공학석사학위논문

# PP-TSVD 에 의한 유한체 내부영역의 물성치 결정을 위한 시스템확인기법

System Identification for Determining Material Properties of an Inclusion in a finite body using PP-TSVD

2002 년 2 월

서울대학교 대학원

지구환경시스템공학부

안 병 규

# 초록

시스템확인기법에서 $L_2$ 정규화방법은 해가 부드러운 모양을 가질 때 효과적이라고 알려져 있다. 이러한 $L_2$ 정규화방법은 유한체 내부의 불연속적인 경계를 가지는 함유체를 추정하는 경우 실제함유체의 위치와 정도의 판단이 어려워질 수 있다. 이와 같은 $L_2$ 정규화방법의 단점을 보완하여 측정치의 빈곤함과 오차에 의한 불안정성을 최소화하는 동시에 해가 불연속성을 가지는 문제에서도 적용될 수 있는 $L_1$ 정규화방법인 PP-TSVD를 도입한다.

PP-TSVD 방법을 2차원 유한요소모델에 적용시키기 위하여 경계영역에서의 적분을 이용한 이산화방법을 제안하고, 이를 통해 유한체 내부에 포함된 이질적인 미지 함유체의 물성치를 추정한다.

세 개의 예제를 통해 $L_1$ 정규화방법인 PP-TSVD를 이용한 시스템변수추정 결과가 가지는 특성을 검증하고 PP-TSVD의 결과가 $L_2$ 정규화방법을 이용한 시스템변수추정 결과보다 불연속성을 가지는 미지 함유체의 시스템변수의 특성을 보다 명확하게 반영하고 있음을 확인한다.

**주요어**

PP-TSVD, $L_1$ norm, $L_1$ 정규조건, Truncation number, 연산행렬(derivative operator), 민감도(sensitivity), 특이치 분해(SVD)

**학번 : 2000-21545**

# 목차

초록····· i

목차····· iii

그림목차····· iv

1. 서론····· 1

2. 시스템확인기법····· 4

2.1. 시스템확인기법의 불안정성····· 6

2.1.1. 특이치분해(Singular Value Decomposition) ····· 6

2.1.2. 해의 비유일성····· 8

2.1.3. 해의 불연속성····· 9

3. 정규화기법····· 11

3.1. $L_1$ 정규조건의 이산화····· 14

3.2. PP-TSVD (Piecewise Polynomial TSVD) ····· 19

3.3. truncation number의 결정····· 22

4. 예제····· 24

4.1. 예제 1 – 모델링 오차가 없는 정사각형 모양의 함유체····· 26

4.2. 예제 2 – 모델링 오차가 있는 정사각형 모양의 함유체····· 31

4.3. 예제 3 – 모델링 오차가 있는 배모양의 함유체····· 35

5. 결론····· 41

참고문헌····· 45

# 그림목차

그림 1. 특이치분해 과정에서 각 행렬들의 역할..... 7

그림 2. $L_2$ 정규화방법인 TSVD와 $L_1$ 정규화방법인 PP-TSVD의 해의 특성..... 13

그림 3. 유한체 내부에서 경계면을 공유하는 서로 다른 시스템변수..... 15

그림 4. 기하학적으로 경계면에 직교하는 방향과 gradient 방향과의 관계..... 17

그림 5. 각 예제에 공통적으로 사용되는 경계조건, 하중조건과 물성치..... 25

그림 6. 각 예제에 공통적으로 사용되는 유한요소모델, 측정치 위치와 개수..... 25

그림 7. 정사각형판 내의 모델링 오차가 없는함유체의 형상..... 26

그림 8. 오차함수의 분포를 통한 truncation number의 결정..... 27

그림 9. 시스템변수 추정결과..... 29

그림 10. 추정된 함유체의 기하학적 형상..... 29

그림 11. 기존의 $L_2$ 정규화방법과의 비교..... 31

그림 12. 정사각형판 내의 모델링 오차가 있는 함유체의 형상..... 32

그림 13. 오차함수의 분포를 통한 truncation number의 결정..... 32

그림 14. 시스템변수 추정결과..... 34

그림 15. 추정된 함유체의 기하학적 형상..... 34

그림 16. 정각형판 내의 모델링 오차가 있는 함유체의 형상..... 35

그림 17. 오차함수의 분포를 통한 truncation number의 결정····· 36

그림 18. 시스템변수 추정결과····· 37

그림 19. 추정된 함유체의 기하학적 형상····· 37

그림 20. 기존의 $L_2$ norm을 사용한 정규화 방법과의 비교····· 39

# 1. 서론

토목 구조물은 초기 재료의 성질이 시간이 지남에 따라 외부에서 작용하는 여러 가지 요인으로 인해 변화될 수 있다. 이러한 구조물 내부의 재료의 변화는 원래의 구조물을 구성하고 있는 재료의 물성과 다른 물성을 가진 재료로 이루어진 유한체 내의 함유체로 이상화할 수 있다. 유한체 내부에 존재하는 함유체의 물성치나 기하학적 형상을 구조물의 응답을 이용하여 추정하는 시스템확인기법이 여러 연구자들에 의해 제안되어 왔다 [Moh93, Lee99, Yeo00, Lee00, Par01].

유한체의 시스템확인기법은 유한체의 외부 경계면에 위치한 측정점에서 측정된 변위와 계산된 변위의 최소 자승 오차를 최소화함으로써 유한체의 미지 시스템 변수를 추정한다. 이와 같은 최적화 문제는 시스템변수에 대한 비선형 최적화 문제이므로 선형화시킨 이차 종속문제를 반복적으로 풀어서 최적해를 구한다. 그러나 이러한 최적화 문제는 측정치의 빈곤함에 의해서 해가 유일하지 않을 수 있고, 약간의 오차에 대해서도 추정된 해의 크기가 심하게 변하는 해의 불연속성을 갖는 문제이다 [Han98, Par01].

이 논문에서는 측정치의 오차뿐만 아니라 독립적인 측정치의 개수가 시스템변수보다 작아짐으로써 생기는 해의 빈곤함까지 고려한다. 이러한 해의 불연속성이나 해의 비유일성과 같은 문제들에 대한 접근과 해결을 위해 민감도

행렬에 대한 특이치분해(Singular value decomposition)를 사용한다 [Gol96]. 시스템확인기법에서의 수치적 불안정성은 특이공간에서의 특이치의 분포특성에 의해 결정된다.

시스템확인기법의 불안정성을 해소하기 위해 도입하는 정규화방법은 크게 두 가지로 나누어진다. 해의 비유일성을 해소하는 방향으로 정규화가 이루어지는 TSVD (Truncated Singular Value Decomposition)와 같은 정규화방법과 해의 불연속성을 해소하고 수렴성을 높여주는 방향으로 정규화가 이루어지는 Tikhonov 정규화와 같은 정규화방법이 있다. 이 논문에서는 전자의 해의 비유일성을 해소하는 방향으로 정규화가 이루어지는 정규화방법을 도입한다.

이러한 정규화 방법에는 기존의 $L_2$ norm을 이용하는 TSVD가 있다. 측정치의 빈곤함 때문에 독립적인 측정치의 개수가 시스템변수의 개수보다 적게 되어 해의 유일성이 보장되지 않을 때. 이를 해소하는 정규화방법이다. $L_2$ 정규화방법인 TSVD는 해가 연속적이고 부드러운(smooth) 모양을 가지는 경우에 효과적이다. $L_2$ 정규화방법인 TSVD의 이러한 특성은 이 논문에서와 같은 유한체 내부의 부분적으로 연속-불연속(piecewise continuous)인 경계를 가지는 함유체를 추정하려는 경우 실제 함유체의 위치와 정도의 판단이 어려워질 수 있다.

이에 따라 $L_2$ 정규화방법인 TSVD의 단점을 보완하여 측정치의 빈곤함과 오차에 의한 불안정성을 최소화하는 동시에 이 논문의 2차원 연속체에서 부분적으로 연속-불연속(piecewise continuous)인 함유체가 가지는 시스템변수를

추정하는 문제에 효과적으로 적용할 수 있는 $L_1$ 정규화방법인 PP-TSVD를 도입한다.

PP-TSVD를 2차원 유한요소모델에 적용시키기 위하여 경계영역에서의 적분을 이용한 이산화방법을 제안하고, 이를 통해 유한체 내부에 포함된 이질적인 미지 함유체의 물성치를 추정한다. 이산화과정에서 정의되는 1차 연산행렬 **L**은 시스템변수가 달라지는 불연속적인 경계를 더욱 뚜렷하게 나타내는 정규화 연산자 역할을 한다.

예제를 통해 PP-TSVD를 이용한 시스템변수 추정결과가 가지는 특성을 파악하고, PP-TSVD를 이용한 시스템변수추정 결과가 $L_2$ 정규화방법을 이용한 시스템변수추정 결과보다 불연속성을 가지는 미지 함유체의 시스템변수의 특성을 보다 명확하게 반영하고 있음을 확인한다.

## 2. 시스템확인기법

유한체의 외부 경계면에 위치한 측정점에서 측정된 변위와 계산된 변위의 최소자승 오차를 최소화함으로써 유한체의 미지 시스템 변수를 추정한다.

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Minmize}}\,\Pi_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{nlc}\left\|\mathbf{u}_i^c(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_i^m\right\|^2 \quad \text{subject to } \mathbf{R}(\mathbf{x}) \le 0 \tag{1}$$

여기서 $\mathbf{u}_i^c$, $\mathbf{u}_i^m$, R과 *nlc*는 각각 *i* 번째 하중단계에서 해석모델에 의해 계산된 변위벡터, 측정 변위벡터, 시스템 변수에 대한 구속조건벡터, 그리고 하중단계의 개수이다. $\|\cdot\|$는 벡터의 Euclidean norm이다.

식 (1)에 의해 정의된 오차함수는 모든 하중단계의 측정 변위벡터의 Euclidean norm으로 기준화(normalization)시키고, 시스템 변수와 구속조건은 각각에 해당하는 기준값에 대해서 기준화 시킨다.

$$\underset{\boldsymbol{\xi}}{\text{Minmize}}\,\pi_E = \frac{1}{2}\left\|\tilde{\mathbf{U}}(\boldsymbol{\xi}) - \overline{\mathbf{U}}\right\|^2 \quad \text{subject to } \mathbf{R}(\boldsymbol{\xi}) \le 0 \tag{2}$$

여기서, $\tilde{\mathbf{U}}$ 와 $\overline{\mathbf{U}}$ 는 각각 기준화된 계산 변위벡터와 측정 변위벡터를 각 하중단계에 대해 행방향으로 정렬함으로써 얻어진 벡터들이다.

$\boldsymbol{\xi}$와 R은 기준화된 시스템 변수와 시스템 변수에 대한 구속조건이고, $\|\cdot\|$는 벡터의 Euclidean norm이다.

식 (2)의 최적화 문제는 시스템변수에 대한 비선형 최적화 문제이므로 식 (2)를 선형화시킨 다음과 같은 이차 종속문제를 반복적으로 풀어서 최적해를 구하게 된다.

$$\underset{\Delta\xi}{\text{Minmize}}\left[\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\xi}^T\mathbf{H}_{k-1}\Delta\boldsymbol{\xi}-\Delta\boldsymbol{\xi}^T\mathbf{S}_{k-1}^T\,\mathbf{U}_{k-1}^r\right] \quad \text{subject to } \mathbf{R}(\boldsymbol{\xi}_{k-1}+\Delta\boldsymbol{\xi})\le 0 \tag{3}$$

$$\mathbf{H}_{k-1}\approx\mathbf{S}_{k-1}^T\mathbf{S}_{k-1} \tag{4}$$

여기서 $k$는 $k$번째 반복단계를 가리키며 $\mathbf{S}_{k-1}$ 와 $\mathbf{H}_{k-1}$ 는 각각 $\tilde{\mathbf{U}}_{k-1}$ 에 대한 민감도 행렬과 오차함수에 대한 헤시안 행렬이다. ($k$-1)번째 반복단계의 변위잔차 $\tilde{\mathbf{U}}_{k-1}$ 는 $\mathbf{U}_{k-1}^r=\overline{\mathbf{U}}-\tilde{\mathbf{U}}_{k-1}$ 로 정의된다. 그리고 $\Delta\boldsymbol{\xi}$ 는 현재의 반복단계에서의 기준화된 시스템변수의 증분이다.

