

공학석사학위논문

모멘트 추정법에 의한 사장교 거동의
통계적 해석법

Statistical Analysis Method of Cable-stayed Bridges Behavior by
Method of Moment Estimation

2007 년 8 월

서울대학교 대학원

건설환경공학부

전 호 진

초 록

이 논문에서는 비선형 거동을 하는 구조물을 대상으로 모멘트 추정법에 의한 사장교 거동의 분산 특성을 파악하고, 구조물 응답의 확률분포를 추정한다.

사장교의 설계 및 구조해석 시에는 구조물 형식과 설계변수 등에 따라 역학적 거동을 파악하고, 설계변수가 전체 구조계에 어떤 영향을 주는가를 충분히 검토하여야 한다. 그러나 이러한 설계변수를 일정한 값을 갖는 확정론적 변수로 가정하여 구조해석을 수행하게 되면, 구조물의 정확한 거동을 명확하게 파악하기 어렵다. 모멘트 추정법은 구조물 설계변수의 불확실성을 확률변수로 하여, 구조물 응답을 확률변수에 대한 테일러 급수를 이용하여 확률변수의 확률분포로부터 응답의 확률분포를 추정한다. Monte-Carlo simulation 은 반복적 구조해석을 통한 확률해석을 수행해야 하므로 시간이 과다하게 소요되는 단점이 있어 복잡한 구조물의 해석에는 적합하지 않다. 이 논문에서는 이계삼차모멘트법을 도입하여 단 한번의 구조해석으로 구조물 응답의 평균, 표준편차, 왜도를 산정하고 응답의 확률분포를 추정한다.

사장교 구조물의 확률해석에 필요한 민감도 계산은 정밀한 해석을 위해 케이블 요소에 대하여 기존의 Ernst 가 제안한 등가트러스 요소가 아닌 탄성현수선 요소를 사용하여 직접 계산한다. 해석에 사용된 확률변수는 케

이블 부재의 탄성계수와 거더프레임 자중을 각각 고려하여 상관성이 없는 다 변수 확률변수의 2 차 테일러 급수로부터 응답의 평균, 표준편차, 왜도를 산정한다. 응답의 비선형성에 의한 확률분포는 정규분포와 삼변수 대수 정규분포로 추정한다. 개발된 프로그램의 정확성은 사장교 예제를 통해 많은 수의 Monte-Carlo simulation 으로 구조물 응답의 분산 특성과 확률분포를 비교하여 타당성과 효율성을 검증하였다.

주요어

모멘트 추정법, 이계삼차모멘트법, Monte-Carlo simulation, 탄성현수선 요소, 삼변수대수정규분포

학번: 2005-21177

목 차

초록	iii
목차	v
그림목차	vii
표목차	x
1. 서론	1
2. 응답의 확률분포 추정	4
2.1 Monte-Carlo simulation 에 의한 확률분포 추정	5
2.2 이계삼차모멘트법	7
2.3 확률분포의 모수 추정	13
3. 사장교 거동의 확률 해석	19
3.1 탄성현수선 케이블의 강성도 행렬	19
3.2 탄성현수선 케이블요소를 이용한 민감도 계산	26

4. 해석 예제	35
4.1 팬 타입 사장교	35
4.2 5 경간 연속 사장교	58
5. 결론	65
참고문헌	67
부록	69

그림 목 차

그림 2.1 Latin hypercube selective sampling	6
그림 2.2 일대일 함수의 확률밀도함수	8
그림 3.1 탄성현수선 케이블에 대한 좌표계	20
그림 3.2 케이블 세그먼트의 자유 물체도	21
그림 3.3 변위가 발생한 탄성 현수선의 두 절점의 상대적 위치 ...	25
그림 4.1 팬 타입 사장교의 기하형상	35
그림 4.2 거더 수직처짐의 분산 특성 (Case1)	39
그림 4.3 거더 모멘트의 분산 특성 (Case1)	40
그림 4.4 케이블 장력의 분산 특성 (Case1)	40
그림 4.5 거더 중앙 수직처짐의 확률밀도함수 (Case1)	41
그림 4.6 거더 중앙 모멘트의 확률밀도함수 (Case1)	41
그림 4.7 6 번 케이블 장력의 확률밀도함수 (Case1)	42
그림 4.8 거더 수직처짐의 분산 특성 (Case2)	45
그림 4.9 거더 모멘트의 분산 특성 (Case2)	45

그림 4.10 케이블 장력의 분산 특성 (Case2)	46
그림 4.11 거더 중앙 수직처짐의 확률밀도함수 (Case2)	46
그림 4.12 거더 중앙 모멘트의 확률밀도함수 (Case2)	47
그림 4.13 6 번 케이블 장력의 확률밀도함수 (Case2)	47
그림 4.14 거더 수직처짐의 분산 특성 (Case3)	51
그림 4.15 거더 모멘트의 분산 특성 (Case3)	51
그림 4.16 케이블 장력의 분산 특성 (Case3)	52
그림 4.17 거더 중앙 수직처짐의 확률밀도함수 (Case3)	52
그림 4.18 거더 중앙 모멘트의 확률밀도함수 (Case3)	53
그림 4.19 6 번 케이블 장력의 확률밀도함수 (Case3)	53
그림 4.20 거더 중앙 수직변위의 극치분포	54
그림 4.21 CFT 거더 교량의 종단면도	58
그림 4.22 거더 수직처짐의 분산 특성	62
그림 4.23 거더 모멘트의 분산 특성	62
그림 4.24 케이블 장력의 분산 특성	63

그림 4.25 거더 중앙 수직치짐의 확률밀도함수	63
그림 4.26 거더 중앙 모멘트의 확률밀도함수	64
그림 4.27 26 번 케이블 장력의 확률밀도함수	64

표 목 차

표 4.1 팬 타입 사장교의 물성치	36
표 4.2 응답의 평균, 표준편차, 왜도 (Case 1)	38
표 4.3 응답의 평균, 표준편차, 왜도 (Case 2)	44
표 4.4 응답의 평균, 표준편차, 왜도 (Case 3)	50
표 4.5 케이블 부재의 탄성계수 개수에 따른 거더 중앙 수직처짐 비교 ...	57
표 4.6 확률변수 종류에 따른 거더 중앙 수직처짐 비교	57
표 4.7 케이블 초기길이의 변동계수에 따른 거더 중앙 수직처짐 비교 ...	57
표 4.8 확률변수의 분포에 따른 거더 중앙 수직처짐 비교	57
표 4.9 CFT 거더 교량의 구조 요소 별 주요 제원	59
표 4.10 CFT 거더 사장교 응답의 평균, 표준편차, 왜도	61

1. 서론

최근 국내외적으로 교통량과 물류량이 증가함에 따라 교량의 건설이 증대되고, 설계 및 시공이 전문화와 해석 기법이 발전함에 따라 사장교와 같은 특수 교량의 건설이 급증하고 있다. 즉, 케이블 지지 교량은 일반적으로 여타 형식의 교량에 비하여 세장한 구조물이고, 복잡한 비선형 거동을 하기 때문에 정밀한 구조해석이 설계를 위하여 필수적이다. 또한 사장교의 구조 해석 및 설계 시에 있어서 가장 중요한 것은 무엇보다도 구조형식과 설계 변수에 따라 역학적 거동을 파악하고 설계변수가 전체 구조계에 어떤 영향을 주는가를 충분히 검토하여야 한다.

구조물의 정확한 거동을 해석하는 데 있어서 일반적으로 이용해 온 방법은 해석에 고려되는 변수들이 일정한 불변의 값을 갖고 있다는 가정하에 입각한 확정론적 방법(deterministic approach)이었다. 그러나 확정론적 변수로 가정하여 구조해석을 수행하게 되면, 확률변수에 따른 구조물의 정확한 거동 및 안전성 정도를 명확하게 파악하기 어렵다. 따라서 구조물에 가해지는 하중의 추정에 따른 오차, 구조물의 기하학적 형상, 재료의 성질, 단면의 성질, 경계조건과 시공과정 등에서 발생하는 오차, 그리고 구조해석시의 가정 및 수치해석에 따른 오차 등에 의한 불확실성을 확률변수로 고려하여 해석을 수행하여야 할 것이다[3]. 이와 같은 문제점을 해결하기 위한 대안으로 매우 정확한 해석 결과를 얻을 수 있는 Monte-Carlo simulation 방

법을 이용하여 확률해석을 수행하는 것이 보편화 되었다[3]. 하지만 Monte-Carlo simulation 방법은 반복적 구조해석을 수행해야 하므로 시간이 과도하게 소요되는 단점이 있어 복잡한 구조물의 확률해석에는 적합하지 않으며, 다른 근사해법과의 정확도를 검증하는 데 주로 사용되고 있다. 이 논문에서는 사장교와 같은 복잡한 구조물을 대상으로 모멘트 추정법을 도입하여 단 한번의 구조해석으로 구조물 응답의 평균, 표준편차, 왜도를 산정하고 응답의 확률분포를 추정한다.

2 장에서 모멘트 추정법은 구조물 설계변수의 불확실성을 확률변수로 하여, 구조물 응답을 확률변수에 대한 테일러 급수를 이용하여 확률변수의 확률분포로부터 응답의 확률분포를 추정한다[5]. 만일, 확률변수와 응답이 선형관계라면 확률변수의 확률분포로부터 직접적으로 응답의 확률분포를 정확하게 산정할 수 있다. 사장교와 같이 비선형 거동을 하는 구조물은 모멘트 추정법을 이용하여 2 차 이상의 테일러 급수로부터 구조물 응답의 평균, 표준편차, 왜도를 산정하고, 응답의 확률분포를 추정한다. Monte-Carlo simulation 은 Latin Hypercube Sampling (LHS) 기법을 도입하여 임의 자료를 추출하여 구조응답을 수치 모사한다[7]. 또한 대상이 되는 사장교의 응답 확률분포를 정규분포, 대수정규분포, 3 변수 대수정규분포 등으로 가정하여 확률분포를 검증한다[11].

3 장에서 사장교의 확률해석에 사용되는 민감도 계산은 케이블 요소에 대하여 기존의 Ernst 가 제안한 등가트러스 요소가 아닌 탄성현수선 요소를

사용하여 보다 정밀한 민감도 해석을 수행한다[2]. 이계삼차모멘트법에 의한 사장교 거동의 통계적 특성치를 계산하기 위해 케이블지지 구조물의 해석을 위한 강성도 방정식을 유도하고, 확률변수에 따른 응답의 민감도를 계산한다. 즉, 탄성현수선 케이블 요소와 강체 연결 요소에 대한 강성도 행렬을 구성하고 구조물 전체에 대한 강성도 방정식을 구성한다[4]. 유도된 방정식을 이용하여 직접 미분법에 의해 확률변수에 따라 민감도 해석을 수행한다. 해석에 사용된 확률변수로는 케이블 부재의 탄성계수와 거더프레임 자중을 각각 고려하여 상관성이 없는 다 변수 확률변수의 2 차 테일러 급수로부터 응답의 평균, 표준편차, 왜도를 산정한다. 응답의 비선형성에 의한 확률분포는 Monte-Carlo simulation 에 의한 도수분포와 이계삼차모멘트법의 결과를 정규분포와 삼변수 대수정규분포로 가정하여 비교 검증한다.

개발된 프로그램의 정확성은 사장교 예제를 통해 많은 수의 Monte-Carlo simulation 으로 구조해석 한 결과와 제안한 이계삼차모멘트법으로 구한 구조물 응답의 분산 특성과 확률분포를 비교하여 타당성과 효율성을 검증하였다.

2. 응답의 확률분포 추정

이 장에서는 Monte-Carlo simulation 과 이계삼차모멘트법을 이용한 확률분포 추정 방법에 대하여 기술한다. 확률변수와 응답이 선형의 관계라면 확률변수의 확률분포로부터 직접적으로 응답의 확률분포를 정확하게 산정할 수 있다. 비선형 응답함수에 대해서는 근사적인 접근법을 사용하여 확률분포를 추정한다. 비선형 응답함수의 확률분포 추정법에는 Monte-Carlo simulation 을 이용하는 방법[3]과 테일러 급수를 이용한 모멘트 추정법이 있다[1]. Monte-Carlo simulation 을 이용하는 방법에서는 주어진 확률변수의 확률분포로부터 많은 수의 임의 자료를 추출하여 각각에 대한 응답으로부터 평균, 분산 등의 확률 모멘트를 추정한다[7]. 모의 실험을 이용한 확률분포 추정의 경우, 추출자료가 많을수록 응답의 확률분포를 더 정확하게 추정할 수 있지만, 이에 비례하여 해석에 많은 계산이 필요해 진다. 테일러 급수를 이용하는 이계삼차모멘트법을 이용하면 단 한번의 구조해석으로부터 응답의 평균, 표준편차, 왜도를 추정할 수 있기 때문에 수치계산에 소요되는 비용과 시간을 줄일 수 있다.

응답의 분포함수를 추정하기 위해서는 응답의 확률분포를 대수정규분포나 Weibull 분포 등의 특정한 확률분포로 가정하고 모멘트법(method of moments 또는 method of moment estimation)을 이용하여 확률분포의 모수를 추정한다.

2.1 Monte-Carlo simulation 에 의한 확률분포 추정

이 절에서는 Monte-Carlo simulation 을 이용하여 사장교 거동의 응답확률분포를 추정한다. Latin Hypercube Sampling (LHS) 기법을 도입하여 임의 자료를 추출하여 구조응답을 수치 모사한다[7]. 대상이 되는 사장교의 응답 확률분포를 정규분포, 대수정규분포, 3 변수 대수정규분포 등으로 가정한다. 확률분포를 추정하기 위한 임의 자료 추출법으로는 Direct Random Sampling (DRS), LHS 등이 있다. DRS 은 0 과 1 사이에서 직접적으로 무작위 자료를 추출하지만, 그림 2.1(a)와 2.1(b)에서와 같이 LHS 은 0 과 1 사이의 구간을 추출하고자 하는 자료의 개수 M 으로 균등하게 분할하여 각각의 구간 내에서 무작위 자료를 추출한다. 추출된 0 과 1 사이의 무작위 자료로부터 역변환법(inverse transformation method)을 이용하여 주어진 확률분포를 따르는 무작위 자료를 추출한다. k 번째 구간에서 추출된 무작위 자료는 식 (2.1) 과 같다.

$$z_s = \frac{\hat{z}_s}{M} + \frac{k-1}{M} \quad (2.1)$$

여기서, $\hat{z}_s \in [0,1]$ 이다. LHS 의 경우 DRS 에 비하여 비교적 적은 수의 추출로도 가정한 확률분포를 더 정확히 모사할 수 있다.

Monte-Carlo simulation 으로부터 사장교 응답의 평균, 표준편차 등의 확률모멘트와 도수분포를 얻을 수 있다. 이로부터 구조물 응답의 확률분포를

정규분포, 대수정규분포, 3 변수 대수정규분포 등의 특정한 확률분포로 가정할 수 있다.

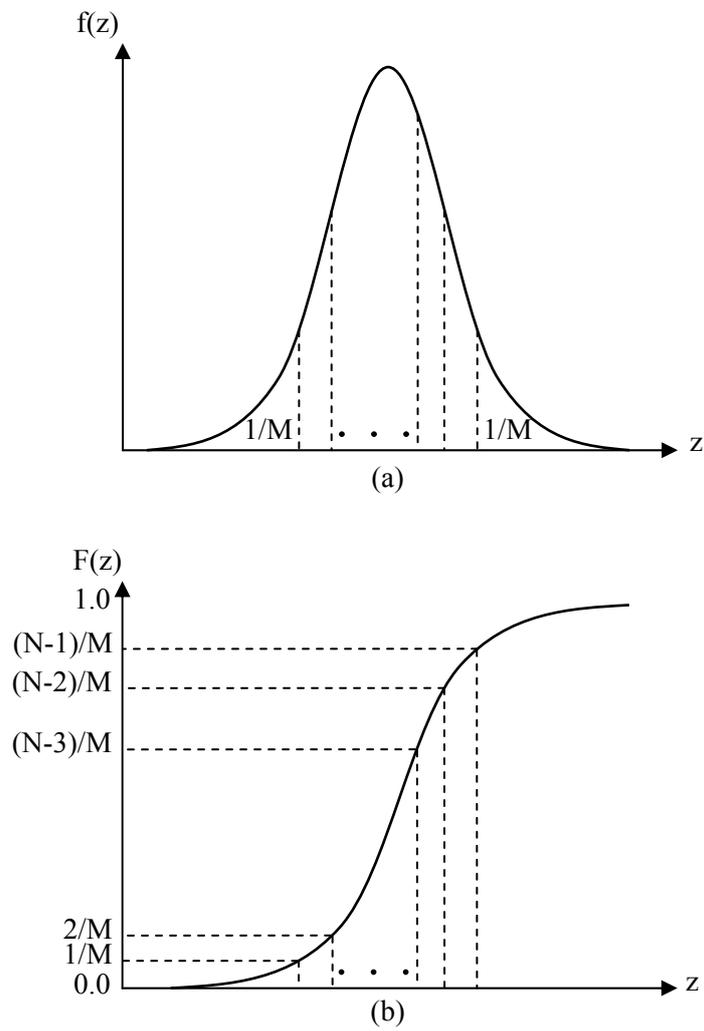


그림 2.1 Latin hypercube selective sampling

2.2 이계삼차모멘트법

모멘트법에서는 응답 ψ 를 확률변수 z 에 대한 테일러 급수를 이용하여 z 의 확률분포로부터 ψ 의 확률분포를 추정한다[1]. 그림 2.2 에서는 응답 ψ 가 일대일 함수 $\psi = \psi(z)$ 일 때, z 의 확률 밀도함수와 ψ 의 확률 밀도함수의 관계를 보여주고 있다. 확률변수의 증분 dz 에 대한 확률은 응답의 증분 $d\psi$ 에 대한 확률과 같다. 이러한 관계로부터 응답의 k 차 모멘트는 다음과 같이 z 의 확률분포부터 유도할 수 있다.

$$E[\psi^k] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^k \phi_{\psi}(\psi) d\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \{\psi(z)\}^k \phi_z(z) dz \quad (2.2)$$

여기서, $\phi_z(z)$ 와 $\phi_{\psi}(\psi)$ 는 각각 확률변수 z 와 응답 z 의 확률밀도함수로서 다음 관계식을 만족한다.

$$\phi_{\psi}(\psi) = \left| \frac{dz}{d\psi} \right| \phi_z(z) \quad (2.3)$$

식 (2.2)와 응답의 테일러 급수를 이용하면 z 의 확률 모멘트로부터 ψ 의 확률 모멘트를 근사적으로 추정할 수 있다[9]. 비선형성이 크지 않은 경우, 응답 ψ 를 확률변수 z 의 일차식으로 근사하면 다음과 같다.

$$\psi(z) \cong \psi(\bar{z}) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \Big|_{\bar{z}} (z - \bar{z}) \quad (2.4)$$

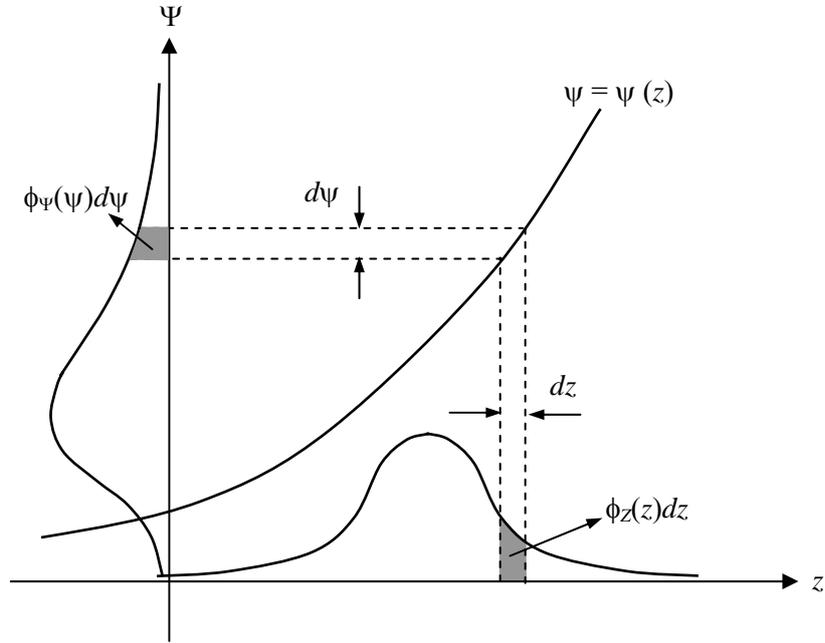


그림 2.2 일대일 함수의 확률밀도함수

여기서, \bar{z} 는 확률변수 z 의 평균이다. 식 (2.4)를 식 (2.2)에 대입하면 응답의 평균과 분산은 각각 다음과 같다.

$$E[\psi] = \bar{\psi} = \psi(\bar{z}) \quad (2.5)$$

$$\sigma_{\psi}^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{\bar{z}} \right)^2 \sigma_z^2 \quad (2.6)$$

확률변수 z 의 확률분포가 정규분포와 같이 2 변수 확률분포로 주어진다면, 확률변수 z 의 평균과 분산으로부터 응답의 확률분포를 추정할 수 있다. 응답 ψ 가 확률변수 z 와 선형의 관계가 아닐지라도 비선형성이 크지 않고, z 의 변동계수 (Coefficient of Variance)가 작을 경우에는 식 (2.5)와

(2.6)을 이용하여 평균과 분산을 근사할 수 있다[9]. 변동계수가 10% 보다 작으면 근사로 인해 발생하는 오차는 1% 정도 이다. 응답의 비선형성이 큰 경우에는 2 차 이상의 테일러 급수로부터 고차의 확률 모멘트를 추정한다.

