

공학석사 학위논문

공기역학적 감쇠에 의한
케이블 진동모드 간의
상호작용 효과의 분석

**Analysis of Interaction between Vibration Modes
of Single Cable Due to Aerodynamic Damping**

2012 년 8 월

서울대학교 대학원

건설환경공학부

고 희 동

초 록

케이블교량의 장건간화에 따라 케이블의 공기역학적 감쇠의 중요성이 강조되고 있다. 이에 비하여 현 설계기준(케이블강교량설계지침)의 공기역학적 감쇠비 제안식은 단자유도 시스템에 근거하여 비교적 간략하게 산정되어 있다. 공기역학적 감쇠비는 바람의 속도와 케이블의 속도가 이루는 상대속도에 좌우되기 때문에 본 연구에서는 케이블의 2차원 거동에 따른 상대속도 변화를 고려하고 또한 임계레이놀즈 영역에서 발생하는 급격한 항력계수 감소율을 고려하여 감쇠비를 추정하고 이때 발생하는 진동모드간의 상호작용에 대하여 다루고 있다.

케이블이 어느 정도 팽팽해지면, 진동모드간의 상호작용에 의하여 바람의 방향에 따라 진동모드가 회전하게 된다. 이 경우 바람의 각도에 따라 설계식과는 최대 약 45퍼센트의 차이를 보이게 된다. 또한 임계 레이놀즈 영역에서는 음의 감쇠비가 나타나기도 함을 보였다. 이런 설계식과의 차이가 일어 날 수 있는 케이블의 기하학적, 재료적 조건과 바람의 크기 및 방향 조건에 대해서 Irvine Parameter를 항력에 대한 항으로 정규화 하여 제시하였다.

주요어 : 케이블, 공기역학적 감쇠, 항력계수, 진동모드, 준정상상태 이론

학 번 : 2010-23302

목 차

1. 서론	1
1.1 연구의 배경.....	1
1.2 연구의 내용.....	2
2. 현 설계기준의 공기역학적 감쇠비 산정식의 한계점	3
2.1 준정상상태 이론에 의한 공기력 평가.....	3
2.2 항력의 선형화와 공기역학적 감쇠.....	5
3. 공기역학적 감쇠를 포함한 케이블의 운동 방정식	8
3.1 케이블의 지배방정식과 좌표계	8
3.2 가상일의 원리와 Rayleigh Ritz 이산화.....	11
3.3 케이블 운동방정식의 선형화	14
3.4 공기력의 선형화와 공기역학적 감쇠 행렬	15
4. 해석 예제	19
4.1 주파수 영역 해석 결과	20
4.2 바람의 각도와 진동모드의 회전.....	24
4.3 진동모드 회전에 대한 파라미터 산정	25
4.4 시간영역 해석과 ERA를 통한 감쇠의 추정	28

4.5 임계레이놀즈 영역에서의 주파수 영역 해석.....	33
5. 결론.....	36
참고문헌.....	38
Abstract.....	40

표 목차

표 4.1 케이블 자원	20
--------------------	----

그림 목차

그림 2.1 바람과 항력	3
그림 2.2 레이놀즈 수와 항력계수	4
그림 2.3 케이블의 운동과 바람에 따른 항력	5
그림 3.1 케이블 동해석을 위한 좌표계	9
그림 4.1 인천대교의 해석 대상 케이블	19
그림 4.2 케이블 1의 고유진동수와 감쇠비	22
그림 4.3 케이블 2의 고유진동수와 감쇠비	23
그림 4.4 바람의 각도와 진동모드의 회전	24
그림 4.5 설계식과 고유치해석을 통한 고유진동수와 감쇠비의 차이	26
그림 4.6 여러가지 조건에서의 설계식과 고유치해석을 통한 고 유진동수와 감쇠비의 차이	28

그림 4.7 y축 방향으로 충격하중을 주었을 때의 시간이력 해석.	29
그림 4.8 In-plane 변위에 대한 DFT와 ERA 결과	30
그림 4.9 z축 방향으로 충격하중을 주었을 때의 시간이력 해석.	32
그림 4.10 Out-of-plane 변위에 대한 DFT와 ERA결과.....	32
그림 4.11 임계레이놀즈 영역에서의 케이블 1의 주파수 영역 해석	34
그림 4.12 임계레이놀즈 영역에서의 케이블 2의 주파수 영역 해석	35

1. 서론

1.1 연구의 배경

케이블교량의 장경간화에 따라 케이블의 공기역학적 감쇠의 중요성이 부각되고 있다. 이는 동적 거동 시 나타나는 장력의 크기는 초기 장력의 크기보다 작기 때문에 보통의 케이블의 구조감쇠는 매우 작은 반면, 바람에 의한 항력으로부터 발생하는 공기역학적 감쇠는 풍속에 따라 크게 나타나기 때문이다[1].

케이블의 공기역학적 감쇠나 동적 특성에 대한 연구는 실험적 또는 이론적으로 많은 연구가 진행 되어 왔다. Macdonald는 케이블의 공기역학적 감쇠를 준정상상태 이론 하의 원형 실린더가 받는 항력을 이용하여 단자유도 문제에서 점성감쇠로 표현하였고[2], 이후 3차원 효과를 고려하여 동일한 방법으로 공기역학적 감쇠를 유도하여 공기력을 받는 케이블이 가질 수 있는 감쇠나 깎로핑 현상과 같은 불안정성에 대해서 연구하였다[3]. Irvine은 포물선 형상을 가정하여 케이블의 정적 동적 특성에 대해서 연구하였다[4]. 정길제 등은 케이블 동해석을 수치적으로 해석하기 위한 가상일 원리를 정식화 하였다[5].

케이블의 거동과 바람에 의한 공기역학적 감쇠는 3차원 공간에서 각 자유도간 상호작용이 존재한다. 케이블강교량 설계지침에서 제안하고 있는 공기역학적 감쇠비 산정식은 단자유도

시스템에 근거를 두고 있어 자유도 간의 상호작용 효과가 무시되고 있어 실제 케이블의 거동을 제대로 모사하고 감쇠비를 정확히 추정하고 있는지에 대한 검토가 필요하다.

1.2 연구의 내용

본 연구에서는 진동모드 간의 상호작용의 영향과 항력계수 변화율을 고려하여 보다 정밀하게 공기역학적 감쇠비를 산정 하고 현 설계기준과 비교하였다. 공기역학적 감쇠 행렬의 비대각 요소가 케이블 거동과 감쇠비에 어떠한 변화를 주는지와 그 원인에 대해 연구하였다.

Irvine Parameter와 공기력을 이용하여 공기역학적 감쇠 행렬의 비대각 요소의 영향이 크게 나타나는 경우에 대해서 기준선을 제시하였다.

2. 현 설계기준의 공기역학적 감쇠비 산정식의 한계점

이 장에서는 준정상상태 이론에 따른 항력을 토대로 공기역학적 감쇠를 유도하고 현 설계기준에서 제안된 식이 포함하고 있는 가정과 그에 따른 한계에 대해서 설명한다. 이때 공기력의 선형화 과정은 Macdonald의 “Two-degree-of-freedom inclined cable galloping—Part 1: General formulation and solution for perfectly tuned system.”에서 보인 방법을 기본으로 하였다[3].

2.1 준정상상태 이론에 의한 공기력 평가

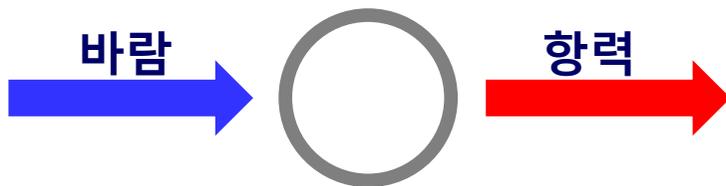


그림 2.1 바람과 항력

그림 2.1과 같이 원형 구조물에 바람이 불면 바람이 부는 방향으로 항력이 생긴다. 이 때 항력은 공기에 의한 동압력에 면적과 항력계수를 곱한 꼴로 표현 된다.

$$F_D = \frac{1}{2} \rho_a D C_D V^2 \quad (2.1)$$

여기서 ρ_a 는 공기의 밀도, D 는 케이블의 직경, C_D 는 항력계수, V 는 바람의 속도 이다. 원형단면의 경우 항력계수는 그림 2.2 에서 나타나듯이 바람의 각도에는 무관하고 레이놀즈 수에 따른 함수이며 보통의 경우 1.2 정도의 일정한 값을 가진다.