정의된 헤시안 행렬에는 오차함수의 시스템 변수에 대한 이차 미분항이 포함되어 있다. 오차함수의 이차 미분항을 정확히 계산하기 위해서는 비선형 방정식인 강성도 방정식을 두번 미분하여 변위의 시스템 변수에 대한 이차 민감도를 계산하여야 하는 어려움이 있다. 따라서 오차함수의 헤시안 행렬을 변위의 일차 민감도만으로 근사하는 Gauss-Newton 행렬을 사용한다.

여기부터는 설명을 간편히 하기 위해 반복단계를 가리키는 아래첨자 ($k$-1)은 생략한다.

식 (3)의 선형최적조건은 다음과 같다.

$$\mathbf{S}^T\mathbf{S}\Delta\boldsymbol{\xi}_u-\mathbf{S}^T\mathbf{U}^r=0 \tag{5}$$

여기서 $\Delta\xi_u$ 는 이차 종속문제 식 (3)의 해이다.

## 2.1. 시스템확인기법의 불안정성

식 (2)는 측정치의 빈곤함에 의해서 해가 유일하지 않을 수 있고, 약간의 오차에 대해서도 추정된 해의 크기가 심하게 변하는 해의 불연속성을 갖는 문제이다 [Par01]. 이 논문에서는 측정치의 오차뿐만 아니라 독립적인 측정치의 개수가 시스템변수보다 작아짐으로써 생기는 해의 비유일성까지 고려한다.

### 2.1.1. 특이치분해(Singular Value Decompoition)

이러한 해의 불연속성이나 해의 비유일성과 같은 문제들에 대한 접근과 해결을 위해 식 (5)의 민감도 행렬에 대한 특이치분해(Singular value decomposition)를 사용한다 [Gol96].

$$\mathbf{S} = \mathbf{Z}\mathbf{\Omega}\mathbf{V}^T \tag{6}$$

민감도 행렬은 식 (6)와 같이 $m\times n$ 행렬 **Z**, $n\times n$ 직교행렬 **Ω**, $n\times m$ 행렬 **V**의 전치행렬로 구성된다. $m$은 측정치의 총개수이고 $n$은 시스템변수의 개수이다. 민감도행렬의 특이치분해에 의한 각 행렬 **Z**, **V**, **Ω**는 다음과 같은 특성을 가진다.

$$\mathbf{Z}^T\mathbf{Z} = \mathbf{I}_n$$
$$\mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}_n \qquad (7)$$
$$\mathbf{\Omega} = diag(\omega_j)$$

여기서 $\mathbf{I}_n$는 단위행렬이고 $\omega_j$ 는 $\omega_1 = \omega_{\max} \geq \ldots \geq \omega_r \geq \omega_{r+1} \geq \ldots \geq \omega_n = \omega_{\min} \geq 0$ 와 같은 특성을 가지는 민감도행렬 **S**의 고유치이다. $\varepsilon_r$ 와 $r$은 민감도 행렬 **S**의 rank를 결정하기 위한 값과 그 때의 rank이다.

그림 1은 민감도행렬의 특이치분해 과정에서 행렬 **Z**와 **Ω**, **V**의 역할을 나타낸 것이다. **V**는 시스템 변수공간과 특이공간을 매개해주는 변환행렬이고, **Z**는 변위공간과 특이공간을 매개해주는 변환행렬이다. 또한 그림에서 보듯이 각각의 전치행렬은 서로에 대한 역변환의 관계가 성립한다. 특이공간에 있는

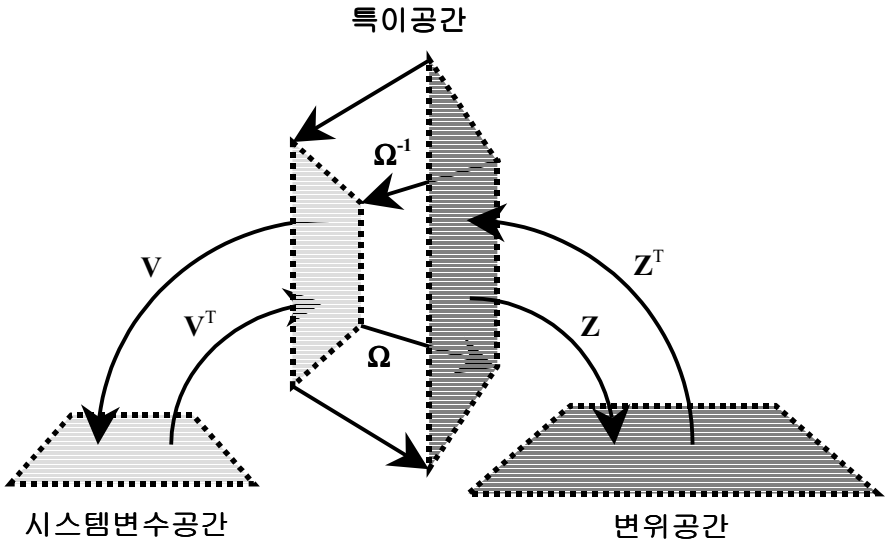



**그림 1. 특이치분해 과정에서 각 행렬들의 역할**

특이치의 역할을 살펴보면 특이치는 해를 구하는 과정에서 일종의 증폭기 역할을 한다. 즉, 시스템 변수 공간에서 변위공간으로의 사상에서는 특이치의 크기만큼 곱해져서 증폭되고 변위공간에서 시스템 변수 공간으로의 사상에서는 특이치의 역수 크기 만큼 곱해져서 증폭된다. 따라서 시스템확인기법에서의 수치적 불안정성은 특이공간에서의 특이치의 분포특성에 의해 결정된다.

### 2.1.2. 해의 비유일성

2차원 연속체의 시스템변수를 추정하는데 있어서 일반적으로 추정하려는 시스템변수보다 측정치의 개수가 부족하다. 이것은 실제적으로 나타나는 측정치의 개수가 시스템변수보다 많더라도 각각의 측정치들이 서로간에 독립적이지 않기 때문에 결국은 시스템변수를 추정하는데 필요한 측정치가 충분하지 못하게 되는 경우가 많다. 식 (6)에서의 민감도행렬의 특이치분해를 통해 rank의 부족함과 그 정도를 살펴보아야 한다 [Han98]. 여기서는 일반적으로 나타나는 rank가 부족하게 되는 경우에 대해서 논의한다.

식 (2)를 특이치분해를 통해 구한 해는 다음과 같다 [Gol96].

$$\Delta\boldsymbol{\xi}_u = \sum_{j=1}^{r} \mathbf{v}_j \omega_j^{-1} \mathbf{z}_j^T \mathbf{U}^r + \sum_{j=r+1}^{n} \gamma_j \mathbf{v}_j \tag{8}$$

여기서 $\mathbf{v}_j$ , $\mathbf{z}_j$는 각각 $j$번째 고유치 $\omega_j$에 대한 우측 고유벡터(RSV), 좌측 고유벡터(LSV)로 구성된 열벡터이고 $\mathbf{U}^r$ , $\gamma_j$는 각각 변위 잔차와 임의의

실계수이다. 또한, 식 (8)의 증분해는 시스템변수를 추정할 때 흔히 발생하게 되는 rank가 부족한 경우의 증분해이며 이 때 확보된 rank값을 $r$이라 한다 [Gol96]. 식 (8)의 첫번째 항은 변위잔차 $\mathbf{U}^r$항이 포함되어 있는 일정한 값을 가지는 항이고 두번째 항은 임의의 계수 $\gamma_j$과 $\mathbf{v}_{r+1}$에서 $\mathbf{v}_n$까지의 우측 고유벡터로 구성되어 변위잔차 $\mathbf{U}^r$의 영향을 받지 않는 영공간(null space)에 놓여있는 항이다. 두번째 항의 임의의 계수 $\gamma_j$가 유일하게 결정되지 않기 때문에 이로 인해 해의 비유일성과 같은 수치적 불안정성이 나타나게 된다.

### 2.1.3. 해의 불연속성

실제적으로 시스템변수추정을 위한 측정치에는 계측기의 민감도나 계측자의 실수 등으로 인해 오차가 포함된다. 이러한 오차로 인해 해의 불연속성이 나타나게 된다.

측정치는 이론적으로 다음과 같이 오차가 없는 변위 $\mathbf{U}^f$와 오차 벡터 $\mathbf{e}$로 나누어 표시할 수 있다.

$$\mathbf{U}^m = \mathbf{U}^f + \mathbf{e} \tag{9}$$

식 (9)를 식(2)에 대입하면 증분해는 다음과 같이 표현된다.

$$\Delta\boldsymbol{\xi}_u = \mathbf{V}\,diag(\frac{1}{\omega_j})\mathbf{Z}^T(\overline{\mathbf{U}}^f - \tilde{\mathbf{U}}) + \mathbf{V}\,diag(\frac{1}{\omega_j})\mathbf{Z}^T\mathbf{e} = \Delta\boldsymbol{\xi}_u^f + \Delta\boldsymbol{\xi}_u^e \tag{10}$$

여기서 $\Delta\boldsymbol{\xi}_u^f$, $\Delta\boldsymbol{\xi}_u^e$는 각각 오차가 없는 변위 잔차와 측정 오차에 의한 증분해이다. 측정 오차가 무시하지 못할 크기이거나 오차 벡터 **e**가 **Z**와 직교하지 않는다면 오차가 있는 측정치를 통해 구한 증분해는 식 (10)의 두번째 항에 의해 오차가 없는 측정치에 의한 증분해로부터 멀어지게 된다.

특히 특이치 행렬의 성분들 중 rank의 부족으로 나타나는 매우 작은 특이치들로 인하여 $\mathbf{Z}^T\mathbf{e}$ 성분들은 크게 증폭되어 오차가 없는 측정치에 의한 증분해로부터 더욱 멀어지게 한다. 아주 작은 오차로 인한 측정치의 변화도 매우 작은 특이치를 통해 크게 증폭되어 각 최적화를 위한 반복단계가 수행될수록 그 차이가 점점 커지게 되고 최종적으로 수렴한 해는 물리적인 의미를 잃기 쉽다.

이와 같이 수회에 걸쳐서 측정된 측정자료가 서로간에 거의 연속적이라 생각될 정도로 아주 작은 차이를 보이고 있다고 하더라도 매우 작은 특이치로 인한 증폭으로 최종적으로 구한 증분해는 전혀 다른 값을 가질 수 있는 것이 시스템확인기법의 해의 불연속성이다.

# 3. 정규화기법

시스템확인기법의 불안정성을 해소하기 위해 도입하는 정규화기법은 크게 두가지로 나누어진다. 해의 비유일성을 해소하는 방향으로 정규화가 이루어지는 TSVD (Truncated Singular Value Decomposition)와 같은 정규화 방법과 해의 불연속성을 해소하고 수렴성을 높여주는 방향으로 정규화가 이루어지는 Tikhonov 정규화와 같은 정규화 방법이 있다 [Han98, Lee99, Lee00, Par01]. 이 논문에서는 전자의 해의 비유일성을 해소하는 방향으로 정규화가 이루어지는 정규화 방법을 도입한다.

