공학석사학위논문

병렬처리를 위한 Element-Free Galerkin 법에서의 Subdomain 기법

2004 년 2 월

서울대학교 대학원

지구환경시스템공학부

조 호 영

병렬처리를 위한 Element-Free Galerkin 법에서의 Subdomain 기법

Subdomain Techniques in EFGM for Parallel Processing

지도교수 이 해 성

이 논문을 공학석사학위논문으로 제출함

2003 년 10 월

서울대학교 대학원

지구환경시스템공학부

조 호 영

조호영의 공학석사학위 논문을 인준함

2003 년 12 월

위 원 장 張 [illegible] [illegible]

부위원장 李 海 成

위 원 高 鉉 武

초록

Element-Free Galerkin (EFG) 법은 균열 해석 등의 문제에 장점이 있어 주로 사용된다. 그러나 해의 정도를 높이기 위해 자유도를 많이 사용하는 경우에는 계산시간이 오래 걸리고 컴퓨터 메모리에 제한을 받는다. 이 연구에서는 EFG 법에서의 Subdomain 기법을 제안한다. 구속조건으로 Penalty function 을 사용하는 기법과 Lagrange multiplier 를 사용하는 기법을 제안하고 타당성을 검증한다.

자유도가 큰 문제를 해석하기 위하여 Subdomain 기법과 함께 병렬프로그래밍 방법을 도입한다. 하나의 도메인을 여러개의 도메인으로 나누어서 각 도메인을 각 CPU 들이 담당하여 matrix condensation 을 통해 최종적으로 인터페이스 자유도에 대한 방정식을 구성하여 풀게 된다. 예제를 통하여 이 방법의 효율성을 검증한다.

피로 균열 성장 해석을 위해 균열 선단의 특이성과 균열면의 불연속성을 반영할 수 있는 수치적 기법을 도입하여 균열을 모형화하고 균열 선단 형상함수의 불연속 문제를 해결하기 위해 Diffraction Method 를 사용한다. 응력확대계수를 계산하기 위하여 J-integral 을 사용하고 균열 성장각을 계산하기 위해 최대주응력한계론을 사용하며 피로 균열 성장량을 계산하기 위하여 Paris 의 식을 사용한다. 피로 균열 성장을 위해 많은 계산시간이 필요한데 이러한 문제점을 해결하기 위해 Subdomain 기법을 이용한 coupled FEM-EFGM 방법을 제안하고 예제를 통하여 효율성을 검증한다.

<u>주요어</u>

Element-Free Galerkin **법**, Subdomain **기법**, **병렬프로그래밍**, **피로 균열 성장**, coupled FEM-EFGM

학번 : 2001-23277

목차

그림목차

Ⅰ. 서론

Element-Free Galerkin Method (EFG 법, EFGM)는 요소의 개념이 없이 절점과 그 절점을 둘러싸는 영향영역만을 가지고 문제를 해석하는 수치해석 기법이다. 따라서 이산방정식을 세우기 위해서 기하학적 형상과 절점군들만이 필요하기 때문에 균열성장과 같은 문제들을 모델링 하기가 매우 용이하고, 요소의 찌그러짐으로 인한 해의 정확도 저하가 일어나지 않는다. 그리고 영역내에서 절점들의 위치를 임의로 배치 시킬 수 있기 때문에 균열 선단의 응력 집중을 효과적으로 나타내기 위해서 절점들을 높은 밀도로 분포 시킬 수 있는 장점이 있다. 또 요소가 없으므로 균열의 진행에 따른 균열면의 변화를 경계조건의 변화로 간단히 나타낼 수 있으므로 요소를 재구성하는 번거로움이 없다. 이러한 이유들로 EFG 법은 균열 성장 문제 해석에 있어서 유한요소법을 사용하는 것보다 정확성과 효율성이 우수하다고 알려져 있다. 이 연구에서는 이러한 장점이 있는 EFG 법을 이용하여 해석을 수행한다.

EFG 법으로 해석을 수행할 때 정확한 해를 얻기 위해 많은 절점들을 사용하는 경우에는 계산시간이 길어지고 또한 컴퓨터의 물리적 메모리에 제한을 받게 된다. 이러한 결점을 보완하기 위하여 Subdomain 기법과 병렬프로그래밍 방법이 사용된다. Subdomain 기법은 해석 대상이 되는 하나의 도메인을 여러 개의 도메인으로 분리하여 해석하는 방법이다. 병렬프로그래밍은 2 개 이상의 CPU 를 사

용하여 CPU 간에 서로 데이터를 주고 받으며 프로그램이 수행되도록 하는 프로그래밍 기법이다. 이 연구에서는 Subdomain 기법과 병렬프로그래밍을 이용하고 수퍼컴퓨터나 근래에 발달한 리눅스 클러스터를 이용하여 해석을 수행한다.

