

## 계측가속도를 이용한 변위 재구성 기법 및 정확도 분석

### A Displacement Reconstruction Scheme and Accuracy Analysis using Measured Acceleration

홍윤화\* · 이해성\*\*

Hong, Yun Hwa · Lee, Hae Sung

#### 1. 서론

일반적으로 변위를 계산하기 위해 측정 가속도를 시간에 대해 두 번 적분하는 방법을 사용하게 되는데, 이 경우 초기조건의 불확실성과 측정오차로 인하여 선형 및 비선형의 오차증폭(noise drift)이 변위이력에 포함된다. 이 연구에서는 계측 가속도로부터 변위이력을 계산하는 과정에서 계측오차에 의해 발생하는 초기조건 문제를 해소하고 오차로 인한 비선형 드리프트를 효과적으로 감쇠시킬 수 있는 정규화 기법을 이용한 변위 재구성 기법을 제안하였다.

일련의 계측 가속도 이력이 주어진 경우, 가속도와 변위의 운동학법칙으로부터 변위를 재구성하는 문제는 경계조건문제(elliptic boundary value problem)로 표현가능해진다. 이 연구에서는 변위재구성과정을 이러한 경계조건 문제로서 기술하여 최적화 함수를 정의 하였다. 또한, 양쪽 미지의 경계조건으로 인한 ill-posedness와 계측오차에 의한 비선형 드리프트 현상을 해결하기 위해서 티코노프(Tikhonov) 정규화 기법을 이용한 정규화 함수식을 이용하여 재구성 변위의 정확성을 확보하였다.

본 연구 기법은 시간영역에서 수행된 변위재구성 기법으로서 측정잡음으로 인한 저주파오차증폭을 해소하였다. 따라서 제안된 기법의 주파수 영역에서의 저주파증폭해소의 형태와 전반적인 변위재구성을 위한 2중 적분자로서의 정확성을 파악하는 것은 매우 중요한 일이다. 이러한 이유로 본 연구에서는 주파수영역의 전달 함수 분석을 통해서 제안된 기법의 정확도 및 저주파 필터링 효과에 대해서 분석하였다.

이 연구에서는 초기조건과 가속도 계측오차로 인한 문제를 해소하고 시간영역에서 변위를 추정하기 위해 변위 재구성 문제를 양 끝에 경계조건을 갖는 문제(elliptic boundary value problem)로 정의하였고 주파수영역에서의 전달함수를 이용하여 제한된 기법의 주파수영역에서의 거동에 대해서 확인하였다. 또한 실제 케이블 진동실험을 통해 제안된 기법의 적절성을 평가하였다.

#### 2. 정규화 기법을 이용한 변위 추정

가속도로부터 변위를 추정하는 기법들은 뉴마크 방법과 같이 초기경계조건 문제(hyperbolic problem)로서 변위추정 문제를 정의하게 된다. 이러한 경우 미지의 초기조건과 가속도 측정과정의 계측오차로 인하여 constant drift, linear drift, nonlinear drift 가 발생하고 이러한 drift들로 인해 추정된 변위는 실제변위와 상당한 차

\* 서울대학교 건설환경공학부 박사과정

\*\* 서울대학교 건설환경공학부 교수

이를 갖고 물리적으로 의미 없는 추정결과를 낳게 된다. 이 연구에서는 이러한 문제를 해결하기 위해서 식 (1)의 정규화 기법을 제안하였다.

$$\text{Min}_{\mathbf{u}} \Pi = \frac{1}{2} \|\mathbf{L}\mathbf{u} - (\Delta t)^2 \mathbf{L}_a \bar{\mathbf{a}}\|_2^2 + \frac{\lambda^2}{2} \|\mathbf{u}\|_2^2 \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{u}, \bar{\mathbf{a}}$ 는 시간창 내부의 재구성변 변위 및 측정가속도 이력,  $\mathbf{L}_a, \mathbf{L}$ 는 각각 시간창 크기에의 해서 결정되는 사다리꼴 적분연산자와 2차미분연산자,  $\lambda$ 는 식 (2)를 통해서 결정된 최적정규화 계수,  $\|\cdot\|_2$ 는 벡터의 2-norm이다.

$$\lambda = 46.81N^{-1.95} \quad (2)$$

여기서 최적 정규화 계수( $\lambda$ )와 최적시간창 크기( $N$ )은 조화운동의 매개변수 연구를 통해서 결정되었으며, 최적시간창 크기는 측정가속도의 최장주기 성분이 2.65 혹은 3배로 결정하였다. 시간창 내부의 측정된 가속도 이력과 식(2)로부터 결정된 최적정규화 계수를 이용하면, 식(1)의 1차 필요조건으로부터 다음식과 같이 시간창 내부의 변위를 재구성 할 수 있다.