이러한 정규화 방법에는 기존의 $L_2$ norm을 이용하는 TSVD가 있다. 앞서 언급했던 것처럼 측정치의 빈곤함 때문에 독립적인 측정치의 개수가 시스템변수의 개수보다 적게 되어 해의 유일성이 보장되지 않을 때. 이를 해소하는 정규화 방법이다. 2.1.2절에서 논의되었던 해의 비유일성은 식(8)의 두번째 항의 임의의 계수 $\gamma_j$ 로 인해 무한히 많은 해가 존재하게 되어 발생한다. $\gamma_j$ 를 결정하고 유일한 해를 구하기 위해서는 추가적인 구속조건이 필요하게 된다.

$L_p$ norm을 이용하는 정규화 방법의 일반적인 추가적인 구속조건은 다음과 같고 앞으로 이러한 추가적인 구속조건을 $L_p$ 정규조건이라 한다[Men89].

$$\underset{x}{\text{Min}} \left\| x - x_0 \right\|_p = \underset{x}{\text{Min}} \left[ \int_V | x - x_0 |^p dV \right]^{1/p} \tag{11}$$

여기서 $x$와 $x_0$는 각각 추정하려는 시스템변수와 시스템변수의 기저값이다.

그리고 $\left\| \cdot \right\|_p$는 다음과 같이 정의된다.

$$L_{\text{p}}\text{ norm}: \left\| \cdot \right\|_p = \left[ \int | \cdot |^p \right]^{1/p} \tag{12}$$

$L_2$ 정규화방법인 TSVD의 추가적인 구속조건은 식 (11)에서 $p$=2일 때 기준화된 것으로 다음과 같다.

$$\underset{\xi}{\text{Min}} \left\| \boldsymbol{\xi} - \mathbf{1} \right\|_2 \tag{13}$$

이와 같은 추가적인 구속조건에 있어서 $L_2$ 정규화방법인 TSVD는 해가 연속적이고 부드러운(smooth) 모양을 가지는 경우에 효과적이다. $L_2$ 정규화방법인 TSVD의 이러한 특성은 이 논문에서와 같은 유한체 내부의 부분적으로 연속-불연속(piecewise continuous)인 경계를 가지는 함유체를 추정하려는 경우 실제 함유체의 위치와 정도의 판단이 어려워질 수 있다.

그림 2 는 $L_2$ 정규화방법인 TSVD와 $L_1$ 정규화방법인 PP-TSVD의 해의 특성을 보여준다. 그림 2에서 추정하려는 시스템변수는 2차원 연속체의 유한요소 모델에서의 불연속적인 경계면을 가지는 함유체 내부의 영의 계수이다. 그래프를 보면 $L_2$ norm의 특성으로 인해 TSVD는 함유체 내부의

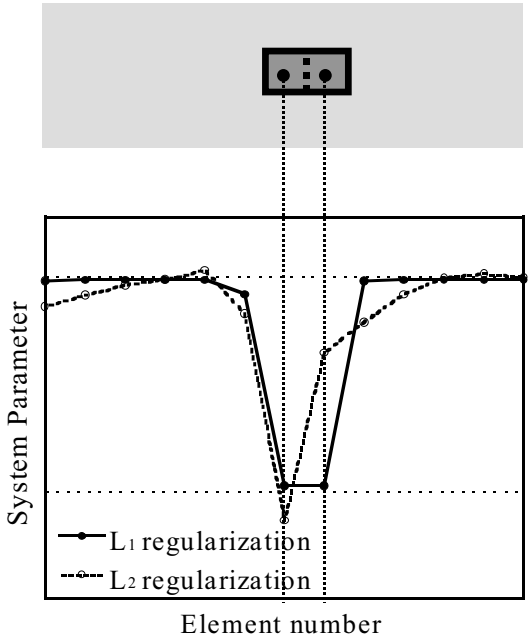



**그림 2. $L_2$ 정규화방법인 TSVD와 $L_1$ 정규화방법인 PP-TSVD의 해의 특성**

일정한 영의 계수를 효과적으로 추정하지 못하고 불연속적인 경계에서도 부드러운(smooth) 변화를 가지고 있다. 하지만 $L_1$ 정규화방법인 PP-TSVD는 함유체 내부의 일정한 영의 계수과 불연속적인 경계에서의 해의 불연속성을 잘 추정하고 있음을 알 수 있다.

이에 따라 $L_2$ 정규화방법인 TSVD의 단점을 보완하여 측정치의 빈곤함과 오차에 의한 불안정성을 최소화하는 동시에 이 논문의 2차원 연속체에서 부분적으로 연속-불연속(piecewise continuous)인 함유체가 가지는 시스템변수를 추정하는 문제에 효과적으로 적용할 수 있는 $L_1$ 정규화방법인 PP-TSVD를

도입하여 추가적인 구속조건으로 $L_1$ 정규조건을 사용한다 [Han96].

### 3.1. $L_1$ 정규조건의 이산화

PP-TSVD의 $L_1$ 정규조건은 다음과 같다.

$$\underset{\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{Min}} \left\| \boldsymbol{\xi} - \mathbf{1} \right\|_1 = \underset{\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{Min}} \int_V | \boldsymbol{\xi} - \mathbf{1} | \, dV \tag{14}$$

식 (14)의 $L_1$ 정규조건의 적분가능성을 살펴보면 dirac-delta 함수도 적분이 가능하다. 그러나 2차원 판요소의 시스템변수추정에 있어서 시스템변수의 경향은 부분 연속-불연속(piecewise continuous)이다. 그러므로 식 (14)의 $L_1$ 정규조건은 gradient를 취해서 부분 연속-불연속한 함수 내에서 시스템변수추정이 이루어지도록 정규성을 높여준다 [Vog96, Vog98].

$$\underset{\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{Min}} \left\| \nabla(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{1}) \right\|_1 = \underset{\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{Min}} \int_V | \nabla(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{1}) | \, dV \tag{15}$$

여기서 $\nabla$는 gradient이고 $|\nabla(\cdot)|$는 벡터의 gradient의 크기이다.

식 (15)의 $L_1$ 정규조건은 시스템변수의 gradient를 최소화함으로써 이질적인 함유체의 경계를 더욱 명확하게 구분지어 주고, 동일하거나 비슷한 시스템변수를 가지는 요소를 그룹화하는 효과를 가져온다 [Cha99, Cha00]. 식 (15)의 $L_1$ 정규조건은 식(14)의 $L_1$ 정규조건보다 정규화의 경향이 강하다. 이 논문에서는 일반적으로 함유체가 가지는 부분적으로 연속-불연속인 특성을 잘 추정해내기 위해 식 (15)의 $L_1$ 정규조건을 사용한다.

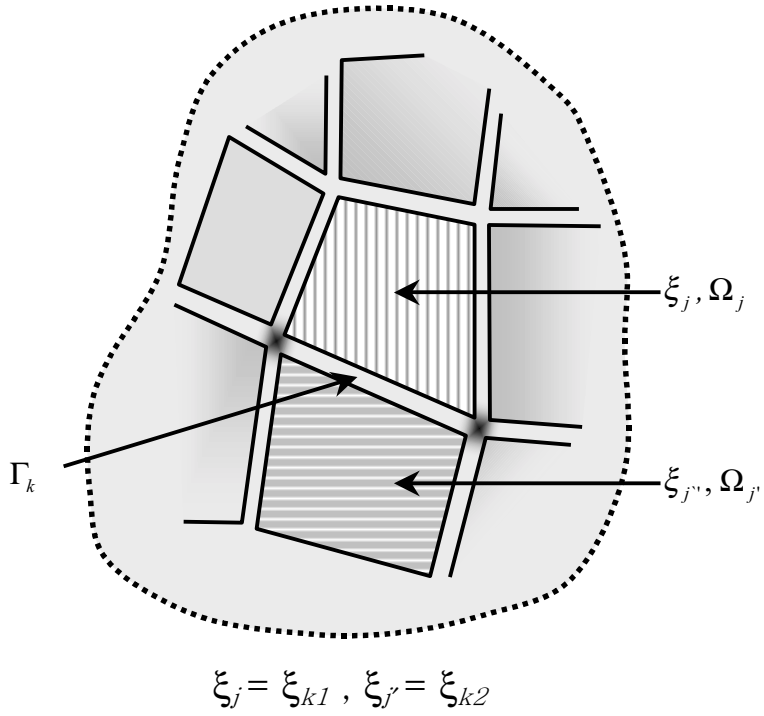



**그림 3. 유한체 내부에서 경계면을 공유하는 서로 다른 시스템변수**

식 (15)의 적분식을 최소화하는 $L_1$ 정규조건을 2차원 판 유한요소모델에 적용시키기 위해서는 이산화가 필요하다.

$$\begin{aligned} &\underset{\xi}{\text{Min}} \int_{\Omega} |\nabla(\xi - 1)| d\Omega \\ &= \underset{\xi}{\text{Min}} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\int_{\Omega_j} |\nabla(\xi - 1)| d\Omega}_{0} + \underset{\xi}{\text{Min}} \sum_{k=1}^{n_b} \int_{\Gamma_k} |\nabla(\xi - 1)| d\Gamma \end{aligned} \tag{16}$$

그림 3은 유한체 내부에서 경계면을 공유하는 서로 다른 시스템변수 ($\xi_j$, $\xi_{j'}$)를

나타낸 것이다. $\Omega_j$는 $j$번째 시스템변수의 영역이고, $\Gamma_k$는 $\Omega_j$ , $\Omega_{j'}$ 의 영역을 가지는 임의의 두 변수 사이의 공유경계면이다.

식 (16)에서 $\Omega$는 유한체의 전체영역을 나타내고, $n_b$는 임의의 서로 다른 두 개의 시스템변수에 의해서 공유되는 공유 경계면의 총개수이다. 또한 식 (16)의 첫번째 항은 유한체의 각 요소 내부에 대한 적분이고 두번째 항은 각 요소 사이의 공유경계면에 대한 경계적분이다. 유한체의 각 요소의 영역 내에서 시스템변수는 일정하다고 가정했기 때문에 각 요소의 영역 내에서의 시스템변수의 gradient는 0이다. 따라서 첫번째 항은 소거되고 식 (16)의 $L_1$ 정규조건은 두번째 항의 공유경계면 $\Gamma_k$에서의 경계적분의 최소화 문제가 된다.

$$\underset{\xi}{\mathrm{Min}} \sum_{k=1}^{n_b} \int_{\Gamma_k} |\nabla(\xi - 1)| \, d\Gamma \tag{17}$$

$|\nabla(\cdot)|$는 벡터의 gradient의 크기이므로 2차원 유한체에서 식 (17)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\underset{\xi}{\mathrm{Min}} \sum_{k=1}^{n_b} \int_{\Gamma_k} \sqrt{\left(\frac{\partial(\xi - 1)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\xi - 1)}{\partial y}\right)^2} \, d\Gamma \tag{18}$$

여기서 그림 4는 경계면에서 기하학적으로 경계면에 직교하는 $d\mathbf{n}=(dx, dy)$ 방향과 gradient $\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}\right)$ 방향과의 관계를 설명하기 위한 그림이다.