모멘트법을 다 변수 확률변수를 갖는 비선형 응답 함수에 적용하여 확률분포를 추정한다. 다 변수 확률변수 \mathbf{z} 의 응답 ψ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\Psi = \psi(\mathbf{z}) \quad (2.7)$$

여기서, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ 이다. \mathbf{z} 의 확률분포가 주어져 있을 때, 응답의 확률분포를 추정하기 위해 다음과 같이 확률변수의 평균 $\bar{\mathbf{z}}$ 에서 2 차 테일러 급수로 응답을 근사 한다.

$$\psi(\mathbf{z}) \approx \psi(\bar{\mathbf{z}}) + \sum_i \left(\frac{\partial \psi}{\partial z_i} \right) \Big|_{\bar{\mathbf{z}}} (z_i - \bar{z}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z_i \partial z_j} \right) \Big|_{\bar{\mathbf{z}}} (z_i - \bar{z}_i)(z_j - \bar{z}_j) \quad (2.8)$$

Indicial notation 을 이용하여 식 (2.8)을 다음과 같이 단순화 시킨다.

$$\Psi = \psi_0 + \psi_{,i}(z_i - \bar{z}_i) + \psi_{,ij}(z_i - \bar{z}_i)(z_j - \bar{z}_j) \quad (2.9)$$

여기서, $\psi_0 = \psi(\bar{\mathbf{z}})$ 이고, 평균에서의 1 차와 2 차 편미분 항인 $\psi_{,i}$ 와 $\psi_{,ij}$ 는 각각 다음과 같다.

$$\psi_{,i} = \left. \left(\frac{\partial \psi}{\partial z_i} \right) \right|_{\bar{z}} \quad (2.10)$$

$$\psi_{,ij} = \left. \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z_i \partial z_j} \right) \right|_{\bar{z}} \quad (2.11)$$

식 (2.9)에서 응답 ψ 의 평균은 다음과 같다.

$$E[\psi] = \bar{\psi} = \psi_0 + \psi_{,ij} C_{ij} \quad (2.12)$$

여기서, C_{ij} 는 확률변수 z 의 2차 공분산 행렬이다.

$$C_{ij} = E[(z_i - \bar{z}_i)(z_j - \bar{z}_j)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (z_i - \bar{z}_i)(z_j - \bar{z}_j) \phi_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) dz_i dz_j \quad (2.13)$$

여기서, $\phi_{\mathbf{z}}$ 는 \mathbf{z} 의 결합확률밀도 함수로서 \mathbf{z} 의 확률 변수들이 서로 독립인 경우에는 각각의 확률밀도 함수의 곱이 된다. 응답 ψ 의 k 차 중심 모멘트는 다음과 같이 확률변수 \mathbf{z} 의 확률밀도 함수로부터 산정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu_{\psi}^{(k)} &= E[(\psi - \bar{\psi})^k] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\psi - \bar{\psi})^k \phi_{\psi}(\psi) d\psi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_{,i}(z_i - \bar{z}_i) + \psi_{,ij}(z_i - \bar{z}_i)(z_j - \bar{z}_j) - \psi_{,ij} C_{ij})^k \phi_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \end{aligned} \quad (2.14)$$

식 (2.14)를 이용하여 응답에 대한 2, 3차 중심모멘트는 각각 다음과 같다.

$$\sigma_{\Psi}^2 = \Psi_{,i}\Psi_{,j}C_{ij} + 2\Psi_{,ij}\Psi_{,k}C_{ijk} + \Psi_{,ij}\Psi_{,kl}(C_{ijkl} - C_{kl}C_{ij}) \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\Psi}^{(3)} &= \Psi_{,i}\Psi_{,j}\Psi_{,k}C_{ijk} + 3\Psi_{,ij}\Psi_{,k}\Psi_{,l}(C_{ijkl} - C_{ij}C_{kl}) \\ &+ 3\Psi_{,ij}\Psi_{,kl}\Psi_{,m}(C_{ijklm} - 2C_{ij}C_{klm}) \\ &+ \Psi_{,ij}\Psi_{,kl}\Psi_{,mn}(C_{ijklmn} - 3C_{ij}C_{klmn} + 2C_{ij}C_{kl}C_{mn}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

여기서, C_{ijk} , C_{ijkl} , C_{ijklm} , C_{ijklmn} 는 각각 확률변수 \mathbf{z} 의 3 차, 4 차, 5 차, 6 차 공분산 행렬이다. 확률분포가 좌우로 치우친 정도의 지표인 왜도(skewness) 는 3 차 중심모멘트로부터 다음과 같이 정의된다.

$$\gamma_{\Psi} = \frac{\mu_{\Psi}^{(3)}}{\sigma_{\Psi}^3} \quad (2.17)$$

$\gamma_{\Psi} > 0$ 이면 확률분포가 왼쪽으로 치우쳐서 오른쪽에 긴 꼬리를 갖는다. 2 차의 테일러 급수를 이용하였기 때문에 식 (2.12), (2.15), (2.16)에서 사용된 확률변수의 모멘트 차수는 응답의 모멘트 차수의 두 배이다. 즉, 응답의 왜도를 추정하기 위해서는 확률변수의 6 차 모멘트까지 필요하다. 응답에 대한 4 차, 5 차, 6 차 중심 모멘트는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mu_{\Psi}^{(4)} &= \Psi_{,i}\Psi_{,j}\Psi_{,k}\Psi_{,l}C_{ijkl} + 4\Psi_{,ij}\Psi_{,k}\Psi_{,l}\Psi_{,m}(C_{ijklm} - C_{ij}C_{klm}) \\ &+ 6\Psi_{,ij}\Psi_{,kl}\Psi_{,m}\Psi_{,n}(C_{ijklmn} - 2C_{ij}C_{klmn} + C_{ij}C_{kl}C_{mn}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\mu_{\Psi}^{(5)} = \Psi_{,i}\Psi_{,j}\Psi_{,k}\Psi_{,l}\Psi_{,m}\Psi_{,n}C_{ijklmn} + 5\Psi_{,ij}\Psi_{,k}\Psi_{,l}\Psi_{,m}\Psi_{,n}(C_{ijklmn} - C_{ij}C_{klmn}) \quad (2.19)$$

$$\mu_{\Psi}^{(6)} = \Psi_{,i}\Psi_{,j}\Psi_{,k}\Psi_{,l}\Psi_{,m}\Psi_{,n}C_{ijklmn} \quad (2.20)$$

응답 ψ 와 확률변수 z_c 의 6 차까지의 공분산은 다음과 같이 근사된다.

$$\begin{aligned}
E[(\psi - \bar{\psi})(z_c - \bar{z}_c)] &= \psi_{,i} C_{ic} + \psi_{,ij} C_{ijc} \\
E[(\psi - \bar{\psi})(z_c - \bar{z}_c)^2] &= \psi_{,i} C_{icc} + \psi_{,ij} (C_{ijcc} - C_{ij} C_{cc}) \\
E[(\psi - \bar{\psi})^2 (z_c - \bar{z}_c)] &= \psi_{,i} \psi_{,j} C_{ijc} + 2\psi_{,ij} \psi_{,k} (C_{ijkc} - C_{ij} C_{kc}) \\
&\quad + \psi_{,ij} \psi_{,kl} (C_{ijkl} - C_{kl} C_{ijc} - C_{ij} C_{klc}) \\
E[(\psi - \bar{\psi})(z_c - \bar{z}_c)^3] &= \psi_{,i} C_{iccc} + \psi_{,ij} (C_{ijccc} - C_{ij} C_{ccc}) \\
E[(\psi - \bar{\psi})^2 (z_c - \bar{z}_c)^2] &= \psi_{,i} \psi_{,j} C_{ijcc} + 2\psi_{,ij} \psi_{,k} (C_{ijkcc} - C_{ij} C_{kcc}) \\
&\quad + \psi_{,ij} \psi_{,kl} (C_{ijklcc} - C_{kl} C_{ijcc} - C_{ij} C_{klcc} + C_{ij} C_{kl} C_{cc}) \\
E[(\psi - \bar{\psi})^3 (z_c - \bar{z}_c)] &= \psi_{,i} \psi_{,j} \psi_{,k} C_{ijkc} + 3\psi_{,ij} \psi_{,k} \psi_{,l} (C_{ijklc} - C_{ij} C_{klc}) \\
&\quad + 3\psi_{,ij} \psi_{,kl} \psi_{,m} (C_{ijklmc} - 2C_{ij} C_{klmc} + C_{ij} C_{kl} C_{mc}) \\
E[(\psi - \bar{\psi})(z_c - \bar{z}_c)^4] &= \psi_{,i} C_{icccc} + \psi_{,ij} (C_{ijcccc} - C_{ij} C_{cccc}) \tag{2.21} \\
E[(\psi - \bar{\psi})^2 (z_c - \bar{z}_c)^3] &= \psi_{,i} \psi_{,j} C_{ijccc} + 2\psi_{,ij} \psi_{,k} (C_{ijkccc} - C_{ij} C_{kccc}) \\
E[(\psi - \bar{\psi})^3 (z_c - \bar{z}_c)^2] &= \psi_{,i} \psi_{,j} \psi_{,k} C_{ijkcc} + 3\psi_{,ij} \psi_{,k} \psi_{,l} (C_{ijklcc} - C_{ij} C_{klcc}) \\
E[(\psi - \bar{\psi})^4 (z_c - \bar{z}_c)] &= \psi_{,i} \psi_{,j} \psi_{,k} \psi_{,l} C_{ijklc} \\
&\quad + 4\psi_{,ij} \psi_{,k} \psi_{,l} \psi_{,m} (C_{ijklmc} - C_{ij} C_{klmc}) \\
E[(\psi - \bar{\psi})(z_c - \bar{z}_c)^5] &= \psi_{,i} C_{iccccc} \\
E[(\psi - \bar{\psi})^2 (z_c - \bar{z}_c)^4] &= \psi_{,i} \psi_{,j} C_{ijcccc} \\
E[(\psi - \bar{\psi})^3 (z_c - \bar{z}_c)^3] &= \psi_{,i} \psi_{,j} \psi_{,k} C_{ijkccc} \\
E[(\psi - \bar{\psi})^4 (z_c - \bar{z}_c)^2] &= \psi_{,i} \psi_{,j} \psi_{,k} \psi_{,l} C_{ijklcc}
\end{aligned}$$

$$E[(\Psi - \bar{\Psi})^5 (z_c - \bar{z}_c)] = \Psi_{,i} \Psi_{,j} \Psi_{,k} \Psi_{,l} \Psi_{,m} C_{ijklmc}$$

2.3 확률분포의 모수 추정

앞 절에서는 테일러 급수를 이용하여 확률변수의 확률 모멘트로부터 응답의 평균과 표준편차, 왜도 등을 근사적으로 추정하였다. 평균과 표준편차 등의 통계치를 이용하여 응답의 확률을 계산하기 위해서는 응답의 분포를 적절한 확률분포로 가정하여야 한다. 이 절에서는 평균, 표준편차, 왜도의 3 가지 통계치가 주어진 경우, 모멘트 추정법(Method of Moment Estimation)에 의하여 공학문제 전반에 많이 사용되고 있는 삼변수 대수정규분포를 결정하는 방법에 대하여 기술한다.

(a) 삼변수 대수정규분포($\gamma_z > 0$)

삼변수 대수정규분포의 확률변수 z 는 $\ln(z - z_0)$ 가 정규분포를 이룬다. 여기서, z_0 는 z 의 하한치로서 $z_0 = 0$ 인 경우에 z 는 이변수 대수정규분포를 따른다. z 의 확률밀도함수는 다음과 같이 표준정규분포의 확률밀도함수로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_z(z) &= \frac{1}{(z - z_0)\sigma_{\text{norm}}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(z - z_0) - \mu_{\text{norm}}}{\sigma_{\text{norm}}}\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{(z - z_0)\sigma_{\text{norm}}} \phi(s) \end{aligned} \quad (2.22)$$

여기서, μ_{norm} 와 σ_{norm} 는 각각 정규분포인 $\ln(z - z_0)$ 의 평균과 표준편차이다. ϕ 는 표준정규분포의 확률밀도함수이고, 표준정규분포의 확률변수 s 는 다음 관계식을 만족한다.

$$s = \frac{\ln(z - z_0) - \mu_{\text{norm}}}{\sigma_{\text{norm}}} \quad (2.23)$$

삼변수 대수정규분포를 정의하는 3 개의 모수는 $z_0, \mu_{\text{norm}}, \sigma_{\text{norm}}$ 이다. 식 (2.23)의 관계를 이용하면 대수정규분포의 누적확률을 다음과 같이 표준정규분포의 확률분포함수 $\Phi(s)$ 로부터 산정할 수 있다

$$\Phi_Z(z) = \Phi(s) \quad (2.24)$$

삼변수 대수정규분포의 평균, 표준편차, 왜도는 각각 다음과 같다.

$$\mu_Z = z_0 + \exp\left(\mu_{\text{norm}} + \frac{\sigma_{\text{norm}}^2}{2}\right) \quad (2.25)$$

$$\sigma_Z = (\mu_Z - z_0) \sqrt{\exp(\sigma_{\text{norm}}^2) - 1} \quad (2.26)$$

$$\gamma_Z = 3V_Z + V_Z^3 \quad (2.27)$$

여기서, V_Z 는 이변수 대수정규분포의 변동계수로서 다음과 같이 정의된다.

$$V_Z = \frac{\sigma_Z}{\mu_Z - z_0} = \sqrt{\exp(\sigma_{\text{norm}}^2) - 1} \quad (2.28)$$

삼변수 대수정규분포의 평균 $\hat{\mu}_z$, 표준편차 $\hat{\sigma}_z$, 왜도 $\hat{\gamma}_z$ 가 주어진 경우에 분포에 대한 모수인 $z_0, \mu_{\text{norm}}, \sigma_{\text{norm}}$ 는 다음 방법으로 산정한다. 우선 식 (2.27)의 왜도로부터 V_z 에 대한 다음의 3차 방정식을 얻는다.

$$V_z^3 + 3V_z - \hat{\gamma}_z = 0 \quad (2.29)$$

식 (2.29)의 3차 방정식의 해는 다음과 같다[11].

$$V_z = \left\{ \sqrt[3]{v+w} + \sqrt[3]{v-w} + \frac{1}{\hat{\gamma}_z} \right\}^{-1} \quad (2.30)$$

여기서,

$$v = \frac{1}{\hat{\gamma}_z} \left(\frac{1}{\hat{\gamma}_z^2} + \frac{1}{2} \right), \quad w = \frac{1}{2\hat{\gamma}_z^2} \sqrt{\hat{\gamma}_z^2 + 4} \quad (2.31)$$

이다. 식 (2.30)을 이용하여 왜도 $\hat{\gamma}_z$ 로부터 V_z 를 산정하고, 식 (2.28)의 관계로부터 z_0 는 다음과 같다.

$$z_0 = \hat{\mu}_z - \frac{\hat{\sigma}_z}{V_z} \quad (2.32)$$

정규분포의 표준편차 σ_{norm} 와 평균 μ_{norm} 을 순차적으로 다음과 같이 산정할 수 있다.

$$\sigma_{\text{norm}} = \sqrt{\ln\left[\left(\frac{\hat{\sigma}_z}{\hat{\mu}_z - z_0}\right)^2 + 1\right]} \quad (2.33)$$

$$\mu_{\text{norm}} = \ln(\hat{\mu}_z - z_0) - \frac{\sigma_{\text{norm}}^2}{2} \quad (2.34)$$

(b) 삼변수 대수정규분포($\gamma_z < 0$)

삼변수 대수정규분포의 확률변수 z 는 $\ln(z_0 - z)$ 가 정규분포를 이룬다. 여기서, z_0 는 z 의 상한치로서 $z_0 = 0$ 인 경우에 $-z$ 는 이변수 대수정규분포를 따른다. z 의 확률밀도함수는 다음과 같이 표준정규분포의 확률밀도함수로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_z(z) &= \frac{1}{(z_0 - z)\sigma_{\text{norm}}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(z_0 - z) - \mu_{\text{norm}}}{\sigma_{\text{norm}}}\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{(z_0 - z)\sigma_{\text{norm}}} \phi(s) \end{aligned} \quad (2.35)$$

여기서, μ_{norm} 와 σ_{norm} 는 각각 정규분포인 $\ln(z - z_0)$ 의 평균과 표준편차이다. ϕ 는 표준정규분포의 확률밀도함수이고, 표준정규분포의 확률변수 s 는 다음 관계식을 만족한다.

$$s = \frac{\ln(z_0 - z) - \mu_{\text{norm}}}{\sigma_{\text{norm}}} \quad (2.36)$$

삼변수 대수정규분포를 정의하는 3 개의 모수는 $z_0, \mu_{norm}, \sigma_{norm}$ 이다. 식 (2.36)의 관계를 이용하면 대수정규분포의 누적확률을 다음과 같이 표준정규분포의 확률분포함수 $\Phi(s)$ 로부터 산정할 수 있다.

$$\Phi_Z(z) = \Phi(s) \quad (2.37)$$

삼변수 대수정규분포의 평균, 표준편차, 왜도는 각각 다음과 같다.