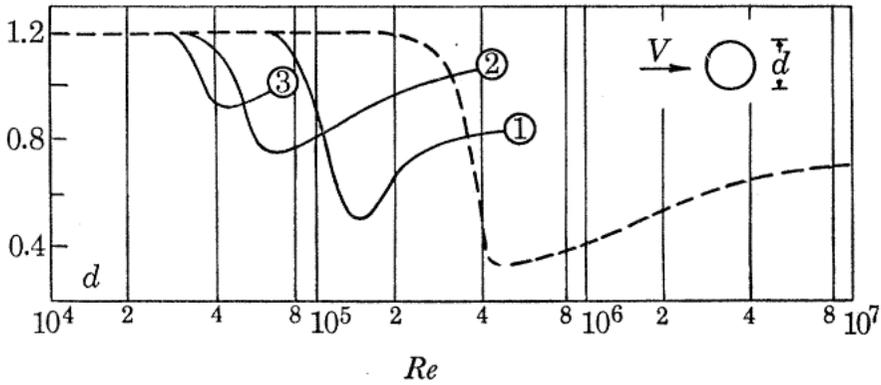
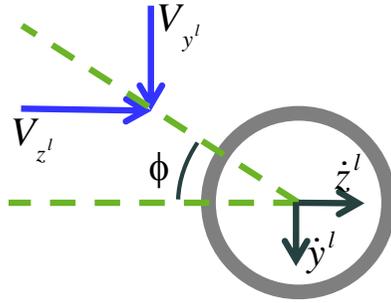


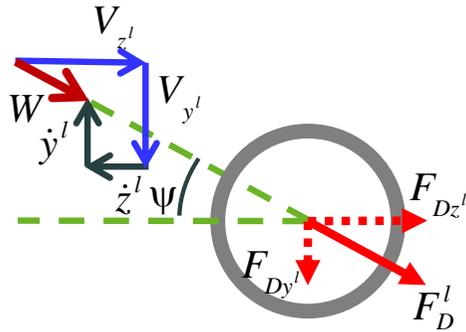
그림 2.2 레이놀즈 수와 항력계수[6]

이러한 항력을 실제 케이블에 대하여 적용하고자 할 때는 케이블의 움직임도 고려하여야 한다. 그림 2.3 에서 볼 수 있듯이 케이블의 움직임에 따라 바람의 상대속도가 달라지게 된다. 따라서 상대속도에 따른 항력은 다음과 같이 유도 될 수 있다.

$$F_D' = \frac{1}{2} \rho_a D C_D W^2 \quad (2.2)$$



(a) 케이블의 운동과 바람



(b) 상대속도와 항력

그림 2.3 케이블의 운동과 바람에 따른 항력

2.2 항력의 선형화와 공기역학적 감쇠

상대속도 W 와 z' 축과의 각도를 ψ 라고 할 때, 항력성분은 다음과 같이 유도 된다.

$$\mathbf{F}_D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \rho_a D C_D W^2 \sin \psi \\ \frac{1}{2} \rho_a D C_D W^2 \cos \psi \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

바람의 속도가 케이블의 속도보다 매우 클 경우, 케이블 속도가 0일 때를 기준으로 테일러 전개를 할 수 있다. 1차 항까지 전개하면 항력의 정적 효과와, 케이블 속도에 비례한 효과 2개로 나누어 볼 수 있다.

$$\mathbf{F}_D \approx \underbrace{\mathbf{F}_D|_{\dot{\mathbf{x}}=0}}_{\text{정적 풍하중}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{F}_D}{\partial \dot{\mathbf{x}}}}_{\text{공기역학적 감쇠}} \Big|_{\dot{\mathbf{x}}=0} \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (2.4)$$

식 2.4의 두 번째 항인 케이블 속도에 비례한 힘을 공기역학적 감쇠로 간주 할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{F}_D}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{\partial \mathbf{F}_D}{\partial \mathbf{W}} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} + \frac{\partial \mathbf{F}_D}{\partial C_D} \frac{\partial C_D}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \quad (2.5)$$

식 2.5에서 볼 수 있듯 항력의 케이블 속도에 대한 미분에는 상대속도에 대한 미분과 항력계수에 대한 미분으로 나뉘어져 있다. 케이블강교량설계지침에서 제안한 공기역학적 감쇠비는 다음과 같다[7].

$$\zeta_{ad} = \frac{1}{2m\omega_n} \cdot \frac{1}{2} \rho_a D C_D V_{eq} \quad (2.6)$$

여기서 m 은 케이블의 단위 길이당 질량이고, ω_n 은 케이블의 고유진동수이다. 케이블강교량설계지침에서 제시되어 있는 공기역학적

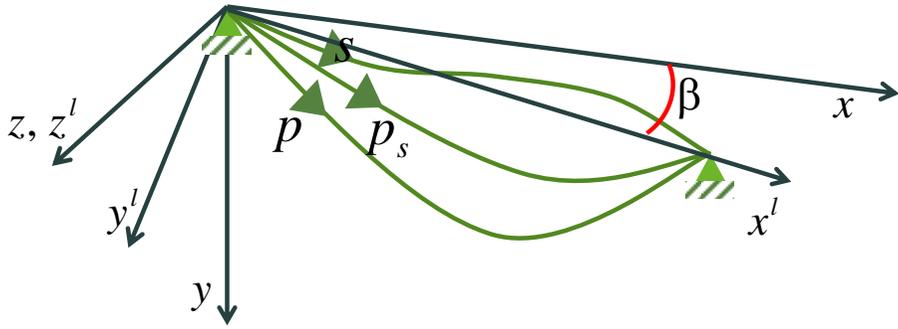
감쇠 마찬가지로 항력에 대하여 선형화하여 질량과 고유진동수에 대해 정규화 한 값을 이용하고 있다. 다만 식 2.5에서의 항력계수에 대한 미분항을 무시하고, 상대속도에 대한 미분을 할 때에도 진동모드간의 상호작용을 고려하지 않고 있다.

3. 공기역학적 감쇠를 포함한 케이블의 운동 방정식

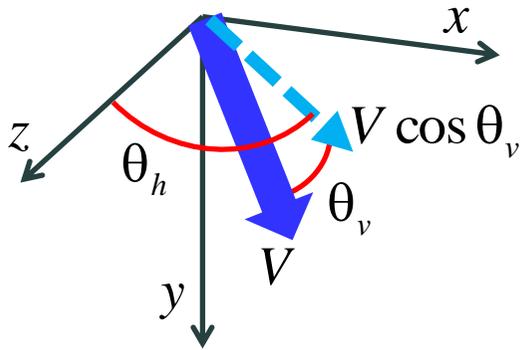
이 장에서는 공기역학적 감쇠를 포함한 케이블의 동해석을 위한 지배방정식과 가상일의 원리를 유도한다. 원형 단면에 대하여 정의된 공기력을 케이블에 적용하기 위하여 케이블 전체좌표계와 국부좌표계를 정의 한다. 케이블의 변위에 대한 저항력은 비선형으로 나타나기 때문에 이를 선형화 하여 증분식으로 유도한다. 본 연구에서 수행한 주파수영역 해석과 시간영역 해석은 케이블의 자중에 의한 정적평형상태를 기준으로 수행 하였다. 정적평형상태의 케이블을 포함하고 있는 평면에서 중력 방향으로 움직이는 변위를 **In-plane** 방으로 정의하고 이 평면에 수직인 방향을 **Out-of-plane**이라고 정의 하였다. 케이블에 작용하는 외력으로 표현된 공기력 또한 선형화 하였다. 이때 케이블의 속도에 비례한 항을 공기역학적 감쇠로 나타낸다.

3.1 케이블의 지배방정식과 좌표계

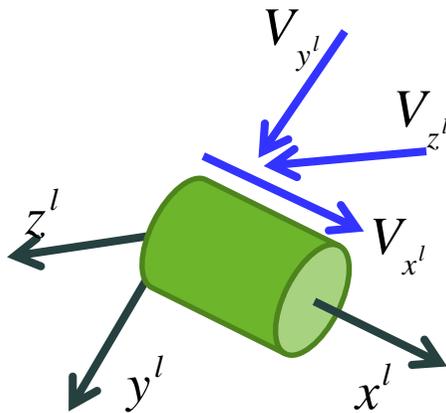
이 절에서 사용한 케이블 동해석의 지배방정식 및 가상일 원리 정식화는 정길제 등이 연구한 “케이블의 동적 해석을 위한 가상일 원리의 정식화에서 보인 정식화 방법”의 방법을 따른다[5]. 공기역학적 감쇠는 외력으로 정의하여 선형화 한 후 이항하는 방법으로 유도



(a) 케이블과 전체좌표계



(b) 바람과 전체좌표계



(c) 케이블의 국부좌표계

그림 3.1 케이블 동해석을 위한 좌표계

하였다. 먼저 케이블의 동해석을 위하여 전체 좌표계와 케이블 국부 좌표계를 정의 한다. 그림 3.1(a)의 β 는 전체좌표계에 대한 케이블 국부좌표계의 경사각이다. 그림 3.1(b)에서 나타나듯 전체 좌표계에서 구면좌표계로 정의된 바람 성분을 표시하면 다음과 같다.

