

2004 2

에너지 최소화를 이용한 사장교의
초기 평형 상태 해석 기법 및 최적 형상 구현

**An Initial Equilibrium State Analysis of Cable-Stayed Bridges
by Minimizing Energy of Structures
and Optimal Correction of Profiles**

지도교수 이 해 성

이 논문을 공학석사학위논문으로 제출함

2003년 10월

서울대학교 대학원

지구환경시스템공학부

김 창 현

김창현의 공학석사학위 논문을 인준함

2003년 12월

위원장 張 正 強
부위원장 李 海 成
위원 高 鎭 武

가 .

(, 1999)

(Kim & Lee, 2001) .

가

가 ,
가

, TCUD,

: 2002-21277

I.	1
II.	4
2.1	6
2.2	11
2.2.1	11
2.2.2	(Wang, 1993)	17
2.2.3	2	21
2.3	25
III.	33
3.1	34
3.2	43
IV.	48
	50

2.1.		7
2.2.		7
2.3.		13
2.4.		13
2.5.	Fan Type	17
2.6.	Fan Type	18
2.7	Fan Type	19
2.8	Fan Type	20
2.9	Fan Type	20
2.10	2	22
2.11	2	22
2.12	2	23
2.13	2	23
2.14	2	24
2.15	2	24
2.16		26
2.17		26

2.18	28
2.19	29
2.20	30
2.21	30
2.22	31
2.23	31
3.1	35
3.2	37
3.3	37
3.4	38
3.5	38
3.6	39
3.7	39
3.8	40
3.9	41
3.10	41
3.11	42
3.12	42
3.13	#506	44

3.14	#503	45
3.15	#508	45
3.16		46
3.17		46
2.1	Fan type	17
2.2	Fan Type	19
3.1		35

I. 서론

외국은 물론 국내에서도 교통량 및 물류량이 증가함에 따라 교량의 건설이 증대되고 있다. 또한 교량의 설계 및 시공이 전문화 되고, 해석 기법이 발전함에 따라 사장교 및 현수교와 같은 특수 교량의 건설이 늘어나고 있다. 특히 사장교는 미려한 외관과 경제성으로 인하여 장대 교량 형식으로 선호되고 있다.

대부분의 뼈대 구조물은 무응력 상태에서도 강성을 가지기 때문에 변형 전의 기하형상으로부터 부재의 초기길이가 결정된다. 그러나 케이블은 장력이 도입되기 전에는 강성이 발생하지 않기 때문에 무응력 상태의 기하형상을 정의할 수 없다. 따라서 케이블 구조물은 변형 후의 기하형상으로부터 장력이나 초기 길이를 추정해야 한다. 평형상태의 주어진 기하형상을 만족하는 케이블의 장력이나 초기길이를 결정하는 것을 초기평형상태 해석이라고 정의한다. 초기평형상태 해석에서는 새그에 의한 기하형상 자체의 비선형성과, 케이블의 초기길이를 가정하여 발생하는 비선형성을 고려해야 한다.

기존의 초기 평형 상태 해석방법은 해석자의 직관에 의존하거나 혹은 해석에만 의존한 나머지 실제적인 설계 혹은 시공단계 상황이 고려되어 있지 않은 것이 현실이었다. 이 연구에서는 수학적으로 잘 정립된 Newton-Raphson 방법을 이용하여 해석자의 직관에 의존하지 않고 주어진 목표 형상을 정확히 구현할 수 있는 초기 평형 상태 해석법을 제안한다. 또한 실제적인 사장교에

적용될 수 있도록 여러가지 제한 조건을 이용하여 초기평형상태를 제안하려 한다. 즉, 기존의 기하학적 제한 조건식을 이용한 TCUD 해석법은 목표형상을 정확히 맞추는 장점이 있었으나, 목표형상을 정확히 맞추기 위하여 케이블에 장력이 과도하게 걸리거나, 주탑 및 거더에 모멘트가 상당히 증가하게 되는 문제점이 있었다. 이러한 문제점을 해결하기 위해서는 에너지를 최소로 하는 초기평형상태 해석방법이 필요할 것이다. 그러나 또한 에너지를 최소로 하는 초기평형상태 해석 기법은 설계자가 시공자가 요구하는 목표형상을 정확히 맞추지 못하는 결과가 발생할 것으로 판단된다. 따라서 보다 엄밀한 초기평형상태 해석 방법은 기하학적인 제한 조건을 이용한 초기평형상태 해석 기법과 에너지를 최소로 하는 초기평형상태 해석기법을 최적화하는 것으로 목표형상을 맞추는 물론 주탑 및 거더에 발생하는 모멘트 또한 감소시키는 초기평형상태 기법일 것이다.

일반적으로 캔틸레버 공법으로 시공되는 사장교는 시공 단계에 따라 구조계가 변하게 되기 때문에 반드시 각 시공 단계에서 도입하여야 하는 케이블의 장력을 결정하기 위한 시공단계 해석 기법이 필요하다. 일반적으로 시공단계 정방향 해석과 역방향 해석이 있다. 정방향 해석은 실제 시공단계에 맞추어서 해석해 나가는 방법이며 역방향 해석은 초기평형상태 해석을 통하여 얻어진 완성계에서 시공순서의 역순으로 하나씩 부재를 제거해 나가며 해석해 나가는 방법이다. 기존의 해석에서는 역방향 해석을 수행하여 케이블 도입시 발생하는 초기장력을 구하고 이를 토대로 하여 정확한 정방향 해석을 수행하는

방법을 따르고 있다. 이 연구에서는 제안된 초기 평형 상태 해석법을 적용하여 보다 엄밀한 시공 단계 해석법을 제안하고자 한다.

II. 초기 평형 상태 해석

대부분의 뼈대 구조물은 무응력 상태에서도 강성을 가지기 때문에 변형 전의 기하형상으로부터 부재의 초기길이가 결정된다. 그러나 케이블은 장력이 도입되기 전에는 강성이 발생하지 않기 때문에 무응력 상태의 기하형상을 정의할 수 없다. 따라서 케이블 구조물은 변형 후의 기하형상으로부터 장력이나 초기 길이를 추정해야 한다. 평형상태의 주어진 기하형상을 만족하는 케이블의 장력이나 초기길이를 결정하는 것을 초기평형상태 해석이라고 정의한다. 초기평형상태 해석에서는 새그에 의한 기하형상 자체의 비선형성과, 케이블의 초기길이를 가정하여 발생하는 비선형성을 고려해야 한다.

비선형 방정식을 푸는 방법으로는 일반적으로 시산법 (Trial and Error) [1] 과 순차적 반복 계산법 (Successive iteration method) [2,3] 이 널리 사용되어 왔다. 시산법은 초기 상태를 가정하고 정적 해석을 수행한 후 경험적 지식으로 가정 값들을 보정하는 방법으로 수렴성 및 해의 정확성을 보장할 수 없다. 순차적 반복 계산법에서는 이중 반복계산 과정이 필요하다. 첫 번째 반복계산에서는 비선형 평형방정식을 풀고 두 번째 반복계산에서는 제한 조건식으로 보정량을 계산하는 과정을 반복하여 목표 형상을 만족하는 구조계를 결정한다. 즉 초기상태를 가정하여 비선형 평형방정식을 풀고, 그 결과로 제한 조건식을 만족하는 초기상태의 보정량을 산정한다. 보정한 초기상태는 평형방정식을 만족하지 못하므로 반복 계산을 통하여 최종 해를

구한다. 이 방법은 시산법 보다는 정확한 해를 구할 수 있으나, 수렴 속도가 느리기 때문에 엄밀한 해를 구하는 데에는 한계가 있을 수밖에 없다. 이 연구에서는 비선형 방정식을 풀기 위하여 Newton Raphson 방법을 사용하게 된다[4].

케이블의 거동을 표시하기 위해서는 장력 혹은 무응력 상태의 케이블 길이가 주어져야 하지만 이러한 양을 해석 전에 알 수가 없으므로 전체 구조계의 평형방정식의 개수가 미지수의 개수보다 작아지게 되어 초기 평형상태 해석을 위하여 추가의 조건식이 필요하다. 이러한 추가의 조건의 종류에 따라서 초기평형상태 해석 방법이 달라진다. 즉, 기존의 기하학적인 제한 조건 식을 이용한 초기평형상태 해석 방법은 TCU의 기하학적 제한조건을 이용한 초기평형상태 해석 법과 부재력의 내력을 반대로 작용하여 초기형상을 결정하게 되는 초기 부재력 법 등이 있다. 이 연구에서는 새로운 초기평형상태 해석 방법인 에너지를 최소화 하는 초기평형상태 해석 방법을 제안한다. 이를 이용하여 기존의 기하학적 제한 조건 식을 이용한 초기평형상태 해석 방법과 에너지를 최소화한 초기평형상태 해석 방법을 최적화 하여 새로운 초기평형상태 해석 법을 제안하고자 한다. 이러한 초기평형상태 해석은 물론, 평형상태와 목표 형상을 동시에 만족하는 구조계를 결정하는 과정으로 정의할 수 있다.

2.1 탄성 현수선 케이블의 해석

그림 2.1 은 변형 전의 길이가 L_0 이고, 단위 길이 당 자중이 w 인 탄성현수선 케이블이다. 변형 전의 Lagrangian 좌표 s 는 자중에 의해 변형 후의 Lagrangian 좌표 p 로 움직인다. 케이블의 변형 후 기하형상에 대한 제한조건은 다음과 같다.

$$\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2 = 1 \quad (2.1)$$

그림 2.2 는 케이블 한쪽 단 A 에서 케이블 내의 임의 점 P 까지의 자유 물체도를 보여준다. 연직 및 수직 방향에 대한 부재 단력과 장력의 평형 조건은 다음과 같다.

$$T \frac{dx}{dp} = -F_1 \quad (2.2a)$$

$$T \frac{dy}{dp} = -F_2 \quad (2.2b)$$

$$T \frac{dz}{dp} = -F_3 - ws \quad (2.2c)$$

여기서, T 는 점 $P(x, y, z)$ 에서의 장력이고 F_1, F_2, F_3 는 각각 점 A 에서의 수평과 수직방향의 부재단력이다. 케이블의 변형도-변위 관계는 다음과 같다.

$$\varepsilon = \frac{dp^2 - ds^2}{2ds^2} \cong \frac{dp - ds}{ds} \quad (2.3)$$

Hooke 의 법칙으로부터 구성방정식을 다음과 같이 구할 수 있다 [6].

$$T = EA\varepsilon \quad (2.4)$$

여기서, E 는 Young's Modulus 이고 A 는 변형 전의 케이블 단면적이다. 식(2.3)의 변형도-변위 관계와 식(2.4)의 구성방정식을 함께 표현하면 다음과 같다.

$$T = EA\left(\frac{dp}{ds} - 1\right) \quad (2.5)$$

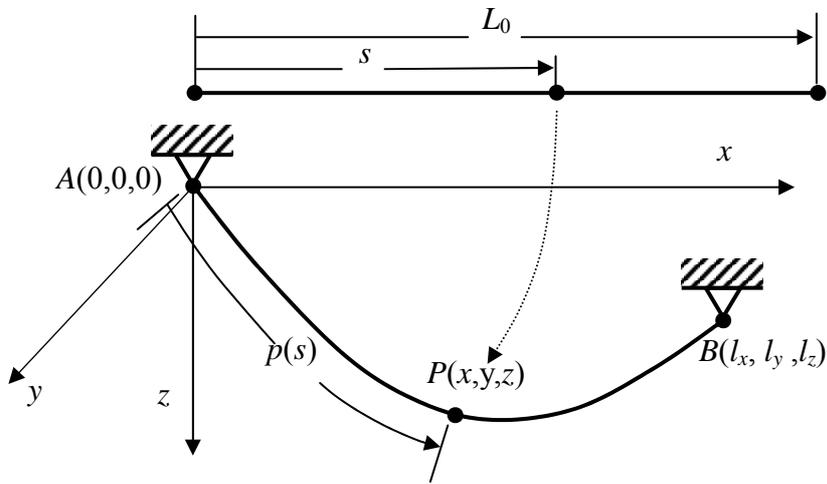


그림 2.1 탄성현수선 케이블에 대한 좌표계

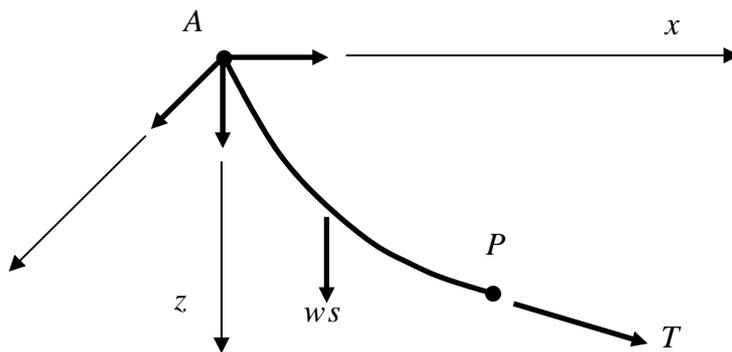


그림 2.2 케이블 세그먼트의 자유 물체도

자중만을 받는 케이블은 식(2.1), 식(2.2a), 식(2.2b) 그리고 식(2.5)의 4 개의 지배 방정식이 변수 x, z, y, p, T 와 독립변수 s 로 표현된다. 케이블의 지배방정식을 적분하여 p, T 를 소거하고 x, y, z 를 독립변수 s 로 표현하면 케이블의 형상을 얻는다. 케이블의 지배방정식으로부터 직각 좌표계 x, y, z 와 변형 전의 Lagrangian 좌표 s 의 대응관계를 다음과 같이 나타낸다.

$$x(s) = \int_0^s \frac{dx}{dp} \frac{dp}{ds} ds + x(0) \quad (2.6a)$$

$$y(s) = \int_0^s \frac{dy}{dp} \frac{dp}{ds} ds + y(0) \quad (2.6b)$$

$$z(s) = \int_0^s \frac{dz}{dp} \frac{dp}{ds} ds + z(0) \quad (2.6c)$$

식(2.6)에서 케이블 양단의 경계조건은 다음과 같다.

$$x = 0, y = 0, z = 0 \quad \text{at } s = 0 \quad (2.7a)$$

$$x = l_x, y = l_y, z = l_z \quad \text{at } s = L_0 \quad (2.7b)$$

식(2.1)과 식(2.2)로부터 케이블의 장력을 부재단력과 변형 전 Lagrangian 좌표 s 로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$T(s) = \sqrt{(F_1)^2 + (F_2)^2 + (F_3 + ws)^2} \quad (2.8)$$

식(2.8)로부터 $dx/dp, dz/dp, dp/ds$ 를 독립변수 s 로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{F_1}{\sqrt{(F_1)^2 + (F_2)^2 + (F_3 + ws)^2}} \quad (2.9a)$$

$$\frac{dy}{dp} = -\frac{F_2}{\sqrt{(F_1)^2 + (F_2)^2 + (F_3 + ws)^2}} \quad (2.9b)$$

$$\frac{dz}{dp} = -\frac{F_3 + ws}{\sqrt{(F_1)^2 + (F_2)^2 + (F_3 + ws)^2}} \quad (2.9c)$$

$$\frac{dp}{ds} = \frac{1}{EA} \sqrt{(F_1)^2 + (F_2)^2 + (F_3 + ws)^2} + 1 \quad (2.9d)$$