$$\mu_Z = z_0 - \exp\left(\mu_{norm} + \frac{\sigma_{norm}^2}{2}\right) \quad (2.38)$$

$$\sigma_Z = (z_0 - \mu_Z) \sqrt{\exp(\sigma_{norm}^2) - 1} \quad (2.39)$$

$$\gamma_Z = -3V_Z - V_Z^3 \quad (2.40)$$

여기서, V_Z 는 이변수 대수정규분포의 변동계수로서 다음과 같이 정의된다.

$$V_Z = \frac{\sigma_Z}{z_0 - \mu_Z} = \sqrt{\exp(\sigma_{norm}^2) - 1} \quad (2.41)$$

삼변수 대수정규분포의 평균 $\hat{\mu}_Z$, 표준편차 $\hat{\sigma}_Z$, 왜도 $\hat{\gamma}_Z$ 가 주어진 경우에 분포에 대한 모수인 $z_0, \mu_{norm}, \sigma_{norm}$ 는 다음 방법으로 산정한다. 우선 식 (2.40)의 왜도로부터 V_Z 에 대한 다음의 3 차 방정식을 얻는다.

$$V_Z^3 + 3V_Z + \hat{\gamma}_Z = 0 \quad (2.42)$$

식 (2.41)의 3 차 방정식의 해는 다음과 같다[11].

$$V_Z = \left\{ \sqrt[3]{v+w} + \sqrt[3]{v-w} - \frac{1}{\hat{\gamma}_Z} \right\}^{-1} \quad (2.43)$$

여기서,

$$v = -\frac{1}{\hat{\gamma}_Z} \left(\frac{1}{\hat{\gamma}_Z^2} + \frac{1}{2} \right), \quad w = \frac{1}{2\hat{\gamma}_Z^2} \sqrt{\hat{\gamma}_Z^2 + 4} \quad (2.44)$$

이다. 식 (2.43)을 이용하여 왜도 $\hat{\gamma}_Z$ 로부터 V_Z 를 산정하고, 식 (2.41)의 관계로부터 z_0 는 다음과 같다.

$$z_0 = \hat{\mu}_Z + \frac{\hat{\sigma}_Z}{V_Z} \quad (2.45)$$

정규분포의 표준편차 σ_{norm} 와 평균 μ_{norm} 을 순차적으로 다음과 같이 산정할 수 있다.

$$\sigma_{norm} = \sqrt{\ln\left[\left(\frac{\hat{\sigma}_Z}{z_0 - \hat{\mu}_Z}\right)^2 + 1\right]} \quad (2.46)$$

$$\mu_{norm} = \ln(z_0 - \hat{\mu}_Z) - \frac{\sigma_{norm}^2}{2} \quad (2.47)$$

3. 사장교 거동의 확률 해석

이 장에서는 이계삼차모멘트법에 의한 사장교 거동의 통계적 특성치를 계산한다. 이를 위해 케이블지지 구조물의 해석을 위한 강성도 방정식을 유도하고, 확률변수에 따른 응답의 민감도를 계산한다. 즉, 탄성현수선 케이블 요소와 강체 연결 요소에 대한 강성도 행렬을 구성하고 구조물 전체에 대한 강성도 방정식을 구성한다. 유도된 방정식을 이용하여 직접 미분법에 의해 민감도 해석을 수행한다.

3.1 탄성현수선 케이블의 강성도 행렬

그림 3.1 은 무응력 길이가 L_0^e 인 케이블 요소 e 의 좌표계를 보이고 있다. 무응력 상태에서의 라그랑지 좌표 s 에 의하여 표시된 케이블의 한 질점은 케이블이 변형한 후에는 카테시안 좌표계에서 \mathbf{x}^e 에 위치하게 된다. $p(s)$ 는 원점으로부터 라그랑지 좌표 s 까지의 변형 후 케이블의 길이를 의미하며 다음과 같이 정의된다.

$$p(s) = \int_0^s \left(\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} ds \quad (3.1a)$$

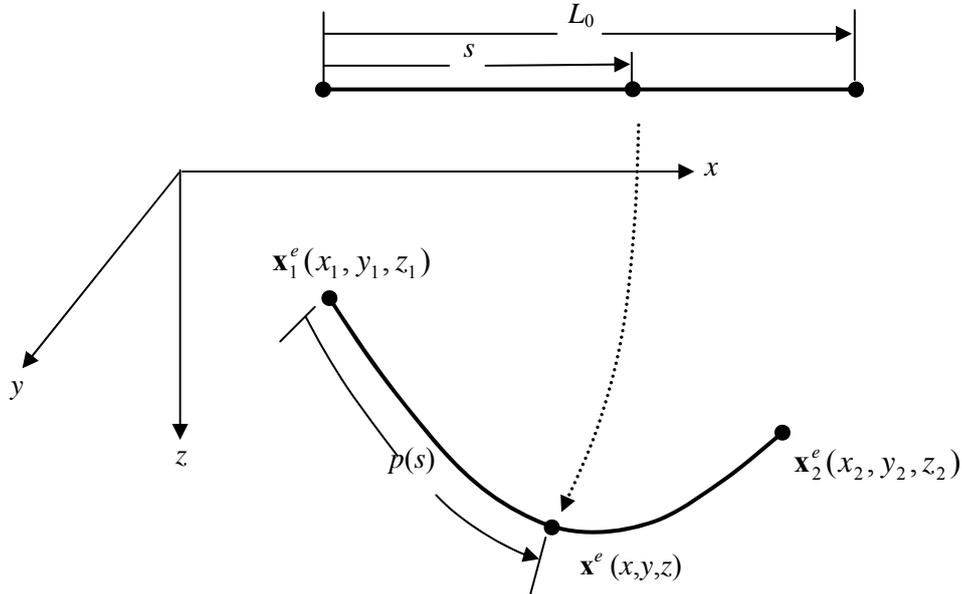


그림 3.1 탄성현수선 케이블에 대한 좌표계

식 (3.1)을 s 에 대하여 미분하여 정리하면 다음 같이 표시된다.

$$\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2 = 1 \quad (3.1b)$$

그림 3.2 는 케이블의 자중만 작용하고 있을 경우 케이블의 1 번 절점에서 임의의 점 \mathbf{x}^e 까지의 자유 물체도를 보이고 있다. 케이블에는 인장력만 작용하게 되므로 평형방정식은 케이블의 인장력에 대하여 다음과 같이 표시된다.

$$T \frac{dx}{dp} + F_x^1 = 0, \quad T \frac{dy}{dp} + F_y^1 = 0, \quad T \frac{dz}{dp} + F_z^1 + ws = 0 \quad (3.2)$$

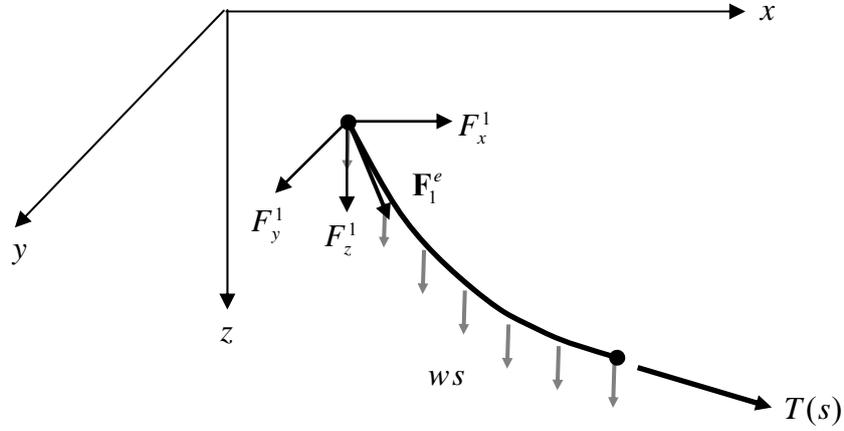


그림 3.2 케이블 세그먼트의 자유 물체도

여기서 T 는 점 $p(s)$ 에서의 장력이고 F_x^1, F_y^1, F_z^1 는 각각 1 번 절점에서 각 좌표 방향으로 작용하는 제단력이며 w 는 변형전 케이블의 단위길이 당 중량이다.

케이블이 소변형 거동을 할 경우 케이블의 변형도는 다음과 같이 정의 된다.

$$\varepsilon = \frac{dp^2 - ds^2}{2ds^2} \cong \frac{dp - ds}{ds} = \frac{dp}{ds} - 1 \quad (3.3)$$

Hooke 의 법칙으로부터 케이블의 인장력을 다음과 같이 표시할 수 있다

$$T = EA\varepsilon \quad (3.4)$$

여기서 E 는 영계수 (Young's Modulus) 이고 A 는 변형 전의 케이블 단면적

이다. 식 (3.3)을 식 (3.4)에 대입하여 p 와 s 의 관계를 구할 수 있다

$$\frac{dp}{ds} = \frac{T}{EA} + 1 \quad (3.5)$$

자중만을 받는 케이블의 거동은 식 (3.1), 식 (3.2) 및 식 (3.5)의 5 개의 지배방정식으로 정의되며 미지수는 x, y, z, p, T 이다. 케이블의 지배방정식을 적분하여 p, T 를 소거하고 x, y, z 를 독립변수 s 로 표현하면 케이블의 형상을 구할 수 있다. 케이블의 지배방정식으로부터 직각 좌표계 x, y, z 와 변형 전의 라그랑지 좌표 s 의 대응관계를 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_0^s \frac{dx}{dp} \frac{dp}{ds} ds + x(0) \\ y(s) &= \int_0^s \frac{dy}{dp} \frac{dp}{ds} ds + y(0) \\ z(s) &= \int_0^s \frac{dz}{dp} \frac{dp}{ds} ds + z(0) \end{aligned} \quad (3.6)$$

식(3.6)에서 케이블 양단의 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x = x_1, y = y_1, z = z_1 \quad \text{at } s = 0 \\ x = x_2, y = y_2, z = z_2 \quad \text{at } s = L_0^e \end{aligned} \quad (3.7)$$

식 (3.1b)와 식 (3.2)로부터 케이블의 장력을 1 번 절점의 재단력과 케이블의 자중에 대하여 표시할 수 있다.

$$T(s) = \sqrt{(F_x^1)^2 + (F_y^1)^2 + (F_z^1 + ws)^2} \quad (3.8)$$

식(3.8)을 식(3.2)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 관계식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dp} &= -\frac{F_x^1}{\sqrt{(F_x^1)^2 + (F_y^1)^2 + (F_z^1 + ws)^2}} \\ \frac{dy}{dp} &= -\frac{F_y^1}{\sqrt{(F_x^1)^2 + (F_y^1)^2 + (F_z^1 + ws)^2}} \\ \frac{dz}{dp} &= -\frac{(F_z^1)^2 + ws}{\sqrt{(F_x^1)^2 + (F_y^1)^2 + (F_z^1 + ws)^2}} \\ \frac{dp}{ds} &= \frac{1}{EA} \sqrt{(F_x^1)^2 + (F_y^1)^2 + (F_z^1 + ws)^2} + 1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

식(3.5)와 식(3.8) 및 (3.9)의 관계식을 식 (3.6)에 대입하여 적분하고, $s = 0$ 에서의 경계 조건을 이용하면 자중이 재하 된 케이블의 처짐 곡선을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} x(s) &= x_1 - \frac{F_x^1}{EA} s - \frac{F_x^1}{w} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{F_z^1 + ws}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{F_z^1}{H} \right) \right\} \\ y(s) &= y_1 - \frac{F_y^1}{EA} s - \frac{F_y^1}{w} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{F_z^1 + ws}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{F_z^1}{H} \right) \right\} \\ z(s) &= z_1 - \frac{F_z^1}{EA} s - \frac{ws^2}{2EA} - \frac{1}{w} \left\{ \sqrt{H^2 + (F_z^1 + ws)^2} - \sqrt{H^2 + (F_z^1)^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

여기서 $H = \sqrt{(F_x^1)^2 + (F_y^1)^2}$ 이다. 식(3.10)에 $s = L_0^e$ 에서 경계조건을 적용하면 다음과 같은 탄성현수선 케이블의 적합조건식을 얻는다[4].

$$\begin{aligned}
x_2 - x_1 = \phi_x &= -\frac{F_x^1}{EA} L_0^e - \frac{F_x^1}{w} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{F_z^1 + wL_0^e}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{F_z^1}{H} \right) \right\} \\
y_2 - y_1 = \phi_y &= -\frac{F_y^1}{EA} L_0^e - \frac{F_y^1}{w} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{F_z^1 + wL_0^e}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{F_z^1}{H} \right) \right\} \\
z_2 - z_1 = \phi_z &= -\frac{F_z^1}{EA} L_0^e - \frac{w(L_0^e)^2}{2EA} \\
&\quad - \frac{1}{w} \left\{ \sqrt{H^2 + (F_z^1 + wL_0^e)^2} - \sqrt{H^2 + (F_z^1)^2} \right\}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

식 (3.11)의 케이블의 적합조건식은 다음과 같이 매트릭스 형태로 표시할 수 있다.

$$\mathbf{B}\mathbf{x}^e = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{F}_1^e, L_0^e) \tag{3.12}$$

여기서 $\mathbf{x}^e = (\mathbf{x}_1^e, \mathbf{x}_2^e)^T = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)^T$ 이며 \mathbf{B} 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

그림 3.3 에 보인 어떤 케이블 요소 e 의 평형상태에서의 양단 절점 위치가 기지의 기준 위치 \mathbf{x}_0^e 에서 절점 1 과 절점 2 에서 발생한 변위 $\mathbf{u}_1^e, \mathbf{u}_2^e$ 에 의하여 결정되었다면 식 (3.12)는 다음과 같이 표시된다.

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}_0^e + \mathbf{u}^e) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{F}_1^e, L_0^e) \tag{3.14}$$

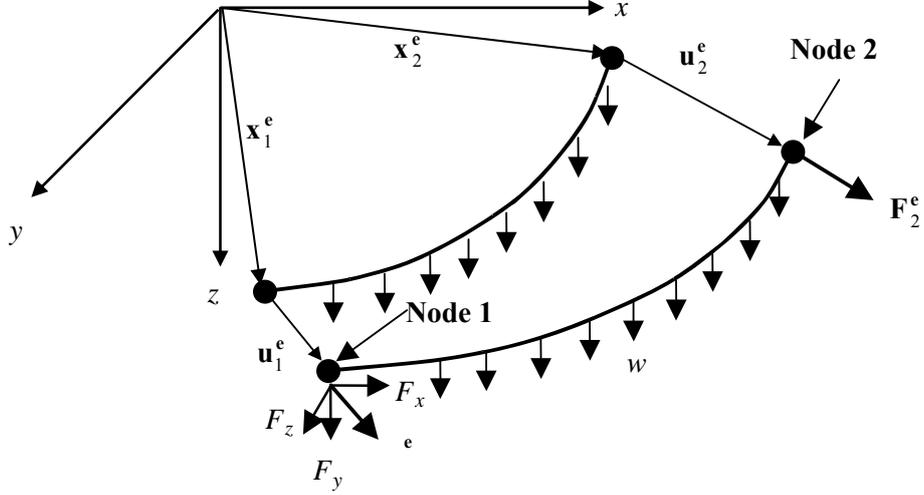


그림 3.3 변위가 발생한 탄성 현수선의 두 절점의 상대적 위치

케이블 요소 e 의 외적 평형 조건은 다음과 같다.

$$\mathbf{F}_2^e = -\mathbf{F}_1^e - \mathbf{w}L_0^e \quad (3.15)$$

여기서 $\mathbf{w} = (0, 0, w)^T$ 이다. 변위법에 기초한 일반적인 유한요소해석법을 적용하기 위하여 케이블 요소 양단의 절점력을 절점 변위에 대하여 표시하여야 한다. 그러나 식 (3.11)은 비선형 방정식이므로 증분형 관계식을 사용하여야 한다. 식 (3.14)와 식 (3.15)의 증분식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}^e &= \Delta\boldsymbol{\phi}(\mathbf{F}_1^e, L_0^e) \\ \Delta\mathbf{F}_2^e &= -\Delta\mathbf{F}_1^e \end{aligned} \quad (3.16)$$

식 (3.11)을 Taylor 전개하여 1 차 항까지 만 포함시키면 다음과 같다.

$$\Delta\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{F}_1^e, L_0^e) = \begin{pmatrix} \Delta\phi_x^e \\ \Delta\phi_y^e \\ \Delta\phi_z^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_x^e}{\partial F_x} \Delta F_x + \frac{\partial\phi_x^e}{\partial F_y} \Delta F_y + \frac{\partial\phi_x^e}{\partial F_z} \Delta F_z \\ \frac{\partial\phi_y^e}{\partial F_x} \Delta F_x + \frac{\partial\phi_y^e}{\partial F_y} \Delta F_y + \frac{\partial\phi_y^e}{\partial F_z} \Delta F_z \\ \frac{\partial\phi_z^e}{\partial F_x} \Delta F_x + \frac{\partial\phi_z^e}{\partial F_y} \Delta F_y + \frac{\partial\phi_z^e}{\partial F_z} \Delta F_z \end{pmatrix} = \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{F}_1^e} \Delta \mathbf{F}_1^e \quad (3.17)$$

식 (3.17)에 대한 자세한 표현식은 부록 A 에 기술되어 있다. 식 (3.17)을 식 (3.16)에 대입하여 절점력의 증분에 대하여 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F}_1^e &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{F}_1^e} \right)^{-1} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}^e = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{F}_1^e} \right)^{-1} (-\Delta \mathbf{u}_1^e + \Delta \mathbf{u}_2^e) = \mathbf{k}_c (-\Delta \mathbf{u}_1^e + \Delta \mathbf{u}_2^e) \\ \Delta \mathbf{F}_2^e &= -\Delta \mathbf{F}_1^e = \mathbf{k}_c (\Delta \mathbf{u}_1^e - \Delta \mathbf{u}_2^e) \end{aligned} \quad (3.18)$$

식 (3.18)을 한 개의 행렬식으로 표시하면 최종적인 증분형 케이블 요소 강성도 행렬식을 구할 수 있다.

$$\Delta \mathbf{F}_c^e = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{F}_1^e \\ \Delta \mathbf{F}_2^e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_c & \mathbf{k}_c \\ \mathbf{k}_c & -\mathbf{k}_c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_1^e \\ \Delta \mathbf{u}_2^e \end{pmatrix} = \mathbf{K}_c^e \Delta \mathbf{u}^e \quad (3.19)$$

3.2 탄성현수선 케이블요소를 이용한 민감도 계산

이 절에서는 사장교 구조물의 설계변수 중 케이블 부재의 탄성계수와 거더프레임 자중을 확률 변수로 가정하여 민감도를 계산한다. 이계삼차모멘트법에 의한 확률해석에 필요한 민감도 계산은 탄성현수선 케이블 요소와

케이블 지지구조물의 강성도 방정식을 이용하여 직접 미분을 통해 구한다. 사장교와 같이 구조물 응답의 비선형을 설명하기 위해 2 차 민감도까지 유도한다.