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \cos \theta_v \sin \theta_h \\ V \sin \theta_v \\ V \cos \theta_v \cos \theta_h \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

전체좌표계에서 정의된 케이블의 지배 방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \left(T \frac{dx}{dp} \right) - \rho \ddot{x} &= 0 \\ \frac{d}{dp} \left(T \frac{dy}{dp} \right) + w - \rho \ddot{y} &= 0 \\ \frac{d}{dp} \left(T \frac{dz}{dp} \right) - \rho \ddot{z} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{0} \text{ at } s = 0 \text{ and } s = l_0 \text{ for } \forall t \\ \mathbf{x} &= \mathbf{0} \text{ when } t = 0 \end{aligned}$$

여기서 무응력 상태의 라그랑지 좌표를 s , 정적 평형상태의 질점을 p_s , 동적 평형상태의 질점을 p 로 정의 한다. T 와 ρ 는 각각 케이블의 장력과 단위길이당 질량이다. 원형 단면에 대하여 정의된 공기역학적 감쇠비를 전체좌표계에 대하여 정의된 케이블 동해석과 연

결하기 위해서는 그림 3.1(c)와 같이 바람의 분력을 국부좌표계에 대하여 변환을 해야하고 여기서 유도된 공기역학적 감쇠력을 다시 전체좌표계로 변환해 주어야 한다. 이 때 필요한 변환행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

3.2 가상일의 원리와 Rayleigh Ritz 이산화

각 지배 방정식에 가상의 동적 변위를 곱하여 가상일의 원리를 이용하면 다음과 같은 식이 유도된다.

$$\begin{aligned} & \int_l \delta x_d \left(\frac{d}{dp} \left(T \frac{dx}{dp} \right) - \rho \ddot{x} \right) dp \\ &= - \int_l \delta x_d \rho \ddot{x} dp - \int_l \frac{d\delta x_d}{dp} T \frac{dx}{dp} dp + \delta x_d T \frac{dx}{dp} \Big|_0^l = 0 \\ & \int_l \delta y_d \left(\frac{d}{dp} \left(T \frac{dy}{dp} \right) + w - \rho \ddot{y} \right) dp \\ &= - \int_l \delta y_d \rho \ddot{y} dp - \int_l \frac{d\delta y_d}{dp} T \frac{dy}{dp} dp + \int_l \delta y_d w dp + \delta y_d T \frac{dy}{dp} \Big|_0^l = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\int_l \delta z_d \left(\frac{d}{dp} \left(T \frac{dz}{dp} \right) - \rho \ddot{z} \right) dp$$

$$= - \int_l \delta z_d \rho \ddot{z} dp - \int_l \frac{d\delta z_d}{dp} T \frac{dz}{dp} dp + \delta z_d T \frac{dz}{dp} \Big|_0^l = 0$$

위 식을 하나로 합쳐 정리하면 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\int_{l_0} (\delta x_d \quad \delta y_d \quad \delta z_d) \rho_0 \begin{pmatrix} \ddot{x}_d \\ \ddot{y}_d \\ \ddot{z}_d \end{pmatrix} ds$$

$$+ \int_{l_0} (\delta x'_d \quad \delta y'_d \quad \delta z'_d) \begin{bmatrix} \tilde{T}_s x'_d + \tilde{T}_d x' \\ \tilde{T}_s y'_d + \tilde{T}_d y' \\ \tilde{T}_s z'_d + \tilde{T}_d z' \end{bmatrix} ds = 0 \quad (3.5)$$

Rayleigh Ritz방법으로 이산화 하기 위하여 다음과 같이 사인함수들로 기저함수를 만든다. 사인함수를 기저로 사용한 이유는 케이블의 경계조건을 맞추기 쉽고, 기저함수 개수 선택으로 해석을 하는 주파수 영역 크기를 제어하기 쉽기 때문이다. 케이블 국부좌표계에서 정의된 기저함수는 다음과 같다.

$$x_d^l \approx \sum_{i=1}^n u_{xi}(t) \phi'_{xi}(s)$$

$$\phi'_{xi}(s) = \sin \frac{i\pi}{l_0} s \quad (3.6)$$

좌표 변환 행렬을 이용하여 식 3.5에 적용하면 다음과 같은 최종 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{F}_c(\mathbf{u}) &= \mathbf{P} + \mathbf{P}_{ad} \\
 \mathbf{M} &= \int_{l_0} \mathbf{N}^T \rho_0 \mathbf{N} ds = \text{diag} \left[\frac{\rho_0 l_0}{2} \right] \\
 \mathbf{F}_c(\mathbf{u}) &= \int_{l_0} \mathbf{B}^T \begin{bmatrix} \tilde{T}_s x'_d + \tilde{T}_d x' \\ \tilde{T}_s y'_d + \tilde{T}_d y' \\ \tilde{T}_s z'_d + \tilde{T}_d z' \end{bmatrix} ds \\
 \mathbf{P}_{ad} &= \int_{l_0} \mathbf{N}^T \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} F'_{Dx} \\ F'_{Dy} \\ F'_{Dz} \end{bmatrix} ds = 0
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

위 식에서 나타난 \mathbf{N} 과 \mathbf{B} 는 다음과 같이 각각 정의 된다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}' &= \begin{bmatrix} \phi'_{x1} & 0 & 0 & \phi'_{x2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \phi'_{y1} & 0 & 0 & \phi'_{y2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \phi'_{z1} & 0 & 0 & \phi'_{z2} & \dots \end{bmatrix} \\
 \mathbf{N} &= \mathbf{R}^T \mathbf{N}' \\
 \mathbf{B}' &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi'_{x1}}{\partial s} & 0 & 0 & \frac{\partial \phi'_{x2}}{\partial s} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial \phi'_{y1}}{\partial s} & 0 & 0 & \frac{\partial \phi'_{y2}}{\partial s} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\partial \phi'_{z1}}{\partial s} & 0 & 0 & \frac{\partial \phi'_{z2}}{\partial s} & \dots \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}^T \mathbf{B}^l$$

\mathbf{C} 는 케이블의 구조 감쇠행렬로 일반적으로 설계지침에서 제안하고 있는 감쇠비를 이용하여 Rayleigh 감쇠로 사용할 수 있다. 최종적으로 유도된 운동 방정식은 케이블의 무응력 상태의 라그랑지 좌표에 대하여 유도되어있으며 동적 변위 \mathbf{u} 는 케이블의 국부좌표계를 기준으로 한 변위이다.

3.3 케이블 운동방정식의 선형화

식 3.7의 $\mathbf{F}_c(\mathbf{u})$ 가 표현하고 있는 것은 케이블의 변위에 대한 저항력이다. 이 저항력은 비선형이기 때문에 테일러 전개를 통하여 선형화된 증분식으로 해를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^{t+\Delta t} + \mathbf{F}_c(\mathbf{u}^{t+\Delta t}) &= \mathbf{P}^{t+\Delta t} \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^t + \mathbf{F}_c(\mathbf{u}^t) &= \mathbf{P}^t \\ \mathbf{F}_c(\mathbf{u}^{t+\Delta t}) &\approx \mathbf{F}_c(\mathbf{u}^t) + \left. \frac{\partial \mathbf{F}_c}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^t} \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (3.9) \\ \therefore \mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_a\Delta\dot{\mathbf{u}} + \left. \frac{\partial \mathbf{F}_c}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^t} \cdot \Delta \mathbf{u} &= \Delta \mathbf{P} \end{aligned}$$

이 때 구해지는 케이블의 tangential stiffness는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left. \frac{\partial \mathbf{F}_c}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}'} = \mathbf{K}_T = \int_{l_0} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} ds$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \tilde{T} + EA(x')^2 & EAy'x' & EAz'x' \\ EAx'y' & \tilde{T} + EA(y')^2 & EAz'y' \\ EAx'z' & EAy'z' & \tilde{T} + EA(z')^2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

본 연구에서는 케이블의 변위가 크지 않다는 가정 하에 정적평형상태를 기준으로 한 \mathbf{K}_T 를 사용하여 시간 영역 해석과 주파수영역 해석을 수행하였다. 이때 \mathbf{D} 는 다음과 같다.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \tilde{T} + EA(x')^2 & EAy'x' & 0 \\ EAx'y' & \tilde{T} + EA(y')^2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{T} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Orthogonal basis를 사용하여 기저함수를 구성하였기 때문에 질량 행렬은 대각화 되었고, 강성행렬 또한 정적 평형 상태를 기준으로 선형화 하면서 In-plane과 Out-of-plane 간의 커플링이 사라지게 되었다.

3.4 공기력의 선형화와 공기역학적 감쇠 행렬

준정상상태에 따른 공기력은 식 3.12와 같다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}'_D &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\rho DC_D W^2 \sin \psi \\ \frac{1}{2}\rho DC_D W^2 \cos \psi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\rho DC_D \frac{\{(V_{y'} - \dot{y}')^2 + (V_{z'} - \dot{z}')^2\}(V_{y'} - \dot{y}')}{\sqrt{(V_{y'} - \dot{y}')^2 + (V_{z'} - \dot{z}')^2}} \\ \frac{1}{2}\rho DC_D \frac{\{(V_{y'} - \dot{y}')^2 + (V_{z'} - \dot{z}')^2\}(V_{z'} - \dot{z}')}{\sqrt{(V_{y'} - \dot{y}')^2 + (V_{z'} - \dot{z}')^2}} \end{bmatrix} \quad (3.12)
\end{aligned}$$

위 식에서 바람의 속도가 케이블의 속도보다 충분히 크다는 가정 하에 케이블 속도가 0일때를 기준으로 테일러 전개를 할 수 있다. 테일러 1차 전개 까지만 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{F}'_D \approx \mathbf{F}'_D \Big|_{\dot{\mathbf{x}}'=0} + \frac{\partial \mathbf{F}'_D}{\partial \dot{\mathbf{x}}'} \Big|_{\dot{\mathbf{x}}'=0} \cdot \dot{\mathbf{x}}' \quad (3.13)$$

첫째 항은 정적공기력으로 간주할 수 있고 두번째 항은 케이블 속도에 비례한 힘으로써 공기역학적 감쇠에 해당하는 부분이라 할 수 있다. 이때 두번째 항의 케이블 속도에 대한 미분은 다음과 같이 상대속도에 대한 미분과 항력계수에 대한 미분 두 가지로 나눌 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{F}_D}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{\partial \mathbf{F}_D}{\partial \mathbf{W}} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} + \frac{\partial \mathbf{F}_D}{\partial C_D} \frac{\partial C_D}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \quad (3.14)$$

미분 결과는 다음과 같다.