균열 진전 해석의 경우에 있어서도 EFG 법을 이용하면 요소의 재구성 없이 편리하게 해석을 수행할 수 있지만 계산시간이 오래 걸리는 문제가 발생한다. 따라서 이 연구에서는 Subdomain 기법을 이용하여 균열을 포함하는 도메인에서는 EFG 법을 사용하고 나머지 도메인에서는 FEM 을 사용하여 해석을 수행한다.

2 장에서는 EFG 법의 정식화 과정과 EFG 법에서 매우 중요한 역할을 하는 가중함수와 영향영역의 의미와 결정, 그리고 경계조건 처리 방법, 수치적분 방법 및 최종적인 이산방정식에 대해 기술한다. 3 장에서는 Penalty function 을 이용한 Subdomain 기법과 Lagrange multiplier 를 이용한 Subdomain 기법에 대해 설명하고 이 두 방법을 검증한 후 병렬프로그래밍을 도입하여 자유도가 큰 문제를 해석한다. 4 장에서는 EFG 법에서의 균열의 모형화와 응력확대계수 산정, 균열 성장에 대해 알아보고 제안된 Subdomain 기법을 이용하여 FEM 과 EFG 법을 Coupling 하여 피로 균열 해석을 수행한다. 마지막으로 5 장에서는 결과를 종합하고 이 논문이 가지는 의의에 대하여 논한다

Ⅱ. Element-Free Galerkin 법

EFG 법에서는 절점으로부터 일정한 거리 내에 포함되는 점들을 그 절점의 영향영역에 포함되어 있다고 생각하고, 기준점을 자신의 영향영역 내에 포함하는 절점들을 취하여 이동최소제곱보간법[2]에 의해 그 기준점의 형상함수를 결정하고 근사 변위함수를 구한다. 이 과정에서 형상함수는 절점과 기준점 사이의 거리에 의해 결정되기 때문에 요소가 사용되지 않는다.

2.1 이동최소제곱보간법

주어진 영역 Ω 의 임의의 점 $\mathbf{x}$ 에서의 변위함수 $u(\mathbf{x})$ 의 이동최소제곱보간에 의한 근사변위 함수는 공간 좌표계의 다항식 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 와 다항식의 각 항들에 대응하는 계수값 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 를 사용하여 다음과 같이 정의된다.

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j}^{m} p_j(\mathbf{x}) a_j(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \mathbf{a}(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

여기서 계수 $a_j(\mathbf{x})$ 는 $\mathbf{x}$ 의 함수이며, 이동최소제곱보간에 의한 변위를 결정해 주는 미지값이다. m 은 이동최소제곱보간에서 사용되는 기저의 수이다.

지역 근사(Local approximation)는 다음과 같다.

$$u_L^h(\mathbf{x},\bar{\mathbf{x}}) = \sum_j^m p_j(\mathbf{x}) a_j(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) \tag{2.2}$$

임의의 점 $\mathbf{x}$에서의 미지값 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$는 $\mathbf{x}$를 기준으로 하는 일정한 영향영역 내의 절점의 변위 오차에 대한 가중잔여치, 즉 가중이산형 L_2 norm을 최소화 시켜 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} p &= \sum_I^n w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)\left[u_L^h(\mathbf{x}_I,\mathbf{x}) - u_I\right]^2 \\ &= \sum_I^n w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)\left[\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I)\mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_I\right]^2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

여기서, $w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)$는 $\mathbf{x}$와 절점 $\mathbf{x}_I$ 사이의 거리비에 따른 가중함수이다. 절점 $\mathbf{x}_I$를 중심으로 일정한 거리 내에 포함되는 점들에서 가중함수는 0이 아니며 이와 같은 점들을 $\mathbf{x}_I$의 영향영역(Domain of influence)내의 점들이라고 부른다. 그리고 n은 $\mathbf{x}$를 자신의 영향영역 내에 포함하는 절점들의 개수이다. 식 (2.3)은 다음과 같은 행렬식의 형태로 표현된다.

$$p = (\mathbf{Pa}-\mathbf{u})^T \mathbf{W}(\mathbf{x})(\mathbf{Pa}-\mathbf{u}) \tag{2.4}$$

여기서,

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \tag{2.5a}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \tag{2.5b}$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \tag{2.5c}$$

$\mathbf{a}(\mathbf{x})$에 대해 가중잔차를 최소화시키면 다음과 같다.

