

# 탄소성체의 손상탐색을 위한 시스템 확인기법

## A System Identification Scheme for Damage Detection in Elasto-Plastic Materials

오 박 현우\*, 이 해성\*\*, 신 수봉\*\*\*

### 1. 서론

사용중인 구조물에 발생한 손상을 탐색하기 위한 비파괴 검사 방법으로 시스템 확인기법(System Identification) 기법이 많이 쓰이고 있다. 현재 쓰이고 있는 대부분의 시스템 확인기법은 구조물의 탄성학적 거동에 기초해 있다. 그러나 구조물에 균열이 발생할 경우, 균열부근에서 발생하는 응력집중이 구조물의 탄소성 거동을 유발하게 된다. 이 경우, 탄성학적 거동에만 기초한 시스템 확인기법을 적용하게 되면, 실제 구조물에서의 손상의 위치와 그에 따른 구조물의 거동에 대한 의미있는 정보를 얻지 못할 수 있다. 이 논문에서는 탄소성 시스템 확인기법을 이용하여, 구조물에 발생된 손상을 탐색하고, 그에 따른 응력분포를 추정하였다.

제안된 기법은 실제 측정된 변위장과 유한요소모델에 의해 구한 변위장의 차이를 최소화하는 least-square method 를 이용하였다. 최적화 알고리즘으로는 Recursive Quadratic Programming 을 이용하였다. 평형방정식의 변분식을 선형화하기 위해서 Consistent Tangent Moduli[2]를 이용하였다. 변위에 대한 일차 민감도는 평형방정식의 변분식을 직접 미분하여 계산하였다. 탄소성 문제에서 이차 민감도는 매우 계산하기 어렵기 때문에 Gauss-Newton 방법으로 근사하였다.

제안된 방법을 내압을 받는 파이프의 손상을 탐색하는 예제에 적용시켜 보았다. 손상은 파이프의 내벽에 mathematical sharp crack 이 발생한 것으로 고려하였고, 측정변위는 수치적으로 모사된 변위에 인위적으로 오차를 발생시킨 값으로 고려하였다. 제안된 방법은 균열의 위치와 균열의 근처에서의 탄소성 거동을 매우 정확하게 추정해냈다. 기존의 탄성 시스템 확인기법에 비해 제안된 탄소성 시스템 확인기법이 가지는 이점을 보였다.

### 2. 목적함수와 최적화

이 논문에서 제안된 parameter estimation 기법에는 측정변위  $\bar{\mathbf{u}}$ 와 유한요소모델에 의해 측정점에서 구한 변위  $\mathbf{u}$ 의 오차의 제곱을 최소화하는 least-square method 를 이용한다.

$$\text{Minimize } \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nlc} (\mathbf{u}_i(\mathbf{M}) - \bar{\mathbf{u}}_i)^2 \quad \text{subject to } \mathbf{R}(\mathbf{M}) \leq 0 \quad (1)$$

여기서,  $nlc$ 는 하중 종류의 개수,  $\mathbf{M}$ 는 초기항복응력 또는 경화변수와 같은 소성물성치,  $\mathbf{R}$ 는 소성물성치에 대한 구속조건이다. 식 (1)을 구속조건을 고려한 라그랑지안 함수의 최적화 문제로 바꾸면 다음과 같다.

$$\Pi_L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nlc} (\mathbf{u}_i(\mathbf{M}) - \bar{\mathbf{u}}_i)^2 + \lambda \cdot \mathbf{R}(\mathbf{M}) \quad (2)$$

여기서  $\lambda$ 는 라그랑지안 계수벡터이다.

식 (2)를 최적화하기 위해서 recursive quadratic programming(RQP)[1]을 이용하였다. 모든 소성물성치에 대한 구속조건은 상한치(upper bound)와 하한치(lower bound)을 고려한 선형구속조건을 고려하였고, 이에 따른 라그랑지안 함수인 식 (2)의 hessian 은 다음과 같다.

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{nlc} \nabla_{\mathbf{M}} \mathbf{u}_i \cdot \nabla_{\mathbf{M}} \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^{nlc} \nabla_{\mathbf{M}}^2 \mathbf{u}_i \cdot (\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i) \quad (3)$$

\* 서울대학교 토목공학과 박사과정

\*\* 서울대학교 토목공학과 조교수

\*\*\* 서울대학교 토목공학과 post-doc

여기서,  $\nabla_M$ 는  $\mathbf{M}$ 에 대한 미분연산자이다. 탄소성 문제에서 변위의 이차민감도는 계산하기가 매우 어렵기 때문에, 변위의 이차민감도를 이용해야 하는 식(3)의 두번째 항을 무시한 Gauss-Newton hessian 을 사용하였다.