$$-\left. \frac{\partial \mathbf{F}_D^l}{\partial \dot{\mathbf{x}}^l} \right|_{\dot{\mathbf{x}}^l=0} = \frac{1}{2} \rho_a D C_D \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2V_{y'}^2 + V_{z'}^2}{\sqrt{V_{y'}^2 + V_{z'}^2}} & \frac{V_{y'} V_{z'}}{\sqrt{V_{y'}^2 + V_{z'}^2}} \\ 0 & \frac{V_{y'} V_{z'}}{\sqrt{V_{y'}^2 + V_{z'}^2}} & \frac{V_{y'}^2 + 2V_{z'}^2}{\sqrt{V_{y'}^2 + V_{z'}^2}} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$+ \frac{1}{2} \rho D \frac{\partial C_D}{\partial \text{Re}} \text{Re} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{V_{y'}^2}{\sqrt{V_{y'}^2 + V_{z'}^2}} & \frac{V_{y'} V_{z'}}{\sqrt{V_{y'}^2 + V_{z'}^2}} \\ 0 & \frac{V_{y'} V_{z'}}{\sqrt{V_{y'}^2 + V_{z'}^2}} & \frac{V_{z'}^2}{\sqrt{V_{y'}^2 + V_{z'}^2}} \end{bmatrix}$$

첫번째 항은 상대속도에 대한 미분항이고 두번째 항은 항력계수에 대한 미분항이다. 일반적으로 임계레이놀즈 영역에 위치하지 않을 경우 $\partial C_D / \partial \text{Re}$ 값은 0에 가까우므로 두번째 항은 무시할 수 있다. Rayleigh-Ritz방법으로 이산화한 케이블 운동방정식에서는 다음과 같이 표현된다.

$$\therefore \mathbf{C}_{ad} = \int_{l_0} \mathbf{N}^T \mathbf{R}^T \left(- \frac{\partial \mathbf{F}'_D}{\partial \dot{\mathbf{x}}'} \bigg|_{\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{0}} \right) \mathbf{R} \mathbf{N} ds \quad (3.16)$$

4. 해석 예제

이 장에서는 실제 인천대교에 설계된 케이블 물성치를 이용하여 예제를 구성하였다. 주파수영역 해석과 시간영역 해석을 통하여 설계지침에서 제안한 식과 비교하였다. 주파수영역 해석을 통하여 감쇠비를 추정하면 바람에 따라 설계식의 값과 큰 차이를 보이기도 한다. 그러나 이 경우에 두 해석이 가리키는 진동모드의 방향이 다르기 때문에 감쇠비의 차이를 통해 실제 케이블의 동적 거동의 차이를 예측하기가 어렵다. 따라서 시간영역 해석을 수행하고 이 때의 변위를 이용하여 등가의 감쇠비를 역으로 추정하여 비교하였다.

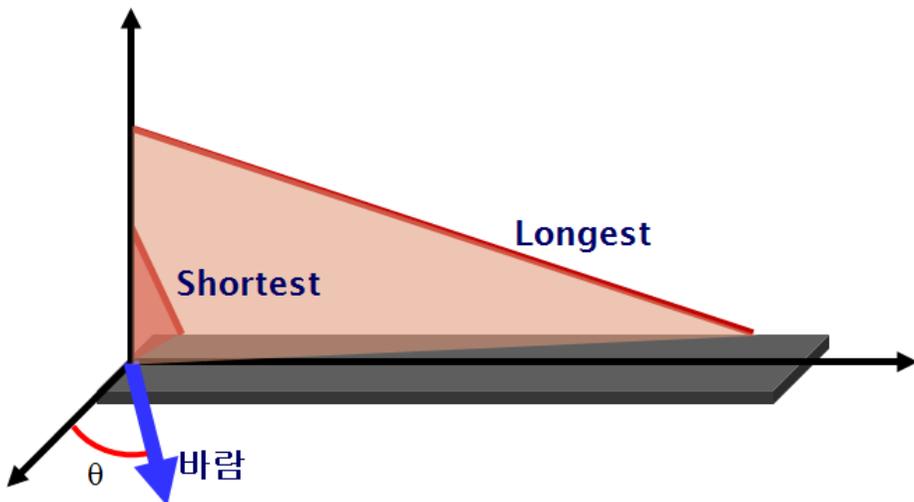


그림 4.1 인천대교의 해석 대상 케이블

표 4.1 케이블 재원

	케이블 1 (Longest)	케이블 2 (Shortest)
세그비	1/100	1/10000
경사	21°	77°
단위길이당 질량	94.83kg/m	34.73kg/m
강성	195GPa	195GPa
단면적	115.8cm ²	42cm ²
무응력 길이	414.77m	109.8m

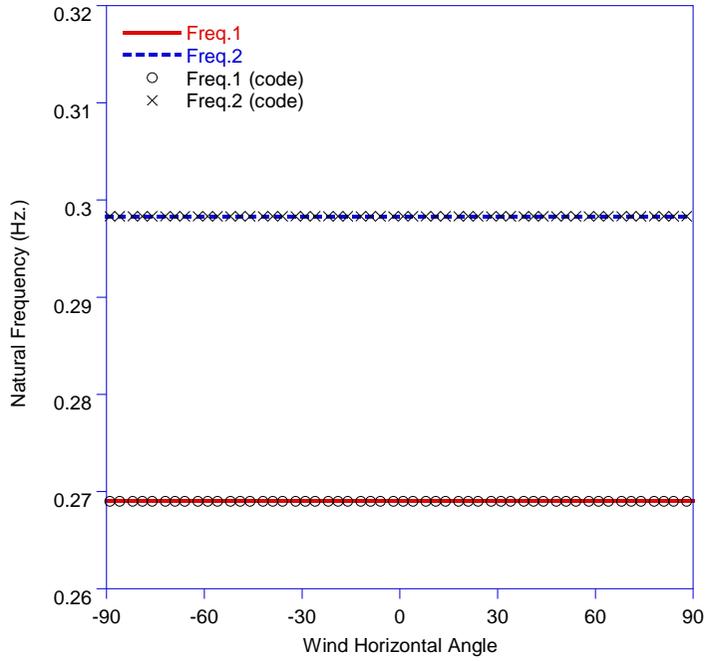
그림 4.1과 표4.1은 해석 대상 케이블을 나타내고 있다. 해석은 인천대교에서 사용된 케이블 중에 세그비가 크고 작은 2 케이블을 사용하였다. 이 장에서 사용한 바람의 각도 θ 는 교축에 대한 수평 각도이다.

4.1 주파수 영역 해석 결과

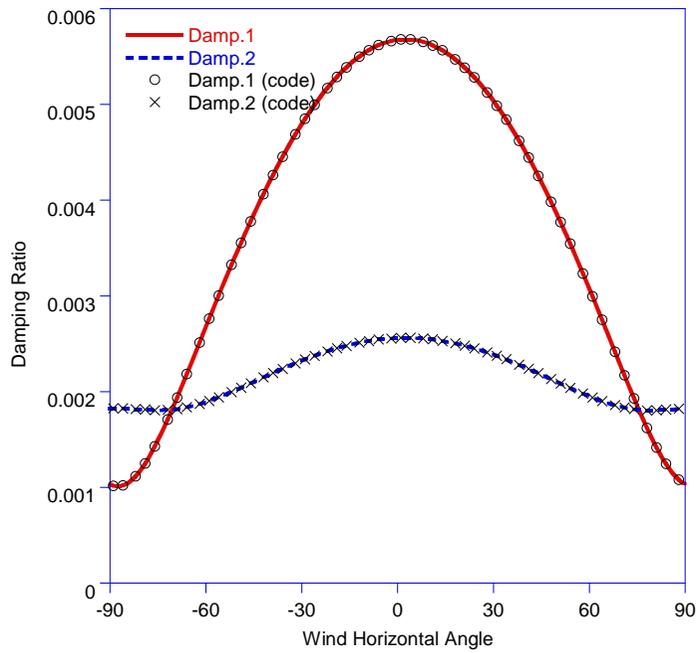
그림 4.2는 케이블 1에 대하여 바람의 수평각도를 변화해 가며 가장 작은 2개의 고유진동수와 감쇠비를 각각 설계식으로 구한 값과 비대각요소를 고려한 고유치 해석을 통해 구한 값을 나타내고 있다. 이 경우 비대각요소를 고려한 해석과 그렇지 않은 해석 모두 거의 같은 값을 나타내고 있음을 알 수 있다. 고유진동수는 바람의 각도에 영향을 받지 않는 것을 보이는 반면에 감쇠비는 바람의 각도에

따라 변화하는 것을 볼 수 있다. 이는 바람의 각도에 따라 해당 진동모드에 대한 항력의 분력이 변화하기 때문이다.

그림 4.3은 앞과 동일한 해석을 케이블 2에 대해서 수행한 것이다. 앞의 경우와 달리 비대각 요소를 고려한 해석과 그렇지 않은 해석에 차이를 보이고 있다. 비대각 요소를 고려하지 않은 설계식의 해석은 앞의 경우와 같은 양상을 보이고 있다. 그러나 비대각 요소를 고려한 경우 바람의 각도에 따라 감쇠비는 일정한 모습을 보이고 고유진동수는 바람의 각도에 따라 변화하는 것을 볼 수 있다. 이는 바람의 각도에 따라 진동모드가 같이 변화하고 있기 때문이다. 따라서 항력의 분력도 일정한 값을 가지게 되는 것이다. 바람의 각도에 따라 최대 약 45퍼센트 정도의 감쇠비 차이를 보이고 있지만 설계식대로 구한 감쇠비와 고유치해석을 통한 감쇠비는 서로 다른 방향의 진동모드를 가리키고 있기 때문에 실제 거동에 미치는 효과를 예측하기에 어려운 점이 있다.