식(2.6)에 식(2.8)의 관계식을 대입하고, A 단의 경계조건($s = 0$)을 적용하여 적분하면, 다음과 같이 임의 점에서 케이블의 좌표를 결정할 수 있다.

$$x(s) = -\frac{F_1}{EA} s - \frac{F_1}{w} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{F_3}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{F_3 - ws}{H} \right) \right\} \quad (2.10a)$$

$$y(s) = \frac{F_2}{EA} s - \frac{F_2}{w} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{F_3}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{F_3 - ws}{H} \right) \right\} \quad (2.10b)$$

$$z(s) = -\frac{F_3}{EA} s - \frac{F_1}{2EA} - \frac{H}{w} \left[\left\{ 1 + \left(\frac{F_3}{H} \right)^{1/2} \right\} - \left\{ 1 + \left(\frac{F_3 - ws}{H} \right)^2 \right\}^{1/2} \right] \quad (2.10c)$$

식(2.10)에 나머지 B 단($s = L_0$)의 경계조건을 적용하면 다음과 같은 탄성현수선 케이블의 적합조건식을 얻는다.

$$x(L_0) = -\frac{F_1}{EA} L_0 - \frac{F_1}{w} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{F_3}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{F_3 - wL_0}{H} \right) \right\} \quad (2.11a)$$

$$y(L_0) = \frac{F_2}{EA} L_0 - \frac{F_2}{w} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{F_3}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{F_3 - wL_0}{H} \right) \right\} \quad (2.11b)$$

$$z(L_0) = -\frac{F_3}{EA}L_0 - \frac{F_1}{2EA} - \frac{H}{w} \left[\left\{ 1 + \left(\frac{F_3}{H} \right)^{1/2} \right\} - \left\{ 1 + \left(\frac{F_3 - wL_0}{H} \right)^2 \right\}^{1/2} \right] \quad (2.11c)$$

여기서, s 는 변형 전 Lagrangian 좌표계의 일차원 변수이고, $H = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ 이며, F_1, F_2, F_3 는 왼쪽 단의 부재력이다. EA 는 케이블의 탄성계수 이고, w 는 단위길이 당 중량이다. 여기서 한쪽 단($s = L_0$)의 경계조건을 적용하여 다음과 같은 케이블의 적합방정식을 얻는다.

$$l_x = f(F_1, F_2, F_3, L_0) \quad (2.12a)$$

$$l_y = g(F_1, F_2, F_3, L_0) \quad (2.12b)$$

$$l_z = h(F_1, F_2, F_3, L_0) \quad (2.12c)$$

식 (2.12) 의 적합 방정식을 이용하여 식 (2.13) 의 탄성현수선 케이블 요소의 평형방정식을 얻을 수 있다.[2]

$$\Delta \mathbf{F}_c^e = \mathbf{K}_c^e \Delta \mathbf{x}^e + \mathbf{K}_g^e \Delta L_0^e$$

여기서 $\Delta \mathbf{F}_c^e = (\Delta \mathbf{F}_1^e, \Delta \mathbf{F}_2^e)$, $\Delta \mathbf{x}^e = (\Delta \mathbf{x}_1^e, \Delta \mathbf{x}_2^e)$, 이다. (2.13)

$$\mathbf{K}_c^e = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_c & \mathbf{k}_c \\ \mathbf{k}_c & -\mathbf{k}_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_g^e = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_g \\ -\mathbf{k}_g - \mathbf{w} \end{pmatrix}$$

케이블의 적합 조건식은 방정식보다 미지수가 많은 부정방정식이다. 케이블의 장력과 초기길이를 결정하기 위해서는 미지수 중에서 하나가 기지 값으로 주어

지거나 기하학적인 제한 조건 혹은 에너지 최소화 방법과 같은 조건이 필요하게 된다. 따라서 위의 조건 방법에 따라 다음의 두 가지 경우의 초기평형상태 기법을 적용하여 보았다.

2.2 최적 초기평형상태 기법

2.2.1 최적 초기 평형 상태 해석

기하학적 제한 조건식을 이용한 초기평형상태 및 에너지를 최소로 하는 초기평형상태 해석을 동시에 최적화 하기 위하여 다음 식 (2.14)과 같은 목적함수를 최소화 하는 문제를 정의한다.

$$\Pi = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i^{ncons} (u_i - \tilde{u}_i)^2 + \frac{\alpha}{EI} \sum_e^{nelm} (M_{self}^e + \sum_j^{ncbl} M_j^e T_j)^2 \right\} \quad (2.14)$$

subject to $(L_l)_i \leq \tilde{L}_i \leq (L_u)_i$

위 식에서 α 라는 optimization factor 를 기준으로 하여 왼쪽 부분은 기존의 TCUD 해석의 기하학적 제한 조건을 이용한 초기평형상태 해석방법의 목적함수 부분이며, 오른쪽 부분은 이 논문에서 새로 개발한 방법인 에너지를 최소화하는 초기평형상태 해석방법의 목적함수를 나타낸다. 즉, α 값이 상대적으로 아주 큰 값을 가지게 되면 오른쪽 부분을 최적화 하여 에너지를 최소화하는 초기평형상태 해석방법으로 초기평형상태 해석을 수행할 것이며, α 값이 상대적으로 아주 작은 값을 가지게 되면 왼쪽 부분만을 최적화 하여

기존의 TCUD 해석 방법인 기하학적인 제한 조건을 이용한 초기평형상태 해석방법으로서 초기평형상태 해석을 수행하게 된다. 따라서 이 연구에서는 기존의 초기평형상태 해석 방법과 새로 제안한 초기평형상태 해석 방법인 에너지를 최소화 하는 초기평형상태 해석방법의 적절한 조화 점을 찾는 초기평형상태 해석 방법을 제시 한다.

우선 목적함수의 왼쪽 부분에 사용된 변수는 다음과 같다. \tilde{u}_i 는 목표형상 제어점의 좌표이고, $ncons$ 는 제어점의 개수, u_i 는 최적화 과정에서 발생하는 목표형상 제어점 에서의 좌표이다. 즉, 왼쪽 부분을 최적화 하게 되면 최적화는 $(u_i - \tilde{u}_i)$ 부분을 zero 로 만드는 최적화를 수행하게 될 것이고 그 결과 초기평형상태는 기하학적인 제한 조건 식을 이용한 초기평형상태 해석과 목표형상이 정확히 일치하게 되는 결과가 나오게 된다.

목적함수의 오른쪽 부분에 있는 변수는 다음과 같다. M_{self}^e 는 자중에 의해 부재에 걸리는 모멘트, T_j 는 j 번째 케이블의 장력, M_j^e 는 j 번째 단위하중에 의해 발생하는 부재의 모멘트이고 $nobl$ 은 케이블의 개수, $nelm$ 은 구조물의 엘리먼트의 개수이다.

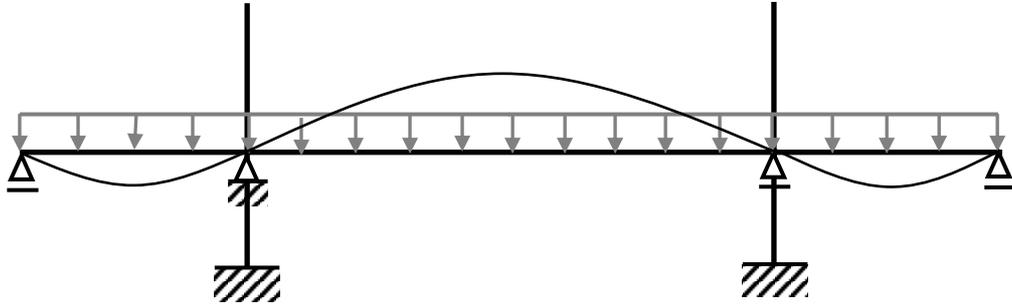


그림 2.3 자중에 의해 발생한 모멘트

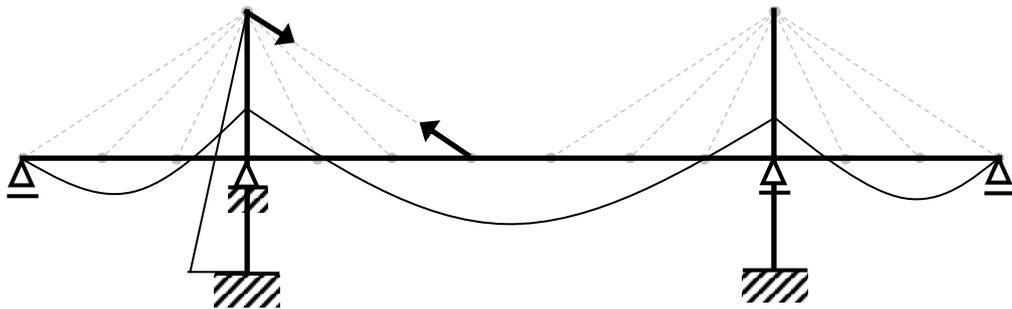


그림 2.4 단위하중에 의해 발생한 모멘트

그림 2.3 에서 보는 바와 같이 케이블로 이루어진 구조물에서 케이블을 모두 제거한 상태에서 사하중에 의해서만 발생하는 각 부재의 모멘트를 M_{self}^e 로 정의하였고, 그림 2.4 에서 보는 바와 같이 케이블을 모두 제거한 상태에서 j 번째 케이블의 정착위치에 단위하중을 가했을 때 발생하는 각 부재의 모멘트를

M_j^e 로 정의하였다.

위 식 (2.14)은 비선형 방정식이 되므로 이 식을 풀기 위하여 다음 식 (2.15)와 같은 Quadratic sub Problem 을 구성하였다 [7].

$$\begin{aligned} & \text{Min} \left[\frac{1}{2} \Delta L_0^T \mathbf{H}_i \Delta L_0 + \Delta L_0^T \mathbf{G}_i \right] \\ & \text{subject to } (L_l) \leq L_i + \Delta L \leq (L_u) \end{aligned} \quad (2.15)$$

위 식 (2.15)에서 \mathbf{G} 는 목적함수의 Gradient vector (식 (2.16))와 같이 표현되며 \mathbf{H} 는 목적함수의 Hessian matrix 로서 다음 식 (2.17)와 같이 된다.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L_k} = \sum_i^{ndof} (u_i - \tilde{u}_i) \frac{\partial u_i}{\partial L_k} + \frac{\alpha}{EI} \sum_e^{nelm} \left\{ (M_{self}^e + \sum_j^{ncbl} M_j^e T_j) \sum_m^{ncbl} M_m^e \frac{\partial T_m}{\partial L_k} \right\} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial L_k \partial L_l} \\ &= \sum_i^{ndof} \frac{\partial u_i}{\partial L_k} \frac{\partial u_i}{\partial L_l} + \sum_i^{ndof} (u_i - \tilde{u}_i) \frac{\partial^2 u_i}{\partial L_k \partial L_l} \\ &+ \frac{\alpha}{EI} \sum_e^{nelm} \left\{ \sum_j^{ncbl} M_j^e \frac{\partial T_j}{\partial L_k} \sum_m^{ncbl} M_m^e \frac{\partial T_m}{\partial L_l} + (M_{self}^e + \sum_j^{ncbl} M_j^e T_j) \sum_m^{ncbl} M_m^e \frac{\partial^2 T_m}{\partial L_k \partial L_l} \right\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

위 식에서 이차 민감도 항은 계산이 복잡하여 생략하였다. 위 식에서 민감도

행렬 $\frac{\partial u_i}{\partial L_k}$, $\frac{\partial T_m}{\partial L_k}$ 을 구하기 위하여 다음 식 (2.18)와 같이 정식화 하였다.

케이블 길이에 대한 변위의 민감도 행렬은 다음 식 (2.18a)를 이용하여 계

산할 수 있다.

$$\mathbf{K}_s \mathbf{u} + \mathbf{F}_c(L_0, \mathbf{u}(L_0)) = \mathbf{P} \quad (2.18a)$$

이 식에서 \mathbf{F}_c 는 케이블의 장력이고, \mathbf{P} 는 외력이다. 케이블의 장력은 식 (2.18a) 에서 보는 바와 같이 케이블 길이와 변위의 함수이다. 따라서 위 식 (2.18a)를 미분하게 되면 다음과 같은 식 (2.18b)를 얻을 수 있게 된다.

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial L_0} = \mathbf{K}_s \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial L_0} + \frac{\partial \mathbf{F}_c}{\partial L_0} + \frac{\partial \mathbf{F}_c}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial L_0} = 0 \quad (2.18b)$$

이 식에서 변위의 민감도 행렬을 구하기 위하여 변위의 민감도 행렬에 대해서 정리하여 식 (2.18c) 및 식 (2.18d)를 구성하였다.

$$\left(\mathbf{K}_s + \frac{\partial \mathbf{F}_c}{\partial \mathbf{u}}\right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial L_0} = -\frac{\partial \mathbf{F}_c}{\partial L_0} \quad (2.18c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial L_0} = -\left(\mathbf{K}_s + \frac{\partial \mathbf{F}_c}{\partial \mathbf{u}}\right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}_c}{\partial L_0} \quad (2.18d)$$

여기서 $\frac{\partial \mathbf{F}_c}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{K}_c$, $\frac{\partial \mathbf{F}_c}{\partial L_0} = \mathbf{K}_g$ 가 된다. 그 이유는 다음 식 (2.19)을 미분하게 되면 자명해 진다.

$$\Delta \mathbf{F}_c = \mathbf{K}_c \Delta \mathbf{x} + \mathbf{K}_g \Delta L_0 \quad (2.19)$$

위 식 (2.19)에서 $\Delta \mathbf{x}$ 및 ΔL 에 대하여 미분하게 되면 다음과 같이 식이 나오게 된다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_c}{\partial \Delta \mathbf{x}} &= \mathbf{K}_c \\ \frac{\partial \Delta \mathbf{F}_c}{\partial \Delta L} &= \mathbf{K}_g\end{aligned}\quad (2.20a)$$

또한, 케이블 길이에 대한 케이블 장력의 민감도 행렬은 다음 식 (2.21)와 같이 구할 수 있게 된다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_j}{\partial L_k} &= \frac{\partial T_j}{\partial F_1^j} \frac{DF_1^j}{DL_k} + \frac{\partial T_j}{\partial F_2^j} \frac{DF_2^j}{DL_k} + \frac{\partial T_j}{\partial F_3^j} \frac{DF_3^j}{DL_k} \\ &= \frac{F_1^j}{T_j} \frac{DF_1^j}{DL_k} + \frac{F_2^j}{T_j} \frac{DF_2^j}{DL_k} + \frac{F_3^j}{T_j} \frac{DF_3^j}{DL_k}\end{aligned}\quad (2.21)$$

여기서 T_j 는 케이블의 한 쪽 끝 단에서의 케이블 장력이며 식 (2.22)과 같이 표현 할 수 있다.

$$T_j = \sqrt{(F_j^1)^2 + (F_j^2)^2 + (F_j^3)^2}\quad (2.22)$$

또한 식(2.22)에서 표현 되어지는 케이블 길이에 대한 케이블 장력의 성분 민감도는 식 (2.18a)에 의하여 다음과 같이 정식화 된다.

$$\frac{DF_1^j}{DL_k} = \frac{\partial F_1^j}{\partial L_k} + \frac{\partial F_1^j}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial L_k} = K_{g^j} \frac{\partial L_j}{\partial L_k} + K_{cli}^j \frac{\partial u_i}{\partial L_k}\quad (2.23)$$

2.2.2 최적 초기 평형 상태 해석 예제 (Wang 등, 1993)

그림 2.5의 Fan Type 사장교는 전체 길이가 2000 ft 이고, 주탑이 200 ft 이다. 표 2.1 는 케이블과 주형의 물성치를 보여주는데 바깥쪽 케이블과 안쪽 케이블의 물성치가 다르다. 그림 2.6 과 같이 주탑을 강체로 가정하여 케이블과 주형만의 구조물로 모델링 하였다.