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{2.6}$$

여기서,

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x})\mathbf{P} \tag{2.7}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \tag{2.8}$$

따라서, $\mathbf{a}(\mathbf{x})$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \tag{2.9}$$

식 (2.1)과 (2.9)로부터 이동최소제곱보간에 의한 근사 변위함수를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \sum_I^n F_I(\mathbf{x})\mathbf{u}_I \tag{2.10}$$

여기서, 절점 $\mathbf{x}_I$ 의 형상함수는 다음과 같이 정의된다.

$$F_I(\mathbf{x}) = \sum_j^m p_j(\mathbf{x})(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}))_{jI} \tag{2.11}$$

위에서 언급한 행렬 $\mathbf{A}$ 는 영향영역 내의 절점들의 상대적 위치에 영향을 받으며 $\mathbf{A}^{-1}$ 를 구하기 위해서는 영향영역 내에 포함되는 절점들의 수가 다항식의 항의 수 m 보다 같거나 커야 한다.

2.2 영향영역과 가중함수

EFG 법을 해의 정도를 좌우하는 중요한 요소 중의 하나는 가중함수(Weight function)를 결정하는 일이다. 가중함수는 영향영역내의 절점의 가중치를 결정해 주는 함수로서 기준점 $\mathbf{x}$ 에서 가까운 절점 $\mathbf{x}_I$ 에서는 상대적으로 큰 값을 가지고 반대로 기준점 $\mathbf{x}$ 에서 먼 절점 $\mathbf{x}_I$ 에서는 작은 값을 가진다. 가중함수는 $\mathbf{x}$ 와 $\mathbf{x}_I$ 사이의 거리와 $\mathbf{x}_I$ 의 영향반경의 함수이다. 따라서 다음과 같이 두 점 사이의 거리에 종속되는 가중함수를 고려할 수 있다.

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = w_I(d) \tag{2.12}$$

여기서, $d = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|$ 이며 두 절점 사이의 거리를 나타낸다. $w_I(d)$ 는 d 에 관하여 1 차 미분항까지 연속한 것으로 가정한다. 이 연구에서는 여러가지 형태의 가중함수 중에서 연속한 미분항을 얻기 위하여 Exponential 가중함수를 사용하였다.

$$w_I(d) = \begin{cases} \dfrac{e^{-(d/c)^2} - e^{-(d_{mI}/c)^2}}{(1 - e^{-(d_{mI}/c)^2})}, & d_I \le d_{mI} \\ 0 \qquad\qquad\qquad , & d_I > d_{mI} \end{cases} \tag{2.13}$$

여기서 c 는 상대적인 가중치를 조정하는 상수이고, d_{mI} 는 절점 $\mathbf{x}_I$ 의 영향영역의 크기이다. 이 영향영역은 $\mathbf{A}$ 가 Singular 하지 않도록 결정되어야 한다. c 의 정의는 다음과 같다.

$$c = \bar{a}\, c_I \tag{2.14}$$

여기서, $1 \le \bar{a} \le 2$ 의 값을 사용하였다[1].

$$c_I = \max_{J \in S_J} \|\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_I\| \tag{2.15}$$

여기서, S_J 는 $\mathbf{x}_I$ 를 둘러싸는 다각형을 만들 수 있는 $\mathbf{x}_I$ 주변의 절점들의 최소 집합을 의미한다. 만약 절점들이 균일하게 분포되어 있다면 c_I 는 절점사이의 최대 거리가 된다. 절점들이 무작위로 분포되어 있는 경우에는 절점 배치를

고려하여 적당한 값을 사용하면 되는데, 이 연구에서는 $\mathbf{x}_I$ 에서 3 번째로 가까운 절점까지의 거리를 사용한다. Exponential 가중함수는 c 가 감소하면 $\mathbf{x}$ 에 가까운 절점에서는 더 높은 가중치를, $\mathbf{x}$ 에서 멀리 떨어진 절점에서는 더 낮은 가중치를 얻는다.