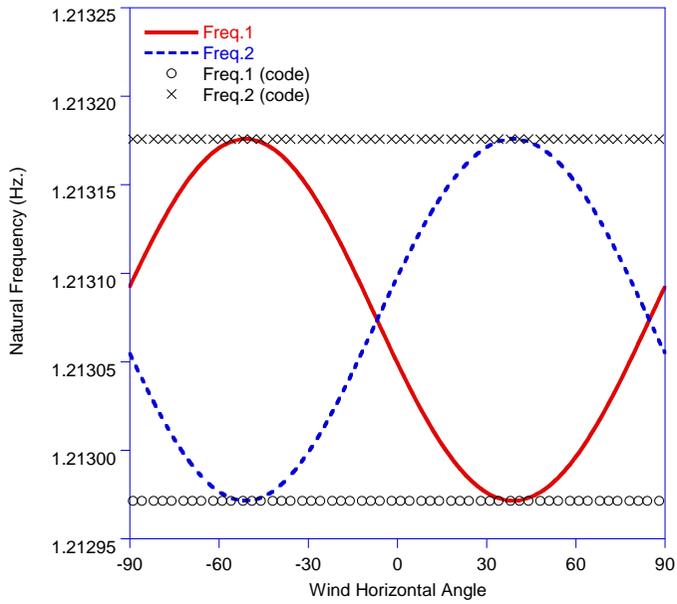


(a) 고유진동수

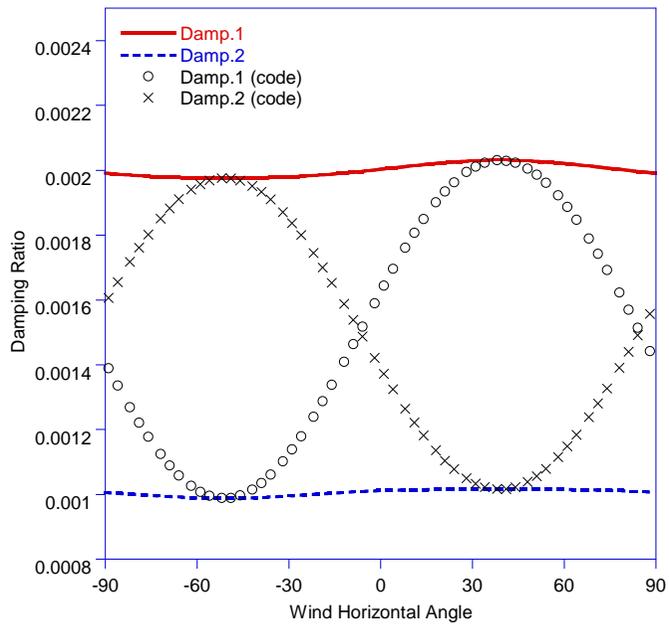


(b) 감쇠비

그림 4.2 케이블 1의 고유진동수와 감쇠비



(b) 고유진동수

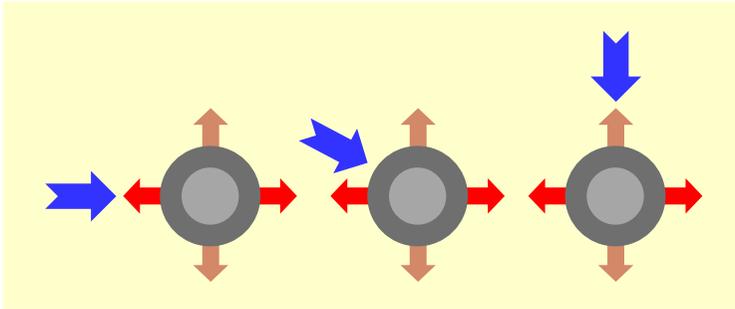


(b) 감쇠비

그림 4.3 케이블 2의 고유진동수와 감쇠비

4.2 바람의 각도와 진동모드의 회전

비대각 요소를 무시 할 때의 모드 형상



비대각 요소를 고려 할 때의 모드 형상

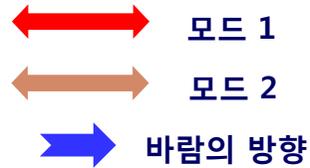
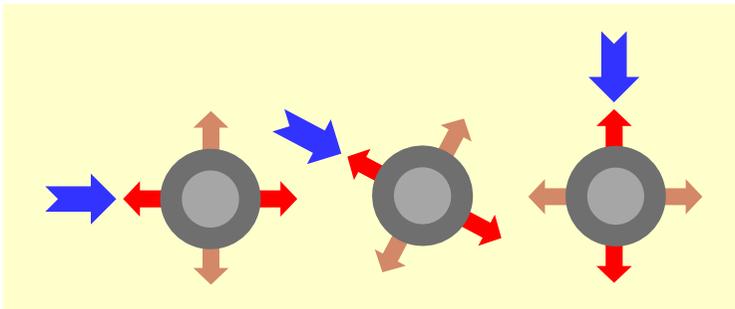


그림 4.4 바람의 각도와 진동모드의 회전

공기역학적 감쇠 행렬의 비대각 요소를 고려한 경우 바람의 각도에 따라 진동모드가 회전하는 현상이 일어날 수 있다. 식 3.11을 살펴보면 케이블의 in-plane 방향의 변위와 out-of-plane 방향의 변위 간의 상호작용 효과가 없는 것을 알 수 있다. 그리고 케이블의 Sag가 각

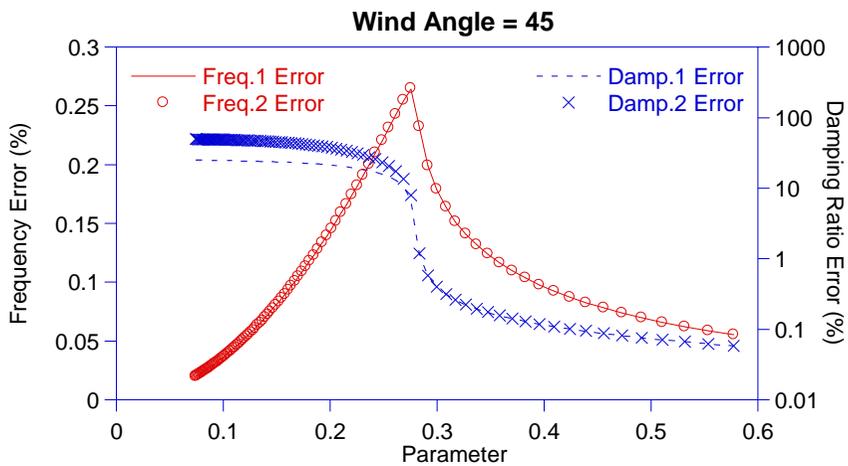
방향의 강성 차이를 유발 하는 것을 알 수 있다. 이런 강성의 차이 때문에 진동모드가 in-plane과 out-of-plane방향으로 분리되어 나타나게 된다. 그러나 매우 팽팽한 케이블의 경우 Sag가 작아지게 되고 따라서 양 방향의 강성 차이가 거의 없어지게 된다. 이때는 바람에 의한 감쇠 행렬에 따라 진동모드가 지배되게 된다. 공기역학적 감쇠에 의한 커플링 때문에 진동모드는 in-plane과 out-of-plane의 두가지로 분리 되는 것이 아니라 바람의 각도에 따라 바람 방향과 그 수직 방향으로 진동모드가 나타나게 된다.

4.3 진동모드 회전에 대한 파라미터 산정

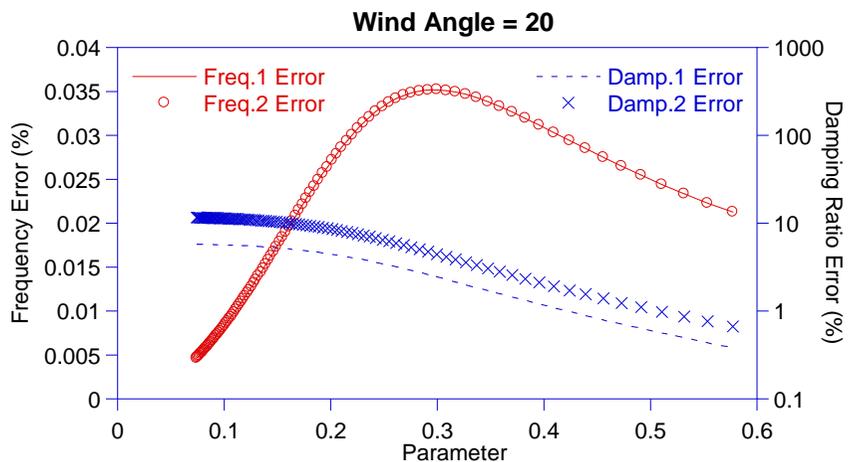
공기역학적 감쇠 행렬의 비대각 요소에 의한 케이블 진동 모드의 회전은 항상 일어나는 것이 아니다. 이는 케이블의 팽팽한 정도와 바람에 의한 항력의 크기에 따라 결정 된다. 본 연구에서는 이런 현상의 기준을 정하고자 파라미터를 제안하였다.