$$\mathbf{u} = (\mathbf{L}^T \mathbf{L} + \lambda^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{L}^T \mathbf{L}_a \bar{\mathbf{a}} (\Delta t)^2 = \mathbf{C} \bar{\mathbf{a}} (\Delta t)^2 \quad (3)$$

이때 계산된 변위벡터  $\mathbf{u}$ 는 각 시간창에서 계산된 변위이력으로서  $N+2$ 의 크기를 갖게되는 변위 이력이다. 하지만 시간창 양 끝의 변위 이력은 미지의 경계조건으로 인하여 왜곡된다. 이러한 이유로 이 연구에서는 그림 1과 같이 각 시간창에서 구해진 변위벡터( $\mathbf{u}$ )의 가운데 값만을 해당시간의 변위값으로 선택하여 미지의 경계조건의 영향을 최소화 하였다.

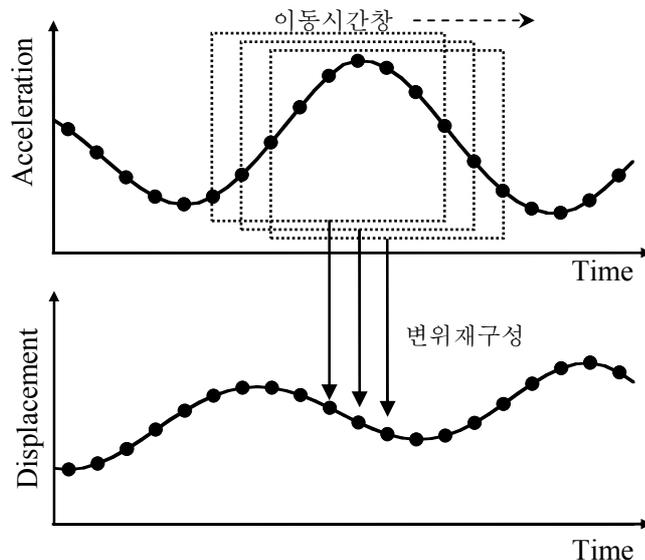


그림 1. 이동시간창 기법을 적용한 변위 재구성

### 3. 전달함수를 이용한 주파수 영역 정확도 분석

본 연구에서 제안한 변위 재구성 기법은 시간영역에서 수행되는 일련의 연산에 해당한다. 또한 저주파오차증폭을 억제하는 속성을 갖고있는 2차 적분자에 해당한다. 따라서 제안된 기법의 저주파 필터링 현상과 각 주파수별 정확도를 분석하기 위해서 주파수영역 전달함수를 이용하여 제안된 기법의 주파수 전달 속성을 파악해 보았다. 2차 적분과정의 주파수 전달함수의 정해는 다음식과 같다.

$$H_A(\omega) = -\left(\frac{1}{\omega}\right)^2 = -\left(\frac{1}{f_T}\right)^2 \frac{1}{(2\pi f / f_T)^2} = -\left(\frac{1}{2\pi f_T}\right)^2 \frac{1}{(\tilde{f})^2}, \quad \tilde{f} = f / f_T \quad (4)$$

여기서,  $H_A$ 는 제안된 기법의 주파수 전달함수,  $\omega, f$ 는 각주파수와 주파수,  $f_T$ 는 목표주파수로서 측정가

속도의 최저주파수에 해당하는 주파수,  $\tilde{f}$  는 목표주파수로 노말라이즈(normalize)한 주파수이다. 제안된 기법의 경우 전달함수의 입력값이 가속도이고 출력값이 변위 이므로 위의 전달함수로는 주파수별 정확도 분석이 쉽지않다. 따라서 계산된 출력과 출력정해의 비를 이용하여 정확도 함수를 정의하여 제안된 기법의 주파수영역 분석을 수행하였다. 2차 적분과정의 정확도 함수의 정해는 다음과 같다.

$$H_A^{acc}(\omega) = \frac{FT(\text{calculated output signal})}{FT(\text{exact output signal})} = -H_A(\omega)\omega^2 = \left(\frac{1}{\omega}\right)^2 \omega^2 = 1 \quad (5)$$