(a) 케이블 부재의 탄성계수가 확률분포를 갖는 경우

케이블 부재의 탄성계수에 대한 1 차민감도를 구하기 위하여 식 (3.14)에 정의된 적합조건식을 이용한다. 식 (3.14)를 케이블 부재의 탄성계수에 대하여 미분하여 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial E_i^e} = \frac{\partial \phi^e}{\partial E_i^e} + \frac{\partial \phi^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \frac{\partial \mathbf{F}_1^e}{\partial E_i^e} \quad (3.20)$$

식 (3.20)을 케이블 부재의 탄성계수에 대한 민감도에 대하여 표시하고, 케이블 부재의 외적 평형방정식인 식 (3.15)를 케이블 부재의 탄성계수에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}_1^e}{\partial E_i^e} &= - \left(\frac{\partial \phi^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \right)^{-1} \frac{\partial \phi^e}{\partial E_i^e} + \left(\frac{\partial \phi^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \right)^{-1} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial E_i^e} = \mathbf{k}_m^e + \mathbf{k}_c^e \left(\frac{\partial \mathbf{u}_2^e}{\partial E_i^e} - \frac{\partial \mathbf{u}_1^e}{\partial E_i^e} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{F}_2^e}{\partial E_i^e} &= \frac{\partial (-\mathbf{F}_1^e - \mathbf{w}L_0^e)}{\partial E_i^e} = -\mathbf{k}_m^e - \mathbf{k}_c^e \left(\frac{\partial \mathbf{u}_2^e}{\partial E_i^e} - \frac{\partial \mathbf{u}_1^e}{\partial E_i^e} \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

식 (3.21)을 다음과 같은 단일 행렬식으로 표시할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{F}_c^e}{\partial E_i^e} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_c^e & \mathbf{k}_c^e \\ \mathbf{k}_c^e & -\mathbf{k}_c^e \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial E_i^e} + \begin{pmatrix} \mathbf{k}_m^e \\ -\mathbf{k}_m^e \end{pmatrix} = \mathbf{K}_c^e \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial E_i^e} + \mathbf{K}_m^e \quad (3.22)$$

변위의 1 차민감도는 케이블 지지 구조물의 강성도 방정식을 직접 미분하여 구할 수 있다. 케이블 지지구조물의 강성도 방정식은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\mathbf{K}_F \mathbf{u} + \sum_e \mathbf{F}_c^e(E^e, \mathbf{u}^e(E^e)) = \mathbf{P} \quad (3.23)$$

여기서 \mathbf{F}_c^e 는 케이블 부재 e 의 장력이며, 식 (3.11)에서 주어진 탄성현수선 방정식에 의하여 정의된다. 식 (3.23)을 케이블 부재의 탄성계수에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial E_i} + \sum_e \frac{\partial \mathbf{F}_c^e}{\partial E_i^e} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial E_i} = 0 \quad (3.24)$$

외부하중은 케이블 부재의 탄성계수에는 무관하기 때문에 하중에 대한 미분항은 영이다. 따라서 식 (3.22)를 식 (3.24)에 대입하여 전체 구조물에 대한 민감도 식으로 조합하면 변위의 케이블 부재의 탄성계수에 대한 민감도 관계식을 구할 수 있다.

$$\mathbf{K}_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial E_i} + \sum_e (\mathbf{K}_c^e \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial E_i^e} + \mathbf{K}_m^e) = \mathbf{K}_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial E_i} + \mathbf{K}_c \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial E_i} + \mathbf{K}_m = 0 \quad (3.25)$$

식 (3.25)를 풀어 변위의 케이블 부재의 탄성계수에 대한 1 차민감도를 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial E_i} = -(\mathbf{K}_F + \mathbf{K}_c)^{-1} \mathbf{K}_m \quad (3.26)$$

케이블 부재의 탄성계수에 대한 2 차민감도를 구하기 위하여 식 (3.20)에 계산된 1 차 미분식을 케이블 부재의 탄성계수에 대하여 한번 더 미분하여 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{B} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial E_j \partial E_i} = \frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial E_j \partial E_i} + \frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial E_j \partial \mathbf{F}_1^e} \frac{\partial \mathbf{F}_1^e}{\partial E_i} + \frac{\partial \varphi^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \frac{\partial^2 \mathbf{F}_1^e}{\partial E_j \partial E_i} \quad (3.27)$$

식 (3.27)을 장력의 탄성계수에 대한 민감도에 대하여 표시하고, 케이블 부재의 외적 평형방정식인 식 (3.15)를 케이블 부재의 탄성계수에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{F}_1^e}{\partial E_j \partial E_i} &= - \left(\frac{\partial \varphi^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \right)^{-1} \frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial E_j \partial E_i} - \left(\frac{\partial \varphi^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \right)^{-1} \frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial E_j \partial \mathbf{F}_1^e} \frac{\partial \mathbf{F}_1^e}{\partial E_i} \\ &\quad + \left(\frac{\partial \varphi^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \right)^{-1} \mathbf{B} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial E_j \partial E_i} = \mathbf{k}_{m2}^e + \mathbf{k}_n^e + \mathbf{k}_c^e \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_2^e}{\partial E_j \partial E_i} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1^e}{\partial E_j \partial E_i} \right) \quad (3.28) \\ \frac{\partial^2 \mathbf{F}_2^e}{\partial E_j \partial E_i} &= - \frac{\partial^2 \mathbf{F}_1^e}{\partial E_j \partial E_i} = -\mathbf{k}_{m2}^e - \mathbf{k}_n^e - \mathbf{k}_c^e \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_2^e}{\partial E_j \partial E_i} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1^e}{\partial E_j \partial E_i} \right) \end{aligned}$$

식 (3.28)을 다음과 같은 단일 행렬식으로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{F}_c^e}{\partial E_j^e \partial E_i^e} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_c^e & \mathbf{k}_c^e \\ \mathbf{k}_c^e & -\mathbf{k}_c^e \end{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^e}{\partial E_j^e \partial E_i^e} + \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{m2}^e \\ -\mathbf{k}_{m2}^e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{k}_n^e \\ -\mathbf{k}_n^e \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{K}_c^e \frac{\partial^2 \mathbf{u}^e}{\partial E_j^e \partial E_i^e} + \mathbf{K}_{m2}^e + \mathbf{K}_n^e
\end{aligned} \tag{3.29}$$

변위의 2 차민감도는 케이블 부재의 탄성계수에 대해 미분된 식 (3.24)를 한번 더 직접 미분하여 구할 수 있다.

$$\mathbf{K}_F \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{E}_j \partial \mathbf{E}_i} + \sum_e \frac{\partial^2 \mathbf{F}_c^e}{\partial E_j^e \partial E_i^e} = 0 \tag{3.30}$$

따라서 식 (3.29)을 식 (3.30)에 대입하여 전체 구조물에 대한 민감도 식으로 조합하면 변위의 케이블 부재의 탄성계수에 대한 민감도 관계식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_F \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{E}_j \partial \mathbf{E}_i} + \sum_e (\mathbf{K}_c^e \frac{\partial^2 \mathbf{u}^e}{\partial E_j^e \partial E_i^e} + \mathbf{K}_{m2}^e + \mathbf{K}_n^e) &= \\
\mathbf{K}_F \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{E}_j \partial \mathbf{E}_i} + \mathbf{K}_c \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial E_j \partial E_i} + \mathbf{K}_{m2} + \mathbf{K}_n &= 0
\end{aligned} \tag{3.31}$$

식 (3.31)을 풀어 변위의 케이블 부재의 탄성계수에 대한 2 차민감도를 구할 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{E}_j \partial \mathbf{E}_i} = -(\mathbf{K}_F + \mathbf{K}_c)^{-1} (\mathbf{K}_{m2} + \mathbf{K}_n) \tag{3.32}$$

(b) 거더프레임 자중이 확률분포를 갖는 경우

거더프레임 자중에 대한 1 차민감도를 구하기 위하여 식 (3.14)에 정의된 적합조건식을 이용한다. 식 (3.14)를 거더프레임 자중에 대하여 미분하여 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial \mathbf{w}_{Fi}} = \frac{\partial \varphi^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \frac{\partial \mathbf{F}_1^e}{\partial \mathbf{w}_{Fi}} \quad (3.33)$$

식 (3.33)을 거더프레임 자중에 대한 민감도에 대하여 표시하고, 케이블 부재의 외적 평형방정식인 식 (3.15)를 거더프레임 자중에 대하여 미분하면 다음과 같다

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}_1^e}{\partial \mathbf{w}_{Fi}} &= \left(\frac{\partial \varphi^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \right)^{-1} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial \mathbf{w}_{Fi}} = \mathbf{k}_c^e \left(\frac{\partial \mathbf{u}_2^e}{\partial \mathbf{w}_{Fi}} - \frac{\partial \mathbf{u}_1^e}{\partial \mathbf{w}_{Fi}} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{F}_2^e}{\partial \mathbf{w}_{Fi}} &= \frac{\partial (-\mathbf{F}_1^e - \mathbf{w}_c L_0^e)}{\partial \mathbf{w}_{Fi}} = -\mathbf{k}_c^e \left(\frac{\partial \mathbf{u}_2^e}{\partial \mathbf{w}_{Fi}} - \frac{\partial \mathbf{u}_1^e}{\partial \mathbf{w}_{Fi}} \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

식 (3.34)를 다음과 같은 단일 행렬식으로 표시할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{F}_c^e}{\partial \mathbf{w}_{Fi}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_c^e & \mathbf{k}_c^e \\ \mathbf{k}_c^e & -\mathbf{k}_c^e \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial \mathbf{w}_{Fi}} = \mathbf{K}_c^e \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial \mathbf{w}_{Fi}} \quad (3.35)$$

변위의 1 차민감도는 케이블 지지 구조물의 강성도 방정식을 직접 미분하여 구할 수 있다. 식 (3.23)을 거더프레임 자중에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{w}_{Fi}} + \sum_e \frac{\partial \mathbf{F}_c^e}{\partial \mathbf{w}_{Fi}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{w}_{Fi}} \quad (3.36)$$

식 (3.35)을 식 (3.36)에 대입하여 전제 구조물에 대한 민감도 식으로 조합하면 변위의 거더프레임 자중에 대한 1차 민감도 관계식을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{w}_{Fi}} = (\mathbf{K}_F + \mathbf{K}_c)^{-1} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{w}_{Fi}} \quad (3.37)$$

거더프레임 자중에 대한 변위의 2차민감도는 식 (3.36)을 한번 더 직접 미분하여 구할 수 있다. 그러나 식 (3.36)의 하중에 대한 2차 미분항은 영이므로 거더프레임 자중에 대한 변위의 2차 민감도는 존재하지 않는다. 여기서, 거더프레임 자중이 확률변수인 경우에는 응답과의 관계가 선형관계 있음을 예측할 수 있다.

(c) 케이블 부재의 탄성계수와 거더프레임 자중이 확률분포를 갖는 경우
 케이블 부재의 탄성계수와 거더프레임 자중에 대한 1차민감도를 구하기 위하여 식 (3.14)에 정의된 적합조건식을 이용한다. 식 (3.14)을 케이블 부재의 탄성계수와 거더프레임 자중에 대하여 미분하여 다음과 같은 식을 얻을 수 있다. 여기서 각각의 확률변수에 대한 1차민감도는 식 (3.26), (3.37)과 같다. 2차 민감도 계산은 케이블 부재의 탄성계수와 거더프레임 자중의 조합된 미분식만 표현한다.

$$\mathbf{B} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^e}{\partial E_i \partial \mathbf{w}_F} = \frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial E_i \partial \mathbf{F}_1^e} \frac{\partial \mathbf{F}_1^e}{\partial \mathbf{w}_F} + \frac{\partial \varphi^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \frac{\partial^2 \mathbf{F}_1^e}{\partial E_i \partial \mathbf{w}_F} \quad (3.38)$$

식 (3.38)을 케이블 부재의 탄성계수와 거더프레임 자중에 대한 민감도에 대하여 표시하고, 케이블 부재의 외적 평형방정식인 식 (3.15)을 케이블 부재의 탄성계수와 거더프레임 자중에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{F}_1^e}{\partial E_i \partial \mathbf{w}_F} &= - \left(\frac{\partial \varphi^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \right)^{-1} \frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial E_i \partial \mathbf{F}_1^e} \left(\frac{\partial \varphi^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \right)^{-1} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial \mathbf{w}_F} + \left(\frac{\partial \varphi^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \right)^{-1} \mathbf{B} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^e}{\partial E_i \partial \mathbf{w}_F} \\ &= \mathbf{k}_l^e (\mathbf{k}_c^e (\frac{\partial \mathbf{u}_2^e}{\partial \mathbf{w}_F} - \frac{\partial \mathbf{u}_1^e}{\partial \mathbf{w}_F})) + \mathbf{k}_c^e (\frac{\partial^2 \mathbf{u}_2^e}{\partial E_i \partial \mathbf{w}_F} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1^e}{\partial E_i \partial \mathbf{w}_F}) \\ \frac{\partial^2 \mathbf{F}_2^e}{\partial E_i \partial \mathbf{w}_F} &= -\mathbf{k}_l^e (\mathbf{k}_c^e (\frac{\partial \mathbf{u}_2^e}{\partial \mathbf{w}_F} - \frac{\partial \mathbf{u}_1^e}{\partial \mathbf{w}_F})) - \mathbf{k}_c^e (\frac{\partial^2 \mathbf{u}_2^e}{\partial E_i \partial \mathbf{w}_F} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1^e}{\partial E_i \partial \mathbf{w}_F}) \end{aligned} \quad (3.39)$$

식 (3.39)를 다음과 같은 단일 행렬식으로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{F}_c^e}{\partial E_i \partial \mathbf{w}_F} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_c^e & \mathbf{k}_c^e \\ \mathbf{k}_c^e & -\mathbf{k}_c^e \end{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^e}{\partial E_i \partial \mathbf{w}_F} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_l^e & 0 \\ 0 & -\mathbf{k}_l^e \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -\mathbf{k}_c^e & \mathbf{k}_c^e \\ \mathbf{k}_c^e & -\mathbf{k}_c^e \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial \mathbf{w}_F} \right) \\ &= \mathbf{K}_c^e \frac{\partial^2 \mathbf{u}^e}{\partial E_i \partial \mathbf{w}_F} + \mathbf{K}_l^e (\mathbf{K}_c^e \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial \mathbf{w}_F}) \end{aligned} \quad (3.40)$$

변위의 2 차민감도는 식 (3.23)의 케이블 지지 구조물의 강성도 방정식을 각각의 확률변수로 직접 미분하여 구할 수 있다.

$$\mathbf{K}_F \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial E_i \partial \mathbf{w}_F} + \sum_e \frac{\partial^2 \mathbf{F}_c^e}{\partial E_i \partial \mathbf{w}_F} = \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial E_i \partial \mathbf{w}_F} = 0 \quad (3.41)$$

따라서 식 (3.40)을 식 (3.41)에 대입하여 전체 구조물에 대한 민감도 식으로 조합하면 변위의 케이블 부재의 탄성계수와 거더프레임 자중에 대한 민감도 관계식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_F \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{E}_i \partial \mathbf{w}_F} + \sum_e \left(\mathbf{K}_c^e \frac{\partial^2 \mathbf{u}^e}{\partial \mathbf{E}_i \partial \mathbf{w}_F} + \mathbf{K}_l^e \left(\mathbf{K}_c^e \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial \mathbf{w}_F} \right) \right) \\ = \mathbf{K}_F \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{E}_i \partial \mathbf{w}_F} + \mathbf{K}_c \frac{\partial^2 \mathbf{u}^e}{\partial \mathbf{E}_i \partial \mathbf{w}_F} + \mathbf{K}_l \left(\mathbf{K}_c \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{w}_F} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

식 (3.42)를 풀어 변위의 케이블 부재의 탄성계수와 거더프레임 자중에 대한 2 차민감도를 구할 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}^e}{\partial \mathbf{E}_i \partial \mathbf{w}_F} = -(\mathbf{K}_F + \mathbf{K}_c)^{-1} \left(\mathbf{K}_l \left(\mathbf{K}_c \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{w}_F} \right) \right) \quad (3.43)$$

4. 해석 예제

4.1 팬 타입 사장교

제안된 이계삼차모멘트법에 의한 사장교 거동의 분산 특성과 응답 확률분포를 추정하고자 팬 타입 사장교 모델을 대상으로 케이블 부재의 탄성계수와 거더프레임 자중의 확률분포를 고려하여 확률해석을 수행하였다. 그림 4.1 의 팬 타입 사장교는 전체 길이가 610m 이고, 주탑 높이가 61m 이다. 케이블은 좌측 1 번부터 12 개인 사장교이다. 자세한 팬 타입 사장교의 제원은 표 4.1 에 주어져 있다.

그림 4.1 의 팬 타입 사장교 모델을 대상으로 케이블 부재의 탄성계수와 거더프레임 자중에 대한 다음의 세가지 확률분포에 대하여 확률 해석을 수행한다.

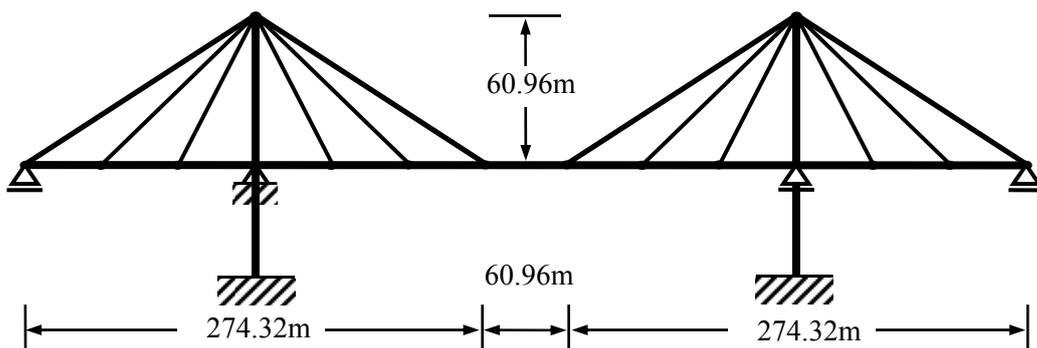


그림 4.1 팬 타입 사장교의 기하형상

표 4.1 팬 타입 사장교의 물성치

케 이 블		주 형
바 깥 쪽	안 쪽	
$E_c = 207 \text{ GPa}$ $A_c = 0.042 \text{ m}^2$ $w_c = 3.2 \text{ KN/m}$	$E_c = 207 \text{ GPa}$ $A_c = 0.016 \text{ m}^2$ $w_c = 1.2 \text{ KN/m}$	$E_g = 207 \text{ GPa}$ $A_g = 0.320 \text{ m}^2$ $I_z = 1.131 \text{ m}^4$ $w_g = 87.5 \text{ KN/m}$

Case 1: 각 케이블 부재의 탄성계수가 변동계수 5%의 정규분포

Case 2: 거더프레임 자중이 변동계수 5%의 정규분포

Case 3: 각 케이블 부재의 탄성계수와 거더프레임 자중이 각각 변동계수 5%의 정규분포

세가지 확률분포에 대하여 제안된 방법으로 응답의 분산 특성과 확률분포를 추정하고 각각 Monte-Carlo simulation 을 수행한 결과와 비교하였다. 보다 정확한 비교를 위해 Monte-Carlo simulation 은 1,000,000 개의 임의 자료를 Latin Hypercube Sampling 법으로 추출하여 해석하였다.