### 3. 탄소성 문제에서 평형방정식의 변분형 충분식

탄소성체의 거동은 항복면, 경화함수, 경화변수로 특징지워진다. 등방성 경화의 특성을 갖는 재료의 항복함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\Psi = \phi(\sigma_{ij}) - \kappa(h) = 0 \quad (4)$$

여기서,  $\phi, \kappa, h$ 는 각각 항복함수, 경화함수, 경화변수이다. 경화변수와 소성변형도의 변화율은 다음과 같이 정의된다.

$$\dot{h} = \dot{\lambda} g \quad (5)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6)$$

여기서,  $\dot{\lambda}$ 와  $g$ 는 각각 미지의 라그랑즈 계수, 기지의 응력에 대한 함수이다.

일반화된 중앙값 정리를 이용해 식 (5)와 식 (6)을 수치적분하여 탄소성체에서 충분형태의 응력-변형도 관계를 정의하는 consistent tangent moduli 를 구하였다[3].

$$\Delta \sigma_{ij} = \left[ \Xi_{ijkl} - \frac{\Xi_{ijmn} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{mn}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{pq}} - \alpha \kappa' \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{pq}} \right) \Xi_{pqkl}}{\left( \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{mn}} - \alpha \kappa' \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}} \right) \Xi_{mnpq} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{pq}} + \kappa' g} \right] \Delta \varepsilon_{kl} = D_{ijkl}^{ep} \Delta \varepsilon_{kl} \quad (7)$$

여기서,  $D_{ijkl}^{ep}$ 는 consistent tangent moduli,  $\alpha$ 는 0부터 1사이의 값을 가지는 적분상수이며,  $\Xi_{ijkl}, (\underline{\quad})$ 과  $(\underline{\quad})$ 는 각각 다음과 같이 나타내진다.

$$\Xi_{ijkl} = \left( C_{ijkl}^{-1} + \alpha \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \right)^{-1}$$

$$(\underline{\quad}) = {}^{'+\Delta'}(\underline{\quad})$$

$$(\underline{\quad}) = {}^{'+\alpha\Delta'}(\underline{\quad})$$

현 해석단계에서의 평형방정식의 변분형태의 충분식은 다음과 같이 나타내진다.

$$\int_V \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} D_{ijkl}^{ep} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_l} dV = \int_V \delta u_i b_i dV + \int_{A_i} \delta u_i \bar{T}_i dA - \int_V \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} {}^{'+\alpha\Delta'} \sigma_{ij} dV \quad (8)$$

여기서,  $\delta u_i, \Delta u_i, b_i, \bar{T}_i$ 과  ${}^{'+\alpha\Delta'} \sigma_{ij}$ 는 각각 전해석단계에서의 가상변위, 변위증분, 체적력, 표면력, 그리고 응력을 나타낸다.

### 4. 변위의 민감도

변위의 일차민감도는 현해석 단계에서 수립된 평형방정식의 변분형태의 충분식인 식(8)을 직접 미분해서 얻을 수 있다. 만일 체적력과 주어진 표면력이 물성치  $\mathbf{M}$ 에 대해 독립적이라고 가정하면, 식(8)을 직접 미분하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_V \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} D_{ijkl}^{ep} \frac{\partial \Delta u_{k,m}}{\partial X_l} dV = - \int_V \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} D_{ijkl}^{ep} \frac{\partial \Delta u_{k,m}}{\partial X_l} dV - \int_V \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} \sigma_{ij,m} dV \quad (9)$$

여기서,  $(\cdot)_m$ 은  $\mathbf{M}$ 에 대한 미분을 나타낸다. 식 (9)에 쓰이는 현단계의 변위, 응력, 변형도는 식 (8)이 수립된 후 알고 있는 값이기 때문에, 식(9)에 유한요소법을 적용시키면 변위민감도는 쉽게 얻을 수 있다[3].