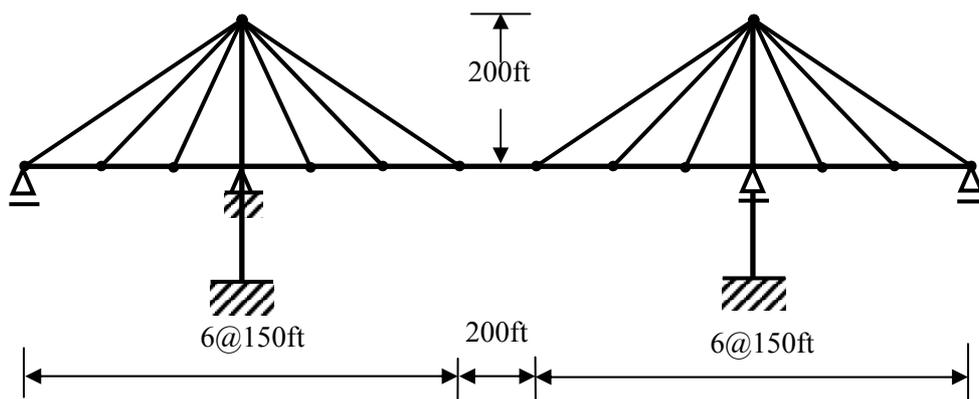


그림 2.5 Fan Type 사장교의 기하형상

표 2.1 Fan Type 사장교의 물성치

케 이 블		주 형
바 깥 쪽	안 쪽	
$E_c = 4.32 \times 10^6$ ksf	$E_c = 4.32 \times 10^6$ ksf	$E_g = 4.32 \times 10^6$ ksf
$A_c = 4.52 \times 10^{-1}$ ft ²	$A_c = 1.74 \times 10^{-1}$ ft ²	$A_g = 3.44$ ft ²
$w_c = 2.21 \times 10^{-1}$ kips/ft	$w_c = 8.5 \times 10^{-2}$ kips/ft	$I_z = 1.31 \times 10^2$ ft ⁴
		$w_g = 6.0$ kips/ft

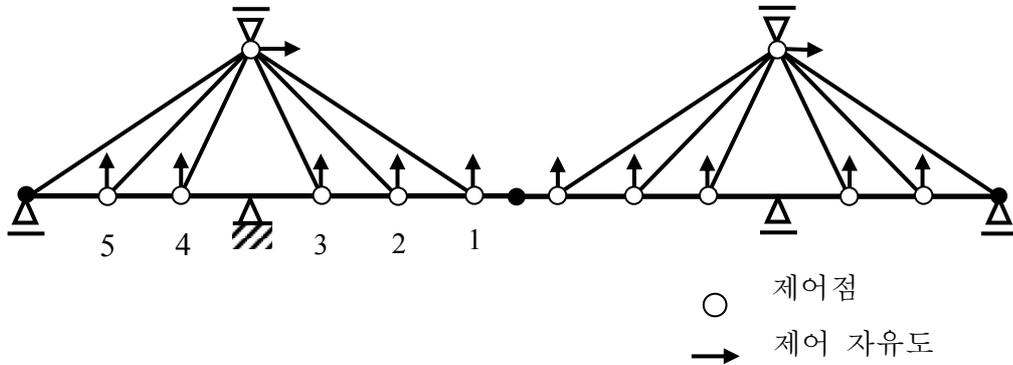


그림 2.6 Fan Type 사장교의 모델링

Wang(Wang 등, 1993)은 Ernst 의 등가 트러스 요소로 사장 케이블을 모델링하고 Successive Iteration 으로 사장교의 초기형상을 찾아가는 방법을 제안하였다. 평형방정식에서 구한 케이블의 장력으로 등가 탄성계수를 보정하여, 주형의 캠버를 만족시킬 때까지 반복하여 계산하였다. Wang 의 1996 년 연구는 바깥쪽 반복계산에서 축력을 받는 모든 부재의 부재력을 보정하여, 케이블 장력만을 보정한 1993 년의 연구보다 수렴이 빠르다. Wang 은 그림 2.6 의 중앙 경간의 제어점에서 경간 길이에 대한 캠버의 상대오차가 $\varepsilon_T = 10^{-4}$ 보다 작을 때까지 반복계산을 수행하였다. 실제로 이 예제에서는 TCUD 에 의한 초기평형상태 해석과 에너지를 최소화 하는 초기평형해석이 거의 같은 결과가 나오므로 TCUD 에 의한 목표형상이 다음과 같이 발생한다고 가정하여 해석을 수행하였다.

표 2.2 Fan Type 사장교의 제어변위

제어점 변위	1	2	3	4, 5
	50cm	30cm	10cm	-5cm

위와 같은 TCUD 해석 조건 하에서 최적화를 수행하였다. 즉, 식 (2.14)의 왼쪽 부분에 있는 계수를 1 로 고정하고 α 값을 0, 0.015, 0.03 으로 변화시키면서 최적화를 수행하였다.

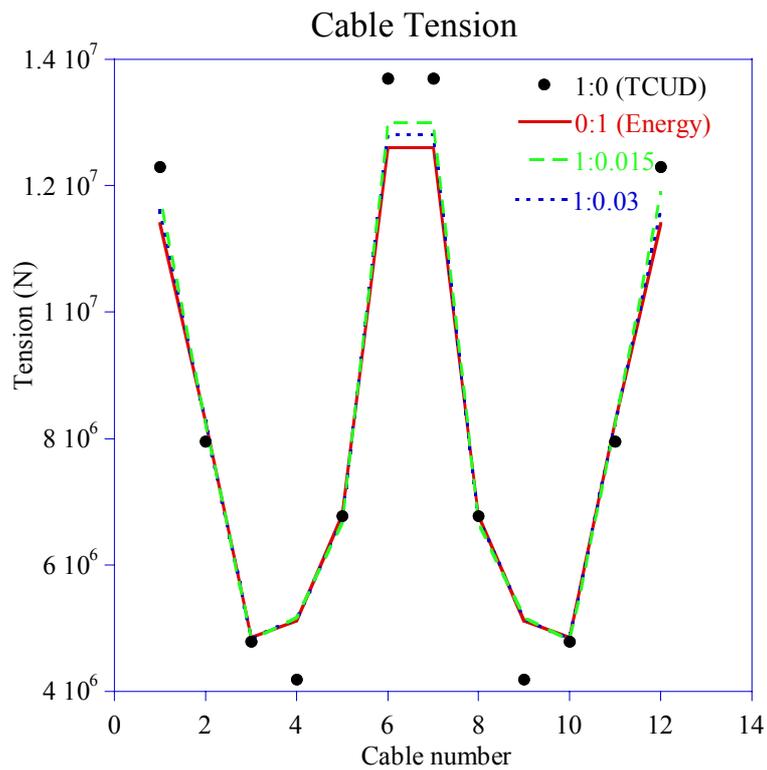


그림 2.7 Fan Type 사장교의 케이블장력

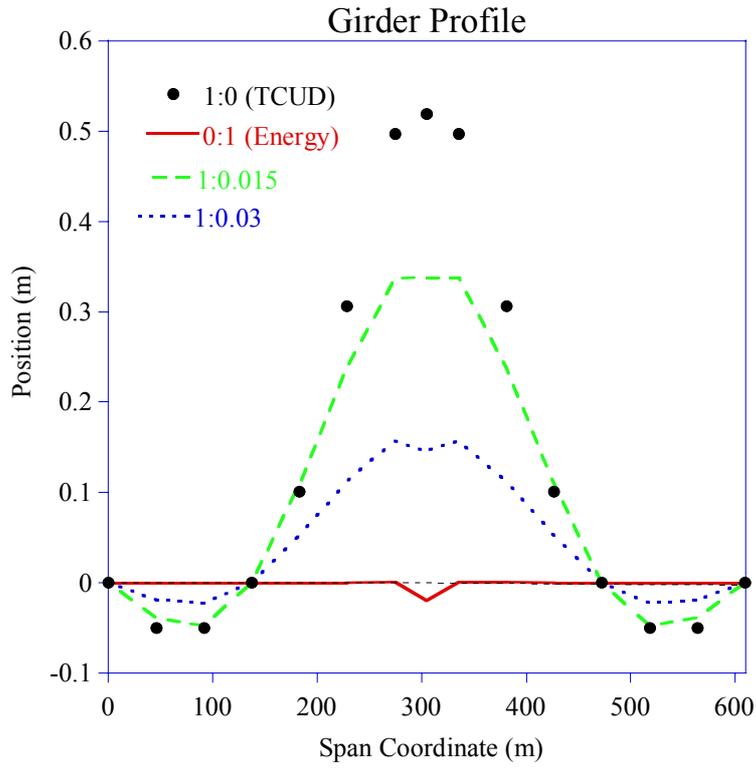


그림 2.8 Fan Type 사장교의 거더 형상

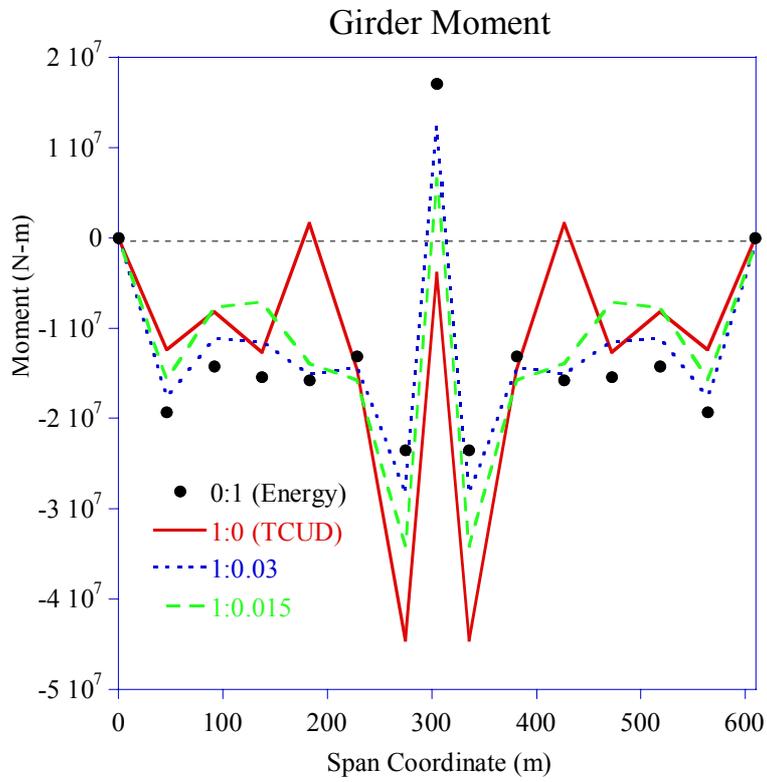


그림 2.9 Fan Type 사장교의 거더 모멘트

그림 2.7, 2.8, 2.9 를 보면 기하학적 제한 조건을 이용한 해석결과와 에너지 최소화를 이용한 초기평형상태 해석결과 사이에 최적화된 초기평형상태 결과가 그려지는 것을 볼 수 있다. 즉, α 값을 조금씩 증가 시킬수록 에너지를 최소화 하는 초기평형상태 해석 결과와 같아지는 것을 볼 수 있다.

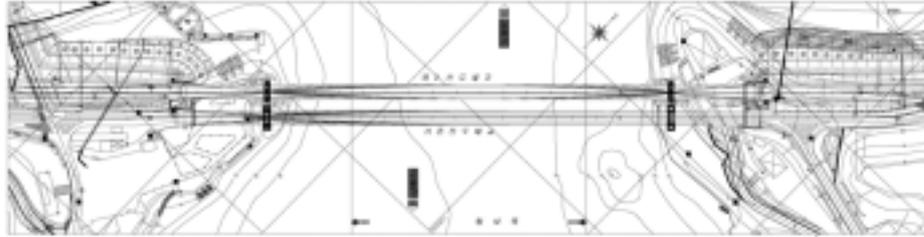
2.2.3 제 2 진도대교 예제

제 2 진도대교(그림 2.10)는 전라남도 진도군 울돌목을 가로질러 건설되는 연육교로서 그 개요를 간략히 정리하면 다음과 같다.

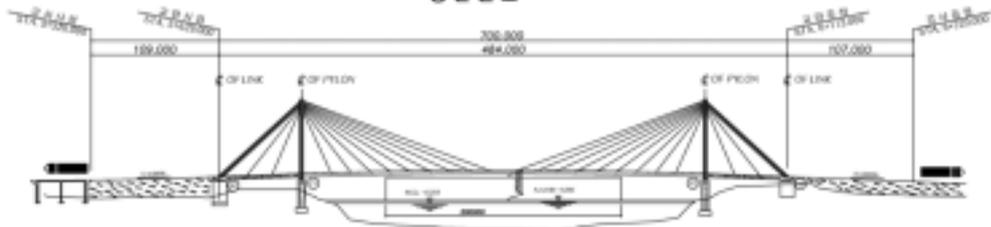
- 교량명 : 제 2 진도대교
- 위치 : 전남 진도군 군내면 ~ 해남군 문내면
- 규모 : $L = 484\text{m} (70+344+70)$, $B = 12.55\text{m}$, $H(\text{탑정높이}) = \text{EL.}+89.0\text{m}$
- 형식 : 3경간 연속 강사장교 (1등급교 DB-24, DL-24)

해석은 앞의 예제와 마찬가지로 식 (2.14)의 왼쪽 부분에 있는 계수를 1 로 고정하고 α 값을 0, 0.015, 0.03 으로 변화시키면서 최적화를 수행하였다.