영향영역의 선택 또한 가중함수의 선택과 더불어 해의 정도를 결정하는 중요한 요소이다. 영향영역에 의해 이동최소제곱에 의해 근사해를 도출할 때, 몇 개의 주변 절점들을 이용하여 기준점의 변위함수를 결정할 것인지가 결정된다. 기준점에 대한 영향영역은 2차원 해석이 경우는 주로 원형이나 사각형 영역을 사용하고 3차원 영역에서는 구형 영역을 사용한다. 영향영역 내에 적절한 개수의 절점이 포함되도록 해야만 수치해의 정도가 보장되는 동시에 빠른 계산을

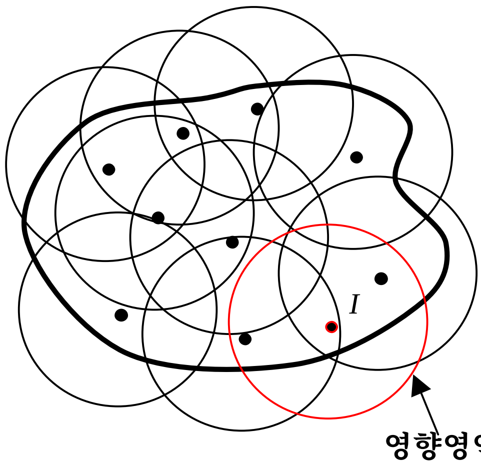


그림 1. 2차원에서의 원형의 영향영역

수행할 수 있다. 그림 1은 2차원에서 각 절점들이 원형 영향영역을 선택한 예를 보여준 것이다.

2.3 Lagrange Multiplier를 이용한 경계조건 처리와 이산방정식

유한요소법에서는 변위 경계조건을 만족하는 형상함수를 사용하므로 변위가 주어진 경계에서 자동적으로 0이 된다. 하지만 EFG법에서는 형상함수가 Kronecker delta condition($F_I(\mathbf{x}_J) \neq d_{IJ}$)을 만족하지 못하므로 경계상에 있지 않은 절점의 형상함수를 계산할 때 그 영향 영역 내에 필수경계상의 절점이 포함되게 되면 경계상의 절점도 어떤 값을 가지게 되므로 구속조건이나 미리 정의된 경계조건이 완전하게 반영되지 못하게 된다.

변위 경계 조건을 처리하기 위해서 사용되는 방법으로는 Penalty 방법, 경계 근처에서 FEM 요소를 사용하는 방법[1,3,8]등이 있지만 이 연구에서는 Lagrange multiplier를 포함하는 구속 조건식을 변분 형식에 추가시켜 구속조건을 강제적으로 만족시키는 방법[1,3]을 사용하였다. 이 방법은 적용이 매우 간단하지만 강성도 행렬이 정치(Positive-definite)가 아니고 구속조건이 늘어날수록 전체 강성도 행렬의 크기가 커져 계산량이 많아지는 단점이 있다.

경계 조건이 Γ로 주어진 영역 Ω내에서의 평형 방정식은 다음과 같다

$$\nabla \cdot \mathrm{s} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \ \text{ in } \ \Omega \tag{2.16}$$

경계 조건은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathrm{s} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \ \text{ on } \ \Gamma_t \tag{2.17a}$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \ \text{ on } \ \Gamma_u \tag{2.17b}$$

평형 방정식의 변분형태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} d(\nabla_s \mathbf{v}^T) : \mathrm{s}\, d\Omega - \int_{\Omega} d\,\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} d\,\mathbf{v}^T \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma_u} d\,\mathbf{?}^T \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} d\,\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{?} d\Gamma = 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

식(2.18)는 평형방정식과 경계조건을 모두 만족한다. 여기서 오른쪽 두 항이 Lagrange multiplier 를 사용하여 구속 조건의 만족시켜 준 부분이다. Lagrange multiplier $\mathbf{?}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{?}(\mathbf{x}) = N_I(s)\mathbf{?}_I \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_u \tag{2.19a}$$

$$d\,\mathbf{?}(\mathbf{x}) = N_I(s) d\,\mathbf{?}_I \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_u \tag{2.19b}$$

여기서 $N_I(s)$ 는 Lagrange interpolant 이고 s 는 경계를 따라서의 호의 길이이다. 식 (2.18), (2.19)로부터 최종적인 이산방정식은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{?} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \tag{2.20}$$