### 5. 예제

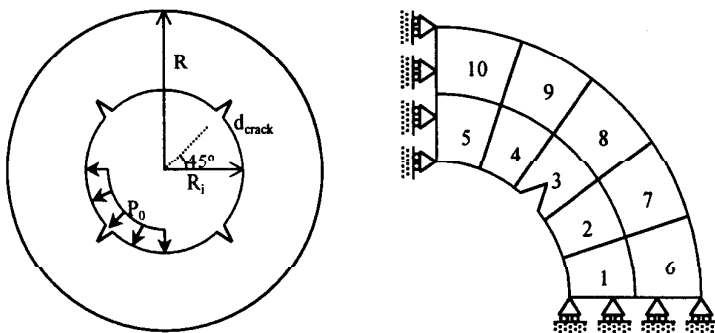
이 논문에서는 제안된 방법을 내벽의 일부가 소성상태에 들어가게 하는 내압이 작용하는 파이프에서 종방향의 균열을 탐색해내고, 유효응력의 분포를 예측해 내는 예제에 적용시켰다. Von-Mises 항복조건을 이용하였고, 소성경화는 고려되지 않았다. 파이프의 형상은 그림 1(a)과 같고, 측정치를 모사하기 위해서 그림 1(b)과 같은 파이프의 1/4 영역을 Q8 등매개 유한요소 120개로 모델링하였다. 모델에서 균열은 1/4 원의 대칭 중심에 위치한다. 파이프의 두께는 100mm이고, 소성영역은 내벽으로부터 20mm 되는 지점까지 발생한다. 균열은 내벽으로부터 외곽쪽으로 16.67mm 되는 곳까지 발생되어 있다. 주어진 모델에서 등간격으로 파이프 바깥쪽 21개 지점의 정적 변위가 계측된 것으로 가정하였다.

손상탐색을 위해서 같은 유한요소망을 가지는 균열이 없는 해석모델을 가정하였다. 그리고 손상을 탐색하기 위해 설계변수를 선택할 때, 설계변수를 요소마다 설정하는 대신 크게 그림 1(b)와 같이 크게 10개의 그룹으로 나누었다. 현 탄소성 확인기법에서는 탄성계수는 고정시키고 초기 항복응력을 설계변수로 가정하였다. 탄소성 확인기법에 의해 추정된 설계변수들을 각 요소그룹들의 초기 항복응력으로 놓고 파이프에서의 응력을 계산하였다.

표 1은 오차가 없는 계측치에 대해 각각 탄소성 확인기법과 탄성 확인기법을 적용시켰을 때 추정된 물성치들을 보여주고 있다. 탄소성 확인 기법의 경우, 균열을 포함하고 있는 3번 그룹의 초기 항복응력이 감소하고 있고, 1번 그룹과 5번 그룹의 초기 항복응력이 증가함을 볼 수 있다. 또 5번부터 10번까지의 그룹은 확인기법이 진행되는 동안 계속 탄성상태에 머물렀기 때문에 초기 항복응력의 변화가 발생하지 않았다. 한편 탄성 확인기법의 경우, 균열이 포함된 그룹 3의 탄성계수가 제일 크게 감소하고, 이웃한 그룹 2번과 4번이 어느정도 감소하고 있으며 나머지 그룹들의 탄성계수 변화량이 그리 크지 않다는 것을 볼 수 있다.

그림 2에서는 오차가 있는 계측치를 이용했을 때, 제안된 방법에 의해 추정된 물성치의 거동을 볼 수 있다. 50개의 서로 다른 임의의 오차를 발생시킨 계측치를 이용한 Monte-Carlo 모의시험에 의하여 추정된 물성치의 오차를 계산하였다. 그림 2에서 오차에 대한 추정된 물성치 오차의 관계를 살펴보면 제안된 방법의 우수성을 입증할 수 있다.

그림 2에서는 오차가 있는 계측치를 이용했을 때, 제안된 방법에 의해 추정된 물성치의 거동을 볼 수 있다. 50개의 서로 다른 임의의 오차를 발생시킨 계측치를 이용한 Monte-Carlo 모의시험에 의하여 추정된 물성치의 오차를 계산하였다. 그림 2에서 오차에 대한 추정된 물성치 오차의 관계를 살펴보면 제안된 방법의 우수성을 입증할 수 있다.