평면도



종단면도



Cable Tension

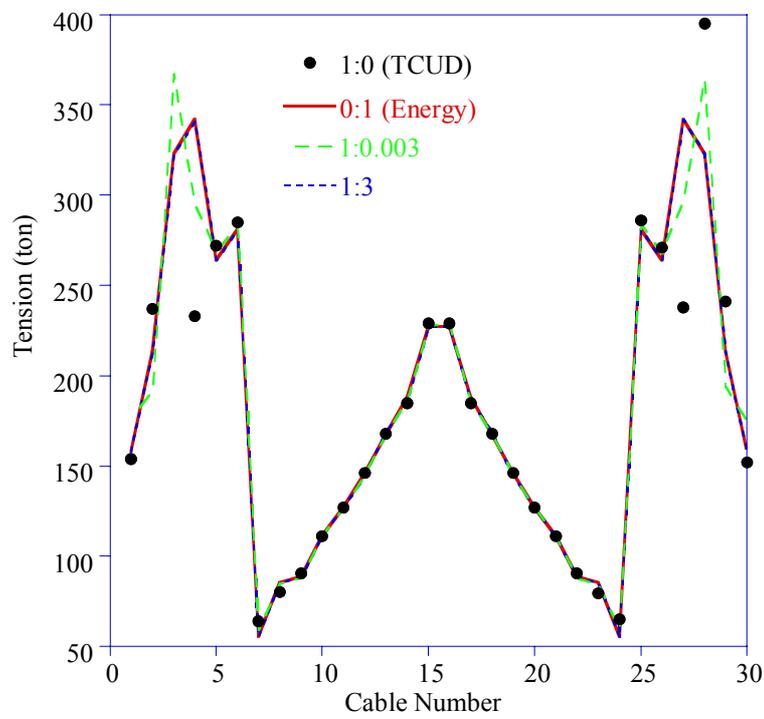


그림 2.10, 11 제 2 진도대교 및 케이블장력

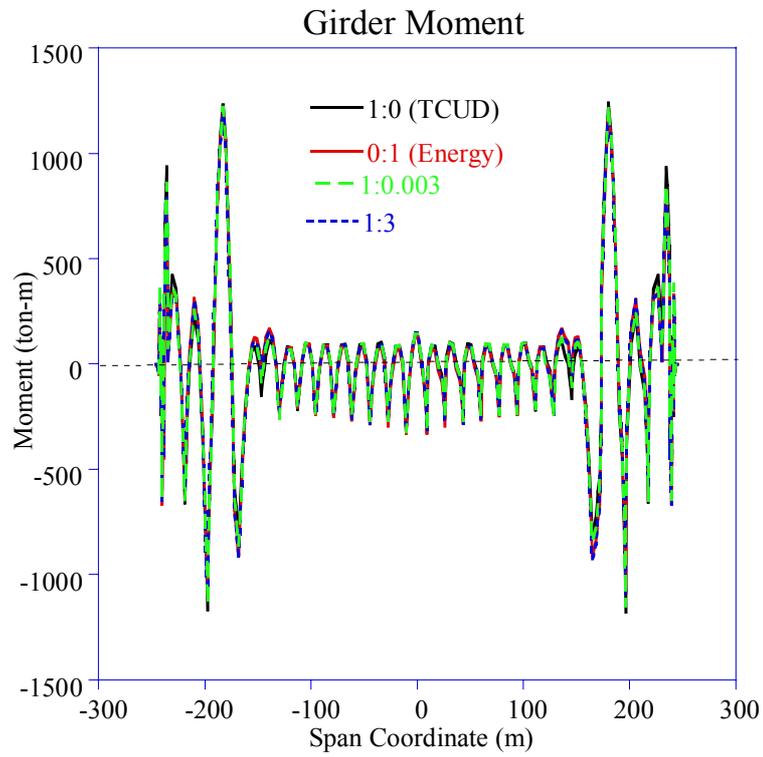


그림 2.12 제 2 진도대교의 거더 모멘트

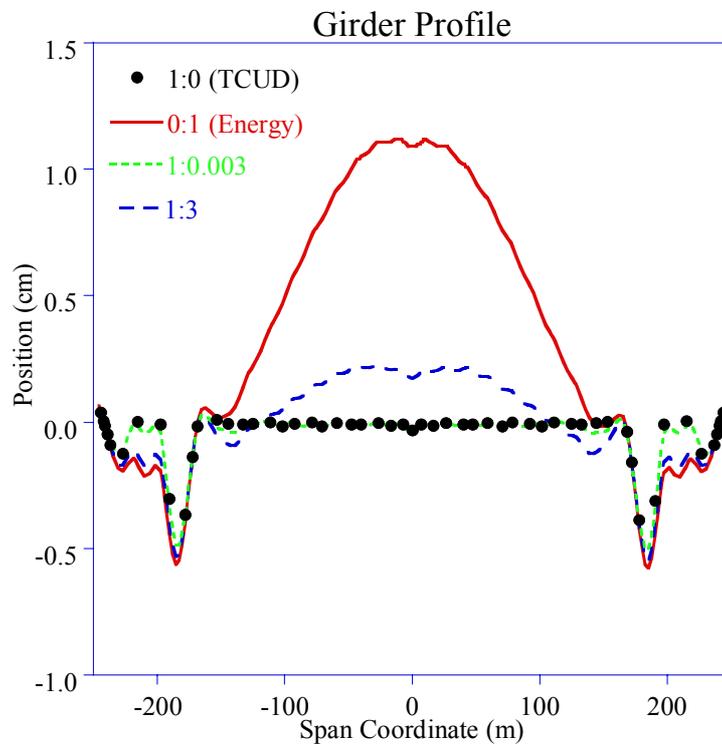


그림 2.13 제 2 진도대교의 거더 형상

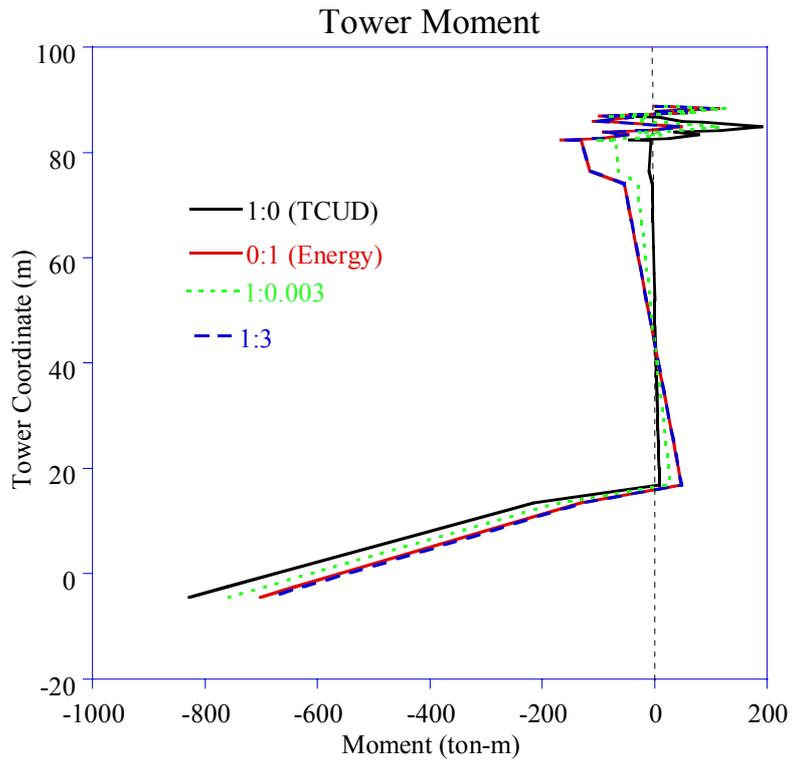


그림 2.14 제 2 진도대교의 주탑 모멘트

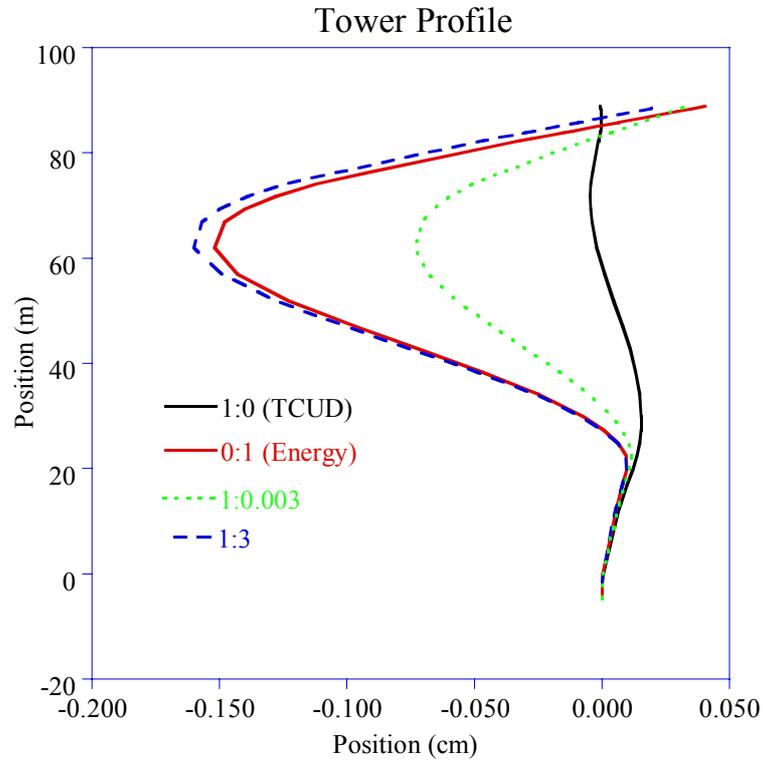


그림 2.15 제 2 진도대교의 주탑 형상

앞의 fan-type 사장교 예제와 마찬가지로 α 값을 증가시키면서 최적화를 수행한 결과 α 값이 커지면 에너지를 최소로 하는 초기평형상태의 결과와 근접해 지는 것을 볼 수 있었다. 즉, 그림 2.11 에서 α 값이 0.003 일 때는 TCUD 의 장력결과와는 상당한 차이가 있으나 그림 2.13 에서 보는 바와 같이 거더의 형상은 아직 목표형상에 잘 맞고 있음을 알 수 있다. 또, α 값이 3 일 때 장력은 거의 에너지를 최소화 하는 초기평형상태와 거의 일치하지만 그림 2.12 와 2.14 를 보면 모멘트는 TCUD 해석과 에너지 최소화를 이용한 초기평형상태 해석의 중앙 값 정도에서 결과가 나온 것을 볼 수 있다. 그러므로 설계자가 제시한 목표형상에서 오차를 어느 정도 인정하느냐에 따라서 α 값을 결정하여 최적의 초기평형상태 해석을 수행할 수 있게 된다.

2.3 에너지 최소화를 이용한 초기평형상태 해석법

이 방법은 다음 식과 같이 모멘트에 의해서 발생하는 탄성에너지[3]를 최소화 하는 초기평형상태를 제안하려고 한다. 모멘트는 거더와 주탑에서 발생하는 모멘트를 모두 고려하였다.

$$\begin{aligned} \text{Min}_{T_i} \Pi &= \frac{1}{2} \int_V \frac{1}{EI} (M_{self} + \sum_{i=1}^{ncl} T_i M_i^0)^2 dV \\ \text{subject to} \quad & (T_{min})_i < T_i < (T_{max})_i \end{aligned} \quad (2.24)$$

여기서 M_{self} 는 자중에 의해 걸리는 모멘트, T_i 는 i 번째 케이블의 장력, M_i^0 는 i 번째 단위하중에 의해 발생하는 모멘트이고 $ncbl$ 은 케이블의 개수이다.

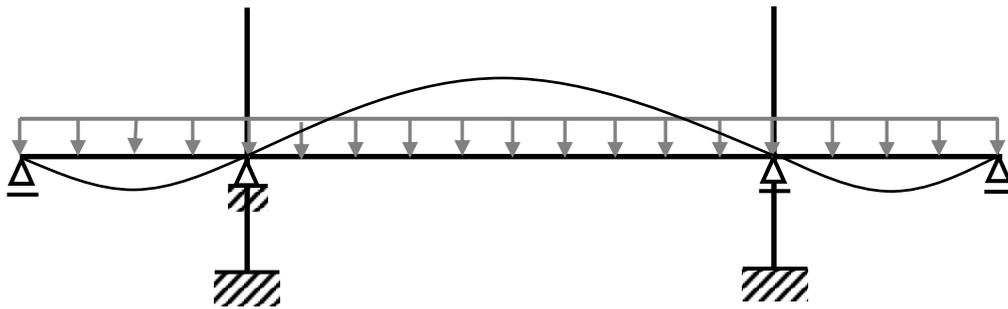


그림 2.16 자중에 의해 발생한 모멘트

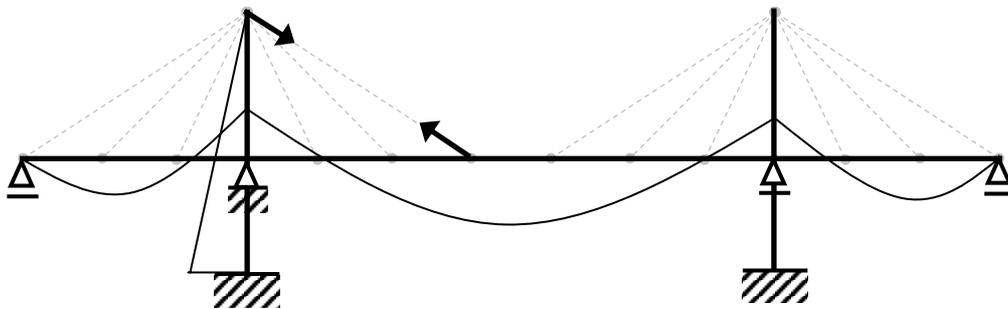


그림 2.17 단위하중에 의해 발생한 모멘트

그림 2.16 에서 보는 바와 같이 케이블로 이루어진 구조물에서 케이블을 모두 제거한 상태에서 사하중에 의해서만 발생하는 모멘트를 M_{self} 로 정의하였고, 그림 2.17 에서 보는 바와 같이 케이블을 모두 제거한 상태에서 i 번째 케이블의 정착위치에 단위하중을 가했을 때 발생하는 모멘트를 M_i^0 로 정의하였다. 여기서 각 케이블에 단위하중을 가한 후 선형적으로 모멘트를 중첩함으로써 각 케이블에 걸리는 장력을 구하고자 한다. 여기서 거더 및 주탑에 발생하는 축하중은 모멘트에 미치는 영향이 작으므로 무시하였다. 식 (2.24)를 최적화 하기 위하여 식 (2.24)를 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial T_k} \int_v \frac{1}{EI} (M_{self} + \sum_{i=1}^{ncbl} T_i M_i^0)^2 dv \\
&= \int_v \frac{1}{EI} (M_{self} + \sum_{i=1}^{ncbl} T_i M_i^0) M_k^0 dv \quad (2.25) \\
&= \int_v \frac{1}{EI} M_{self} M_k^0 dv + \sum_{i=1}^{ncbl} \int_v \frac{1}{EI} M_k^0 M_i^0 dv \times T_i = 0
\end{aligned}$$

케이블의 거동을 표시하기 위해서는 장력 혹은 무응력 상태의 케이블 길이가 주어져야 하지만 이러한 양을 해석 전에 알 수가 없으므로 전체 구조계의 평형방정식의 개수가 미수지수의 개수보다 작아지게 되어 초기 평형상태 해석을 위한 추가의 조건식이 필요하다. 이러한 추가의 조건으로 기하학적 구속조건 방법(Kim & Lee, 2001)[4]에서는 목표 형상을 사용하며, 이

방법에서는 구조물에 발생하는 모멘트를 최소화 하는 추가 조건을 사용한다. 해석 과정은 그림 2.13 에서 보는 바와 같이 일반적인 케이블 해석과 모멘트를 최소화하는 최적화 [5] 를 번갈아 가면서 수행하여, 평형방정식과 모멘트 최소화를 동시에 만족시킨다. 즉, 전 단계의 모멘트 최소화를 통해 구한 케이블 길이를 계속 갱신하면서 평형방정식을 만족시켜나가는 과정을 반복한다. 이 때, 케이블 길이의 변화율이 수렴조건 이내로 감소되면 해석을 종료한다.