4.1.1 Case 1: 각 케이블 부재의 탄성계수가 변동계수 5%의 정규분포

제안된 테일러 급수를 이용한 모멘트법과 Monte-Carlo simulation 으로 거더 변위, 거더 모멘트, 케이블 장력에 대한 평균과 표준편차, 왜도를 추정하였다. 표 4.2 는 제안된 모멘트법과 Monte-Carlo simulation 의 결과를 비교한 것이다. 그림 4.1 의 예제 사장교의 응답 중에서 거더 중앙부 수직변위, 거

더 모멘트, 6 번 케이블 장력의 분포에 대하여 비교한다. 표 4.2 에서 제안된 모멘트법의 경우 2 차의 테일러 급수를 이용할수록 더 정확한 해석 결과를 보여준다. 2 차 테일러 급수를 이용할 경우 중앙 처짐의 결과가 6.15%에서 1.52%로 차이가 줄어들었고, 표준편차 역시 정도가 향상되는 것을 알 수 있다. 왜도의 경우 1 차 모멘트법으로는 사장교 구조물의 비선형성에 의한 왜도를 설명할 수 없으므로 2 차 이상의 모멘트법이 필요하게 된다. 표 4.2 의 처짐의 경우, 2 차 모멘트법으로 추정된 왜도가 Monte-Carlo simulation 와 비교해 1.79%의 오차를 보이고 있어 2 차 모멘트법으로도 충분히 왜도를 설명할 수 있다. 또한, 거더 중앙 지점에서의 모멘트와 6 번 케이블의 장력에 대한 분포도 Monte-Carlo simulation 과 비교해 2 차 테일러 급수를 이용한 모멘트법이 1 차 모멘트법 보다 정확한 해석 결과를 보여준다. 그림 4.2, 4.3, 4.4 는 각각 거더의 수직처짐, 거더 모멘트, 케이블 장력에 대한 모든 절점에서의 분포를 Monte-Carlo simulation 과 비교한다. 마찬가지로, 모든 절점에서 2 차 모멘트법이 더 정확한 값을 가지는 것을 확인할 수 있다. 또한, 2 차 모멘트법으로 구한 평균과 분산을 통해, 평균에서 $\pm 2\sigma$ 영역을 설정함으로써 신뢰도 95.45%의 수준에서의 분산 특성을 파악할 수 있다. 이는 시공 직후의 확률변수에 따른 사장교 거동의 특성을 파악 할 수 있다. 그림 4.2 에서 수직처짐의 경우 평균과 비교해 볼 때 분산 특성이 크게 나타나는 것을 볼 수 있는데, 이는 시공 직후의 거더 수직 처짐은 없는 것으로 설계 하기 때문에 분산으로 인한 차이가 크게 나타나고 있다.

표 4.2 응답의 평균, 표준편차, 왜도 (Case 1)

	Monte-Carlo simulation	모멘트법 (1 st -order)	모멘트법 (2 nd -order)
거더 중앙 수직 처짐			
평균 (cm)	- 2.633	- 2.471	- 2.673
표준편차 (cm)	2.133	2.123	2.127
왜도	- 0.112	-	- 0.110
변동계수	81.01 %	85.92 %	79.57 %
거더 중앙 부재력(모멘트)			
평균 (tonf · m)	-1923.441	-1918.319	-1924.199
표준편차 (tonf · m)	124.408	123.889	124.089
왜도	-0.100	-	-0.105
변동계수	6.47 %	6.46 %	6.45 %
6 번 케이블 장력			
평균 (tonf)	1223.385	1223.639	1223.422
표준편차 (tonf)	28.583	28.482	28.530
왜도	-0.054	-	-0.083
변동계수	2.34 %	2.33 %	2.33 %

그림 4.5, 4.6, 4.7 은 Monte-Carlo simulation 으로 얻어진 도수분포와 표 4.2 의 2 차 모멘트법으로 산정한 평균, 표준편차, 왜도로부터 추정된 확률밀도함수를 비교한 것이다. 그림 4.5 는 Monte-Carlo simulation 에 의한 거더 중앙 부의 수직 처짐의 분포가 표 4.2 에서와 같이 왜도가 음수인 오른쪽으로 치우친 분포를 보이고 있다. 이는 기존의 Lognormal 분포 형태의 그림과는 상반되는 분포이다. 2 장에서 설명된 왜도가 음수를 갖는 오른쪽으로 치

우친 삼변수 대수정규분포로 가정하여 확률분포를 추정한다. 거더 중앙부 수직처짐의 경우, 왜도가 음수인 삼변수 대수정규분포로 가정하고 추정한 결과, 정규분포로 가정한 결과보다 Monte-Carlo simulation 에 의한 분포와 잘 일치하고 있다. 그림 4.6 의 거더 중앙 절점의 모멘트에 대한 확률분포는 왜도가 양수인 왼쪽으로 치우친 삼변수 대수정규분포와 더 잘 일치한다. 그림 4.7 의 케이블 장력에 대한 확률분포는 삼변수 대수정규분포와 정규분포를 비교한 결과, 두 분포 모두 Monte-Carlo simulation 과 일치하고 있는데, 이는 장력에 대한 응답확률분포는 가정한 확률변수와 같은 정규분포 형태를 갖는다고 판단된다.

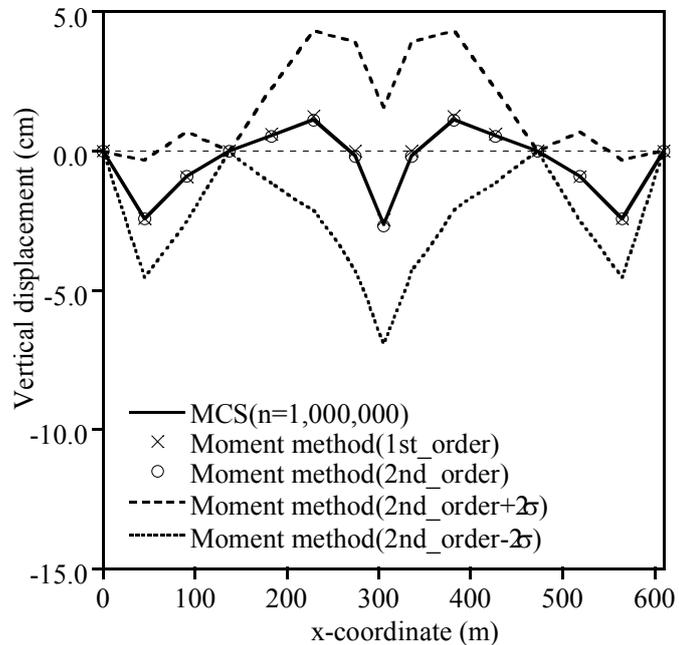


그림 4.2 거더 수직처짐의 분산 특성 (Case1)

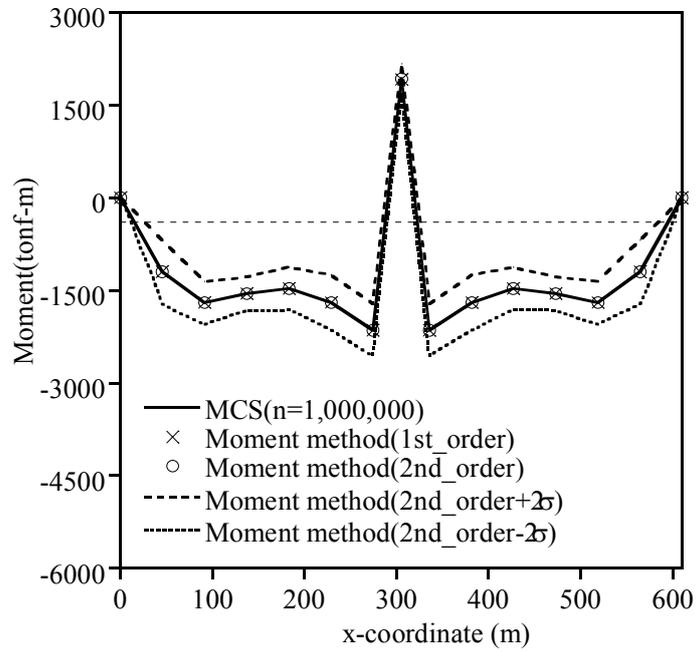


그림 4.3 거더 모멘트의 분산 특성 (Case1)

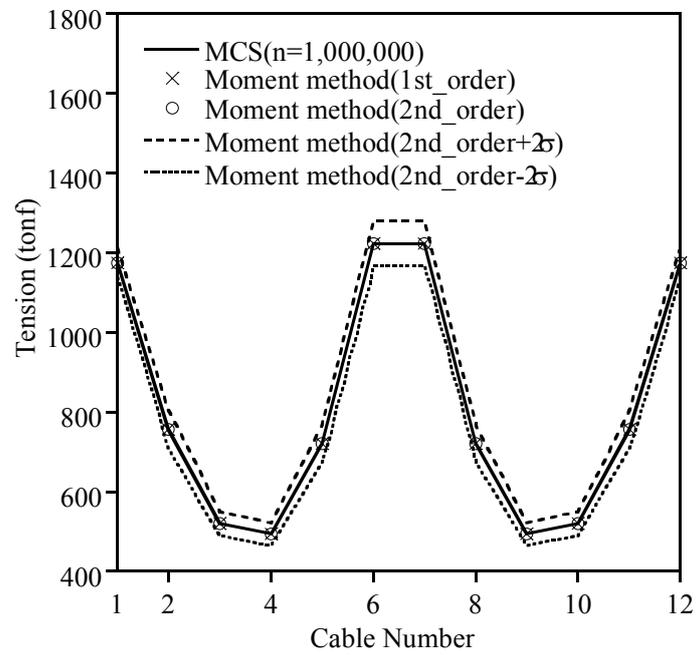


그림 4.4 케이블 장력의 분산 특성 (Case1)

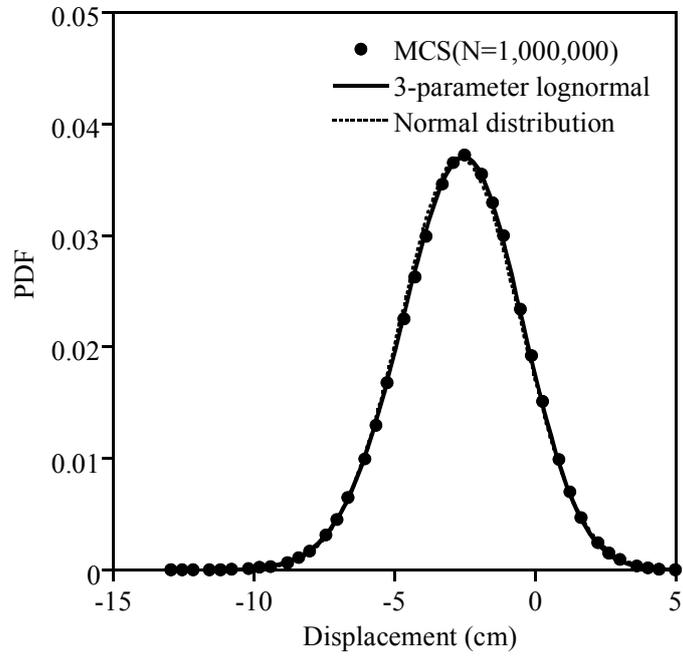


그림 4.5 거더 중앙 수직처짐의 확률밀도함수 (Case1)

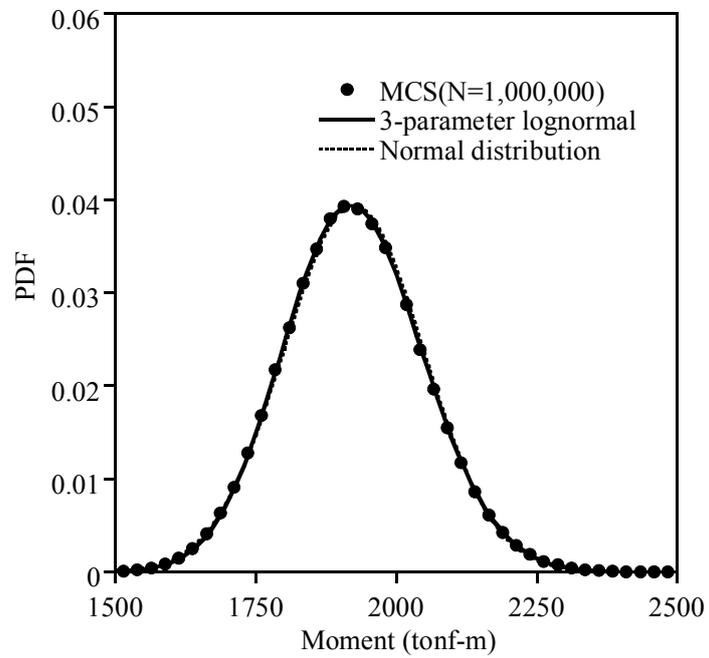


그림 4.6 거더 중앙 모멘트의 확률밀도함수 (Case1)

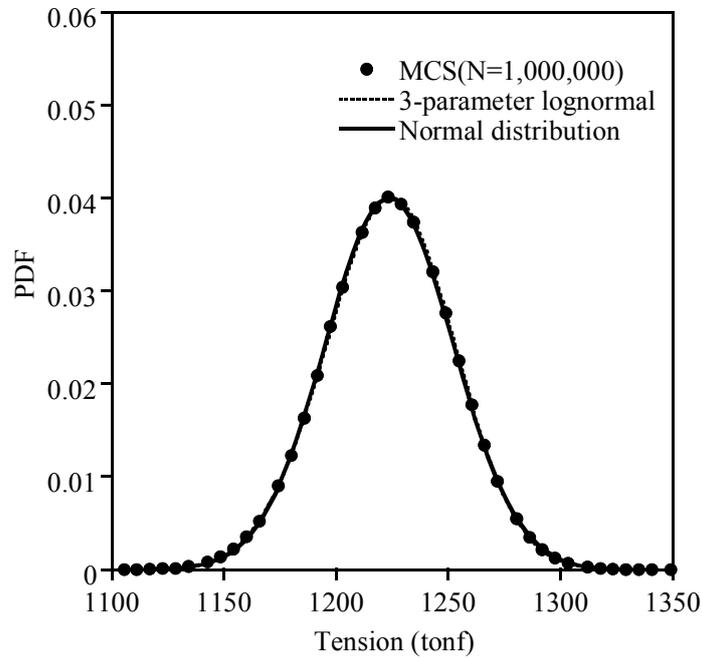


그림 4.7 6 번 케이블 장력의 확률밀도함수 (Case1)

4.1.2 Case 2: 거더프레임 자중이 변동계수 5%의 정규분포

거더프레임 자중이 확률분포를 갖는 확률변수인 경우에는 하중에 대한 2차 미분항이 존재하지 않으므로 제안된 1차 테일러 급수를 이용한 모멘트법으로 응답의 평균과 표준편차, 왜도를 추정하였다. 표 4.3는 제안된 모멘트법과 Monte-Carlo simulation의 결과를 비교한 것이다. 그림 4.1의 응답 중에서 거더 중앙부 수직변위, 거더 모멘트, 6번 케이블 장력의 분포에 대하여 비교하였다. 표 4.3에서 1차 테일러 급수를 이용한 경우 거더 중앙처짐의 결과가 1.31%의 차이가 발생하였고, 표준편차는 0.02%의 차이가 발생하였다. 왜도의 경우에는 Monte-Carlo simulation의 결과 영에 가까운 것

을 알 수 있다. 이상의 결과를 통해 거더프레임의 자중이 확률변수인 경우에는 응답과의 관계가 선형관계임을 알 수 있다. 거더 중앙 지점에서의 모멘트와 6 번 케이블의 장력에 대한 분포 또한 1 차 모멘트법에 의한 추정 결과가 Monte-Carlo simulation 와 비교해 잘 근사 한다고 판단된다. 그림 4.8, 4.9, 4.10 는 모든 거더 절점에서의 케이블에 따른 거더의 수직처짐, 거더 모멘트, 케이블 장력에 대한 분포를 Monte-Carlo simulation 과 비교한다. 모든 절점에서 1 차 모멘트법에 의한 결과와 비교하면 비교적 정확한 값을 가지는 것을 확인할 수 있다. 또한, 1 차 모멘트법으로 구한 평균과 분산을 통해 평균에서 $\pm 2\sigma$ 영역을 설정함으로써 신뢰도 95.45%의 수준에서의 분산 특성을 파악할 수 있다. 그림 4.8 에서 수직처짐의 평균과 비교해 볼 때 두 구간 사이에서 비교적 분산 특성이 크게 나타나는 것을 볼 수 있는데 이는 시공 직후의 거더 수직 처짐은 없는 것으로 설계하기 때문에 분산으로 인한 차이가 크게 나타나고 있다. 그림 4.9 는 거더 각 절점들의 모멘트에 대한 분산 분포를 보이고 있다. 특히 주탑과 거더가 만나는 지점에서 변동계수가 22% 증가하고 있다. 이는 설계 시 거더프레임 자중을 확률변수로 가정하였을 경우 모멘트에 대한 고려가 필요한 지점이다.

그림 4.11, 4.12, 4.13 은 Monte-Carlo simulation 으로 얻어진 도수분포와 표 4.3 의 1 차 모멘트법으로 산정한 평균, 표준편차, 왜도로부터 추정한 확률밀도함수를 비교한 것이다. 그림 4.11 은 거더 중앙 부의 수직 처짐의 확률밀도함수를 비교한다. 거더프레임 자중이 확률변수인 경우에는 응답과

선형관계이므로 응답분포는 1 차 모멘트법에 의한 결과를 정규분포로 가정하여 Monte-Carlo simulation 과 비교한 결과와 같은 형태의 분포를 갖는다. 그림 4.12 의 거더 중앙 절점에서의 모멘트 분포 역시 정규분포와 일치하였고, 그림 4.13 의 케이블 장력에 대한 응답확률분포 또한 정규분포 형태를 갖는다.