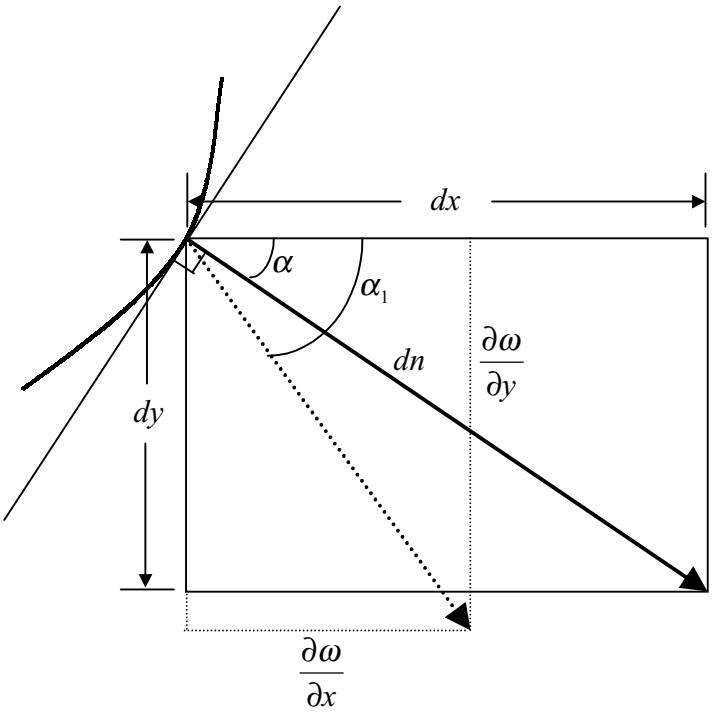



**그림 4. 경계면에서 기하학적으로 경계면에 직교하는 방향과 gradient 방향과의 관계**

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{dy}{dn} = \frac{\partial \omega}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \omega}{\partial y}\sin\alpha$$
$$= \sqrt{(\frac{\partial \omega}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \omega}{\partial y})^2}\,\cos(\alpha_1 - \alpha) \qquad (19)$$

식 (19)에서 $\alpha_1 = \alpha$ 인 경우에, 즉 기하학적으로 경계면에 직교하는 **dn**=($dx$, $dy$) 방향과 gradient $(\frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y})$ 방향이 일치하면 $\cos(\alpha_1 - \alpha) = 1$ 이고 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = \sqrt{(\frac{\partial \omega}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \omega}{\partial y})^2} \tag{20}$$

식 (20)의 관계를 $L_1$ 정규조건의 이산화 과정인 식 (18)에 적용시킨다. 그림 3에서 임의의 두 요소와 그 사이의 공유 경계면을 고려해보면 임의의 두 요소가 서로 다른 시스템변수를 가지고 있을 때 공유 경계면에서의 시스템변수의 변화 즉, gradient는 기하학적으로 공유 경계면에 직교하는 방향으로 선형적으로 증가하거나 감소한다고 가정할 수 있다. 이 경우 공유 경계면에서의 시스템변수의 변화 방향인 gradient와 기하학적인 직교방향이 일치하므로 식 (20)을 적용 가능하다.

이러한 가정을 통해서 공유 경계면에 대해 접선방향의 변화, 즉 접선방향의 gradient를 가지는 성분은 0이 된다. 그러므로 식 (18)은 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$\underset{\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{Min}} \sum_{k=1}^{n_b} \int_{\Gamma_k} \left| \frac{\partial(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{1})}{\partial n} \right| d\Gamma \tag{21}$$

$n$은 공유 경계면에 직교하는 방향벡터이다. 또한 시스템변수의 변화는 공유 경계면에서 선형적으로 증가하거나 감소한다고 가정하였으므로 식 (21)은 각각의 공유 경계면의 길이와 각각의 시스템변수의 증분의 차로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\underset{\boldsymbol{\xi}}{\text{Min}} \sum_{k=1}^{n_b} |\,(\boldsymbol{\xi}_{k_1} - \mathbf{1}) - (\boldsymbol{\xi}_{k_2} - \mathbf{1})\,| \cdot l_k \tag{22}$$

$\boldsymbol{\xi}_{k_1}$, $\boldsymbol{\xi}_{k_2}$ 는 각각 $k$번째 공유경계면을 공유하는 양쪽 요소의 기준화된 시스템변수값이다. $l_k$ 는 $k$번째 공유경계면의 길이(boundary length)이다. 식 (22)를 다음과 같이 정리한다.

$$\underset{\boldsymbol{\xi}}{\text{Min}} \,|\, \mathbf{L}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{1}) \,| = \underset{\boldsymbol{\xi}}{\text{Min}} \,\| \,\mathbf{L}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{1}) \,\|_1 \tag{23}$$

여기서 **L**은 이산화된 2차원 유한요소모델에서의 1차 연산행렬(first derivative operator)이라 한다 [Han96, Han00]. 시스템변수의 gradient의 $L_1$ 정규조건을 통해 유도된 1차 연산행렬 **L**은 시스템변수가 달라지는 불연속적인 경계를 더욱 뚜렷하게 나타내는 정규화 연산자 역할을 한다.

### 3.2. PP-TSVD (Piecewise Polynomial TSVD)

$L_1$ 정규화기법인 PP-TSVD는 식 (2)의 기준화된 오차함수를 최소화하는 비선형 최적화 구속조건에 식 (23)의 $L_1$ 정규조건을 추가적인 구속조건으로 한다.

$$\underset{\boldsymbol{\xi}}{\text{Min}} \,\| \,\mathbf{L}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{1}) \,\|_1 \text{ subject to } \underset{\boldsymbol{\xi}}{\text{Min}} \left\| \widetilde{\mathbf{U}}(\boldsymbol{\xi}) - \overline{\mathbf{U}} \right\|^2 \text{ and } \mathbf{R}(\boldsymbol{\xi}) \le 0 \tag{24}$$

식 (24)는 비선형 최적화 구속조건이 포함되어 있기 때문에 다음의 증분 형태의 구속조건을 반복계산을 통해 풀어야 한다.

$$\begin{aligned} &\underset{\Delta\boldsymbol{\xi}}{\text{Min}} \ \left\| \mathbf{L}(\boldsymbol{\xi}_{k-1} + \Delta\boldsymbol{\xi} - \mathbf{1}) \right\|_1 \\ &\text{subject t o} \ \underset{\Delta\boldsymbol{\xi}}{\text{Min}} \ \left\| \mathbf{S}\Delta\boldsymbol{\xi} - \mathbf{U}^r \right\|^2 \text{ and } \mathbf{R}(\boldsymbol{\xi}_{k-1} + \Delta\boldsymbol{\xi}) \le 0 \end{aligned} \tag{25}$$

여기서 $\Delta\boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{U}^r$는 각각 $k$번째 반복단계의 증분해, 민감도 행렬, 변위잔차이다. 식 (25)에서, 식 (24)의 비선형 최적화 구속조건은 식 (3)의 선형화된 이차 종속문제를 통해 구해진 식 (5)의 선형 최적화 구속조건으로 치환된다. 또한 식 (24)에서 추정된 시스템변수가 물리적인 의미를 가지는 영역에 존재하도록 하기 위해서 시스템변수의 상한와 하한에 대한 구속조건을 부등식형 구속조건으로 도입한다 [Yeo00, Par01].

$$\begin{aligned} &\underset{\Delta\boldsymbol{\xi}}{\text{Min}} \left\| \mathbf{L}(\boldsymbol{\xi}_{k-1} + \Delta\boldsymbol{\xi} - \mathbf{1}) \right\|_1 \\ &\text{subject to} \ \underset{\Delta\boldsymbol{\xi}}{\text{Min}} \left\| \mathbf{S}\Delta\boldsymbol{\xi} - \mathbf{U}^r \right\|^2 \text{ and } \boldsymbol{\Xi}_L \le \boldsymbol{\xi}_{k-1} + \Delta\boldsymbol{\xi} \le \boldsymbol{\Xi}_R \end{aligned} \tag{26}$$

여기서 $\boldsymbol{\Xi}_L$와 $\boldsymbol{\Xi}_R$,는 시스템변수에 대한 하한과 상한 벡터이다. 식 (26)의 선형 최적화 구속조건을 특이치분해를 통해 구한 증분해는 다음과 같다.

$$\Delta\boldsymbol{\xi} = \sum_{j=1}^{t} \mathbf{v}_j \omega_j^{-1} \mathbf{z}_j^T \mathbf{U}^r + \sum_{j=t+1}^{n} \gamma_j \mathbf{v}_j = \Delta\boldsymbol{\xi}_t + \mathbf{z} \tag{27}$$

여기서 $t$는 truncation number이고 $\Delta\boldsymbol{\xi}_t$, $\mathbf{z}$ 는 계산상의 간편함을 위해 치환한 것이다. 시스템확인기법의 불안정성은 매우 작은 크기의 특이치에 대한 해의 성분에 의해 발생하고, 이에 따라 민감도 행렬의 rank를 어느 정도 확보해서 사용하고 절삭하는가는 매우 중요하다. 이 문제에 대해서는 다음 절에서 논의한

다.

식 (27)은 식 (8)과 같이 rank가 부족한 문제에 대한 해이므로 임의의 $\gamma_j$에 대해 무수히 많은 해가 존재하고 이를 식 (26)의 추가적인 구속조건인 $L_1$ 정규 조건에 대입하여 하나의 해를 결정한다.

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{z}}{\text{Min}} \left\| \mathbf{L}\left[\mathbf{z} + \left(\boldsymbol{\xi}_{k-1} - \mathbf{1} + \Delta\boldsymbol{\xi}_t\right)\right] \right\|_1 \\ &\text{subject to } \mathbf{V}_t^T \mathbf{z} = 0 \text{ and } \boldsymbol{\Xi}_L - \boldsymbol{\xi}_{k-1} - \Delta\boldsymbol{\xi}_t \le \mathbf{z} \le \boldsymbol{\Xi}_R - \boldsymbol{\xi}_{k-1} - \Delta\boldsymbol{\xi}_t \end{aligned} \tag{28}$$

Hansen과 Mosegaard에 의해 이와 비슷한 algorithm이 제안되었다 [Han96, Han00]. 여기서 $\mathbf{V}_t$는 다음과 같다.

$$\mathbf{V}_t = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_t) \tag{29}$$

식 (28)에서 등식형 구속조건인 $\mathbf{V}_t^T \mathbf{z} = 0$ 은 $\mathbf{z}$와 $\mathbf{V}_t$가 가지고 있는 벡터의 기저가 각각 $(\mathbf{v}_{t+1}, \mathbf{v}_{t+2}, \cdots, \mathbf{v}_n)$, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_t)$로 달라서 서로 직교하는 관계에 있으므로 추가되었다. 식 (28)은 $\mathbf{z}$에 대한 선형 최적화 문제이고 Simplex alghoritm을 통해 최적화된 해 $\mathbf{z}_{\text{opt}}$를 구한다 [Moh93]. $\mathbf{z}_{\text{opt}}$를 식 (27)에 대입하면 현 반복단계의 최적화된 증분해 $\Delta\boldsymbol{\xi}_{\text{opt}}$는 다음과 같다.

$$\Delta\boldsymbol{\xi}_{\text{opt}} = \sum_{j=1}^{t} \mathbf{v}_j \omega_j^{-1} \mathbf{z}_j^T \mathbf{U}^r + \mathbf{z}_{\text{opt}} = \Delta\boldsymbol{\xi}_t + \mathbf{z}_{\text{opt}} \tag{30}$$

해의 빠른 수렴을 위해서 최적화된 증분해 $\Delta\boldsymbol{\xi}_{\text{opt}}$의 방향으로 line search를 하여 비선형 최적화 구속조건을 최소화한다 [Bel99].

$$\underset{\beta}{\mathrm{Min}} \left\| \tilde{\mathbf{U}}(\boldsymbol{\xi}_{k-1} + \beta \Delta \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{opt}}) - \overline{\mathbf{U}} \right\|^2 \tag{31}$$

식 (25)의 $k$번째 반복단계의 최종해는 식 (31)에서 구한 $\beta_{\mathrm{opt}}$에 의해 결정된다.

$$\boldsymbol{\xi}_k = \boldsymbol{\xi}_{k-1} + \beta_{\mathrm{opt}} \Delta \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{opt}} \tag{32}$$

### 3.3. truncation number의 결정

시스템확인기법의 문제에서 측정치의 개수가 매우 많더라도 서로 독립적인 측정치라고 보기 힘들다. 따라서 확실한 민감도 행렬의 rank를 결정할 수 없으며 truncation number는 민감도 행렬에서 어느 정도의 rank를 확보해서 사용할지를 결정해주는 지표이다.