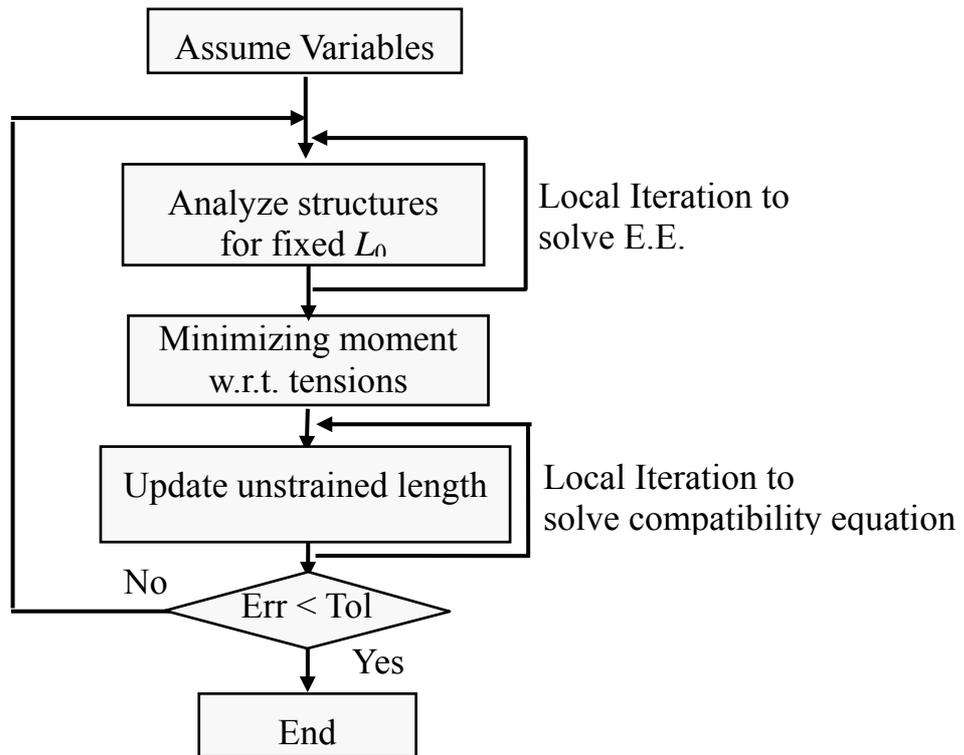


그림 2.18 에너지최소화 방법 순서도

모멘트를 최소화 하는 최적화 방법은 거더와 주탑에 발생하는 모멘트를 최소화 하는 해석 방법이였으나 케이블 장력이 과도하게 걸리는 단점이 있다. 따라서 케이블에 걸리는 장력을 허용 인장력 이하의 값으로 줄이기 위하여 모멘트를 최소화 하는 과정에서 다음과 같은 두 가지 경우의 제한조건을 도입하였다. 이러한 제한조건으로서 첫 번째, 모든 케이블에 $0 < T < 300(\text{ton})$ 의 제한조건을 가한 경우와 back-stayed 케이블에만 $0 < T < 260(\text{ton})$, 나머지 케이블에는 $0 < T < 300(\text{ton})$ 의 제한조건을 가한 경우의 두 가지 해석을 수행하였다.

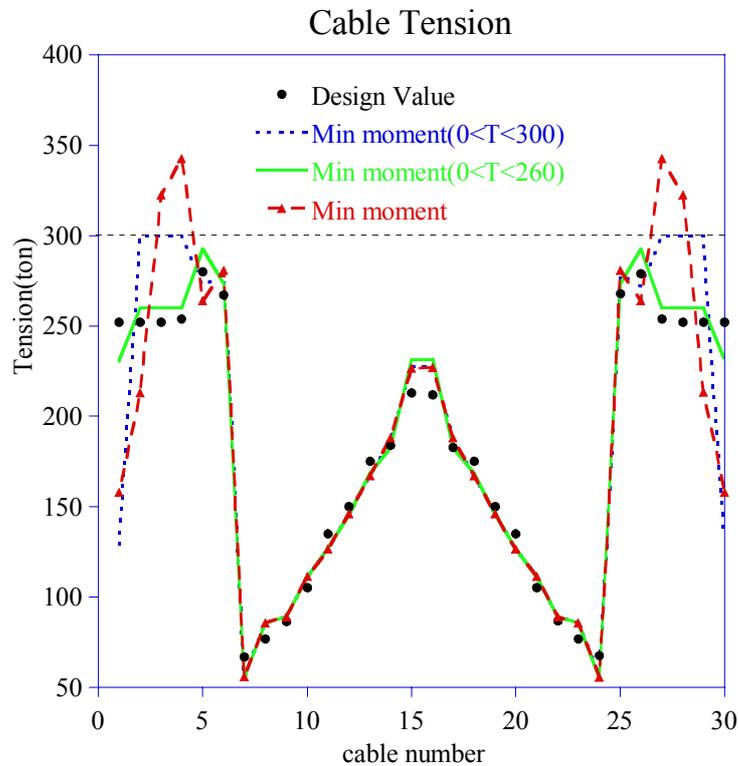


그림 2.19 에너지 최소화 방법 장력

Girder Profile

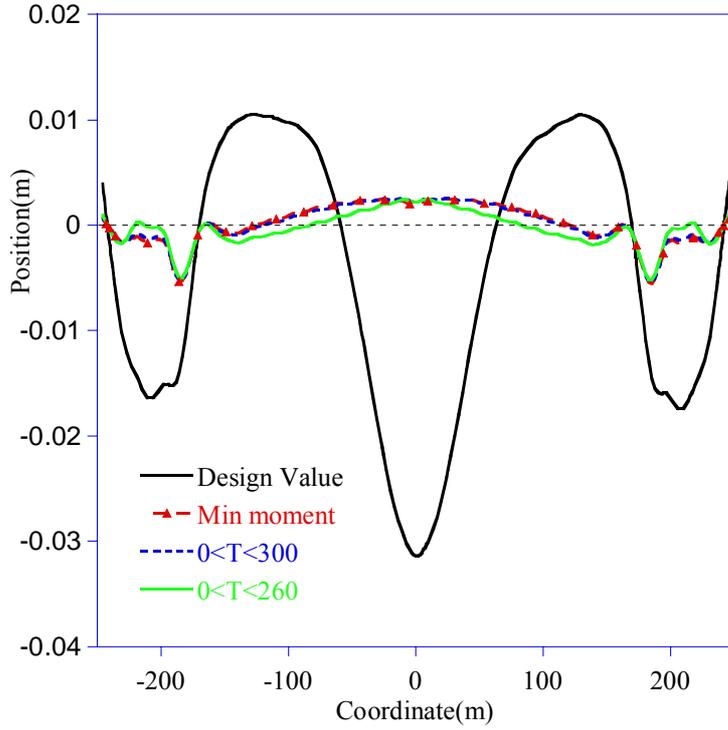


그림 2.20 에너지 최소화 방법 거더형상

Girder Moment

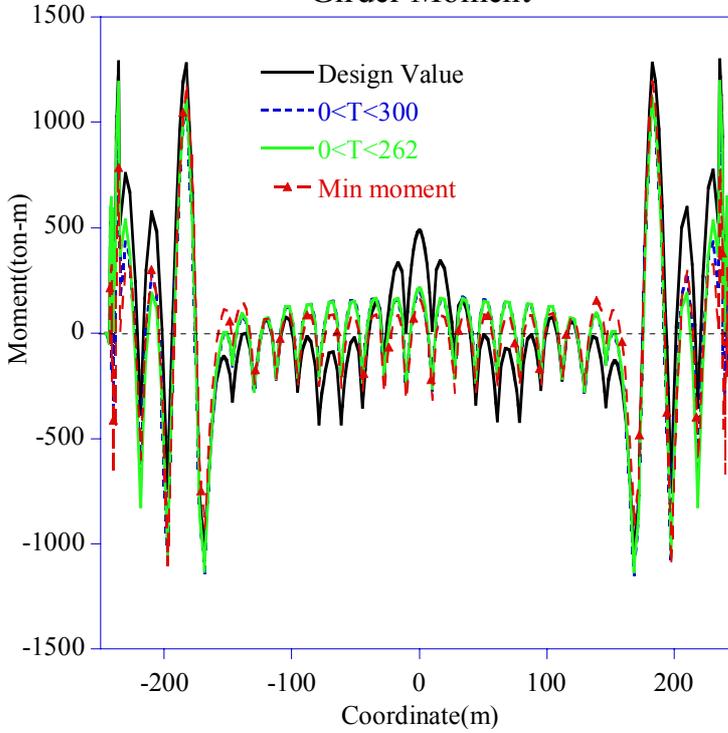


그림 2.21 에너지 최소화 방법 거더모멘트

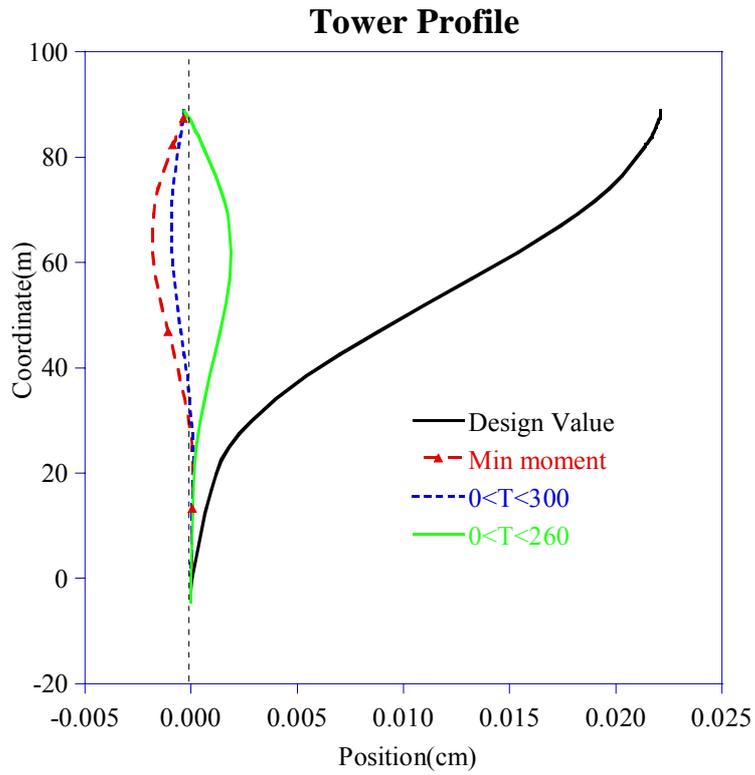


그림 2.22 에너지 최소화 방법 주탑형상

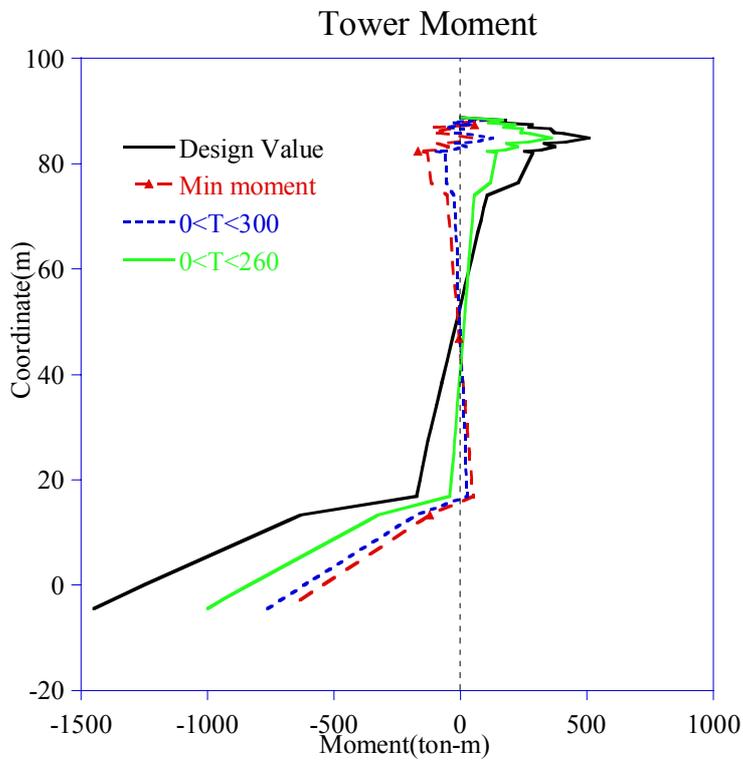


그림 2.23 에너지 최소화 방법 주탑모멘트

위의 해석에서 수렴조건을 다음 식 과 같이 하였을 때 4, 5 회의 반복계산결과 수렴하였다. 초기 무응력장 길이를 기하학적인 제한조건을 통한 초기평형상태 에서 구한 값으로 대입하였을 때 더 빨리 수렴하는 것을 알 수 있었다. 이는 기하학적인 제한조건을 통한 초기평형상태 해석이 이미 거더 및 주탑에 걸리는 모멘트를 상당히 감소시켰음을 의미한다.

$$\frac{\|\Delta L_i\|}{\|L_i\|} \leq 10^{-5} \quad (2.26)$$

그림 2.21 과 그림 2.23 에서 볼 수 있듯이 에너지 최소화를 이용한 초기평형상태 방법은 거더와 주탑에 상당한 모멘트의 감소가 일어났다. 특히 장력의 제한조건 없이 에너지 최소화를 하였을 때는 거의 모멘트의 50%까지 감소가 일어났다. 특히 취약 부분인 주탑의 케이블 정착부분 거더의 측경간 부분에서 모멘트의 감소가 일어났으므로 설계나 시공에 있어서 상당히 유리하다. 또한, 그림 2.20 와 그림 2.22 에서 볼 수 있듯이 거더와 주탑의 형상은 목표형상에서 거의 변하지 않음을 알 수 있다. 비록 기하학적인 제한조건을 이용한 초기평형상태 해석 방법 보다는 목표형상을 만족시키지는 못하지만, 거의 시공오차 범위 이내로 오차가 발생하였으므로 목표형상을 만족시켰다고 할 수 있다. 특히 기하학적인 제한조건을 이용한 초기평형상태 해석 방법의 문제점이었던 과도한 장력이 발생하는 문제를 장력에 제한 조건을 가함으로써 거의 Design Value 의 초기평형상태 해석결과와 같은 수준의 장력이 나올 수 있었다.