아래의 그래프를 보면 파라미터 값이 약 0.27일때를 기준으로 설계식을 통해서 계산한 감쇠계수와 정밀한 고유치 해석을 통한 감쇠계수의 차이 정도가 급격히 변하는 것을 알 수 있다. 그 변곡점을 기준으로 좌측에서는 바람에 의하여 진동모드의 회전이 일어나고 있고 우측으로는 일어나지 않음을 알 수 있다. 고유진동수 변화도 같은 위치에서 기울기의 부호가 바뀌는 형태로 진동모드 회전 여부를 나타내고 있다. 바람의 각도가 45도가 아닌

20도일 경우 감쇠계수 변화 곡선의 변곡점을 찾기가 어려운 면이 있지만 고유진동수 변화 곡선을 보면 그 기울기의 부호가 변화하는 것을 볼 수 있기 때문에 기준점을 찾기 위해서는 고유진동수를 통하여 우회적으로 조사하는 것이 더 바람직한 것을 알 수 있다.



(a) 바람의 각도가 45도일 때



(a) 바람의 각도가 20도일 때

그림 4.5 설계식과 고유치해석을 통한 고유진동수와 감쇠비의 차이

본 연구에서 제안한 파라미터는 케이블의 강성 특성을 잘 표현하는 무차원 파라미터인 Irvine Parameter(λ_{irvine})에 공기역학적 감쇠(f_w)를 이용하여 정규화한 모양을 보이고 있다.

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= (\lambda_{irvine})^2 \frac{mg}{f_w} \cos^3 \beta \\ (\lambda_{irvine})^2 &= \left(\frac{mgL \cos \beta}{H} \right)^2 \frac{EAL}{HL_e} \\ L_e &\approx L \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{mgL \cos \beta}{H} \right)^2 \right] \\ f_w &= \rho DC_D \sqrt{V_{y'}^2 + V_{z'}^2} L\end{aligned}\tag{4.1}$$

여기서 H 는 케이블의 수평 장력이고, L 은 케이블의 지지길이, L_e 는 케이블의 실제 길이를 나타낸다. 제안된 파라미터를 무차원화하기 위하여 케이블의 단위중량을 이용하였고 Irvine Parameter가 케이블 경사에 대해서 정규화 되어 있지 못한 점을 보정하기 위하여 케이블 경사의 코사인 값을 이용하여 고유진동수 변화 곡선의 극점을 맞추었다. 다음 그래프와 같이 케이블 2를 기준으로 몇가지 변화를 준 후 제안한 파라미터를 이용하여 극치점을 조사해보면 변동계수 3% 정도로 평균 0.27에서 진동모드 회전 여부가 정해지는 것을 알 수 가있다. 그러나 본 연구에서 제안한 파라미터는 완전히 무차원화 되지 못하였고 주파수의

차원을 가지고 있다.

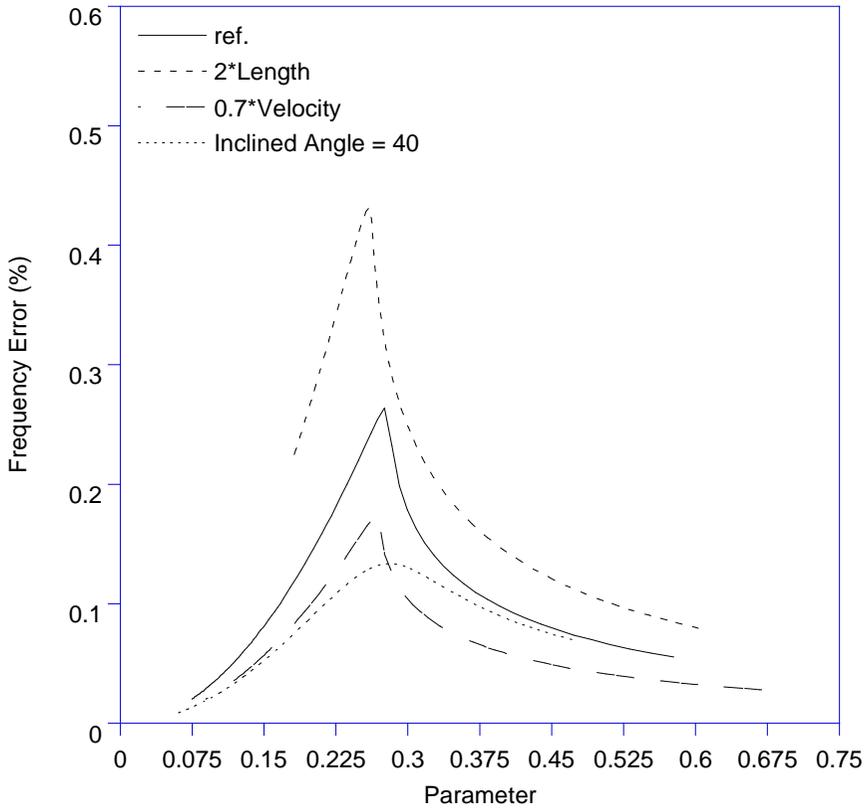
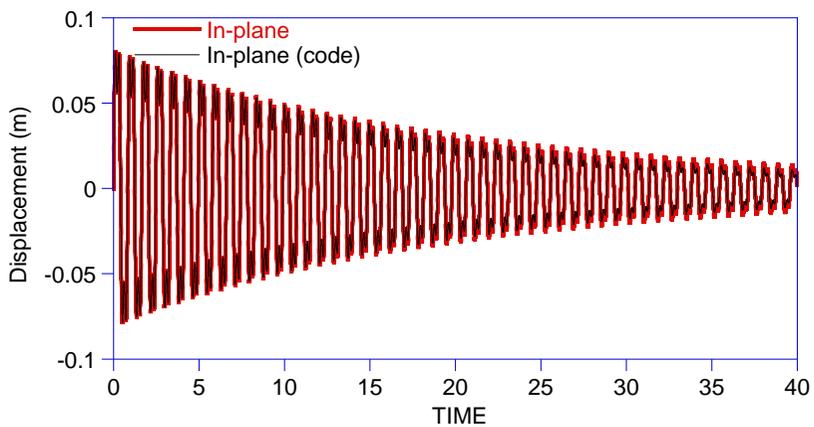


그림 4.6 여러가지 조건에서의 설계식과 고유치해석을 통한
고유진동수와 감쇠비의 차이

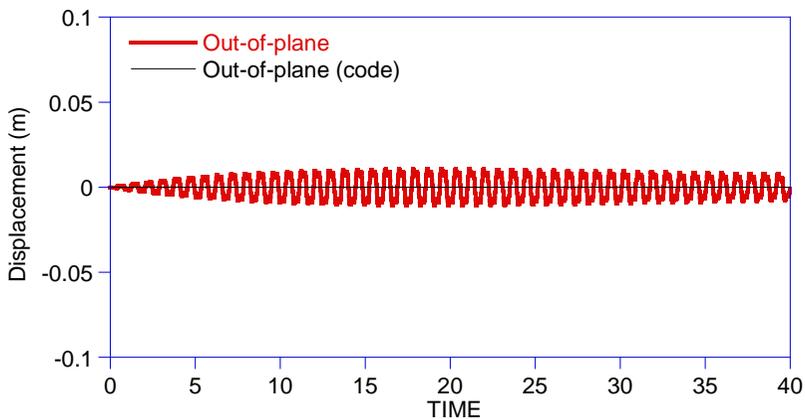
4.4 시간영역 해석과 ERA를 통한 감쇠의 추정

진동모드의 회전이 일어나는 경우 설계식과 고유치해석에서 유도되는 감쇠비가 서로 다른 방향의 진동모드를 가리키기 때문에 그 효과 차이를 그대로 비교하기는 어렵다. 따라서 같은 하중에 대해서

시간영역 해석을 수행하고 역해석 기법인 EigenSystem Realization Algorithm(ERA)을 통하여 감쇠비를 추정하여 비교해 보았다[8]. 모드 간의 상호작용 효과가 크게 나타나는 케이블 2에 대하여 y축과 z축 각각 두 가지 방향으로 충격하중을 주어 해석하였다. 그림 4.7과 4.8은 y축 방향으로 하중을 주었을 때의 시간 이력 해석 결과이다.



(a) In-plane 변위



(b) Out-of-plane 변위

그림 4.7 y축 방향으로 충격하중을 주었을 때의 시간이력 해석

모드간의 상호작용 효과를 고려한 경우 Out-of-plane 방향으로도 변위가 발생하는 것을 볼 수 있다. 이는 감쇠행렬의 비대각요소 때문에 In-plane 진동이 Out-of-plane 방향으로 힘을 전달하기 때문에 발생하는 현상이다.