(a) 형상 (b) 물성치 그룹

그림 1. 균열이 발생한 내압을 받는 파이프

표 1. 추정된 물성치

그룹	소성 (KPa)	탄성 (MPa)	그룹	소성 (KPa)	탄성 (MPa)
1	26.9	22.0	6	24.0	20.1
2	23.7	18.3	7	24.0	21.9
3	19.2	9.0	8	24.0	22.0
4	23.7	18.3	9	24.0	21.9
5	26.9	22.0	10	24.0	20.1

소성확인기법을 위한 물성치 초기값 : 24 KPa

탄성확인기법을 위한 물성치 초기값 : 21 MPa

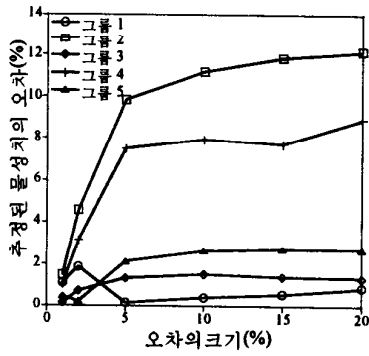
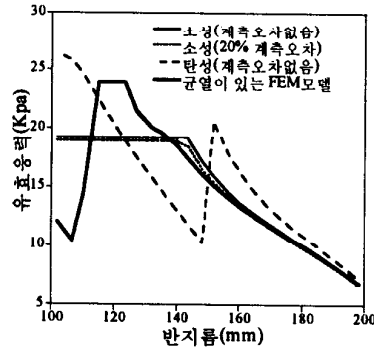
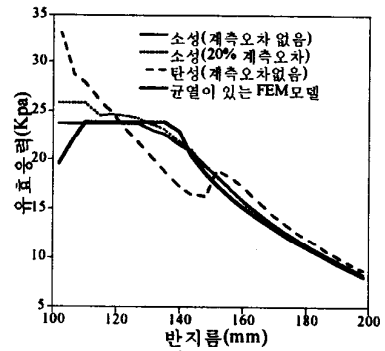


그림 2. 추정된 물성치의 오차 변동성



(a) 실제 균열에서 1.9° 떨어진 곳



(b) 실제 균열에서 1.9° 떨어진 곳

그림 3. 두께방향으로의 유효응력

그림 3(a)과 3(b)는 각각 실제 균열이 발생한 위치에서 1.9도, 10.9도 떨어진 지점에서 파이프 벽 두께방향으로 계산된 유효응력을 나타내고 있다. 각각의 경우 탄소성 확인기법과 탄성확인 기법에 의해 계산된 유효응력의 값을 비교하였다. 또한 오차가 있는 계측치를 이용할 경우 탄소성확인 기법에 의해 계산된 유효응력의 분포도 비교하였다. 그림에서 볼 수 있듯이, 20%의 계측오차가 있는 경우에도 계산된 응력분포는 오차가 없는 경우와 거의 차이가 없음을 알 수 있다. 또한, 탄소성 확인 기법에 의해 계산된 응력분포를 실제 균열이 있을 때 발생하는 응력분포와 비교했을 때, 균열이 발생한 부근에서 다소 차이를 보이지만 잘 일치함을 알 수 있다. 그러나 탄성확인 기법에 의해서 계산된 응력의 경우 안쪽층과 바깥쪽층의 사이에서 실제의 경우 발생할 수 없는 응력의 점프가 일어남을 볼 수 있다. 또한 균열부위에서 균열이 있는 FEM 모델에 의해 계산된 응력보다 훨씬 큰 응력이 발생함을 볼 수 있다. 탄성확인 기법에서 안쪽층과 바깥쪽층 사이의 응력점프 현상은 설계변수로서 탄성계수들만이 관여하기 때문에 불가피하게 발생하게 된다.

## 6. 결론

제안된 시스템 확인기법을 통해 균열이 일어난 부위에서 탄소성체의 탄소성 거동과 균열이 일어난 위치에 대한 매우 정확한 정보를 얻을 수 있었다. 기존의 탄성 확인 기법에 대한 제안된 탄소성 확인기법의 장점을 수치적으로 모사된 예제에 의해 계산된 응력분포를 균열이 일어난 FEM 모델에 의해 구해진 응력분포의 비교함으로써 보였다. 오차가 있는 계측치에 대한 제안된 기법의 우수성을 수치적으로 모사된 예제를 통해 확인할 수 있었다.

## 참고문헌

1. Luenberger, D.G., 1989, *Linear and Nonlinear Programming*, 2<sup>nd</sup> edition. Addison-Wesley : Reading, Massachusetts
2. Simo, J.C. and Taylor, R.L., 1985, "Consistent Tangent Operators for Rate Independent Elastoplasticity", *Comp, Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol.48, pp101-118
3. Vidal, C. A and Haber, R. B., 1993, "Design Sensitivity Analysis for Rate-independent Elastoplasticity," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* Vol. 107, pp. 393-431.