III. 시공 단계별 해석 기법

초기 평형 상태 해석을 통하여 사하중 하에서의 목표 형상을 구현할 수 있는 각 지지 케이블의 무응력 상태 길이와 초기 장력을 구할 수 있다. 초기 평형 상태 해석을 통하여 구한 각 케이블의 장력은 초기 평형 상태가 동시에 구성될 경우에 대한 장력이다. 그러나 실제 시공에서는 목표 형상을 동시에 구현할 수 없기 때문에 반드시 시공 단계를 고려하여 각 케이블 설치시 도입되는 장력을 계산하여야 한다. 즉, 어떤 시공 단계에서 케이블을 설치하여 장력을 도입하게 되면 새로 설치된 케이블의 장력에 의하여 구조물에 추가의 변위가 발생하게 되어 현 시공 단계 이전에 설치된 모든 케이블의 장력 값이 변하게 된다 [10]. 따라서 각 시공 단계에서 설치되는 케이블에 도입되는 장력은 초기 평형 상태 해석을 통하여 구한 케이블의 장력과는 달라야 한다. 즉 각 케이블 설치시 도입되는 장력은 최종 시공 단계를 완료한 후 초기 평형 상태 해석을 통하여 구한 장력을 각 케이블에 정확히 도입될 수 있는 장력을 산정하여야 한다. 케이블 설치시 도입되어야 하는 장력은 시공 단계를 고려한 역 방향 해석을 통하여 구할 수 있다. 역방향 해석에서는 초기 평형 상태에서 시작하여 각 시공 단계에서 구조계를 표시할 수 있도록 구조 부재를 순차적으로 제거하여 각 지지 케이블이 설치될 당시에 도입할 장력을 구할 수 있다.[9] 이러한 역방향 해석법은 이미 널리 사용되는 방법으로서

많은 시공 사례에서 그 타당이 검증된 바 있다. 또한 정방향 해석은 역방향 해석을 통하여 산정한 케이블 장력을 적용하여 시공단계와 같게 해석한 방법으로서 실제 구조물의 시공시 이용되는 해석방법이다. 정방향 해석과 역방향 해석은 구조물이 탄성체내에서 설계 및 시공되었다면 완전히 같은 해석결과가 나와야 한다.

3.1 완성계 해석

초기평형상태 해석을 통하여 구한 케이블의 무응력장 길이를 이용하여 완성계 해석을 수행하였다. 시공단계해석에 앞서 완성계 해석을 수행한 이유는 이 연구에서 개발한 프로그램의 정확성을 검증하는 한편, 에너지를 최소화하는 초기평형상태 해석법의 효용성을 검토해보는 데 있다. 실제로 제 2 진도대교에서는 이미 보강형의 각 세그먼트가 제작되어 있는 상태여서 다음 그림 3.1 에서 보는 바와 같은 제작캠버를 고려하였다. 제작 캠버는 중앙 경간에서 최대 약 7cm 정도가 발생한다. 그러므로 주어진 케이블 무응력장 길이를 해석하였을 때 중앙 경간에서 7cm 정도의 변위가 발생하면 정확히 목표형상을 맞춘다고 할 수 있다.

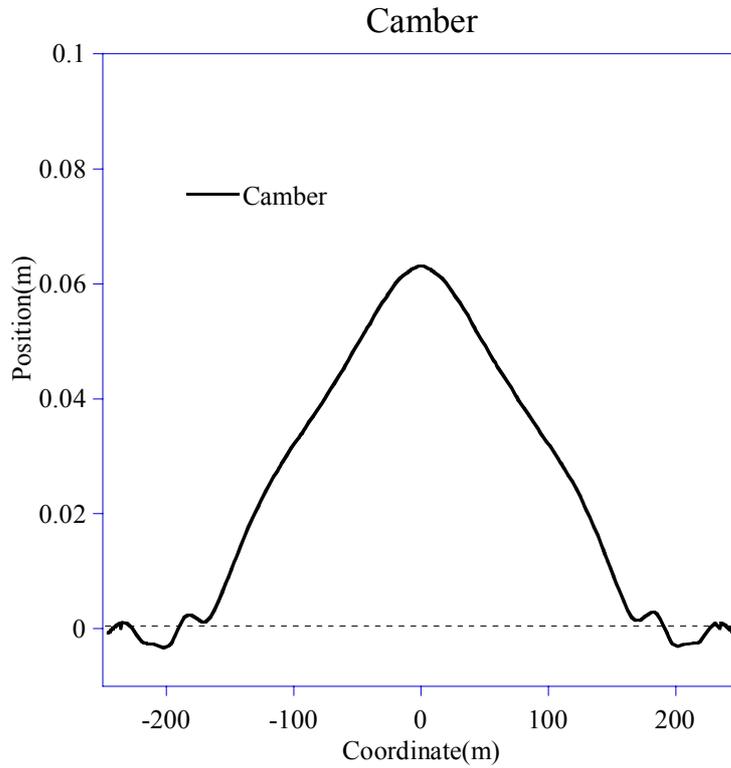


그림 3.1 제작캠버

각각의 초기평형상태 해석을 통하여 구한 무응력장 길이를 다음 표 3.1 에 정리하였다. 이 무응력장 길이를 통하여 완성계 해석을 수행하였다.

표 3.1 무응력장 길이

#cable	Design Value	Min moment	0<T<300	0<T<260	변위 제어
501	101.422	101.49206	101.51798	101.42727	101.5053
502	100.613	100.63244	100.55691	100.59181	100.5735
503	98.706	98.63094	98.65008	98.68454	98.6306
504	97.027	96.93715	96.97286	97.00692	96.9885
505	78.548	78.53686	78.53131	78.51708	78.5317
506	64.968	64.94054	64.94160	64.94445	64.9360
507	62.605	62.63530	62.63548	62.63596	62.6230

508	71.6	71.61039	71.61035	71.61027	71.6171
509	83.169	83.18833	83.18832	83.18827	83.1849
510	96.528	96.54364	96.54369	96.54386	96.5441
511	110.946	110.97918	110.97910	110.97883	110.9787
512	126.114	126.13985	126.14002	126.14058	126.1404
513	141.766	141.79535	141.79472	141.79249	141.7941
514	157.894	157.89850	157.90051	157.90717	157.9038
515	174.145	174.13115	174.12926	174.12322	174.1271
516	174.146	174.13107	174.12922	174.12315	174.1274
517	157.895	157.89860	157.90060	157.90727	157.9041
518	141.767	141.79531	141.79468	141.79245	141.7944
519	126.115	126.13980	126.13996	126.14052	126.1407
520	110.947	110.97917	110.97908	110.97882	110.9789
521	96.529	96.54357	96.54361	96.54378	96.5444
522	83.169	83.18835	83.18833	83.18829	83.1847
523	71.6	71.61039	71.61035	71.61027	71.6183
524	62.575	62.60689	62.60707	62.60756	62.5929
525	64.941	64.91292	64.91399	64.91684	64.9075
526	78.526	78.51297	78.50740	78.49317	78.5083
527	97.027	96.93671	96.97260	97.00666	96.9789
528	98.706	98.63079	98.64981	98.68428	98.6415
529	100.613	100.63205	100.55663	100.59154	100.5696
530	101.422	101.49180	101.51757	101.42686	101.5054