여기서  $FT$ 는 푸리에 트랜스폼(Fourier Transform)이다. 식 (4), (5)와 정해의 전달함수와 정확도함수와 같이 제안된 기법의 전달함수와 정확도함수를 식 (3)을 이용하여 구하면 다음식과 같다.

$$H_B(\tilde{f}) = \left(\frac{1}{2\pi f_T}\right)^2 \left(\frac{3\pi}{k}\right)^2 (c_{k+1} + 2\sum_{p=1}^k c_{k+1+p} \cos(3\pi \frac{p}{k} \tilde{f})) \quad (6)$$

$$H_B^{acc}(\tilde{f}) = -H_B(\tilde{f})\omega^2$$

여기서,  $c_n$  은 식 (3)의  $C$  행렬의 가운데 행벡터인  $k+2$  번째 행벡터의  $n$  번째 열에 해당하는 성분이고 목표주파수에 대해서 노말라이즈하여  $\tilde{f} = f/f_T$  에 대한 함수로 표현하였다. 식 (6)을 통해 구한 제안된 변위 재구성 기법의 전달 함수와 정확도 함수는 그림 2의 (a),(b)와 같다. 그림 2로부터 제안된 기법이  $\tilde{f}=1$  인 목표주파수 부분에서 정해진 '1' 과 비슷한 값이 나오는 것을 확인할 수 있다. 또한 목표 주파수보다 저주파에 해당하는 부분에서 정확도 함수의 값이 '0' 으로 수렴하여 저주파 필터와 같은 역할을 하는 것을 확인할 수 있다.

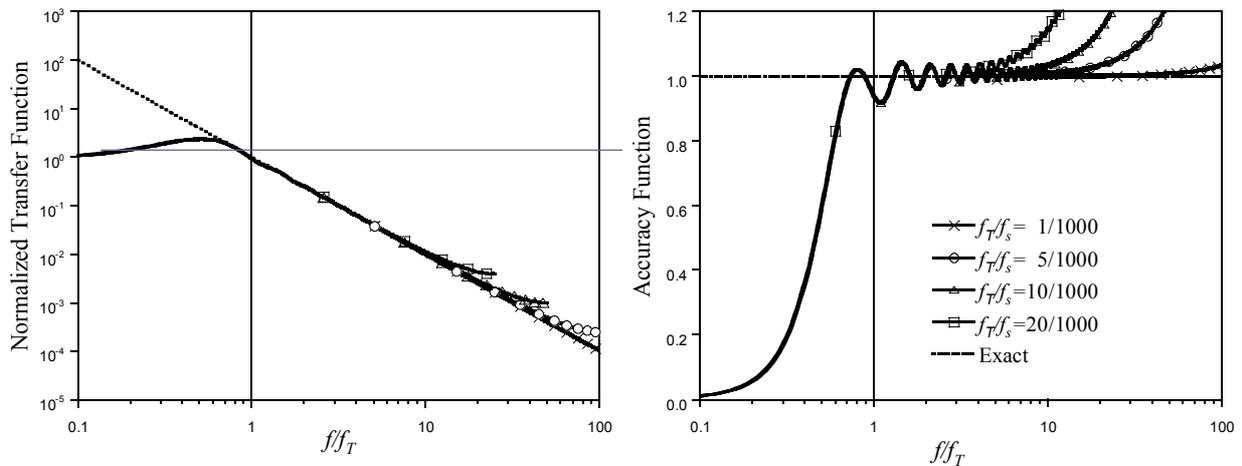


그림 2. 제안된 기법의 주파수 정확도분석: (a) 노말라이즈된 주파수 전달함수; (b) 노말라이즈된 정확도 함수

#### 4. 예제 및 결론

제안된 기법의 실제 적용성을 검증하기 위해 그림 3의 케이블에 대하여 측정가속도로부터 변위를 재구성하여 결과를 비교해 보았다. 케이블의 설치형상은 그림 3과 같고, 가진은 케이블 가진기를 이용하여

1차모드 고유진동수인 1.5Hz로 가진하였다. 가속도계는 그림 3에 (b)와 같이 케이블의 중앙에 수직방향 가속도를 측정하도록 설치되었고 변위재구성 결과의 비교데이터로서 가속도계에서 약 10cm 떨어진 부분에서 LVDT를 이용하여 변위를 측정하였다. 측정된 가속도가 1.5Hz의 단일 가속도 성분이므로 이를 목표주파수로 정하였고, 정해진 목표주파수를 이용하여 시간창크기와 최적정규화계수를 결정하여 변위를 재구성하였다. Fig. 4(a)에서 뉴마크 방법을 이용한 계산변위는 측정오차에 의해 저주파형태로 증폭된 반면 제안된 방법을 이용해 재구성한 변위는 전체적인 운동 및 감쇠형상과 변위이력을 적절하게 추정하는 것을 확인하였다.