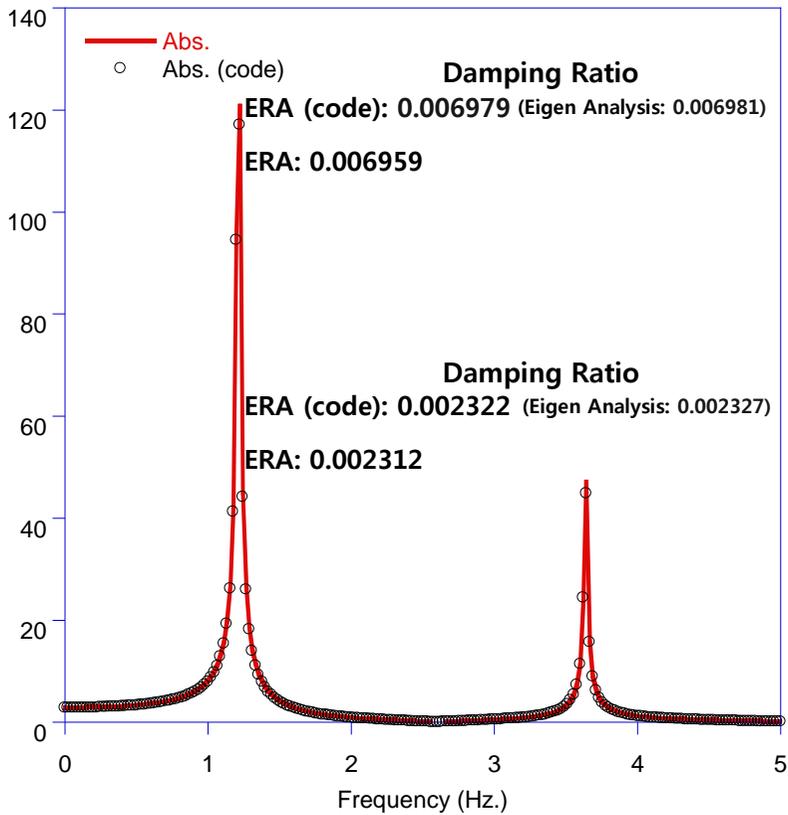
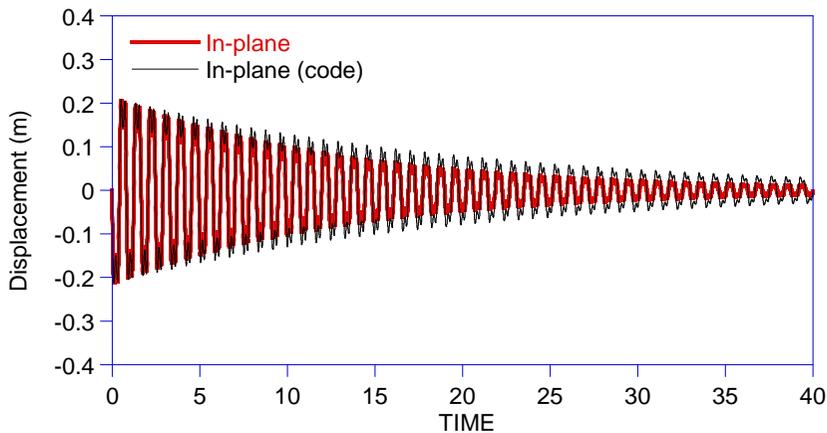


그림 4.8 In-plane 변위에 대한 DFT와 ERA결과

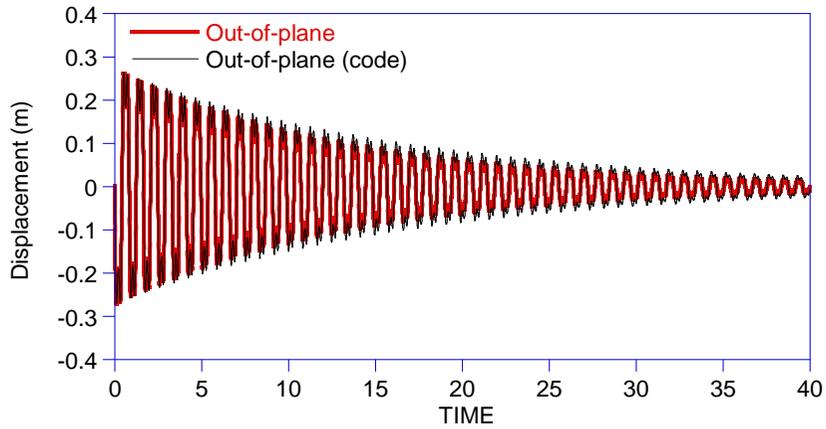
그림 4.8은 ERA를 통한 역해석 결과이다. 설계식의 해석 결과는 주파수가 약 1.2인 부분과 3.7인 부분에서 총 2개의 진동 모드를 나타내고 있다. 반면 고유치 해석결과도 총 2개의 진동 모드를 보이는

것 처럼 나타나고 있지만 실제로는 거의 근접한 2개의 모드가 각각 나타난 것으로 총 4개의 진동 모드가 In-plane 방향의 변위에 기여하고 있다. 이 절에서는 이 근접한 두개의 고유진동수를 하나로 근사하여 감쇠비를 추정 한 것이다. 결과를 보면 고유치 해석을 한 결과가 설계식보다 미소하게 작은 감쇠비를 나타내는 것을 알 수 있다. 감쇠비 차이가 작은 이유는 In-plane 방향의 진동과 상호작용을 이루키는 Out-of-plane 방향의 진동의 크기가 작기 때문에 설계식과 고유치 해석 간의 차이가 작기 때문이다.

그림 4.9는 z축 방향으로 충격하중을 준 경우이다. 이때는 케이블의 교축과의 각도 때문에 In-plane과 Out-of-plane 두 방향으로 하중을 가하게 된다.



(a) In-plane 변위



(b) Out-of-plane 변위

그림 4.9 z축 방향으로 충격하중을 주었을 때의 시간이력 해석

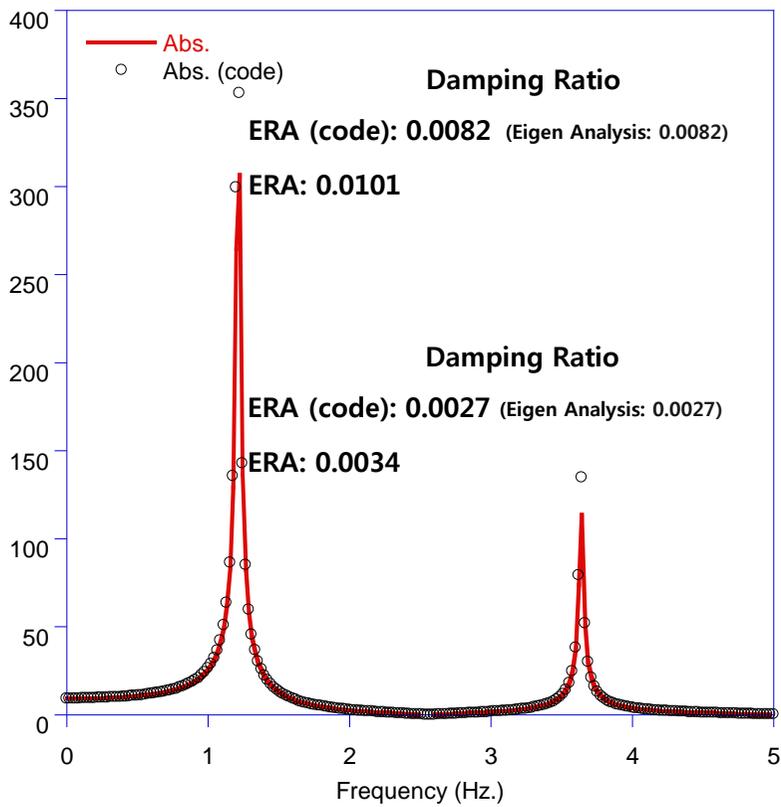
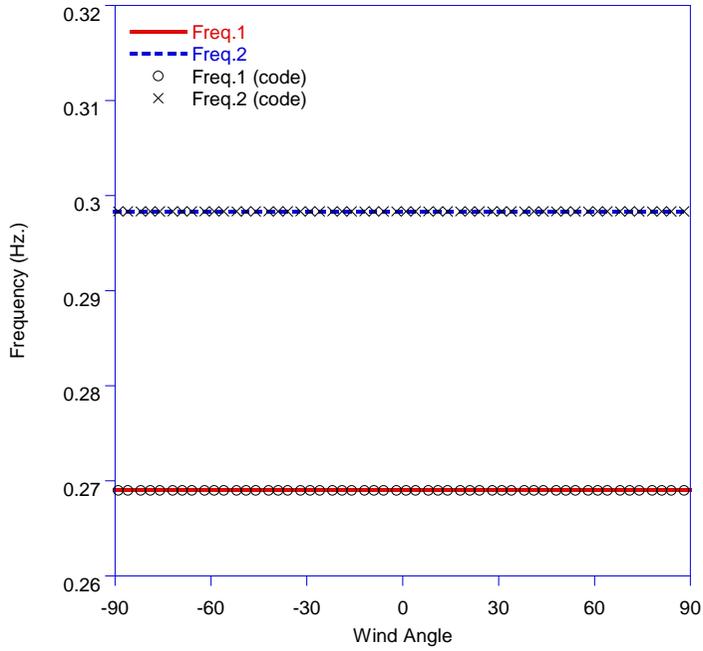


그림 4.10 Out-of-plane 변위에 대한 DFT와 ERA결과

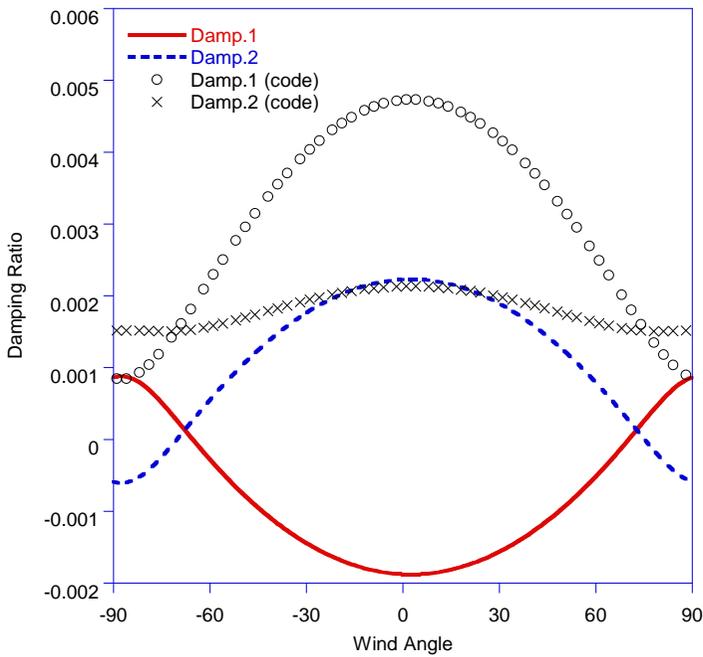
그림 4.10은 ERA를 통한 감쇠비 추정 결과 이다. 설계식과 고유치 해석을 통한 감쇠비가 약 20%의 차이를 보이는 것을 알 수 있다. 또한 앞의 예제와는 달리 고유치해석을 통한 감쇠비가 더 크게 나타난 것을 알 수 있다. 이는 앞 예제와는 양 방향으로 가진을 하게 되면서 서로 다른 진동모드간에 상호작용 효과가 더 크게 나타나기 때문이다.