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^{\mathrm{T}} \mathbf{D} \mathbf{B}_J \, d\Omega \tag{2.21a}$$

$$\mathbf{G}_{IK} = -\int_{\Gamma_u} F_I N_K \, d\Gamma \tag{2.21b}$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Gamma_t} F_I \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Omega} F_I \mathbf{b} \, d\Omega \tag{2.21c}$$

$$\mathbf{q}_K = -\int_{\Gamma_u} N_K \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma \tag{2.21d}$$

여기서,

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} F_{I,x} & 0 \\ 0 & F_{I,y} \\ F_{I,y} & F_{I,x} \end{bmatrix} \tag{2.22a}$$

$$\mathbf{D} = \begin{cases} \dfrac{E}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-v}{2} \end{bmatrix} & \text{for plane stress} \\ \dfrac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} & \text{for plane strain} \end{cases} \tag{2.22b}$$

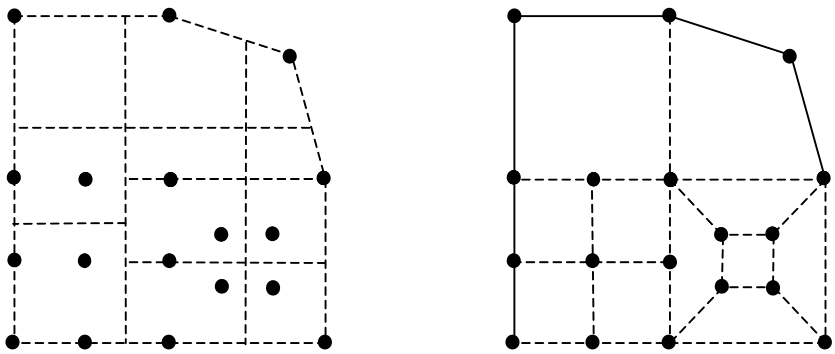
식 (2.22b)의 a와 b는 다음과 같다.

$$a = \frac{v}{1-v}, \quad b = \frac{1-2v}{2(1-v)} \tag{2.23}$$

이산방정식을 풀어 얻게 되는 이동최소자승보간법에 사용한 절점 값 u_I 는 $u(\mathbf{x}_I)$ 와 다른 값이므로 절점 I 를 기준으로 하여 영향영역 내에 존재하는 절점들의 u_I 값으로 근사하여 실제 변위값을 재계산해야 한다.

2.4 수치적분

유한요소법과 달리 EFG 법에서는 요소의 개념을 사용하지 않으나 수치적분을 수행하기 위해서는 대상영역을 임의의 개수의 셀이나 요소로 나눌 필요가 있다. 대표적으로 사용하는 방법에는 그림 2 의 (a)와 같이 배경 셀을 사용하거나 (b)와 같이 유한요소해석에서 사용하는 것과 같은 요소망을 사용하는 방법이 있다. 배경 셀을 사용하는 경우에는 대상의 기하학적 형상과 무관하게 규칙



(a) 배경 셀(backgraound Shell) (b) 요소망 (element)

그림 2. EFG법에서 적분을 위한 셀 구조

적인 모양의 셀을 사용하므로 복잡한 형태의 대상을 해석하기 위해 요소망을 짜는 번거로움을 피할 수 있는 장점이 있다. 하지만 대상의 경계내에 위치하는 Gauss 적분점을 판별하기 위한 조건식이 필요하게 되는데 이를 위해서 경계를 설정하기 위한 별도의 입력이 필요하며 복잡한 영역에서는 경계내의 유무를 판별하는데 한계가 있다는 단점이 있다.

반면에 요소망을 사용하는 방법은 실제 대상의 기하학적 형상과 일치하도록 요소망을 구성해야 하는 어려움이 있지만 보다 명확하게 기하학적 형상을 묘사할 수 있을 뿐 아니라 경계가 정확하게 설정되므로 정확한 적분값을 얻을 수 있는 장점이 있다. 이 요소망은 단순히 적분의 정확성을 위한 것이지 변위를 근사하기 위한 요소가 아니기 때문에, 유한요소에서와 같은 요소와 절점들간의 규칙성을 항상 만족시켜주어야 할 필요가 없다. 따라서 요소망 구성이 유한요소법에 비하여 용이하다.