표 4.3 응답의 평균, 표준편차, 왜도 (Case 2)

	Monte-Carlo simulation	모멘트법 (1 st -order)
거더 중앙 수직 처짐		
평균 (cm)	- 2.439	- 2.471
표준편차 (cm)	6.086	6.085
왜도	0.027	-
변동계수	249.53 %	246.26 %
거더 중앙 부재력(모멘트)		
평균 (tonf · m)	- 1946.943	- 1918.319
표준편차 (tonf · m)	250.666	250.632
왜도	-0.028	-
변동계수	12.87 %	13.07 %
6 번 케이블 장력		
평균 (tonf)	1223.648	1223.639
표준편차 (tonf)	54.680	54.723
왜도	0.006	-
변동계수	4.47 %	4.47 %

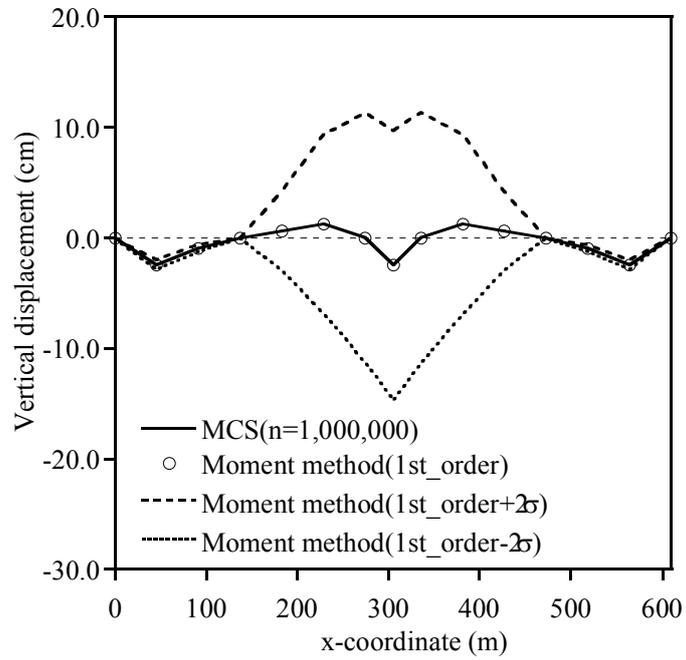


그림 4.8 거더 수직처짐의 분산 특성 (Case2)

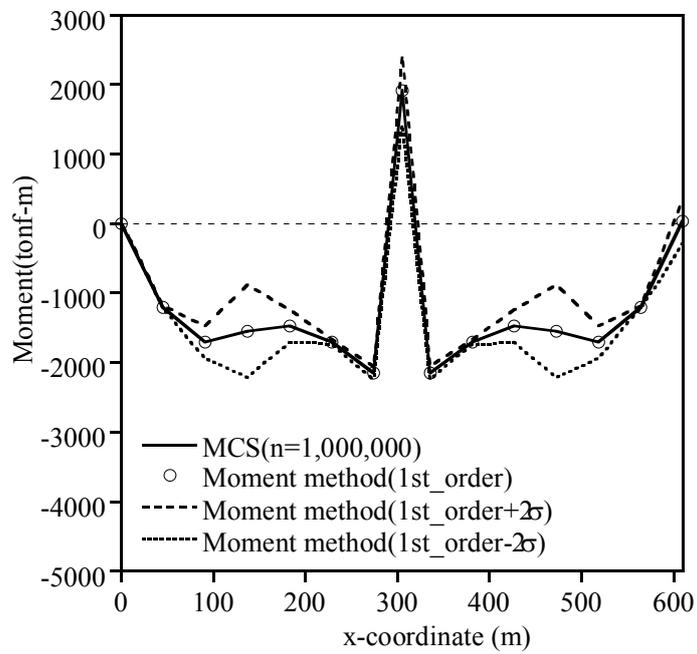


그림 4.9 거더 모멘트의 분산 특성 (Case2)

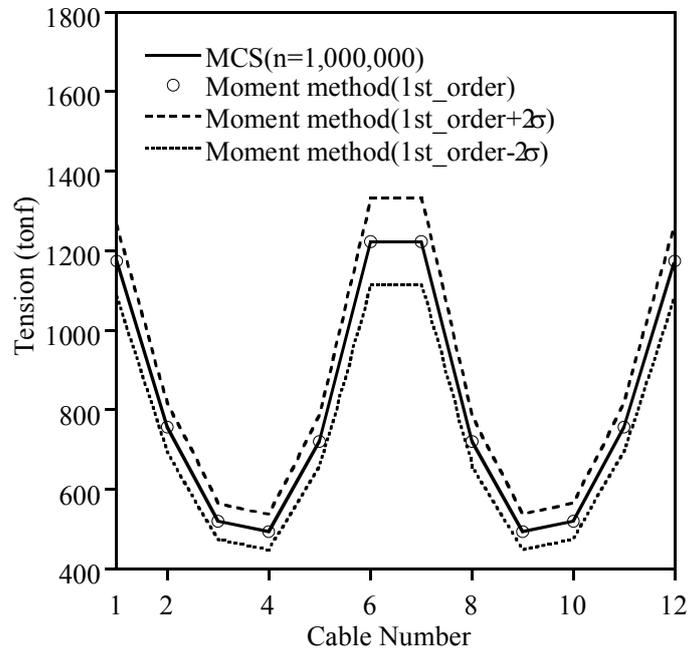


그림 4.10 케이블 장력의 분산 특성 (Case2)

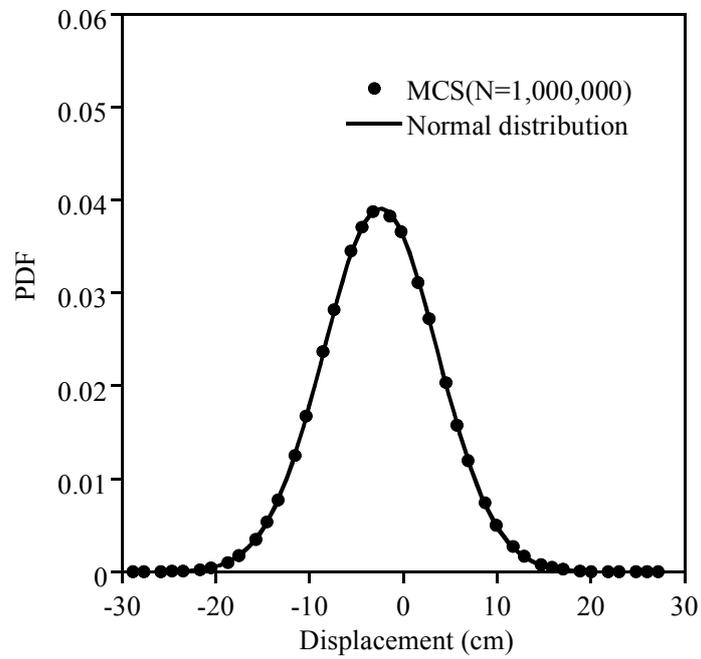


그림 4.11 거더 중앙 수직처짐의 확률밀도함수 (Case2)

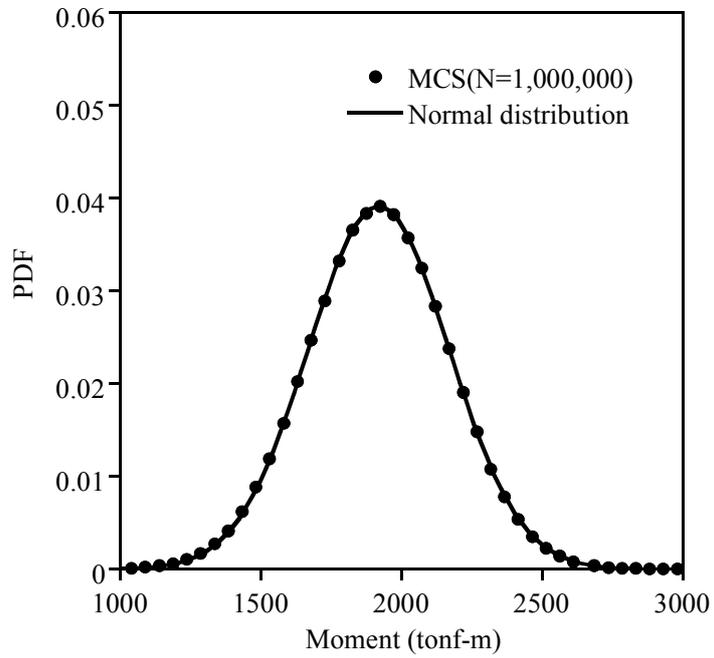


그림 4.12 거더 중앙 모멘트의 확률밀도함수 (Case2)

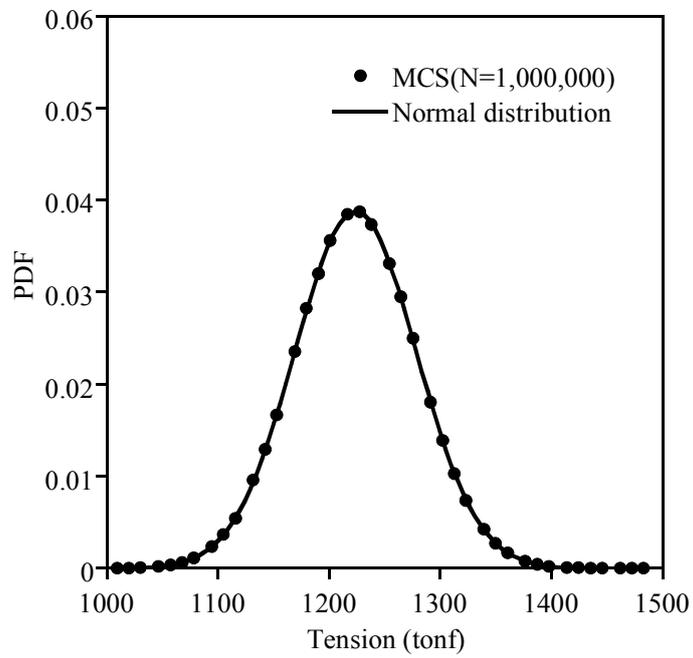


그림 4.13 6 번 케이블 장력의 확률밀도함수 (Case2)

4.1.3 Case 3: 각 케이블 부재의 탄성계수와 거더프레임 자중이 각각 변동계수 5%의 정규분포

Case 3 은 종류가 다른 확률변수를 통해 제안된 테일러 급수를 이용한 모멘트법과 Monte-Carlo simulation 으로 응답의 평균과 표준편차, 왜도를 추정하였다. 표 4.4 는 제안된 모멘트법과 Monte-Carlo simulation 의 결과를 비교한 것이다. 제안된 모멘트법의 경우 2 차의 테일러 급수를 이용할수록 더 정확한 해석 결과를 보여준다. 즉, 2 차 테일러 급수를 이용할 경우 중앙 처짐의 결과가 5.14%에서 2.61%로 차이가 줄어들었고, 표준편차 역시 정도가 향상되었다. 특히 왜도의 경우 1 차 테일러 급수에 의한 모멘트법의 계산은 사장교 구조물의 비선형성에 의한 왜도를 설명할 수 없으므로 2 차 이상의 모멘트법이 필요하게 된다. 여기서 확률변수가 거더프레임 자중인 경우 2 차 민감도가 없으므로, 3 장에서의 서로 독립인 케이블 부재의 탄성계수와 거더프레임 자중의 조합을 통해 2 차 민감도를 계산한다. 그 결과 표 4.4 와 같이 왜도의 경우 100%의 상대오차를 발생하였지만, 왜도가 영에 가까운 분포를 띄는데 이는 거더프레임 자중에 의한 민감도가 더 지배적이기 때문이다. 또한, 거더 중앙 지점에서의 모멘트와 6 번 케이블의 장력에 대한 분포 역시 2 차 테일러 급수를 이용한 모멘트법이 Monte-Carlo simulation 과 비교해 더 정확한 해석 결과를 보여준다. 그림 4.14, 4.15, 4.16 은 각각 거더의 수직처짐, 거더 모멘트와 케이블 장력에 대한 모든 거더 절점에서의 응답분포를 Monte-Carlo simulation 과 비교한다. 그 결과 모든 절점에서 2 차

모멘트법이 평균과 표준편차와 왜도에서 모두 더 정확한 값을 가지는 것을 확인할 수 있다. 또한, 2 차 모멘트법으로 구한 평균과 분산을 통해 평균값의 $\pm 2\sigma$ 영역을 설정함으로써 신뢰도 95.45%의 수준에서의 분산 특성을 파악할 수 있다. 이는 설계 시 예상되었던 응답에 대한 분산특성을 파악함으로써 구조물의 확률적 거동을 예측할 수 있다. 그림 4.14 의 수직처짐에 대한 분포에서 평균과 비교해 볼 때 분산 특성이 크게 나타나는 것을 볼 수 있는데 이는 시공 직후의 거더 수직 처짐은 없는 것으로 설계하기 때문에 표준편차에 의한 분산이 크게 나타나고 있다.

그림 4.17, 4.18, 4.19 는 Monte-Carlo simulation 으로 얻어진 도수분포와 표 4.4 의 2 차 모멘트법으로 산정한 평균, 표준편차, 왜도로부터 추정한 확률밀도함수를 비교한 것이다. 그림 4.17 는 표 4.4 의 거더 중앙 부의 수직 처짐에 대한 확률밀도함수이다. 케이블 부재의 탄성계수와 거더프레임 자중이 확률변수일 때는 Case1 과는 다른 왜도가 영에 가깝다. 이는 확률변수가 거더프레임일 경우의 민감도 크기가 케이블 부재의 탄성계수가 확률변수 일 때 보다 훨씬 큰 값을 갖기 때문이다. 따라서 거더 중앙부 수직처짐의 경우 응답확률분포를 삼변수 대수정규분포와 정규분포로 가정하여 확률 밀도함수를 그린 결과 Monte-Carlo simulation 와 비교해 두 분포 모두 잘 일치하고 있다. 그림 4.18 의 거더 중앙 모멘트의 응답확률분포 역시 정규분포를 보이고 있고, 그림 4.19 의 케이블 장력에 대한 확률분포도 정규분포 형태를 갖는다. 따라서, Case 3 의 경우 각각의 응답에 대한 응답확률분포는

거더프레임 자중에 의한 영향에 의해 선형관계에 있는 정규분포 형태를 갖는다고 판단된다.

표 4.4 응답의 평균, 표준편차, 왜도 (Case 3)

	Monte-Carlo simulation	모멘트법 (1 st -order)	모멘트법 (2 nd -order)
거더 중앙 수직 처짐			
평균 (cm)	- 2.605	- 2.471	- 2.673
표준편차 (cm)	6.462	6.444	6.448
왜도	- 0.010	-	- 0.020
변동계수	248.06 %	260.79 %	241.227 %
거더 중앙 부재력(모멘트)			
평균 (tonf · m)	- 1922.267	- 1918.319	- 1924.199
표준편차 (tonf · m)	280.409	279.580	279.714
왜도	- 0.042	-	- 0.033
변동계수	14.59 %	16.18 %	16.13 %
6 번 케이블 장력			
평균 (tonf)	1223.438	1223.639	1223.422
표준편차 (tonf)	61.740	61.691	61.721
왜도	0.055	-	- 0.021
변동계수	5.05 %	5.04 %	5.04 %

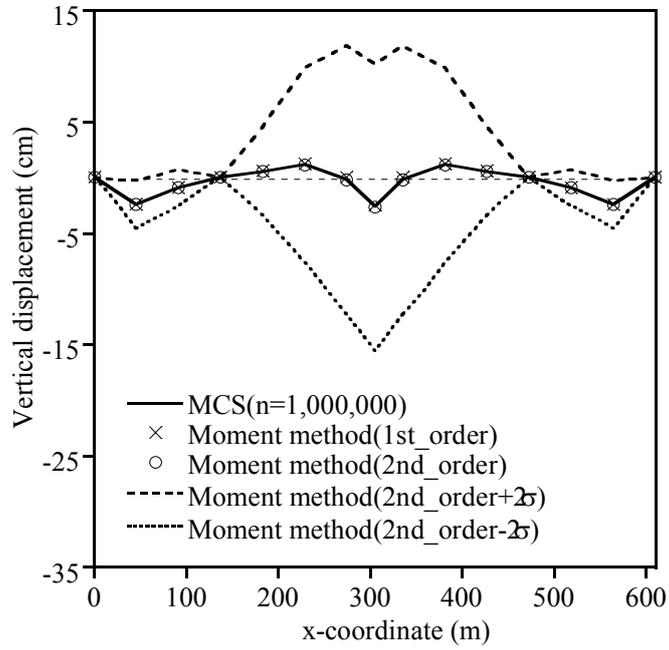


그림 4.14 거더 수직처짐의 분산 특성 (Case3)

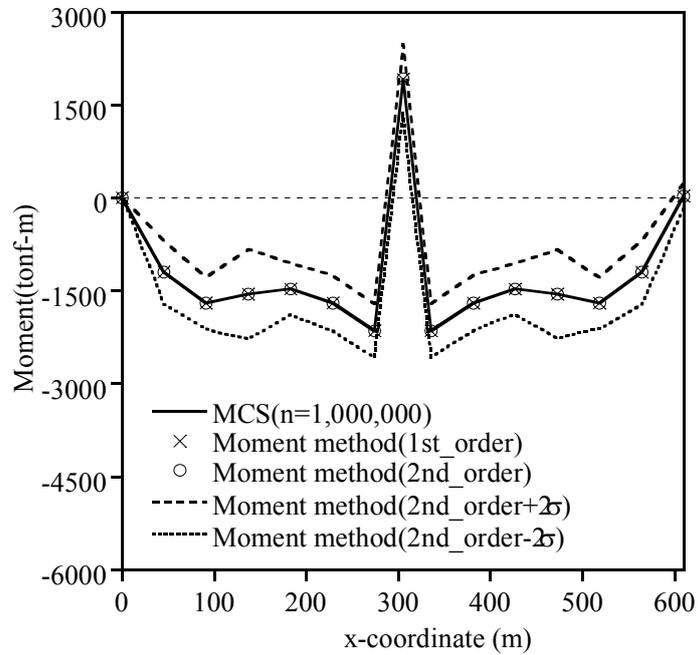


그림 4.15 거더 모멘트의 분산 특성 (Case3)

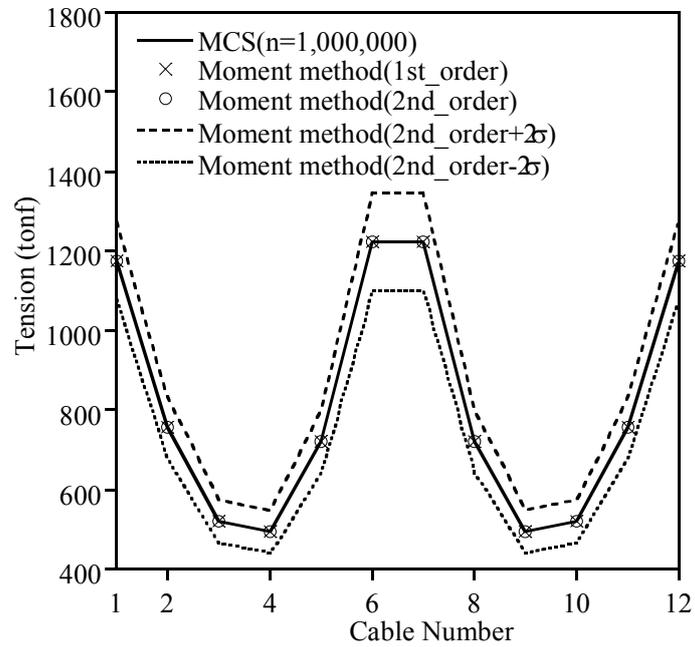


그림 4.16 케이블 장력의 분산 특성 (Case3)

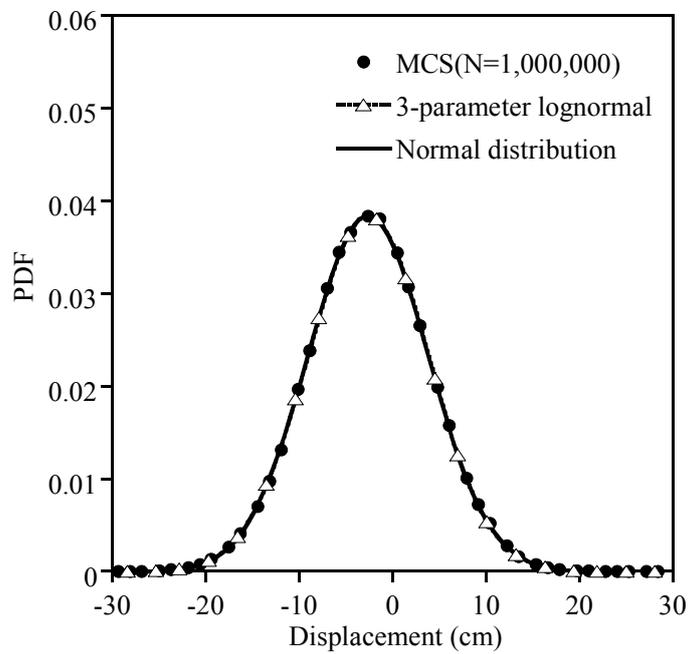


그림 4.17 거더 중앙 수직처짐의 확률밀도함수 (Case3)