$L_1$ 정규화방법인 PP-TSVD에서 적당한 truncation number는 다음과 같은 식을 만족시키는 최소의 값으로 결정한다.

$$\left\| \tilde{\mathbf{U}}(\boldsymbol{\xi}) - \overline{\mathbf{U}} \right\|^2 \geq \|\mathbf{e}\|^2 \tag{33}$$

여기서, 측정오차 $\mathbf{e}$의 크기는 알고 있는 것으로 가정하고 부등식의 오른쪽 항은 측정오차의 RMS(Root Mean Square)라 한다. 식 (33)은 추정된 시스템변수에 의한 변위의 오차함수가 측정오차의 RMS보다 크게 되는 가장 작은 truncation number를 결정하는 것이다.

그러나 2차원 연속체를 유한요소모델로 이산화하여 시스템변수를 추정하는

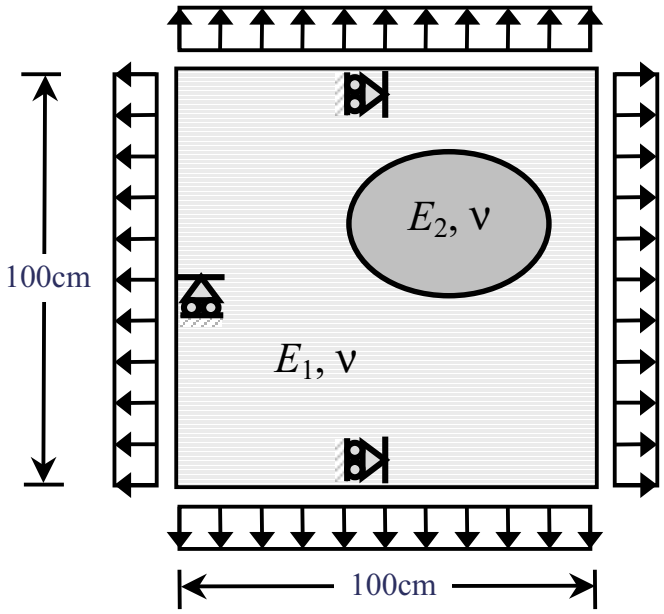
데 있어서 truncation number 역시 이산화되어 있으므로 측정오차의 RMS가 추정된 시스템변수에 의한 변위의 오차함수와 가장 가까워질 때의 truncation number를 적당한 truncation number로 결정한다.

# 4. 예제

제안된 $L_1$ 정규화기법인 PP-TSVD 방법의 사용성을 검증하기 위하여 2차원 평면응력상태에 있는 2차원 판모델의 내부함유체의 시스템 변수를 추정해 본다. 또한 2차원 연속체에서 PP-TSVD 방법의 시스템변수 추정결과가 기존의 시스템 확인기법과 어떤 차이를 보이는지 비교해 본다.

그림 5에는 각 예제에 공통적으로 사용되는 경계조건, 하중조건과 물성치 등이 나타나 있고 그림 6은 판 유한요소모델의 요소 구성과 측정점의 위치를 보여준다. 평면응력 상태에 있는 정사각형판은 8절점 요소를 사용하여 총 225개의 절점과 64개의 부재의 판 유한요소모델로 이산화하였다. 이 정사각형판은 철(210GPa)로 이루어져 있고, 내부 함유체는 알루미늄(70GPa)으로 이루어져 있다고 가정하였다. 하중조건은 x방향과 y방향의 두 단계로 나누어 각각 1.44GPa의 인장응력을 가해주고, 측정치는 두 단계의 하중조건에 대하여 한변에 8개씩 32개의 측정점, 총 64개의 측정점으로부터 수직, 수평 방향의 128개의 자유도를 측정한 상황으로 모사하였다. 측정치에는 5%의 임의의 오차를 주었다. 이상의 조건은 모든 예제에서 동일하다.

또한 식 (34)와 같이 반복계산 중에 계산된 변위와 측정치의 차이의 비율이 정해진 값보다 작아지면 수렴하였다고 가정하고 반복계산을 마친다.




- 하중조건

  1: $q_y$ = 1.44GPa

  2: $q_x$ = 1.44GPa

- 물성치

  1. 유한체-철

     $E_1$=210Gpa

     ν=0.3

  2. 함유체-알루미늄

     $E_2$=70Gpa

     ν=0.3

- **128개 측정치셋**

- **측정치오차 5%**

그림 5. 각 예제에 공통적으로 사용되는
경계조건, 하중조건과 물성치

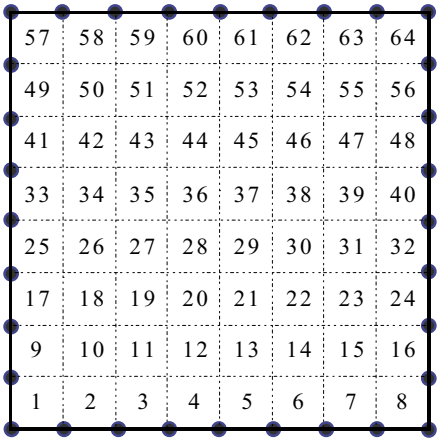



그림 6. 각 예제에 공통적으로 사용되는
유한요소모델, 측정치 위치와 개수

$$\frac{\left\|\tilde{\mathbf{U}}(\boldsymbol{\xi}_{\text{con}}) - \overline{\mathbf{U}}\right\|^2}{\left\|\overline{\mathbf{U}}\right\|^2} \le \varepsilon \tag{34}$$

여기서 $\varepsilon$는 수렴여부의 판단을 위해 정한 상수이다. 이 논문의 예제에서는 $\varepsilon = 10^{-4}$ 으로 하였다.

초기의 시스템변수의 기저값은 유한요소모델 전체가 철로 이루어졌다고 가정하고 철의 영의 계수를 따른다. 또한 식 (26)의 영의 계수의 상한치, 하한치 구속조건은 다음과 같다.

$$0.1\ \text{GPa} \le x_0 \le 630\,\text{GPa} \tag{35}$$

### 4.1. 예제 1 – 모델링 오차가 없는 정사각형 모양의 함유체

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

그림 7. 정사각형판 내의
모델링 오차가 없는함유체의 형상

함유체는 그림 7과 같이 그 중심이 판의 중심에서 25cm × 12.5cm 떨어져 있는 25cm × 25cm 의 정사각형 모양이다. 이 함유체에 대해서 PP-TSVD를 통한 시스템변수추정을 수행하였다.

그림 8은 충분한 rank까지의 각각의 truncation number에 대한 식 (2)의 오차함수의 값을 나타낸 그래프이다. 또한 그래프에 횡방향으로 표시된 선은 측정오차를 알고 있다고 가정하고 오차의 기하평균 (Root Mean Square)으로 오차의 수준을 표시한 것이다. 그림 8에서 오차함수가 오차의 수준보다 큰 값을 가질 때의 truncation number는 1에서 8일 때까지로 truncation number가 이와 같이 작은 경우는 그만큼 시스템변수를 추정하는데 있어서 민감도 행렬의 정보 중 너무 적은 양의 정보만을 사용하여 정규화의 경향이 매우 강해져서

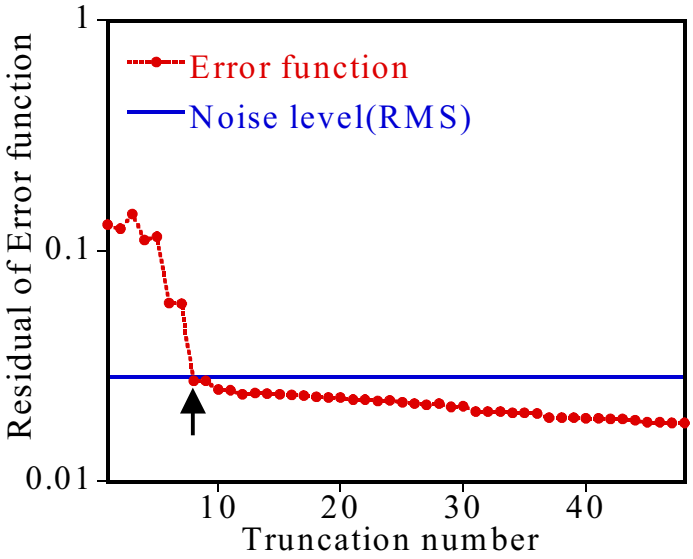



그림 8. 오차함수의 분포를 통한
truncation number의 결정

시스템변수가 올바르게 추정되지 못한다. 또한 오차함수가 오차의 수준보다 작은 값을 가질 때의 truncation number는 9 이상인 경우로, 시스템변수를 추정하는데 있어서 오차가 섞여 있는 작은 특이치를 가지는 민감도 행렬의 정보를 사용하면서 측정오차의 수준보다도 작은 오차함수값을 가지게 된다. 그러므로 가장 적당한 truncation number는 측정오차의 수준에 가장 근접한 truncation number인 8로 결정한다.

그림 9는 결정한 truncation number에 대해서 PP-TSVD 최적화를 수행하여 시스템변수로 놓은 영의 계수를 추정한 결과이다. 횡방향으로 그어져 있는 회색선은 34, 35, 42, 43번 요소내의 함유체가 가지고 있는 영의 계수의 정해이다. 그림 9에서 회색원으로 표시된 34, 35, 42, 43번 요소의 영의 계수가 정해와 거의 일치하게 추정되고 있음을 알 수 있다. 또한 truncation number가 8보다 1이 작은 7인 경우에는, 7일 때까지의 민감도 행렬에서의 정보로는 정확한 시스템변수 추정이 이루어지지 않아 추정된 영의 계수가 약간의 진동을 하고 있음을 알 수 있다. 또한 함유체를 포함하고 있는 34, 35, 42, 43번 요소의 영역을 포함하지만 정확한 함유체의 영역보다는 넓게 번진(blurring) 영역을 정해와 기저값 사이의 영의 계수값으로 추정하고 있다. 즉 truncation number가 7에서 8로 증가하면서 늘어난 민감도 행렬의 정보의 양을 통해, truncation number가 7일 때 잘못 추정되었던 요소들이 truncation number가 8로 결정되면서 걸러지고(filtering) 있음을 알 수 있다.

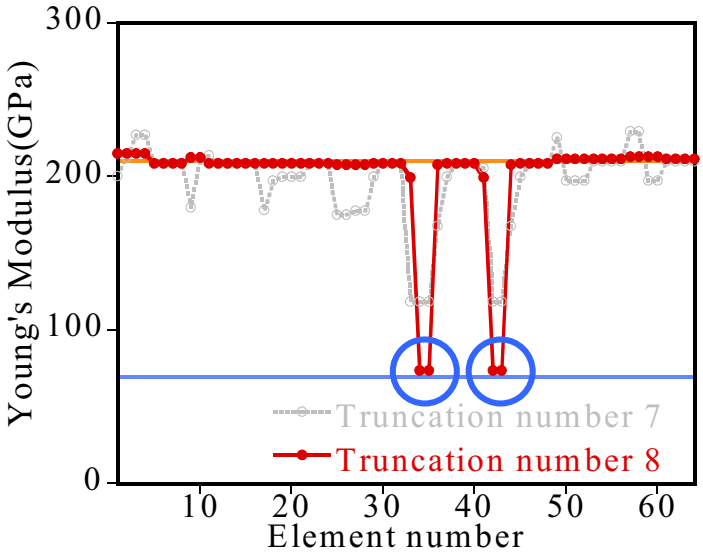



그림 9. 시스템변수 추정결과

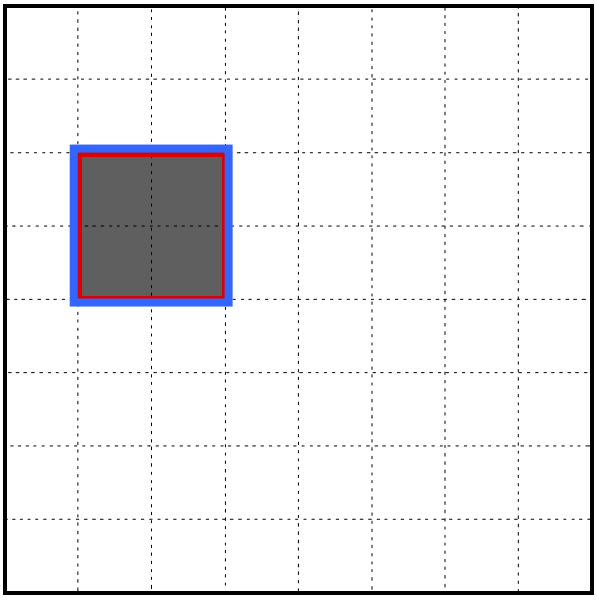


그림 10. 추정된 함유체의 기하학적 형상

그림 10은 추정된 함유체의 기하학적인 형상을 표시한 그림이다. 추정된 영의 계수의 값에는 약간의 차이가 있지만 추정된 영역은 완전히 일치하고 있음을 알 수 있다.