4.5 임계레이놀즈 영역에서의 주파수 영역 해석

다음의 예제는 케이블이 임계레이놀즈 영역에 놓였을 경우에 대하여 주파수 영역 해석을 수행 한 것이다. 케이블이 임계레이놀즈 영역에 위치 할 경우에 고유진동수와 감쇠비 변화를 그린 것이다. 케이블 1의 경우에는 임계레이놀즈 영역 밖에서 해석한 것과 같이 진동모드의 회전은 일어나지 않는 것을 볼 수 있다. 다만 임계레이놀즈 영역의 급격한 항력계수 감소율 때문에 음의 감쇠비가 나타나는 구간이 나타난다. 음의 감쇠비가 있을 때 구조물의 진동은 발산하게 되며 이런 현상을 막기 위해서는 계산된 음의 감쇠비 이상의 추가적인 감쇠가 필요하다. 케이블 2의 경우는 그림 4.12에서 볼 수 있듯이 고유치 해석을 통하여 감쇠비를 추정한 경우 바람에 의한 진동모드의 회전이 일어남과 동시에 음의 감쇠비가 나타나는 것을 관찰 할 수 있다.

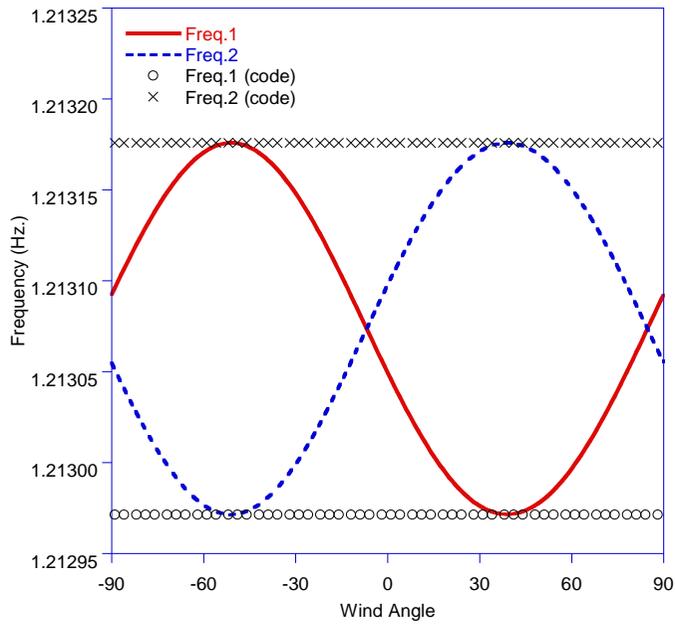


(a) 고유진동수

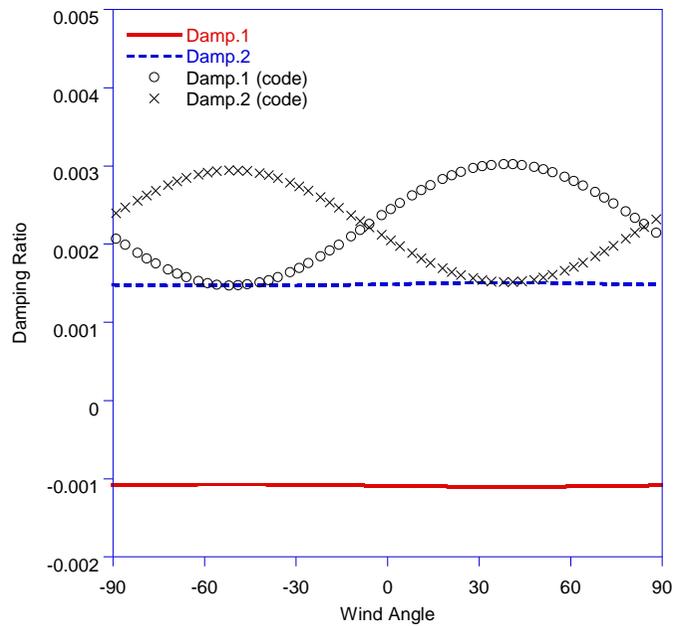


(b) 감쇠비

그림 4.11 임계레이놀즈 영역에서의 케이블 1의 주파수영역 해석



(a) 고유진동수



(b) 감쇠비

그림 4.12 임계레이놀즈 영역에서의 케이블 2의 주파수영역 해석

5. 결론

현 설계기준은 케이블의 공기역학적 감쇠비 산정 시, 진동모드 간의 상호작용과 풍속에 따른 항력계수의 변화율을 고려하고 있지 않다. 본 연구에서는 설계식에서 고려하고 있지 않은 진동모드간의 상호작용을 표현할 수 있도록 고유치해석을 통한 보다 정밀하게 감쇠비를 계산하고 결과를 비교하였다. 공기역학적 감쇠 행렬로 인하여 In-plane과 Out-of-plane 사이에 커플링이 일어나게 되고 이로 인하여 진동모드가 바람에 따라 회전하는 경우가 발생하게 된다. 따라서 바람과 케이블 사이의 각도에 따라 고유치 해석을 통해 산정된 감쇠비는 설계기준에서 산정된 값과 45퍼센트 정도까지 다르게 나타날 수 있다. 이러한 진동모드의 회전은 케이블의 강성과 공기력 크기에 따라 좌우되며 본 연구에서는 이런 진동모드의 회전이 일어나는 조건에 대한 파라미터 값을 제안 하였다. 또한 케이블의 단면 특성으로 인하여 임계 레이놀즈 영역에 도달할 경우 케이블의 진동이 일으키는 상대속도의 작은 변화에도 항력계수가 급격히 작아 질 수 있으며 이로 인하여 음(-)의 감쇠비가 나타날 수 있다.

따라서 아래의 경우, 설계지침에서 제안한 공기역학적 감쇠비 산정식을 사용해서 안되며, 진동모드간의 상호작용을 고려할 수 있도록 보다 정밀한 고유치 해석을 통한 공기역학적 감쇠비

추정이 필요하다.

- 1) 본 연구에서 제안한 파라미터 값이 0.27 보다 작은 경우
- 2) 임계 레이놀즈 영역에 위치하여 Drag Crisis가 우려 될 경우

참고 문헌

- [1] 안상섭, 2002. 사장교 케이블의 진동 검토 및 대책. 대한 토목공학회논문집 제 22권 제 3-A호, pp. 663-678.

- [2] Macdonald, J.H.G., 2006. A unified approach to aerodynamic damping and drag/lift instabilities, and its application to dry inclined cable galloping. *Journal of Fluids and Structures* 22, pp.229–252.

- [3] Macdonald, J.H.G., 2008. Two-degree-of-freedom inclined cable galloping—Part 1: General formulation and solution for perfectly tuned system. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 96, pp.291–307.

- [4] Irvine, M., 1981. *Cable Structures*. The MIT Press Cambridge, Massachusetts.

- [5] 정길제, 박연철, 심현겸, 이해성, 2007. 케이블의 동적 해석을 위한 가상일 원리의 정식화. 교량설계핵심기술연구단.

- [6] Scruton, C., Rogers, E. W. E., Menzies, J. B., Scorer, R. S., 1971. Steady and Unsteady Wind Loading of Buildings and Structures [and Discussion]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A Mathematical and Physical Sciences, Vol. 269, No. 1199, pp. 353-383.
- [7] 대한토목학회, 2006. 케이블 강교량설계지침. 대한토목학회.
- [8] Juang, J., 2001. Identification and Control of Mechanical Systems. Cambridge University Press.

Abstract

The importance of the aerodynamic damping of cable members is growing, as the recent bridges are being designed with long span. However the formula for the aerodynamic damping ratio shown in the current design guide is rather simple based on the single degree of freedom assumption. Because the aerodynamic damping is function of the relative velocity between the wind and cable motion, this study performed and discussed about more accurate calculation of the aerodynamic damping ratio, respect to two dimensional motion and the sudden drop of the drag coefficient in the critical Reynolds number region.

Vibrational modes of the taut cable change along the angle of the wind due to the interactions between the modes. 45% error may occur for the worst case. In addition, a negative damping ratio can be expected when the cable is under the critical Reynolds number region.

The criteria for the geometrical and material condition

of the cable and the velocity and the angle of the wind is presented in this study, based on the normalized Irvine Parameter.

Keywords : Cable, Aerodynamic damping, Drag force, Vibration mode,

Quasi-steady theory

Student Number : 2010-23302