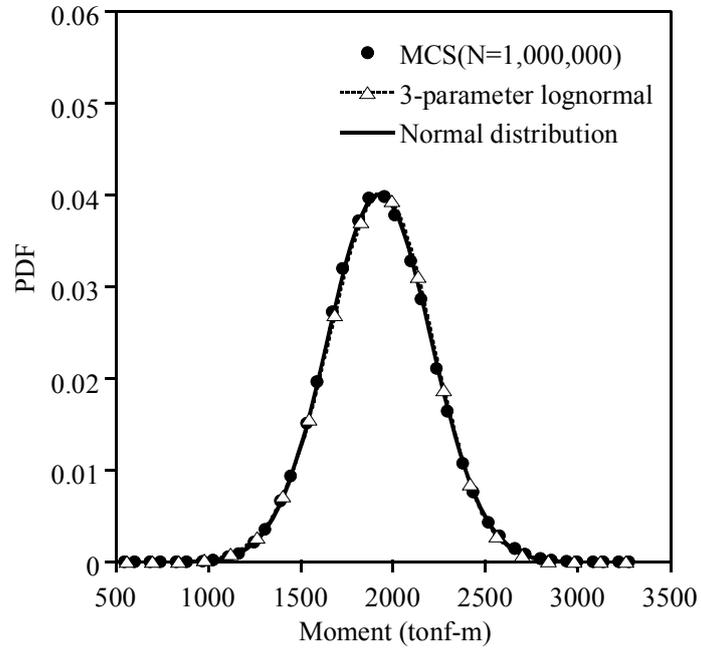


그림 4.18 거더 중앙 모멘트의 확률밀도함수 (Case3)

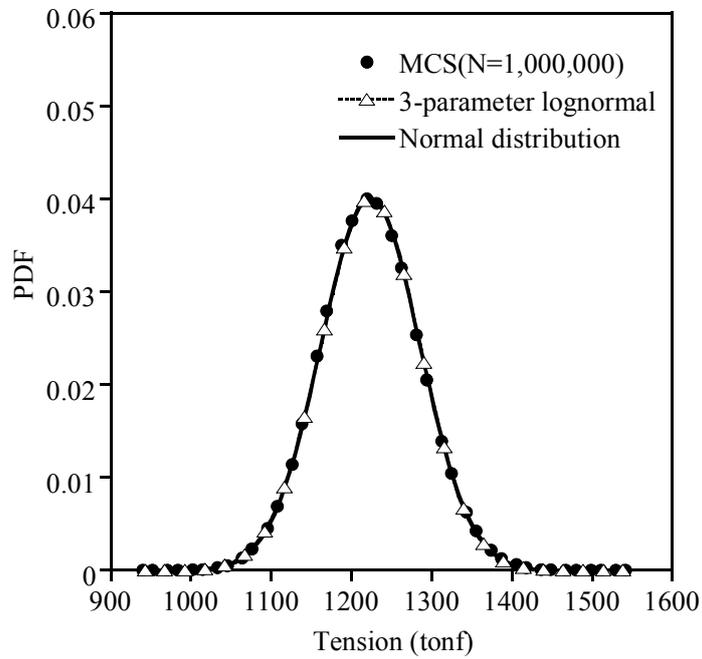


그림 4.19 6 번 케이블 장력의 확률밀도함수 (Case3)

4.1.4 사장교 응답의 확률분포 평가 및 검토

모멘트 추정법에 의한 확률해석은 테일러급수의 차수를 증가시켜 응답의 평균과 표준편차와 왜도를 정확하게 산정할 수 있다. 그러나 모멘트 추정법에서는 평균영역에서의 응답분포를 정확하게 산정할 수 있으나, 구조물의 파괴영역인 극치분포를 명확하게 파악하기는 어렵다. 그림 4.20 은 케이블 부재의 탄성계수를 확률변수로 가정하였을 경우 거더 중앙 수직 처짐의 극치분포를 보여준다. 즉, 그림 4.5 에서 평균영역에서는 삼변수 대수 정규 분포로 일치하고 있으나, 파괴영역에서는 Monte-Carlo simulation 의 분포와 상이한 결과를 나타내고 있다. 이는 구조물의 신뢰성 해석을 위해 파괴영역에서의 극치분포 추정이 필요하겠다.

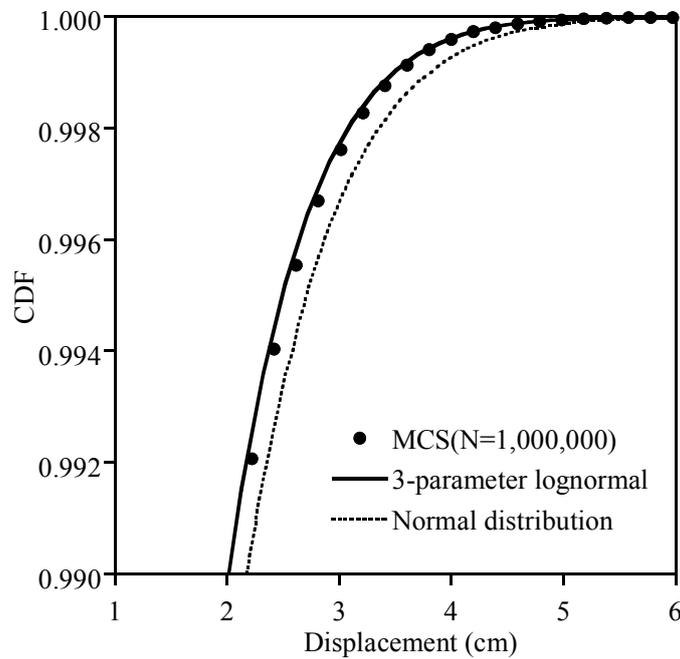


그림 4.20 거더 중앙 수직변위의 극치분포

4.1 절을 통해 설계변수에 따른 팬 타입 사장교의 분산 특성 및 응답분포를 파악하였다. 그러나 2 차 민감도 해석의 필요성을 부각시키기 위해서는 응답의 왜도를 확연히 보여주어야 한다. 이상에서 살펴본 응답확률분포는 정규분포와 상이한 차이가 없었다. 케이블 부재의 탄성계수를 설계변수로 가정하였을 경우, 비선형성에 의한 왜도(skewness)를 설명하기에는 부족하다. 따라서, 케이블 초기길이와 케이블 단면적 등 다른 설계변수에 대한 민감도 해석을 통해 왜도의 변화를 살펴보고자 한다. 케이블 부재의 탄성계수를 확률변수로 가정하여 왜도를 비교해 본 결과, 확률변수 개수가 줄어들면 왜도(확률변수(E_1, E_2 , Normal, CV=5%), skewness: -0.238))가 좀 더 크게 나타나는 것을 볼 수 있었지만, 왜도를 잘 설명하기에는 부족하였다.

사장교의 민감도 해석은 외부하중과 사하중의 영향이 지배적인 결과를 나타내고, 장력, 단면적(A), 강성(EI) 순이다. 그러나 하중은 응답과 선형관계에 있으므로 보고자 하는 비선형성과는 상반되므로, 기존 케이블 부재의 탄성계수 외에 다른 확률변수를 고려하여 왜도의 정도를 파악해야 한다.

표 4.5 는 사장교 응답의 비선형성에 의한 왜도를 설명하기 위해 케이블 부재의 탄성계수를 변동계수가 10%인 정규분포로 가정하였다. 또한 케이블 탄성계수의 확률변수 개수를 달리하여 거더 중앙 수직처짐에 대한 왜도의 변화를 비교하였다. 확률변수의 개수가 줄어들수록 분산과 왜도의 값이 커지는 것을 알 수 있다. 그러나 왜도의 크기가 응답의 비선형성을 설명하기에는 부족하다. 또한, 실제 케이블 부재의 변동성은 가정과 달리

케이블간의 변동성과는 다르기 때문에 케이블 부재의 탄성계수로 비선형성에 대한 응답 확률분포를 설명 하기에 부족하다.

표 4.6 과 표 4.7 은 케이블 부재의 단면적과 케이블 부재의 초기길이를 확률변수로 가정하여 왜도의 변화를 비교 하였다. 표 4.6 은 케이블 부재의 탄성계수와 케이블 단면적을 확률변수로 하여 왜도의 변화를 살펴 보았지만, 케이블 부재의 탄성계수를 확률변수로 가정하여 계산한 결과와 큰 차이를 보이지 않고 있다. 표 4.7 은 6 번째 케이블 초기길이의 변동계수를 변화시키며 거더 중앙 수직처짐에 대한 응답을 비교하였다. 케이블 부재의 초기길이는 작은 변화에도 사장교 초기형상의 영향을 많이 미치게 되므로 변동계수를 작게 하였다. 표 4.7 에서 케이블 초기길이의 변동계수가 처짐에 따라 왜도 값이 커지고 있는 경향을 보이고 있으나, 기존 확률변수와 큰 차이를 보이고 있지 않다.

표 4.8 은 거더프레임 자중을 대수정규분포와 삼변수 대수정규분포를 갖은 확률변수로 가정하여 확률변수의 분포에 따른 응답분포와의 관계를 알아본다. 거더프레임 자중이 확률변수인 경우에는 응답과 선형관계에 있다는 것을 정규분포로 가정하여 비교한 표 4.3 에서 확인하였다. 표 4.8 에서는 거더프레임 자중을 각각 변동계수가 10%인 대수정규분포와 삼변수 대수정규분포 가정하여 비교하였다. 기존의 확률변수를 정규분포로 가정하였을 경우와 마찬가지로 확률변수의 분포와 선형관계에 있음을 확인하였다.

표 4.5 케이블 부재의 탄성계수 개수에 따른 거더 중앙 수직처짐 비교

확률변수 (CV=10%, Normal)	E_1	E_1, E_2	E_1, E_2, \dots, E_6	E_1, E_2, \dots, E_{12}
평균 (cm)	- 3.453	- 3.323	- 3.240	- 3.279
표준편차 (cm)	10.650	8.542	5.943	4.277
왜도	- 0.598	- 0.471	- 0.296	- 0.216

표 4.6 확률변수 종류에 따른 거더 중앙 수직처짐 비교

확률변수 (CV=10%, Normal)	E_1, E_2	A_1, A_2	E_1, A_1, A_2
평균 (cm)	- 3.323	- 3.230	- 3.829
표준편차 (cm)	8.542	8.691	12.134
왜도	- 0.471	- 0.468	- 0.439

표 4.7 케이블 부재 초기길이의 변동계수에 따른 거더 중앙 수직처짐 비교

변동계수(CV) (6 th Cable, Normal)	0.05%	0.1%	1%
평균 (cm)	- 2.414	- 2.202	- 1.687
표준편차 (cm)	7.451	14.754	24.934
왜도	0.048	0.128	0.266

표 4.8 확률변수의 분포에 따른 거더 중앙 수직처짐 비교

확률변수 (Girder Weight, CV=10%)	Lognormal	3-param lognormal (skew: 0.5)
평균 (cm)	- 2.356	- 2.358
표준편차 (cm)	12.169	12.144
왜도	- 0.244	- 0.442

4.2 5 경간 연속 사장교

이 절에서는 제안된 이계삼차모멘트법에 의한 사장교 거동의 확률해석을 실제 사장교에 적용시킨다. 해석모델을 대상으로 케이블 부재의 탄성계수와 거더프레임 자중의 확률분포를 고려하여 확률해석을 수행한다. 그림 4.21 은 캔틸레버 공법으로 시공되고 중앙 경간과 측 경간 길이가 각각 330m 와 117m 인 5 경간 연속 사장교이다. 주탑 높이는 90m 이고, 케이블은 모두 52 개가 사용되었다. 자세한 CFT 거더 사장교의 제원은 표 4.9 에 주어져 있다.

그림 4.21 의 사장교 모델을 대상으로 각 케이블 부재의 탄성계수와 거더프레임 자중이 각각 변동계수 5%의 정규분포(Case 3)로 가정하여 확률해석을 수행한다.

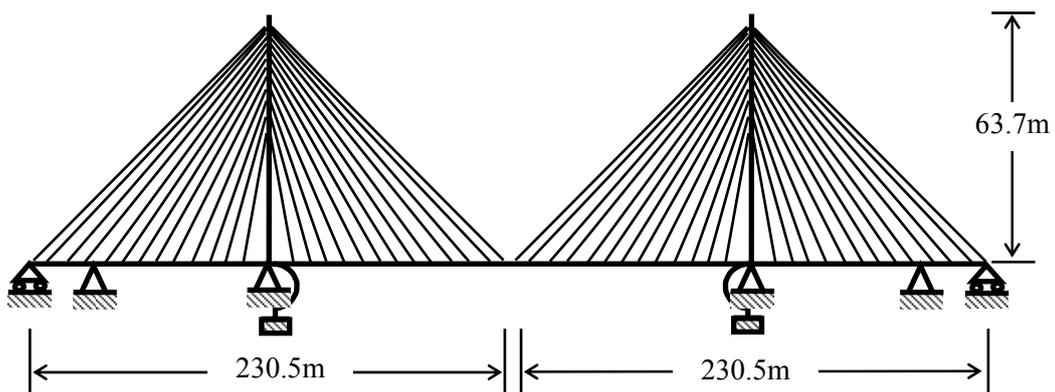


그림 4.21 CFT 거더 교량의 종단면도

표 4.9 CFT 거더 교량의 구조 요소 별 주요 제원

부재	E or E_{ci} (tonf/m ²)	A (m ²)	I_y (m ⁴)	I_z (m ⁴)	w (tonf/m ²)
CFT 거더	3.45×10^7	9.53	4.03	0.13	25.03
주탑 (0~30m)	3.34×10^6	10.52	10.37	30.31	37.53
주탑 (30~63.7m)	3.34×10^6	10.37	10.52	31.87	39.79
케이블 (9~17번)	2.0×10^7	6.9×10^{-3}	-	-	0.054
케이블 (4~8, 18~20번)	2.0×10^7	8.1×10^{-3}	-	-	0.064
케이블 (3, 21~23번)	2.0×10^7	9.3×10^{-3}	-	-	0.073
케이블 (1~2번)	2.0×10^7	14.7×10^{-3}	-	-	0.115
케이블 (24~26번)	2.0×10^7	11.1×10^{-3}	-	-	0.087

표 4.10 는 제안된 이계삼차모멘트법의 1 차와 2 차의 테일러 급수를 이용한 모멘트 추정법과 Monte-Carlo simulation 으로 응답의 평균과 표준편차, 왜도를 추정한 결과를 나타낸다. 그림 4.21 의 CFT 거더 사장교의 응답 중에서 거더 중앙부 수직변위, 거더 모멘트, 26 번 케이블 장력의 응답분포에 대하여 비교한다. 제안된 모멘트법을 사용하여 2 차의 테일러 급수를 이용한 결과, 더 정확한 해석 결과를 보여준다. 중앙 처짐의 결과를 비교해 보면, 1 차 모멘트법에 의한 평균에 비해 2 차 모멘트법으로 근사한 경우 Monte-Carlo simulation 과 더 근접하게 나타나고 있다. 표준편차와 왜도의 경우에도 2 차 모멘트법에 의한 결과가 더 정확하게 나타난다. 왜도의 경우, 표 4.10 과 같이 15.79% 의 오차를 갖는다. 그렇지만 왜도가 영에 가깝게

나타나고 있는데 이는 거더프레임 자중에 의한 민감도 값이 더 크기 때문이다. 또한, 거더 중앙 지점에서의 모멘트와 26 번 케이블의 장력에 대한 분포도 2 차 테일러 급수를 이용한 모멘트법이 Monte-Carlo simulation 과 비교해 더 정확한 해석 결과를 보여준다.

그림 4.22, 4.23, 4.24 는 각각 거더 수직처짐과 거더 모멘트, 케이블 장력에 대한 모든 거더 절점에서의 응답분포를 보여주고 있다. 그 결과 모든 절점에서 2 차 모멘트법이 평균과 표준편차와 왜도에서 모두 더 정확한 값을 가지는 것을 확인할 수 있다. 또한, 2 차 모멘트법으로 구한 평균과 분산을 통해 평균값의 $\pm 2\sigma$ 영역을 설정함으로써 신뢰도 95.45%의 수준에서의 분산 특성을 파악할 수 있다. 이는 설계 시 예상되었던 응답에 대한 분산 특성을 파악함으로써 구조물의 확률적 거동을 예측할 수 있다. 그림 4.24 의 거더 수직처짐에 대한 분포를 보면, 분산특성이 크게 나타나는 것을 볼 수 있는데 이는 시공 직후의 거더 수직 처짐은 없는 것으로 설계하기 때문에 표준편차에 의한 분산이 크게 나타나고 있다.

그림 4.25, 4.26, 4.27 은 Monte-Carlo simulation 으로 얻어진 도수분포와 표 4.10 의 2 차 모멘트법으로 산정한 평균, 표준편차, 왜도로부터 추정된 확률밀도함수를 비교한 것이다. 그림 4.25 는 표 4.10 의 거더 중앙 부의 수직 처짐에 대한 확률밀도함수이다. 케이블 부재의 탄성계수와 거더프레임 자중이 확률변수일 때 응답분포는 거더프레임에 의한 민감도가 케이블 부재의 탄성계수에 비해 크기 때문에 확률변수의 분포인 정규분포를 갖는다.

응답확률분포를 왜도를 고려한 삼변수 대수정규분포로 가정하여 확률밀도 함수를 그린 결과 Monte-Carlo simulation 과 잘 일치하고 있지만, 표 4.10 의 왜도의 값이 영에 가까워 정규분포와 같은 분포를 보인다. 그림 4.26 의 거더 중앙 절점 모멘트의 확률분포 역시 정규분포를 보이고 있고, 그림 4.27 의 케이블 장력에 대한 확률분포도 정규분포 형태를 갖고 있다. 따라서, 케이블 부재의 탄성계수와 거더프레임 자중이 확률변수일 때 각각의 응답에 대한 확률분포는 정규분포 형태로 선형관계에 있다고 판단된다.