그림 11은 $L_1$ 정규화방법인 PP-TSVD의 시스템변수 추정결과와 기존의 $L_2$ 정규화방법의 시스템변수 추정결과를 비교한 그래프이다. 기존의 $L_2$ 정규화방법은 $L_2$ norm의 특성상 이질적인 함유체 위치에 해당하는 34, 35, 42, 43번 요소를 중심으로 해가 부드럽게 분포하므로 함유체 안팎의 경계에서 나타나는 영의 계수의 불연속적인 분포를 관찰할 수 없다 그러나 $L_1$ norm을 사용한 PP-TSVD는 함유체 내부와 외부의 경계에 나타나는 영의 계수의 불연속적인 분포를 기존의 $L_2$ 정규화방법보다 명확하게 보여준다.

또한 식 (15)에서 $L_1$ norm을 이용한 함수의 적분 가능성을 부분 연속-불연속(piecewise continuous)인 함수에 대해서 수렴하는 필요충분조건을 만족시키도록 gradient를 취해줌으로써 이로 인한 정규화 효과가 나타난다. $L_1$ norm을 이용한 PP-TSVD는 함유체가 포함된 34, 35, 42, 43번 요소는 43번 요소가 약간의 차이를 보이는 것을 제외하고 서로 이웃하면서 같은 값을 가지는 동시에 다른 요소들의 영의 계수와 비교했을 때 훨씬 떨어지는 같은 값을 가짐으로써 이 영의 계수를 가지는 요소들의 위치에 이질적인 함유체가 위치하고 있음을 예상할 수 있다. 또한 함유체 외부의 철로 이루어진 다른 요소들의 물성치는 대부분이 기저값인 철의 영의 계수에 위치하고 있다.

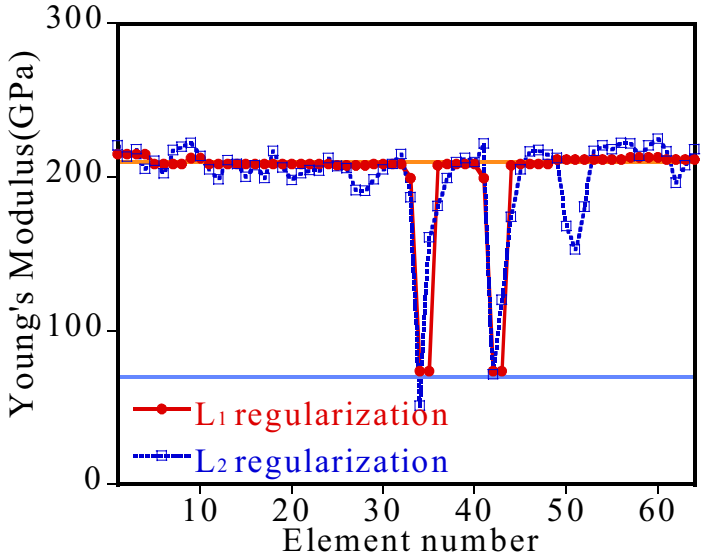



그림 11. 기존의 $L_2$ 정규화방법과의 비교

그러나 $L_2$ norm을 이용한 기존의 정규화 방법은 해들이 어느 정도의 진동을 보이고 부드러운 모양을 나타내고 있어서 함유체의 정확한 영역을 추정하기가 PP-TSVD에 비해 쉽지 않고 함유체 외부의 기저값에 해당하는 철의 물성치를 가지는 영역에서도 PP-TSVD에 비해 진동이 심하다.

### 4.2. 예제 2 – 모델링 오차가 있는 정사각형 모양의 함유체

예제 2는 그림 12와 같이 예제 1의 정사각형모양의 함유체를 $x$방향으로 4.167cm, $y$방향으로 8.333cm만큼 이동시켜 유한요소모델의 요소와 함유체가 일치하지 않는, 모델링 오차가 있는 경우이다. 이 함유체에 대해서 PP-TSVD를 통한 시스템변수추정을 수행하였다.

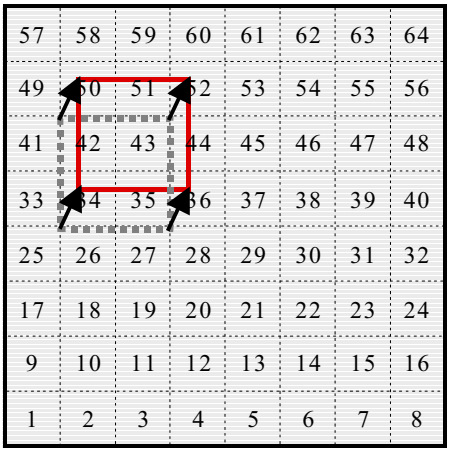



그림 **12.** 정사각형판 내의
모델링 오차가 있는 함유체의 형상

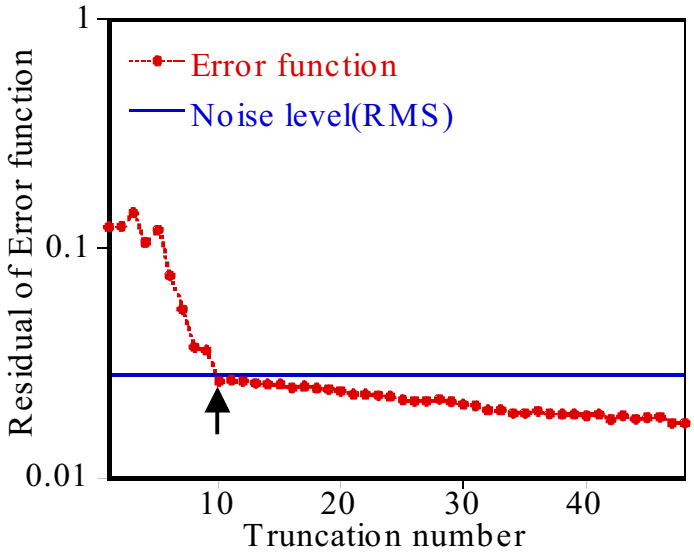



그림 **13.** 오차함수의 분포를 통한
**truncation number**의 결정

그림 13은 충분한 rank까지의 각각의 truncation number에 대한 식 (2)의 오차함수의 값을 나타낸 그래프이다. 또한 그래프에 횡방향으로 표시된 선은 측정오차를 알고 있다고 가정하고 오차의 기하평균 (Root Mean Square)으로 오차의 수준을 표시한 것이다. 예제 1과 마찬가지로 적당한 truncation number는 오차의 수준에 가장 근접한 10으로 결정한다.

그림 14는 결정한 truncation number에 대해서 PP-TSVD 최적화를 수행하여 시스템변수로 놓은 영의 계수를 추정한 결과이다. 횡방향으로 그어져 있는 회색선은 몇 개 요소에 걸쳐 있는 함유체가 가지고 있는 영의 계수의 정해이지만, 모델링 오차가 존재하기 때문에 각 요소별로 추정된 시스템변수의 값은 정해에 수렴할 수 없다. 그림 14에서 둥근 회색네모로 표시된 34, 35, 36, 42, 43, 44, 50, 51, 52번 요소가 함유체가 포함된 요소로 추정되고 있다. 또한 그림 14에서 truncation number가 9인 경우에서 결정한 10으로 바뀔 때 시스템변수 추정 결과의 차이를 살펴보면, 9일 때까지의 민감도 행렬에서의 정보로는 정확한 시스템변수 추정이 이루어지지 않아 34, 35, 36, 42, 43, 44, 50, 51, 52번 요소의 추정된 물성치가 서로 같은 값을 가지는 하나의 그룹으로서의 거동을 보이다가 truncation number가 10이 되면서 요소들이 함유체를 포함하고 있는 정도에 따라 그룹이 분할되어 크게 세 개의 그룹으로 나뉘어 추정되고 있음을 알 수 있다. 그림 15에 추정된 물성치의 기하하적 형상을 표시하여 놓았다. 함유체를 가장 많이 포함하고 있는 제일 진한 회색 영역인 42, 43, 50, 51번 요소가 같은 그룹으로 묶여 기저값에서 가장 많이 떨어진 영의 계수로

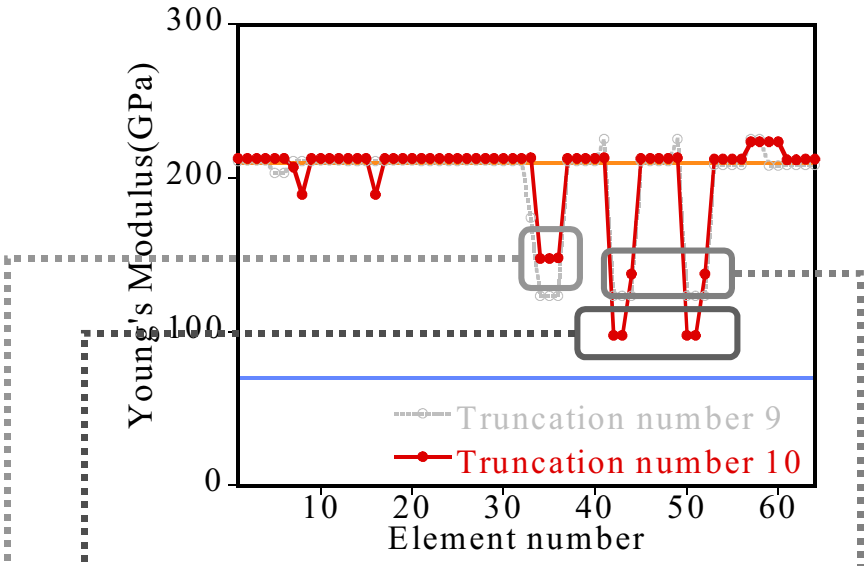



그림 14. 시스템변수 추정결과

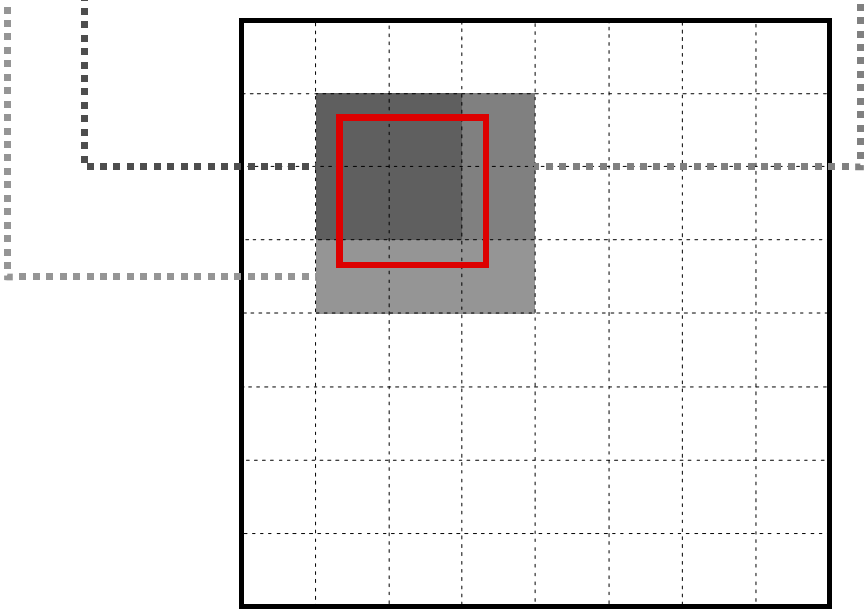


그림 15. 추정된 함유체의 기하학적 형상

추정되고 있다. 또한, 34, 35, 36번 요소가 하나의 그룹으로, 44, 52번 요소가 하나의 그룹으로 같은 영의 계수로 추정되고 있다. 즉 그림 14와 그림 15를 동시에 고려하여 보았을 때, 모델링 오차가 존재하지만 함유체를 포함하고 있는 각각의 요소들이 함유체가 포함된 정도에 따라 크게 세 개의 그룹으로 나뉘어 적당한 물성치를 추정하고 있음을 알 수 있다.