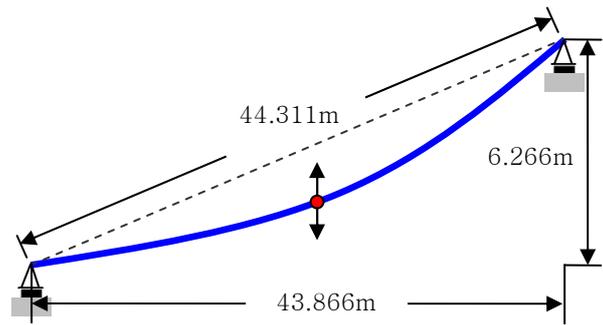


그림 3. 케이블 가진 실험 적용예: (a) 케이블 설치 형상; (b) 케이블 재원

이 연구에서는, 측정오차를 포함한 가속도를 이용하여 시간영역에서 변위를 재구성하는 기법을 제안하였고 주파수영역에서의 저주파 필터링 속성과 주파수영역에서의 정확도를 확인하기 위해서 주파수 전달함수와 정확도 함수를 정의 하여 분석하였다. 또한 이러한 이론적 배경을 바탕으로 실제 케이블진동실험을 통하여 적절성을 평가해 보았다. 교량구조물의 주탑, 지지 케이블, 지진하중시의 구조물의 횡방향 진동형상과 같이 변위가 특정한 기저값을 기준으로 진동하는 경우에서 제안된 방법은 적절하게 변위를 재구성함을 확인하였고 케이블의 풍우진동시 변위나 지진하중시에 구조물의 횡방향 탄성변위형상 추정에 활용될 수 있음을 확인하였다.

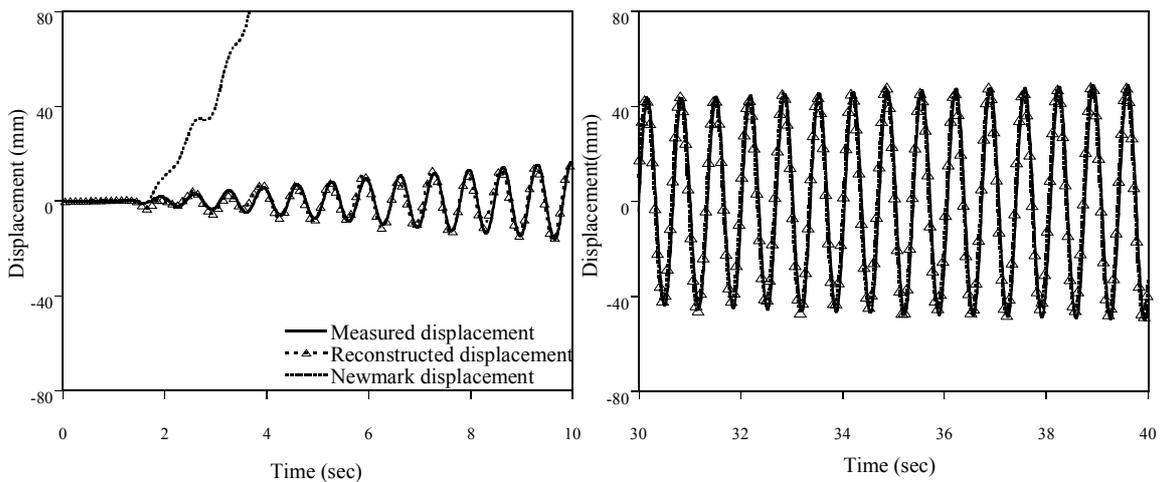


그림 4. 변위재구성 결과: (a) 0~10sec 구간; (b) 30~40sec 구간

### 감사의글

이 연구는 교량설계핵심기술연구단을 통하여 지원된 건설교통부 건설핵심기술연구개발사업 및 서울대학교 SIR BK21 (안전하고 지속가능한 사회기반건설)사업단의 연구비 지원으로 수행되었습니다. 연구 지원에 감사드립니다.

### 참고문헌

1. A. Smyth and M. Wu, (2007) "Multi-rate Kalman filtering for the data fusion of displacement and acceleration response measurements in dynamic system monitoring", Mechanical Systems and Signal Processing 21 (2007) pp. 706-723.