표 4.10 CFT 거더 사장교 응답의 평균, 표준편차, 왜도

	Monte-Carlo simulation	모멘트법 (1 st -order)	모멘트법 (2 nd -order)
거더 중앙 수직 처짐			
평균 (cm)	- 0.061	0.00073	- 0.152
표준편차 (cm)	4.495	4.490	4.491
왜도	- 0.019	-	- 0.022
거더 중앙 부재력(모멘트)			
평균 (tonf · m)	- 82.987	- 85.812	- 78.418
표준편차 (tonf · m)	242.445	241.975	242.107
왜도	0.095	-	0.077
26 번 케이블 장력			
평균 (tonf)	316.793	316.852	316.765
표준편차 (tonf)	17.240	17.239	17.247
왜도	0.088	-	- 0.005

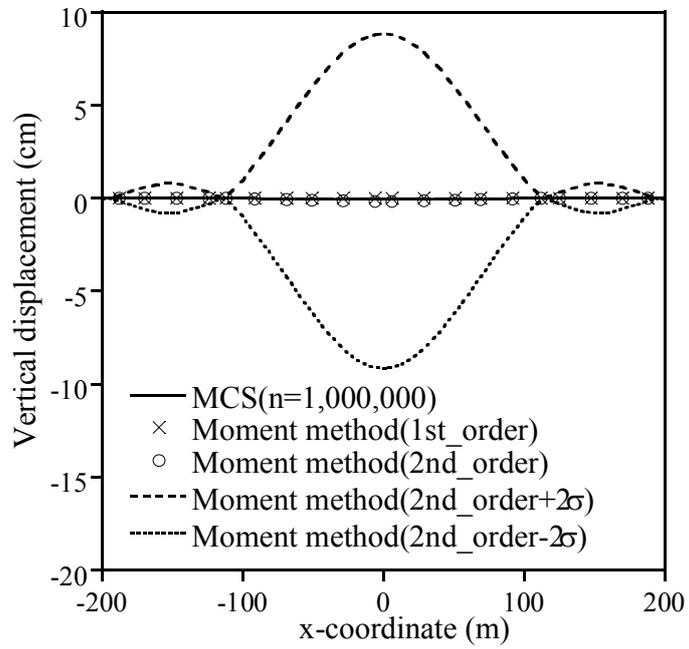


그림 4.22 거더 수직처짐의 분산 특성

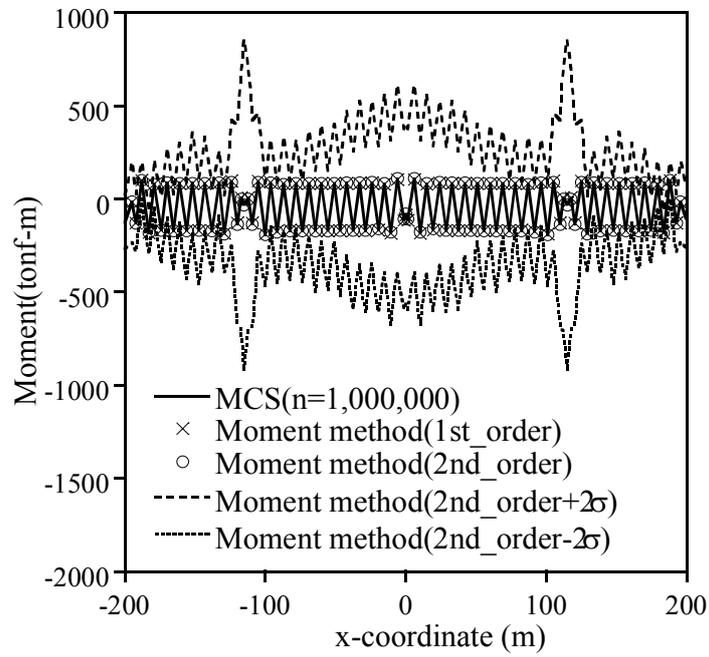


그림 4.23 거더 모멘트의 분산 특성

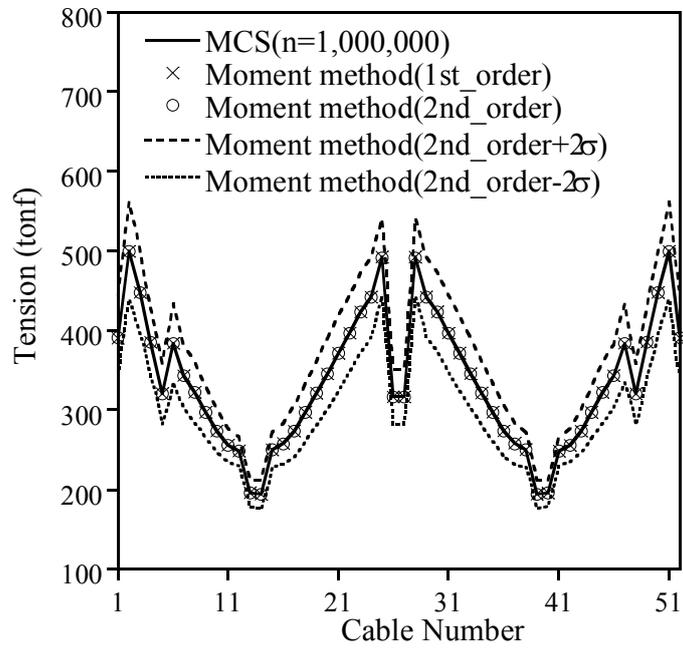


그림 4.24 케이블 장력의 분산 특성

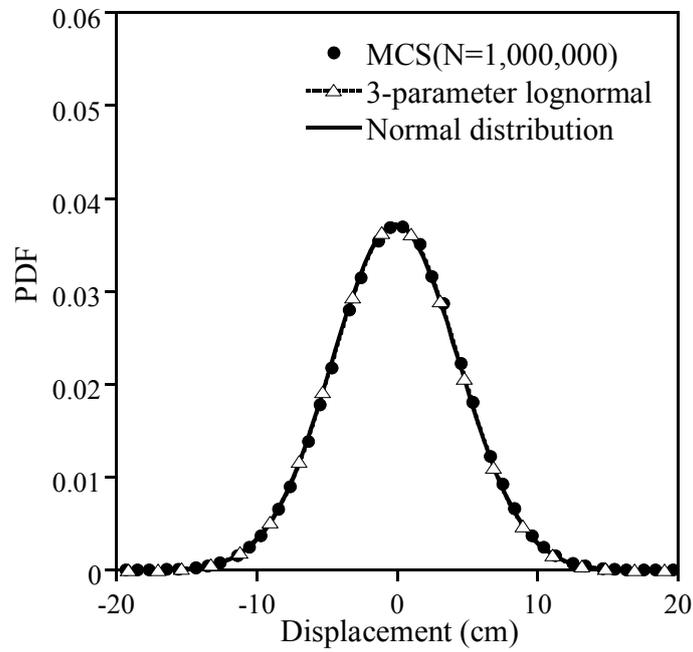


그림 4.25 거더 중앙 수직처짐의 확률밀도함수

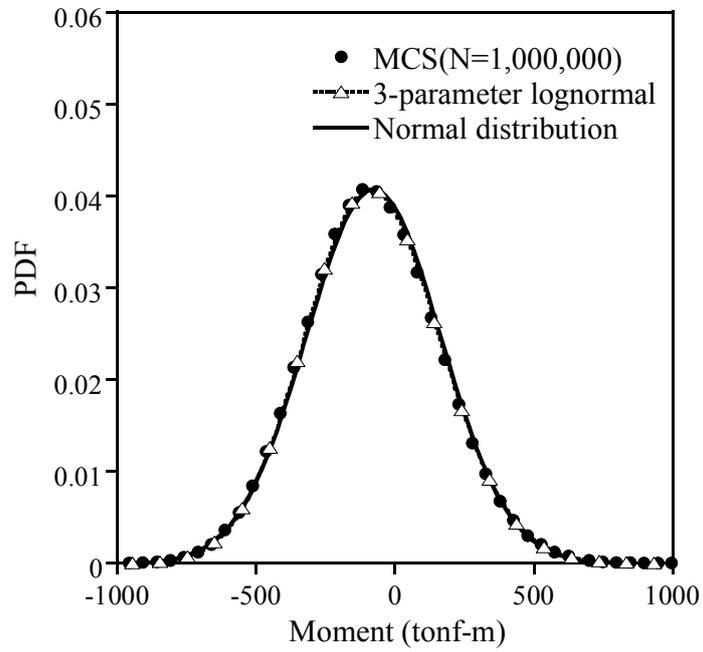


그림 4.26 거더 중앙 모멘트의 확률밀도함수

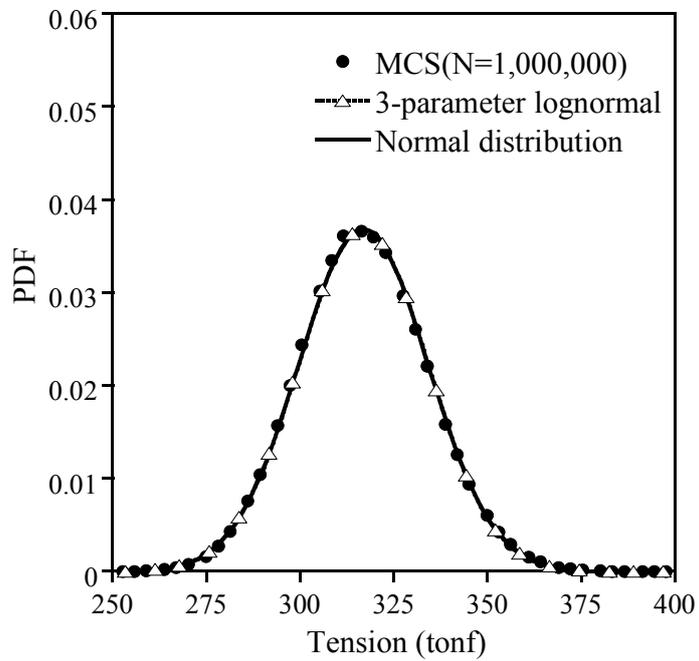


그림 4.27 26 번 케이블 장력의 확률밀도함수

5. 결론

이 논문에서는 비선형 거동을 하는 사장교 구조물을 대상으로 모멘트 추정법에 의한 구조물의 통계적인 해석법을 제안하였다. 이계삼차모멘트법을 이용하여 각각의 확률변수에 의한 평균, 표준편차, 왜도를 산정한 후 Monte Carlo simulation 에 의한 응답의 분산 특성과 확률분포를 비교하여 제안한 방법의 타당성과 효율성을 검증하였다.

모멘트 추정법은 불확실한 구조물 설계변수를 확률변수로 하여, 구조물 응답을 확률변수에 대한 테일러 급수를 이용하여 확률변수의 확률분포로부터 응답의 확률분포를 추정한다. 케이블 부재의 탄성계수와 거더프레임 자중이 확률분포를 갖는 확률변수일 때, 사장교 거더의 변위와, 거더 모멘트, 케이블 장력의 확률분포를 추정하기 위하여 응답의 2 차 테일러 급수를 이용한 이계삼차모멘트법을 도입하였다. 응답의 2 차 테일러 급수에서 필요한 민감도 계산은 탄성현수선 케이블 요소와 구조물 전체에 대한 강성도 방정식을 이용하여 직접 미분을 통해 계산한 후 유한차분법과 비교하여 검증하였다. 추정된 평균, 표준편차, 왜도를 이용하여 응답의 확률분포를 삼변수 대수정규분포와 정규분포로 근사하였다. 수치예제를 통하여 제안된 이계삼차모멘트법의 결과를 Monte Carlo simulation 의 결과와 비교하였다.

케이블 부재의 탄성계수와 거더프레임 자중이 세가지 확률분포를 갖는 확률변수로 나누어 확률 해석을 수행하였다. 세가지 경우 모두 2 차 테일러

급수를 이용할수록 더 정확한 해석결과를 보여주었다. 특히, 케이블 부재의 탄성계수를 확률변수(Case 1)로 하였을 경우 케이블의 비선형성으로 인한 확률분포의 왜도는 2 장의 오른쪽으로 치우친 삼변수 대수정규분포로 추정하여 근사하였다. 거더프레임 자중이 확률분포를 갖는 확률변수(Case 2)일 때는 2 차 민감도가 존재하지 않으므로 선형관계인 정규분포를 확인할 수 있었다. 케이블 부재의 탄성계수와 거더프레임 자중이 확률분포를 갖는 확률변수(Case 3)인 경우에는 거더프레임 자중에 의한 민감도가 더 지배적으로 작용하여 응답의 확률분포를 정규분포로 근사할 수 있었다.

추후 연구과제는 각 확률변수간 상관성을 고려한 통계적 분석과 외부 하중과 단면계수 등 다른 사장교 설계변수들에 의한 확률분포를 추정해야 할 것으로 판단된다. 또한 구조 부재에 따른 신뢰성해석을 수행하여 사장교 구조물의 안전성을 명확하게 파악하여야 하겠다.

참고문헌

- [1] 김기석. (2004). 이계삼차모멘트법을 이용한 균열 길이의 분포 추정
에 의한 피로수명의 확률해석, 공학박사학위논문, 서울대학교.
- [2] 김창현. (2004). 에너지 최소화를 이용한 사장교의 초기평형상태 해
석 기법 및 최적 형상 구현, 공학석사학위논문, 서울대학교
- [3] 양영순, 서용석, 이재욱. (2002). 구조신뢰성공학, 서울대학교 출판부
- [4] 이민권. (2005). 사장교의 형상 관리를 위한 역해석 및 폐합 해석,
공학석사학위논문, 서울대학교.
- [5] A. Haldar, S. Mahadevan. (2000). Probability, Reliability, and Statistical
Methods in Engineering Design, John Wiley & Sons, New York.
- [6] A. H-S. Ang, W. H. Tang, (1975). Probability Concepts in Engineering
Planning and Design: Volume I & II, John Wiley & Sons, New York.
- [7] B. M. Ayyub, and K. L. Lai, (1991). “Selective Sampling in Simulation-
Based Reliability Assessment”, International Journal of Pressure Vessels and
Piping, Vol. 46, pp. 229-249.
- [8] C. Sundararajan, (1995). Probabilistic Structural Mechanics Handbook:
Theory and Industrial Applications, Chapman & Hall, New York.
- [9] J.R. Benjamin, C.A. Cornell. (1970). Probability, Statistics, and Decision for
Civil Engineers, McGraw-Hill, New York.

- [10] K.S. Kim, and H.S. Lee, (2001). "Analysis of target configurations under dead loads for cable-supported bridges", *Journal of Computers and Structures*, Vol. 79, Issue 29-30, pp. 2681-2692.
- [11] M. Tichý. (1994). "First-order third-moment reliability method", *Structural Safety* Vol. 16, pp. 189-200.
- [12] Ross, Sheldon M. (2006). *A First Course In Probability* 7th ed., Prentice Hall, NJ.

부록

A. 탄성현수선 케이블 요소의 연성도 행렬

식 (3.17)의 자세한 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_x^e}{\partial F_x} &= -\frac{L_0^e}{EA} - \frac{1}{w} \ln \left(\frac{F_z + wL_0^e + T_2}{F_z + T_1} \right) - \frac{F_x^2}{w} \left\{ \frac{1}{T_2(F_z + wL_0^e + T_2)} - \frac{1}{T_1(F_z + T_1)} \right\} \\ \frac{\partial \phi_x^e}{\partial F_y} &= -\frac{F_x F_y}{w} \left\{ \frac{1}{T_2(F_z + wL_0^e + T_2)} - \frac{1}{T_1(F_z + T_1)} \right\} \\ \frac{\partial \phi_x^e}{\partial F_z} &= -\frac{F_x}{w} \left\{ \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right\} \\ \frac{\partial \phi_y^e}{\partial F_x} &= -\frac{F_x F_y}{w} \left\{ \frac{1}{T_2(F_z + wL_0^e + T_2)} - \frac{1}{T_1(F_z + T_1)} \right\} \\ \frac{\partial \phi_y^e}{\partial F_y} &= -\frac{L_0^e}{EA} - \frac{1}{w} \ln \left(\frac{F_z + wL_0^e + T_2}{F_z + T_1} \right) - \frac{F_y^2}{w} \left\{ \frac{1}{T_2(F_z + wL_0^e + T_2)} - \frac{1}{T_1(F_z + T_1)} \right\} \\ \frac{\partial \phi_y^e}{\partial F_z} &= -\frac{F_y}{w} \left\{ \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right\} \\ \frac{\partial \phi_z^e}{\partial F_x} &= -\frac{F_x}{w} \left\{ \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right\} \\ \frac{\partial \phi_z^e}{\partial F_y} &= -\frac{F_y}{w} \left\{ \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right\} \\ \frac{\partial \phi_z^e}{\partial F_z} &= -\frac{L_0^e}{EA} - \frac{1}{w} \left\{ \frac{F_z + wL_0^e}{T_2} - \frac{F_z}{T_1} \right\} \end{aligned}$$

여기서 $T_1 = \|\mathbf{F}_1^e\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ 이고 $T_2 = \|\mathbf{F}_2^e\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + (F_z + wL_0^e)^2}$ 이다.

ABSTRACT

This paper presents the dispersion characteristic of cable-stayed bridges behavior by method of moment estimation and predicts probabilistic distributions of the responses of structures.

Designing or analyzing cable-stayed bridges studies its mechanical behavior by structural type and design variable etc. and has to investigate sufficiently effects of design variable on total structural system. However, if this design variable is constant random variables, it is difficult to evaluate correctly structural behavior. The method of moment estimation approximates the probabilistic distribution of structural responses by using the probabilistic distribution of random variables considering Taylor series about random variables. Monte Carlo simulation is not suitable to analyze complicated structures, because it need long time to conduct repeatedly the probabilistic analysis from the structural analysis. This paper proposes the second-order third-moment method to predict the probabilistic distribution of structural responses and evaluates the mean, standard deviation, skewness of the cable-stayed bridge responses.

The sensitivity analysis of cable elements for a second-order third-moment method is directly calculated by using the elastic catenary cable elements that are different from the existing equivalent truss elements proposed by Ernst. Applied input random variables in this study are independent Modulus of elasticity and Girder weight of cables respectively, and considering this variables, this paper is studied the

mean, the standard deviation, the skewness of the responses of structures by using the second-order Taylor series of multi-random variable. Also, as a result of probability analysis, the non-linear probability distribution of the responses is approximated as three-parameter lognormal distribution. Monte-Carlo simulations were used for the verification of the developed program. The validity of the proposed method is demonstrated by cable stayed bridge examples and compared with the results of the Monte Carlo simulation.

Keywords:

The Method of Moment Estimation, Second-Order Third-Moment Method, Monte Carlo simulation, Elastic Catenary Cable Element, Three-Parameter Lognormal

Student Number: 2005-21177

감사의 글

먼저 이 논문이 완성되기까지 많은 관심과 격려로 따뜻하게 지도해 주신 이해성 교수님께 진심으로 감사 드립니다. 제자로 있는 동안 학문 외에 많은 가르침을 받았습니다. 이를 교훈 삼아 앞으로 열심히 생활하겠습니다. 그리고 많은 가르침을 주신 장승필 교수님, 고현무 교수님, 김재관 교수님께도 감사의 말씀 드립니다.

확률의 심오한 길로 인도해주시고, 여기까지 올 수 있게 도와 준 김기석 박사님께 감사의 말 드립니다. 후배에게 진심 어린 말씀 아끼지 않으시는 김용한 박사님, 이제 형이라 부르지 못하는 박현우 교수님, 일등 신랑 감인 운동 파트너 주성이형, 클래식기타 듀엣 승근이형, 열심히 공부 중인 연철이형, 짧지만 긴 만남이었던 세건이형, 짧은 만남이었던 민권이, 알고 보면 착한 재웅이, 내 입 꼭 막아야 하는 종헌이형, 가스 형제 상훈이형, 새 신랑 윤화, 듩직한 길제, 영원한 맞수 근원이, 분위기 메이커 승한이, 스페셜포스 종서, 아쉬움 많이 남는 영진이 등등 모든 구조해석 연구실 선 후배님들께 진심으로 감사 드립니다. 그리고 바쁘다는 핑계로 많이 놀아주지 못한 미희에게도 미안하고 고맙다는 말 전하며, 곧 새색시가 될 내 동생, 수미에게도 축하한다는 말 전합니다.

무엇보다 언제나 부족한 아들의 건강과 미래를 걱정해주시고, 후원해 주시는 부모님께 진심으로 감사 드리며 이 논문을 바칩니다.