### 4.3. 예제 3 – 모델링 오차가 있는 배모양의 함유체

예제 3에서는 그림 16과 같이 위치하고 있는 모델링 오차가 있는 배모양의 함유체의 물성치를 PP-TSVD 방법을 통해 추정한다.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

**그림 16. 정각형판 내의 모델링 오차가 있는 함유체의 형상**

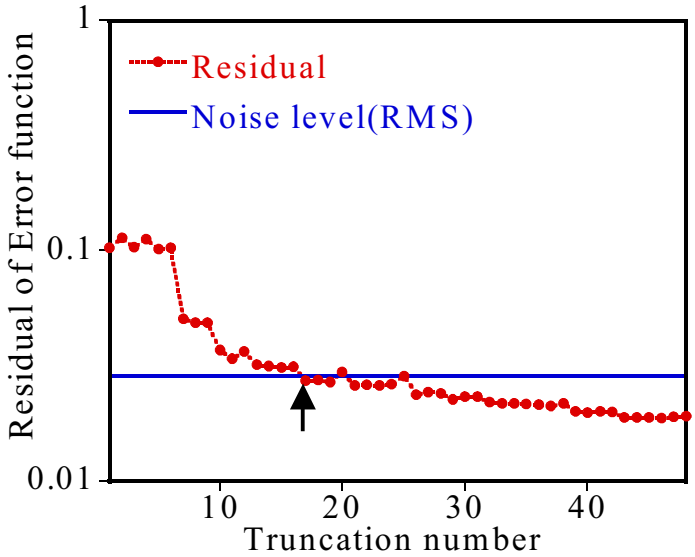



**그림 17. 오차함수의 분포를 통한 truncation number의 결정**

그림 17은 충분한 rank까지의 각각의 truncation number에 대한 식(2)의 오차함수의 값을 나타낸 그래프이다. 또한 그래프에 횡방향으로 표시된 선은 측정오차를 알고 있다고 가정하고 오차의 기하평균 (Root Mean Square)으로 오차의 수준을 표시한 것이다. 적당한 truncation number는 오차의 수준에 가장 근접한 17로 결정한다. 그림 18은 결정한 truncation number에 대해서 PP-TSVD 최적화를 수행하여 시스템변수로 놓은 영의 계수를 추정한 그래프이다. 횡방향으로 그어져 있는 회색선은 몇 개 요소에 걸쳐 있는 함유체가 가지고 있는 영의 계수의 정해이지만, 모델링 오차가 존재하기 때문에 각 요소별로 추정된 시스템변수의 값은 정해에 수렴할 수 없다. 그림 18에서 회색원으로 표시된 36, 37, 38, 44, 45, 46번 요소가 함유체가 포함된 요소로 추정되고 있다.

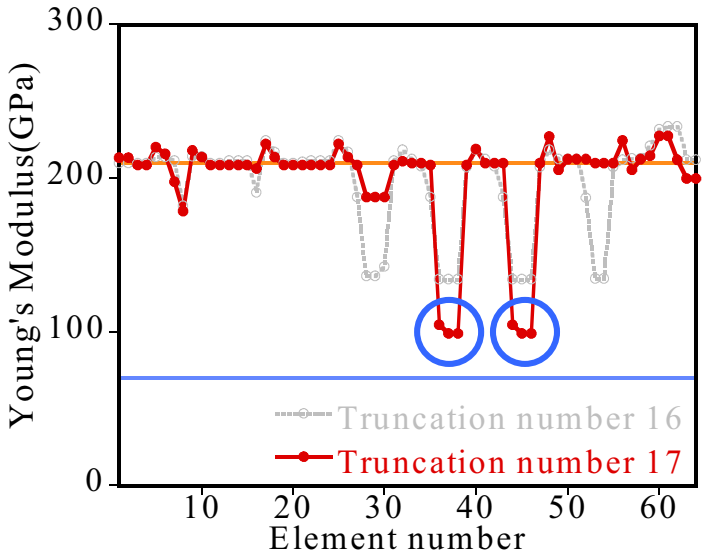



그림 18. 시스템변수 추정결과

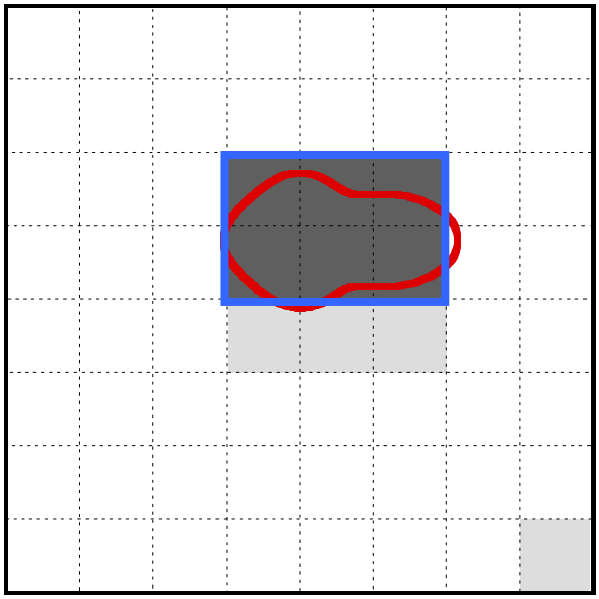


그림 19. 추정된 함유체의 기하학적 형상

또한 그림 18에서 truncation number가 16에서 17로 증가하면서 함유체보다 넓은 요소에 걸쳐서 추정된 시스템 변수들 중 함유체를 포함하지 않는 영역의 요소들이 걸러지고(filtering), 시스템 변수들의 진동이 약간 줄어들고 있음을 알 수 있다.

또한 PP-TSVD가 앞선 예제들에서도 보여주었던 그룹화의 특성이 여기에서도 명확하게 나타난다. truncation number가 16일 때 민감도 행렬의 시스템 변수에 대한 정보 부족으로 함유체보다 넓은 요소에 걸쳐서 추정된 시스템 변수들은 하나의 그룹으로써 거의 동일한 물성치를 가지고 있다. truncation number가 17일 때에는 민감도 행렬에서 시스템 변수에 대한 정보를 받아들이면서 하나의 그룹으로 동일한 물성치를 가지고 있던 영역들이 함유체를 포함하고 있는 영역과 그렇지 않은 영역으로 분할(sharing)되고 함유체를 포함하고 있는 정도에 따라 등급화(grading)되고 있음을 알 수 있다. 즉, 함유체를 대부분 포함하고 있는 영역인 36, 37, 38, 44, 45, 46번 요소는 거의 같은 값을 가지는 하나의 그룹으로써 가장 많이 떨어진 영의 계수값으로 추정되고, 함유체의 극히 일부만을 포함하고 있는 28, 29, 30번 요소 역시 하나의 그룹으로 묶여 기저값에서 아주 조금 떨어진 영의 계수값으로 추정된다.

그림 20은 $L_1$ 정규화방법인 PP-TSVD의 시스템변수 추정결과와 기존의 $L_2$ 정규화방법의 시스템변수 추정결과를 비교한 그래프이다. 그림 20에서 나타나는 기존의 $L_2$ 정규화방법의 시스템변수 추정결과는 함유체의 위치의 추정은 가능하지만 해의 모양이 부드럽고 진동이 심해서 함유체 안팎의

경계에서 나타나는 영의 계수의 불연속적인 분포를 관찰하기는 힘들다. 그러나 $L_1$ norm을 사용한 PP-TSVD는 함유체 내부와 외부의 경계에 나타나는 영의 계수의 불연속적인 분포를 기존의 $L_2$ 정규화방법보다 명확하게 보여준다. 또한 $L_1$ norm에 취해준 gradient가 같거나 비슷한 영의 계수를 가지는 요소끼리 서로 같이 움직이게 하는 역할을 하여 기존의 $L_2$ 정규화방법보다 진동이 덜하다. 예제 1의 그림 11에서의 $L_1$ 정규화방법인 PP-TSVD와 기존의 $L_2$ 정규화방법의 시스템변수 추정결과의 차이는 각각의 방법의 특성을 보여주긴 했지만 그리 크진 않았다. 하지만 예제 3에서는 $L_1$ norm을 사용한 PP-TSVD가 비교적 좋은 결과를 보여주고 있음을 알 수 있다. 예제 1과 예제 3은 함유체의 형상을 제외한 모든 조건이 동일하다. 즉, 모델링 오차가 포함되어

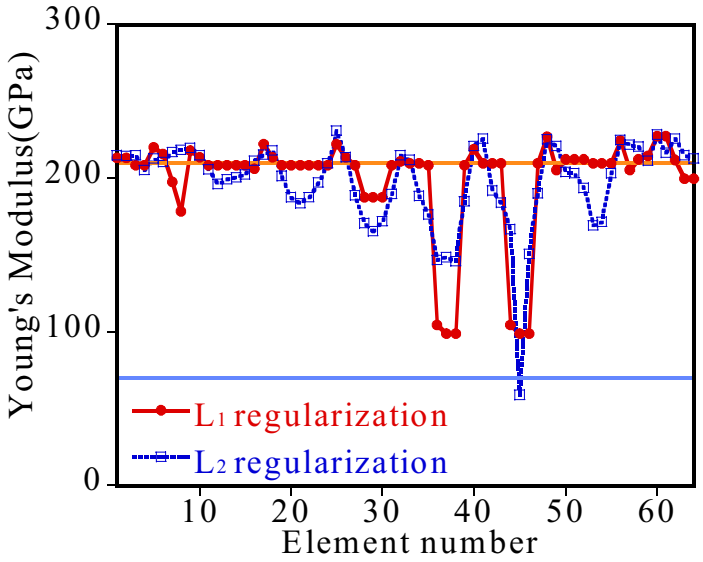



**그림 20. 기존의 $L_2$ norm을 사용한 정규화 방법과의 비교**

시스템확인기법의 불안정성이 심화된 예제 3에서 $L_1$ norm을 사용한 PP-TSVD가 좀 더 안정적으로 시스템 변수를 추정하고 있음을 알 수 있다.

# 5. 결론

이 논문에서는 주어진 시스템인 연속체 내부의 시스템변수인 함유체의 물성치를 추정하는, $L_1$ norm을 이용한 시스템확인기법인 PP-TSVD 방법을 도입하였다.

또한 PP-TSVD를 2차원 유한요소모델에 적용시키기 위하여 경계영역에서의 적분을 이용한 이산화방법을 제안하고, 이를 통해 유한체 내부에 포함된 이질적인 미지 함유체의 물성치를 추정한다. 이산화과정에서 정의되는 1차 연산행렬 **L**은 2차원 유한요소모델에서 시스템변수가 달라지는 불연속적인 경계를 더욱 뚜렷하게 나타내는 정규화 연산자 역할을 한다.

제안된 이산화한 PP-TSVD방법을 수치적으로 모사된 측정치를 시스템의 응답으로 하는 예제를 통해서 검증하고 기존의 정규화방법과 비교해보았다.

