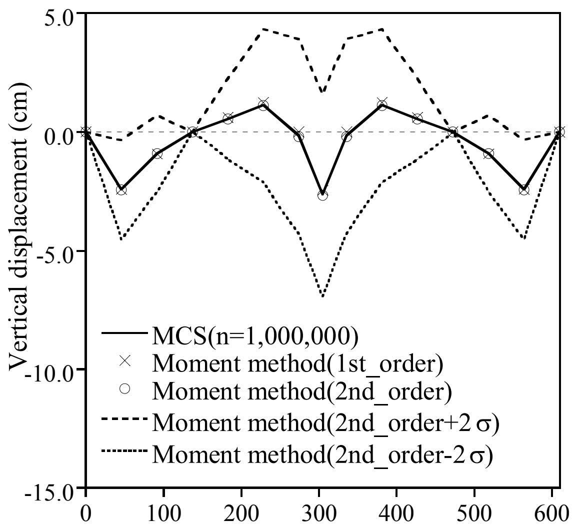

그림 2. 절점 별 거더 수직처짐의 분산특성

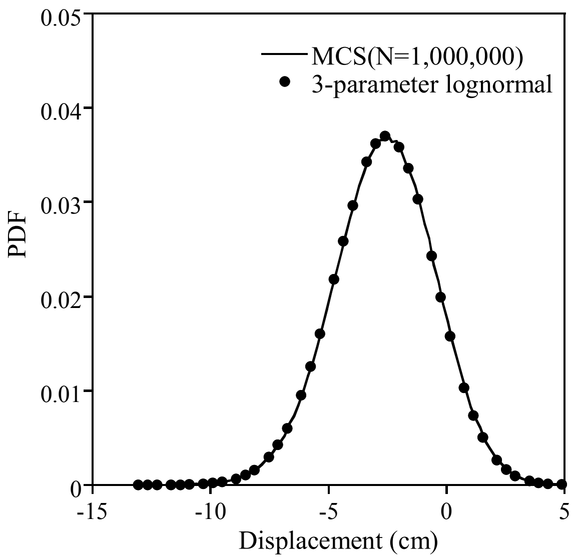

그림 3. 거더 중앙 수직처짐의 확률밀도함수