위의 두 가지 방법에서 적분을 수행하는 방법은 유한요소해석의 수치적분과정과 매우 유사하다. 유한요소법과 다른 점은 각 Gauss 적분점을 기준으로 하여 영향영역 내에 존재하는 절점의 종류와 개수가 다르므로 셀 당 하나의 요소강성도 행렬이 구성되는 것이 아니라 각 가우스 적분점마다 하나의 행렬이 구성된다는 것이다. 이 각각의 행렬을 기준이 되는 가우스 적분점에 해당하는 가중치와 Jacobian 값을 이용하여 전체강성도 행렬로 조합한다.

식 (2.20)에서 강성도 행렬을 구하기 위한 적분은 전체 영역을 $ncel$개의 배

경 셀로 나누고 각 셀마다 $ngp \times ngp$ Gauss 적분점을 사용할 경우 다음과 같이 수행한다.

$$\begin{aligned}\int \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\, d\Omega &= \sum_{e}^{ncel} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\, d\Omega^e \\ &= \sum_{e}^{ncel} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{k}(x,h)\bar{J}(x,h)dx\ dh \qquad \text{for 2D} \qquad (2.24) \\ &= \sum_{e}^{ncel}\sum_{i}^{ngp}\sum_{j}^{ngp} \mathbf{k}(x_i,h_j)\ \bar{J}(x_i,h_j)\, W_i W_j\end{aligned}$$

여기서, $\bar{J}(x_i,h_j)$ 는 자코비안 값이며 W 는 각 가우스 적분점에 해당하는 가중치이다. (i,j) 번째 가우스 적분점에서의 강성행렬 $\mathbf{k}(x_i,h_j)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{k}(x_i,h_j) = \mathbf{B}_{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}_{\mathbf{Q}} \qquad \text{for 2D} \qquad (2.25)$$

여기서, $\mathbf{B}_{\mathbf{Q}}$ 는 셀이나 요소에서의 (i,j) 번째 가우스 적분점을 기준점으로 하는 영향영역내의 절점들에 대한 형상함수의 미분형의 행렬이다.

$$\mathbf{B}_{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} f_{1,x} & 0 & f_{2,x} & 0 & \cdots & f_{n,x} & 0 \\ 0 & f_{1,y} & 0 & f_{2,y} & \cdots & 0 & f_{n,y} \\ f_{1,y} & f_{1,x} & f_{2,y} & f_{2,x} & \cdots & f_{n,y} & f_{n,x} \end{bmatrix} \qquad \text{for 2D} \qquad (2.26)$$

여기서, n 은 가우스 적분점을 기준으로 한 영향영역 내의 절점의 개수이다.

배경 셀을 사용할 경우에는 셀 내의 가우스 적분점 중에서 일부만이 대상영역에 포함될 경우, 식 (2.24)에서 i, j 에 대해서 합산할 때 대상영역 밖에 있는 적분점에 대한 값을 제외시켜 주어야 하며 이러한 경우에는 해의 정도를 높이기 위해서는 고차의 Gauss 적분점을 사용하는 해야 하는 것으로 알려져 있다. 적분점의 개수는 셀 안의 절점의 개수에 의해 결정되며 일반적으로 m 개의 절점이 있는 셀에서는 2 차원의 경우 $(\sqrt{m}+2)\times(\sqrt{m}+2)$ Gauss 적분점이 사용된다[1].

III. 병렬프로그래밍을 위한 Subdomain 기법

EFG 법을 이용하면 균열문제 같은 특이성이 높은 문제를 효과적으로 해석할 수 있다. 하지만 계산시간이 많이 걸리는 단점이 있다. 특히 높은 해의 정확도를 위하여 자유도를 많이 사용하여 문제를 해석할수록 계산시간은 크게 늘어나게 된다. 또한 자유도가 증가함에 따라 컴퓨터 메모리에 제약을 받게 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 병렬프로그래밍을 사용하게 된다. 병렬프로그래밍이란 수퍼컴퓨터나 근래에 크게 발달하고 있는 리눅스 클러스터 시스템을 이용하여 프로그램 수행시에 CPU를 2개 이상 사용하도록 프로그래밍을 하는 것이다. CPU를 2개 이상 사용하여 해석하기 위해서는 각각의 CPU당 할 일을 나누어 주어야 한다. 하나의 도메인을 여러 개의 도메인으로 나누어서 나뉘어진 각 도메인 1개마다 1개의 CPU를 이용하여 해석하게 된다.이를 위해 Subdomain기법이 필요하게 된다. FEM에서는 matrix condensation만으로 Subdomain기법을 적용할 수 있으나 EFG 법에서는 인터페이스 근처에서 영향반경이 잘리는 문제가 발생하기 때문에 새로운 Subdomain기법이 필요하다.