첫번째 예제는 2차원 판 유한요소 모델 내의 정사각형 모양의 함유체의 물성치를 추정하는 문제로 모델링 오차가 없는 경우이다. 이 경우에 있어서 truncation number는 상당히 작은 값에서 결정되고 있음을 알 수 있다. 이는 기존의 $L_2$ norm을 이용한 정규화기법보다 $L_1$ norm을 이용한 정규화기법인 PP-TSVD가 분해능이 크기 때문에 측정오차의 영향에 의해 잘못된 해를 구할 가능성이 크다. 그러므로, 정보의 양이 줄더라도 오차의 영향을 최소화할 수 있는 작은 truncation number가 적당한 truncation number로 결정된다. 또한,

truncation number를 1부터 결정한 truncation number까지 증가시키며 최적화된 시스템 변수의 경향을 살펴보면 처음에는 시스템 변수에 대한 정보가 매우 적게 고려되므로 해의 진동은 줄어들지만 해가 정해보다는 기저값에 가깝게 추정되는 강한 정규화 효과를 가지게 되고 추정된 시스템변수의 값도 함유체를 포함한 요소보다 훨씬 넓은 영역에 대해 번져서(blurring) 추정된다. 그러나 결정한 truncation number에 가까워질수록 시스템 변수에 대한 정보가 늘어나면서 번져서 추정된 시스템변수의 영역은 걸러지고(filtering) 실제 함유체가 포함된 요소는 정해에 가까워진다. 또한 결정한 truncation number보다 큰 truncation number에 대해서는 점차 오차의 영향이 커지면서 추정된 시스템변수들의 진동이 생기게 된다.

두번째와 세번째 예제는 모델링 오차가 있는 경우로 각각 첫번째 예제의 정사각형 함유체가 요소와 일치하지 않게 이동되어 모델링 오차가 발생하는 예제와 배모양의 함유체가 요소와 일치하지 않아 모델링 오차가 생기는 예제이다. 모델링 오차가 발생하는 경우의 PP-TSVD 방법은 모델링 오차로 인하여 함유체를 포함하고 있는 요소가 정해에 수렴하지 못한다. 모델링 오차가 없는 첫번째 예제의 경우는 적당한 truncation number에 가까이 갈수록 함유체를 포함하고 있는 요소의 물성치가 함유체의 물성치에 거의 수렴하는 결과를 보여준다. 모델링 오차가 있는 두번째와 세번째의 예제의 경우는 적당한 truncation number에 가까이 갈수록 민감도 행렬에서 시스템 변수에 대한 정보를 받아들이면서 번져서 하나의 그룹으로 동일한 물성치를 가지고 있던

영역들이 함유체를 포함하고 있는 영역과 그렇지 않은 영역으로 걸러지고(filtering) 함유체를 포함하고 있는 정도에 따라 추정되는 물성치의 값이 등급화(grading)되고 있음을 알 수 있다.

이상의 예제들은 $L_1$ norm을 사용한 PP-TSVD의 특성을 잘 보여주고 있으며 기존의 $L_2$ 정규화방법의 시스템변수 추정결과는 함유체의 위치의 추정은 가능하지만 함유체를 포함한 요소들을 중심으로 해의 모양이 부드러워서 함유체 안팎의 경계에서 나타나는 영의 계수의 불연속적인 분포를 관찰하기는 힘든 반면에 $L_1$ norm을 사용한 PP-TSVD는 함유체 내부와 외부의 경계에 나타나는 영의 계수의 불연속적인 분포를 보다 명확하게 보여준다. 또한 $L_1$ norm에 취해준 gradient가 같거나 비슷한 영의 계수를 가지는 요소끼리 서로 같이 움직이게 하는 역할을 하여 기존의 $L_2$ 정규화방법보다 진동이 덜하다.

모델링 오차가 포함되면서 오차 함수의 수준이 측정치 오차의 수준보다 더 크게 평가가 되어 정확한 truncation number의 결정이 어려워지게 된다. 이에 따라 측정치의 오차를 알고 있다고 가정하는 RMS의 측정치의 오차의 수준으로 기준으로 truncation number를 결정하는 방법 외에 측정치의 오차를 모르는 경우에도 truncation number를 결정할 수 있는 기법이 요구된다.

오차를 모르는 경우의 오차의 수준을 평가하여 truncation number를 결정하는 방법으로 GCV방법과 Maximum Drop 방법을 적용시켜보았다. 그러나 GCV방법은 모델링 오차가 없는 경우에도 오차의 수준이 RMS의 측정치 오차의 수준보다 약간 낮게 평가되는 경향이 있다. 이는 오차의 수준이

약간만 낮아져도 결정되는 truncation number가 매우 민감하게 달라진다. 또한 Maximum Drop 방법은 truncation number를 증가시키면서 시스템변수로 추정하는 요소들중 절대값이 가장 큰 증가분을 가질 때의 truncation number를 결정하는 방법이지만, 몇몇의 예제에서 잘 적용되지 못했다.

이에 따라 오차의 수준을 모르는 경우에 truncation number를 일반적으로 결정할 수 있는 방법에 대한 연구가 요구된다.

# 참고문헌


Bel99

A.D.Belegundu, T.R.Chandrupatla, *Optimization Concepts and Applications in Engineering*, Prentice Hall (1999)

Cha99

T.F. Chan, G.H. Golub, and P. Mulet, A Nonlinear Primal-Dual Method for Total Variation-Based Image Restoration, *SIAM J. SCI. COMPUT.* Vol. 20, No. 6, pp.1964-1977 (1999)

Cha00

T.F. Chan, A. Marquina, and P. Mulet, High-Order Total Variation-Based Image Restoration, *SIAM J. SCI. COMPUT.* Vol. 22, No. 2, pp.503-516 (2000)

Gol96

G.H.Golub, C.F.Van Loan, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press (1996)

Han96

P.C. Hansen and K. Mosegaard, "Piecewise polynomial solutions without a priori break points.", *Numerical Linear Algebra with Applications*, Vol. 3(6), pp.513-524 (1996)

Han98

P.C. Hansen, *Rank-deficient and Discrete Ill-Posed Problems*, Numerical Aspects of Linear Inversion,.SIAM : Philadelphia (1998)

Han00

P.C.Hansen, B.H.Jacobsen and K.Mosegaard, *Methods and Applications of Inversion*, Springer (2000)

Lee99

H.S. Lee, Y.H. Kim, and H.W. Park, "A new spatial regulrization scheme for the identification of the geometric shape of an inclusion in a finite body", *IJNME*, 46, pp.973-992 (1999)

Lee00

H.S. Lee, C.J. Park, and H.W. Park, “Identification of geometric shapes and material properties of inclusions in two-dimensional finite bodies by boundary parameterization”, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.* 181, pp.1-20 (2000)

Men89

W.Menke, Geophysical Data Analysis : *Discrete Inverse Theory*, Revised Edition, Academic Press, Inc. (1989)

Moh93

Mohammad-Reza Banan, Keith D.Hjelmstad. *Identification of structural systems from measured response.* Department of Civil Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois (1993)

Par01

H.W. Park, S.B. Shin, and H.S. Lee, “Determination of an optimal regularization factor in system identification with Tikhonov function for linear elastic continua.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 51, No.10, pp.1211-1230 (2001)

Vog96

C.R. Vogel, M.E. Oman, “Iterative methods for Total Variation Denoising”, *SIAM J. SCI. COMPUT.*, Vol. 17, No.1, pp.227-238 (1996)

Vog98

C.R. Vogel, M.E. Oman, (1998) Fast, “Robust total variation-based reconstruction of noisy, blurred images.”, *IEEE Transactions on image processing*, Vol. 7, No. 6

Yeo00

I.H. Yeo, S.B. Shin, H.S. Lee, and S.P. Chang, “Statistical damage assessment of framed structures from static responses”, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, Vol 126(4):414-421 (2000)

# ABSTRACT

It is reported that the successful applications of $L_2$ regularization to the SI are possible since the solutions are smooth and continuous. In case of identifying the inclusion with discontinuous boundaries, $L_2$ regularization is difficult to estimate the location and level of the inclusion due to these characteristics of $L_2$ regularization. For overcoming these defects of $L_2$ regularization, PP-TSVD with $L_1$ regularity technique is introduced. PP-TSVD redemies the instability of SI due to sparseness of measurements and measurement noise and is applicable to SI problems with piecewise-continuous solutions.

The discretized method using integration in boundary domain is proposed for applying PP-TSVD to the 2-D F.E.Model and through this method, the material properties of the unknown inclusion is estimated.

The characteristics of results using PP-TSVD with $L_1$ regularity technique is verified by three examples and it is confirmed that PP-TSVD is more effective than $L_2$ regularization with respect to estimating system parameters with piecewise-discontinuous solutions.



**Key Word**

PP-TSVD, $L_1$ norm, $L_1$ regularity condition, truncation number, derivative operator, sensitivity, SVD(Singular Value Decomposition)

# 감사의 글

이 논문이 나오기까지 저에게 끊임없는 가르침과 조언을 해주시고 꾸지람도 아끼지 않으신 이해성 선생님께 먼저 깊이 감사드립니다. 그리고 학부과정부터 석사과정에 이르기까지 저에게 여러 방면에 걸쳐서 많은 가르침을 주신 장승필 교수님, 고현무 교수님, 오병환 교수님, 김재관 교수님께도 깊은 감사를 드립니다.

석사 2년 동안 즐거운 일, 힘들었던 일도 같이 나누며 서로에게 힘이 되어 주었던 연구실 사람들에게 항상 고맙게 생각합니다. 이 논문이 미약하게나마 완성될 수 있도록 가장 큰 도움을 주시고 2년 내내 연구실의 대들보 역할을 하신 멋진 현우형, 공부를 너무 열심히 해서 머리가 아플 때나 고민이 있을 때 항상 자상하게 이야기를 들어주시고 격려해 주신 용한이형, 제가 나태해지려고 할 때 따끔한 충고를 잊지 않으신 기석이형, 항상 엉뚱한 사고를 하는 것 같으면서도 마음은 정말 따뜻한 주성이형, 항상 밝은 웃음을 잃지 않으시고 오히려 저희 후배들까지 신경 써주신 틴틴윈 누나께 정말 감사드립니다. 무슨 일이든지 항상 앞서서 끝내 놓아 제게 모범이 된 규철이, 끼니를 거를 것 같을 때에도 항상 같이 밥 먹으러 가준 양광이, 고등학교 때부터 석사과정 때까지 계속 함께한 친구 정진이에게도 정말 고맙다는 말을 하고 싶습니다. 또한 항상 직설적인 조언으로 제가 정신을 바짝 차리게 해주신 천종이형, 항상 웃음으로 저희 후배들을 맞아주시고 맛있는 것도 많이 사주신 경남이누나, 따뜻한 선배이

시고 귤도 많이 사주신 윤석이형, 인호형, 문성이형, 종승이형, 문구형, 한도형, 종명이형께도 감사의 말씀 드립니다. 너무도 부족한 선배이기에 영곤이형, 남규, 만우, 정희에게는 미안하다는 말과 함께 열심히 공부하라고 얘기해주고 싶습니다. 제게 새로운 경험을 하게 해주시고 넓은 사고를 하게 해주셨던 항상 다정다감하신 남일이형, 홍식이형, 형수님께도 감사의 말씀드립니다.

고등학교 때부터 힘들 때 서로 의지하며 지금까지 같이 걸어온 정한이, 기남이, 중학교 때부터 지금까지 항상 힘이 되어 준 기종이, 성훈이, 지권이, 대학와서 만난 가장 멋진 친구들 태윤이, 정우에게도 정말 고맙다는 말 전합니다.

마지막으로 논문을 쓰는 동안 늘 뒤에서 묵묵히 저를 보살펴 주신 제가 가장 아끼고 사랑하는 아버지, 어머니, 제 동생 그리고 하나님께 정말 진심으로 감사드립니다.