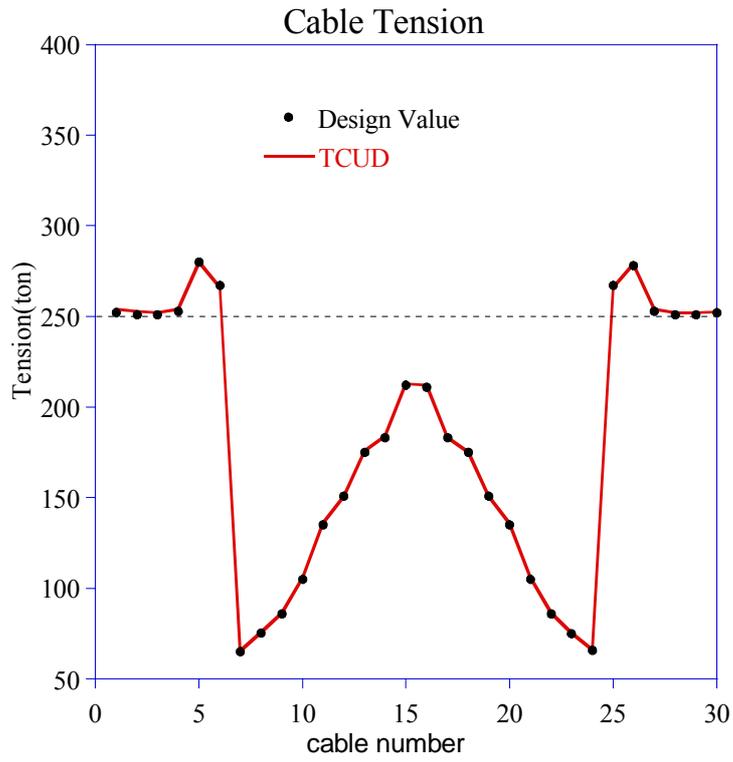


그림 3.2 완성계해석검증 장력

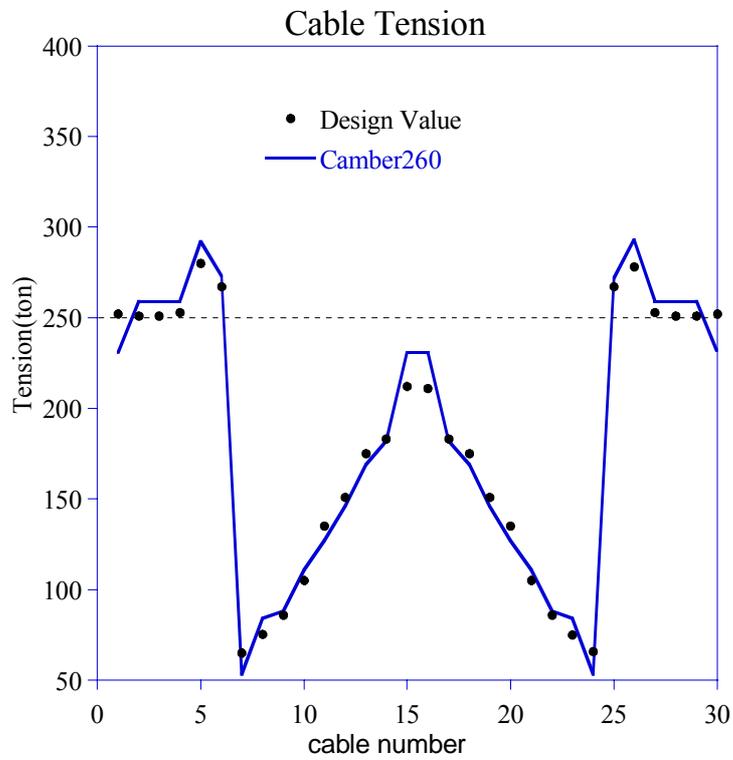


그림 3.3 완성계해석 에너지최소화 장력

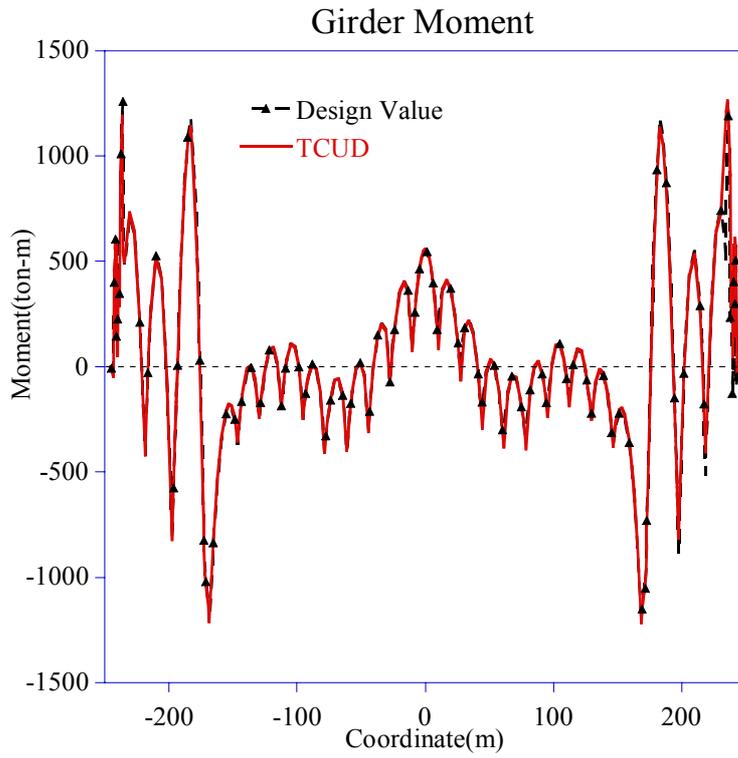


그림 3.4 완성계해석검증 거더모멘트

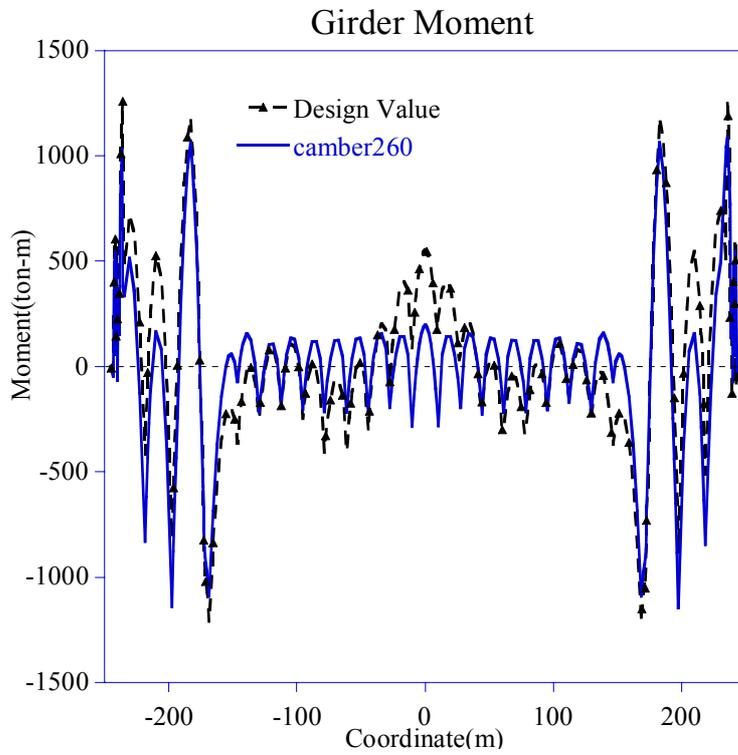


그림 3.5 완성계해석 에너지최소화 거더모멘트

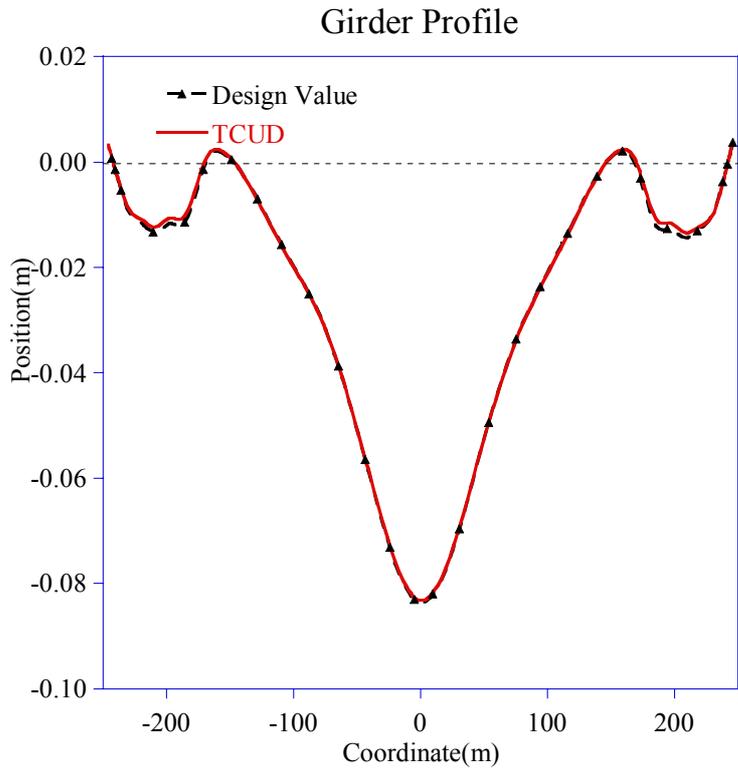


그림 3.6 완성계해석검증 거더형상

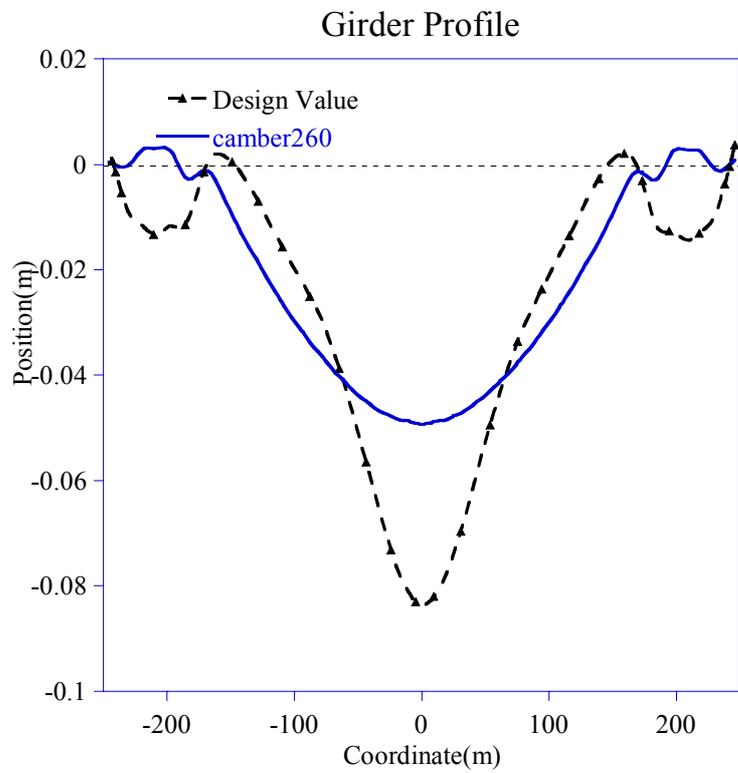


그림 3.7 완성계해석 에너지최소화 거더형상

그림 3.2, 그림 3.4, 그리고 그림 3.6 에서 볼 수 있듯이 Design Value 를 이용한 해석과 이 연구의 해석 결과가 같은 케이블 무응력장 길이를 이용하였을 때 완전히 일치하였다. 또한 이미 제작캠버가 고려된 상황에서 에너지 최소화를 이용한 초기평형상태 해석방법이 어느 정도 모멘트를 최소화하는 효과가 있는지를 결과를 통하여 알 수 있었다. 그래프에서 camber260 으로 표현된 결과는 에너지최소화 방법 중 장력에 제한조건을 260ton 이하로 가한 결과로서 장력으로 보면 거의 Design Value 의 결과와 일치한다. 하지만 모멘트의 감소량이나 목표형상을 맞추는 정도는 더 뛰어남을 알 수 있다. 앞서 말한 바와 같이 거더에는 제작캠버가 포함되어 있으므로 다음 그림 3.8 에서 보는 바와 같이 최종적인 거더형상은 제작캠버에서 변위형상을 차감하여 도시하였다.

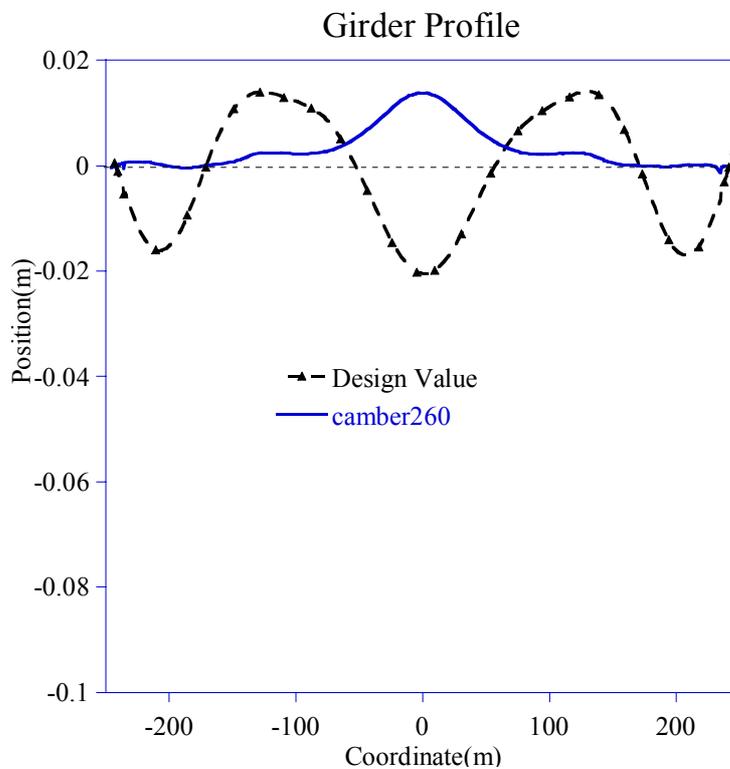


그림 3.8 완성계해석 최종거더형상

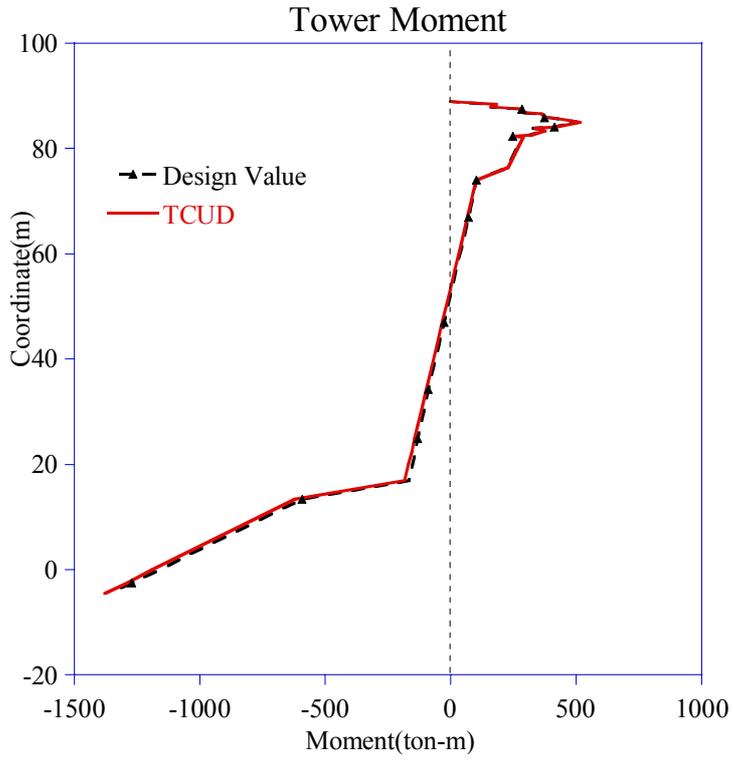


그림 3.9 완성계해석검증 주탑모멘트

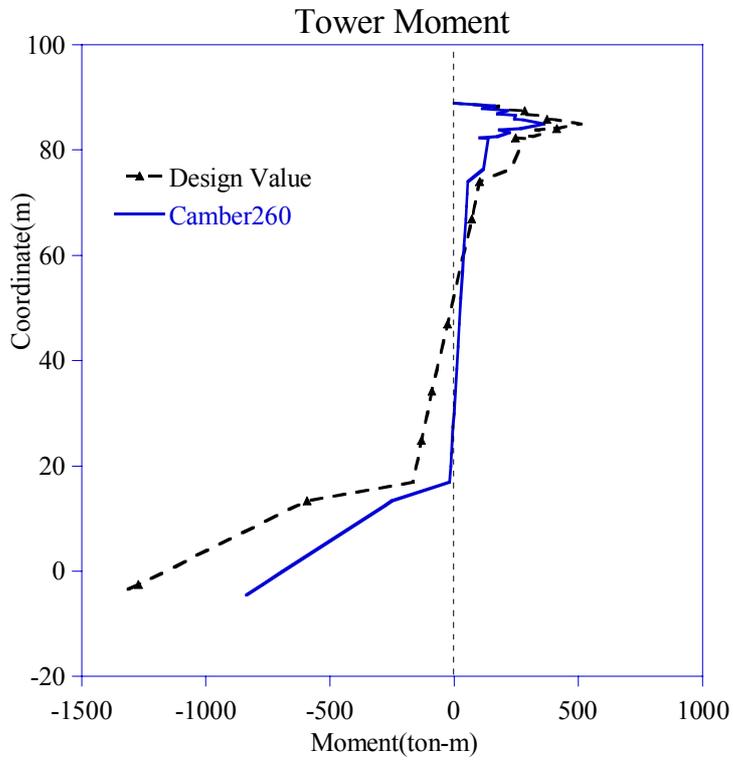


그림 3.10 완성계해석 에너지최소화 주탑모멘트

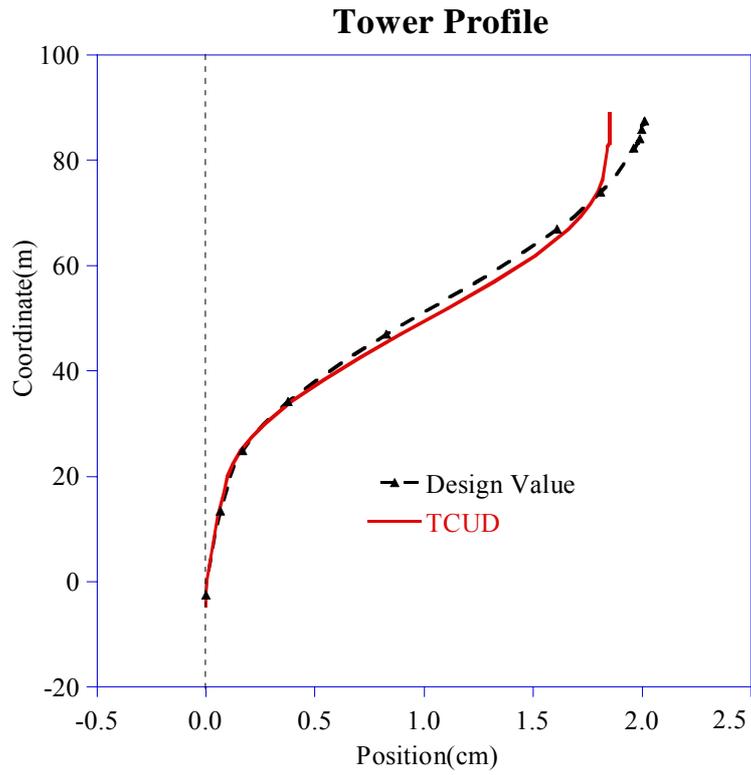


그림 3.11 완성계해석검증 주탑형상

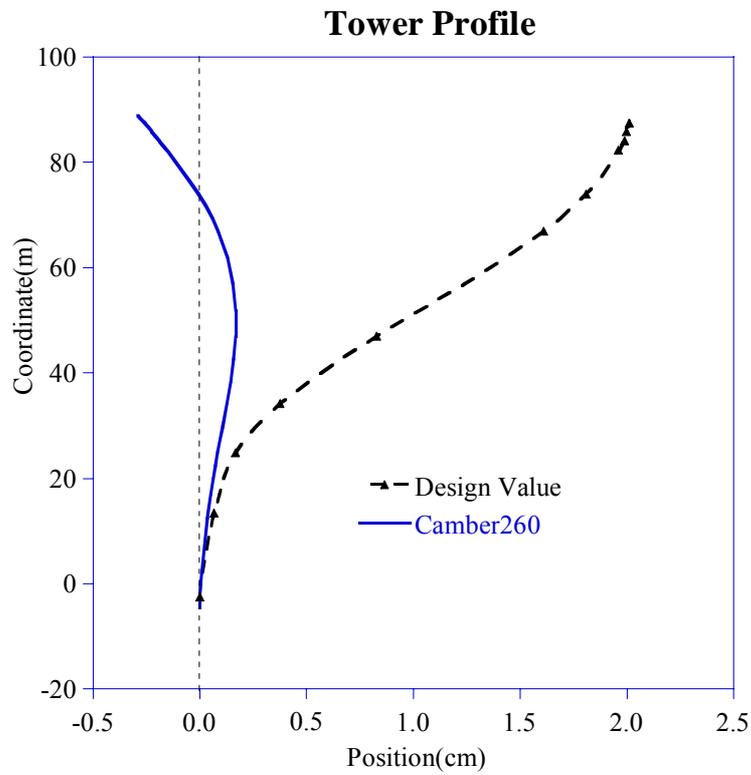


그림 3.12 완성계해석 에너지최소화 주탑형상

주탑에는 제작캠버가 포함되어 있지 않다. 따라서 주탑형상이 그대로 최종적인 형상이 된다. 우선 Design Value 의 결과와 이 연구의 해석결과가 그림 3.11 에서 보는 바와 같이 거의 일치한다. 하지만, 케이블 정착구에서의 오차는 앞으로 좀더 검토해 보아야 할 문제이다. 실제로 Design Value 을 이용한 완성계해석 결과에서도 주탑 케이블 정착구 부분에서의 변위가 약 2cm 정도이므로 목표형상과 거의 일치하지만 에너지 최소화 방법에 의한 케이블 무응력장 길이를 이용하였을 때 더 잘 목표형상에 맞는다는 것을 알 수 있다. 또한 주탑 기저부에서도 모멘트를 상당히 감소 시킬 수 있었다. 최종적으로 완성계 해석에서 Design Value 과 이 연구에서의 해석결과가 잘 일치하였고, 에너지 최소화 방법중에서는 장력에 260ton 의 제한조건을 가하였을 때, 형상이나 모멘트, 장력면에서 가장 적절한 결과가 나왔다.

3.2 정방향 및 역방향 해석

앞에서 말한 바와 같이 정방향 해석은 시공 단계 순서대로 이루어지는 해석이고, 역방향 해석은 완성계에서 부재를 하나씩 해체해 나가며 해석하는 방법이다. 지금까지의 해석은 완성계 해석을 수행한 후 역방향 해석을 통하여 초기 케이블 설치시 장력값을 산정하고 이를 토대로 정확한 정방향 해석을 수행하였다. 그러나 실제로 설계 및 시공에서 구조물이 탄성한계를 벗어나지 않는다면 정방향 해석과 역방향 해석은 Path Independent 성질에 의하여 정확히 같

은 결과를 도출해야 한다. 이 연구에서는 이의 검증을 위하여 역방향 해석과 정방향 해석을 실시하였다.

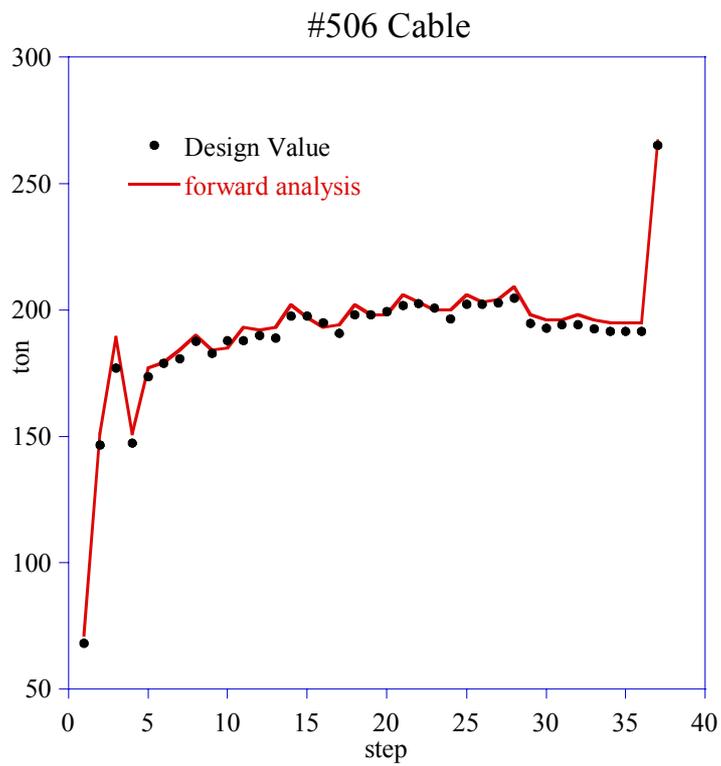


그림 3.13 정방향해석 #506

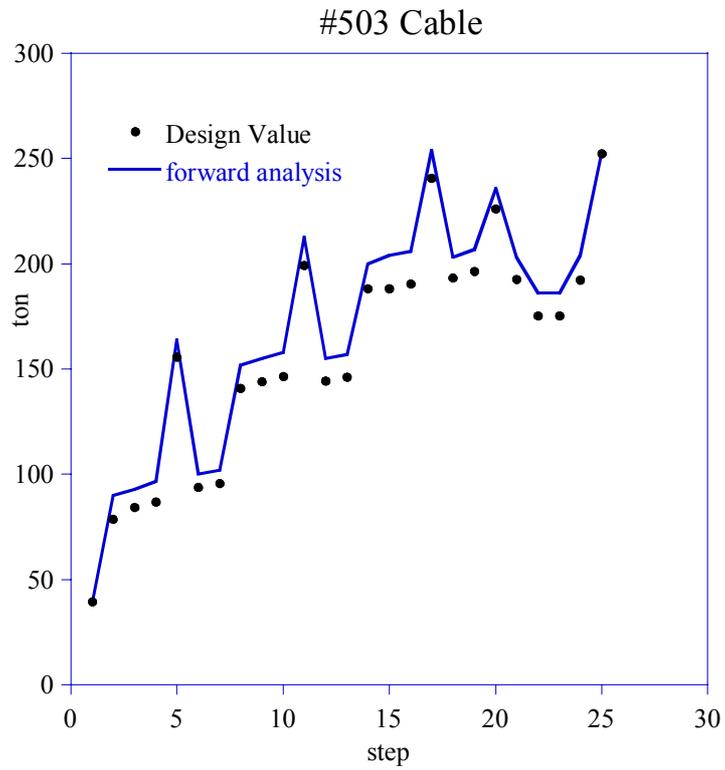


그림 3.14 정방향해석 #503 장력

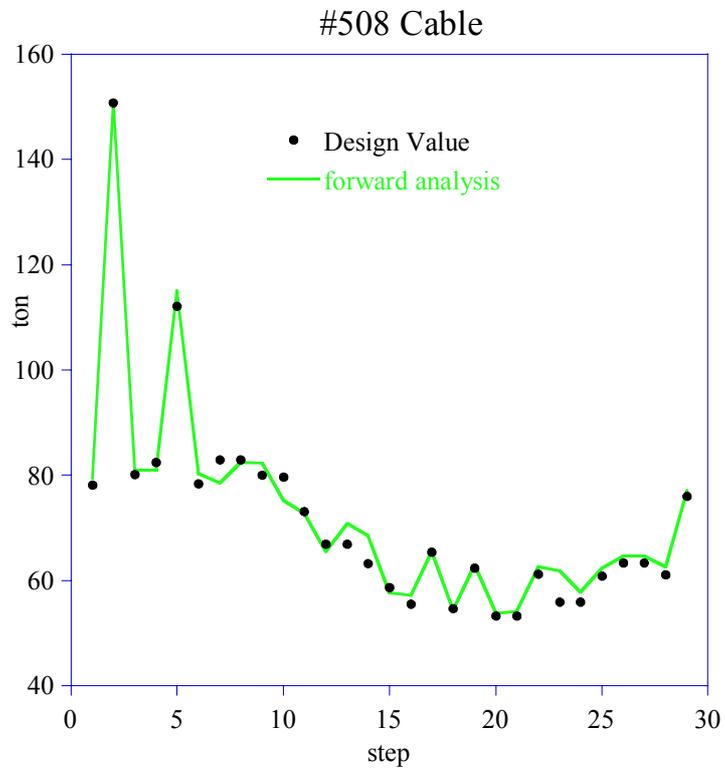


그림 3.15 정방향해석 #508 장력

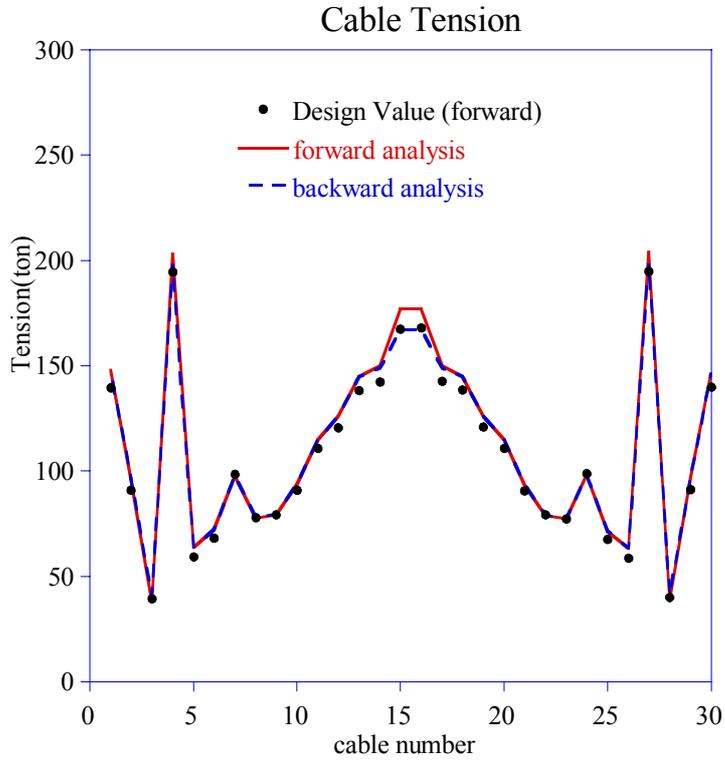


그림 3.16 초기긴장시 장력

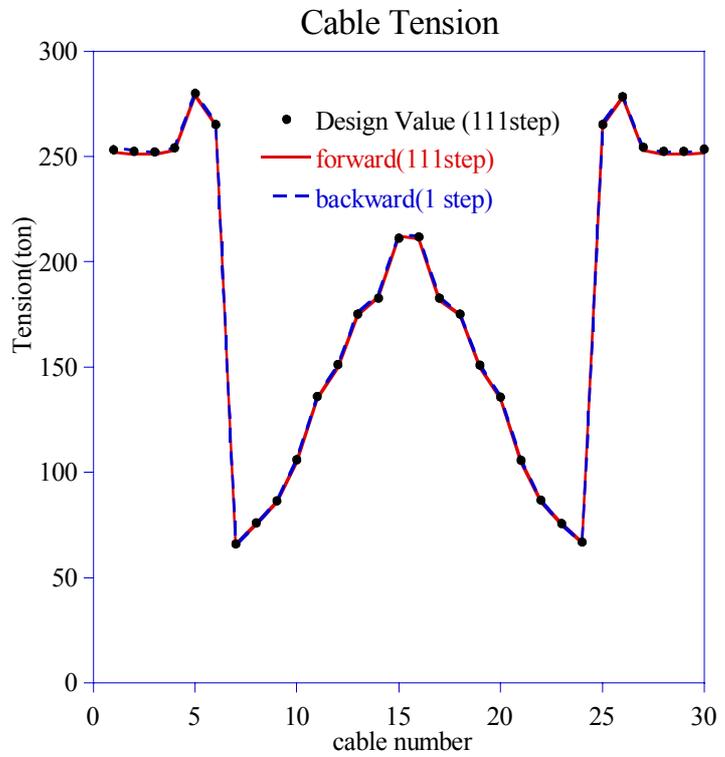


그림 3.17 최종 시공단계완료시 장력

우선 그림 3.13, 3.14 에서 볼 수 있듯이 Hyunstay Program 과 이 연구의 정방향 해석 결과가 잘 일치하였다. 또한 그림 3.16 과 그림 3.17 에서 볼 수 있듯이 정방향 해석과 역방향 해석이 거의 일치하는 것을 볼 수 있었다. 결과에서 보듯 측 경간에 있는 케이블은 세그먼트가 늘어나면서 점점 장력이 증가하는 경향을 보였고, 중앙 경간에 있는 케이블은 세그먼트가 늘면서 감소하는 경향을 보였다. 정방향 해석과 역방향 해석의 결과가 약간 차이가 나는 이유는 마지막 key segment 의 집합과정에서 처짐 각의 불연속이 일어났기 때문이다. 실제로 시공과정에 있어서도 처짐의 불연속은 하중을 통하여 극복할 수 있으나 처짐 각의 불연속은 시공오차로 인정하는 부분이므로 완성계 해석 보다는 정방향 해석의 최종결과가 더 실제 구조물의 결과와 일치한다고 할 수 있다.

IV. 결론

이 연구에서는 탄성현수선 요소를 사용하여 초기평형상태 해석을 수행하였으며, 기존의 방법과는 달리 거더와 주탑에 발생하는 모멘트를 최소화하고 있다. 기하학적인 제한조건을 이용한 초기평형상태해석 방법은 목표형상을 정확하게 맞추는 장점이 있었으나 케이블의 장력이 과도하게 작용하는 단점이 발견되었다. 또한 에너지를 최소화 하는 방법은 주탑 및 거더에 걸리는 모멘트를 최소화 할 수 있었으나 목표형상을 정확히 맞출 수는 없었다. 따라서 기하학적인 제한 조건을 이용한 초기평형상태 해석 방법과 에너지를 최소화 하는 초기평형상태 해석방법을 동시에 만족시키는 최적화 기법이 바람직한 초기평형상태 해석기법이었으며 최적화 정도는 설계자 및 시공자의 요구에 맞추어 조정이 가능하다.

또한 위에서 제시한 초기평형상태를 이용하여 시공단계 해석을 수행하였다. 기존의 시공단계 해석에서는 역방향 해석을 통하여 케이블의 설치시 장력을 구하고 이를 이용하여 정방향 해석을 다시 수행하는 방법을 택하였으나 구조물이 대변형이 일어나지 않고, 탄성한계 내에서 시공해 나간다면 정방향 해석 및 역방향 해석은 완전히 일치하는 해석결과였다. 즉, 케이블의 무응력장 길이를 초기평형상태 해석을 통하여 구하고 이를 이용하여 실제 시공단계에 맞추어서 해석을 수행하면 정방향 해석만으로 초기 설치시

케이블 장력을 구할 수 있었으며 마지막 해석이 끝나고 나면 정확히 초기평형상태와 일치하는 결과를 얻을 수 있었다.

참고문헌

- [1] 김윤섭, 역방향 해석을 이용한 강사장교 초기 긴장력 결정에 관한 연구, 공학석사학위논문, 서울대학교, 1998
- [2] 김호경, 시공상태를 고려한 현수교의 3 차원 해석, 공학박사학위논문, 서울대학교, 1993
- [3] 안상섭, 탄성현수선 케이블요소를 이용한 3 차원 케이블망의 정적 및 동적 비선형 해석, 공학석사학위논문, 서울대학교, 1991
- [4] Kim, K.S and Lee, H.S., Analysis of target configurations under dead loads for cable-supported bridges, *Journal of Computers and Structures*, Vol. 79, Issue 29-30, pp. 2681-2692, 2001
- [5] 박현우, Regularization Techniques in System Identification for Damage Assessment of Structures, 공학박사학위논문, 서울대학교, 2002
- [6] H. Max Irvine, Cable Structures, MIT Press., 1981
- [7] Hyun Woo Park, Soobong Shin, Hae Sung Lee, "Determination of an optimal regularization factor in system identification with Tikhonov regularization for linear elastic continua." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 51, No.10, pp.1211-1230, 2001.8
- [8] 김제춘, 사장교의 초기평형상태 및 시공형상 결정, 공학박사학위논문, 서울대학교, 1999
- [9] 김윤섭, 역방향 해석을 이용한 강사장교 초기긴장력 결정에 관한 연구, 서울대학교, 1998
- [10] 이명재, 초기평형상태를 이용한 현수교의 시공단계 해석 및 시공오차 관리, 서울대학교, 1998
- [11] P. H. Wang, T. C. Tseng, and C. G Yang, "Initial Shape of Cable-Stayed Bridges", *Computers & Structures*, Vol. 46. No. 6. Pp. 1095-1106, 1993

- [12] Niels J. Gimsing, Cable Supported Bridges, Concept and Design, 2nd ed., John Wiley, Chichester, 1983
- [13] Bang M. S., Suspension Bridges in Today, Construction Press (Translated in Korea) , 1993

ABSTRACT

The undeformed geometry of cable cannot be defined because the lateral stiffness of a cable is developed from applied tensions. So either the unstrained length or the tension of cable must be calculated from the deformed geometry. Determining either unstrained length or tension which satisfies the given geometry in equilibrium is defined as initial equilibrium state analysis.

The initial member force method and geometric constraint method have been utilized for the TCUD analysis, but the initial member force is sensitive of initial tension values and geometric constraint method developed excessive cable tensions. So this paper presents a new TCUD analysis, the optimal TCUD analysis, which is based on both the geometric constraint method and the minimizing energy method. The proposed method can overcome the aforementioned drawbacks of the initial member force method and geometric constraint method. So the proposed method reproduces the target profile of the deck and pylon which is made by designer, and minimizes moments in deck and pylon. Also, we can find optimal profile of the structure by adjusting optimal factor.

There are forward analysis and backward analysis in construction stage analysis. Forward analysis is performed by actual sequences of construction and backward analysis is performed by backward step construction using results of the TUCD analysis and we used to perform the backward analysis to find initial tensions. But if structures undergo no large deflection and plastic deform, both forward analysis and backward analysis

reproduce same results.

Two numerical examples are performed to demonstrate the validity and the effectiveness of the proposed method compared with previous studies.

Key Word

Optimal TCUD analysis, TCUD, Initial Equilibrium analysis, Elastic catenary cable, Construction stage analysis, Cable stayed bridge

Student Number : 2002-21277