이 장에서는 Penalty function을 이용한 Subdomain기법과 Lagrange multiplier를 이용한 Subdomain기법을 제안하고 각각의 장단점을 살펴본 후 예제를 통하여 제안된 두 방법의 타당성을 검토한다. 그리고 Subdomain기법과 병렬프로그래밍을 이용하여 자유도가 상당히 큰 문제를 해석하여 제안된 방법의 효율성과 계

산시간의 이득을 살펴본다.

3.1 Subdomain 기법

EFG 법에 적용 가능한 Penalty function을 이용한 Subdomain기법과 Lagrange multiplier를 이용한 Subdomain기법을 제안한다.

3.1.1 Penalty function을 이용한 Subdomain 기법

그림 3 에서 보는 것처럼 하나의 도메인을 두개의 도메인으로 나누어서 해석하는 경우를 생각해본다. 이때 인터페이스 부분이 갈라지면서 새로운 Traction boundary가 발생되고 이것을 고려하여야 한다. 도메인1과 도메인2에서의 Total Potential Energy는 다음과 같다

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}\int_{V} e_{ij}^{h} s_{ij}^{h} dV - \int_{V_1} u_i^h b_i dV - \int_{\Gamma_{t,1}} u_i^h \overline{T_i} d\Gamma - \int_{\Gamma_i} u_i^h T_i^h d\Gamma \tag{3.1a}$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}\int_{V_2} e_{ij}^{h} s_{ij}^{h} dV - \int_{V} u_i^h b_i dV - \int_{\Gamma_{t,2}} u_i^h \overline{T_i} d\Gamma - \int_{\Gamma_i} u_i^h T_i^h d\Gamma \tag{3.1b}$$

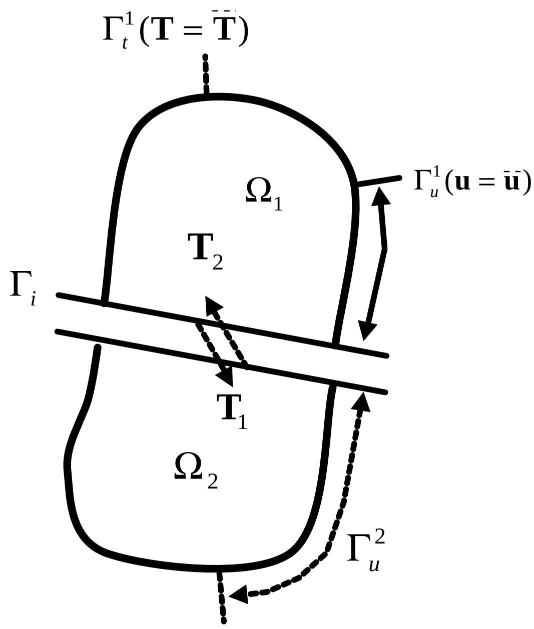


그림 3 . Subdomain

식 (3.1)에서 T_i 는 인터페이스 Traction으로 독립적인 변수가 아니라 변위 u_i 의 종속변수이다. 인터페이스에서의 constraint는 변위가 같고 Traction의 합이 0 이라는 조건에 의해 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^2 \\ &\mathbf{T}^1 + \mathbf{T}^2 = 0 \end{aligned} \quad \text{on } \Gamma_i \tag{3.2}$$

전체 도메인에서 Total Potential Energy는 식 (3.1), (3.2)에 의해 다음과 같이 구해진다.

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + a\int_{\Gamma_i}(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2)^2 d\Gamma + b\int_{\Gamma_i}(\mathbf{T}^1 + \mathbf{T}^2)^2 d\Gamma \tag{3.3}$$

위의 식의 a, b 는 Penalty function 계수이다. 식 (3.3)에 가상일을 취하면 다음과 같다.

$$d\Pi = d\Pi_1 + d\Pi_2 + d\{a\int_{\Gamma_i}(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2)^2 d\Gamma + b\int_{\Gamma_i}(\mathbf{T}^1 + \mathbf{T}^2)^2 d\Gamma\} = 0 \tag{3.4}$$

여기서,

$$d\Pi_1 = \int_{V_1} de_{ij}^h s_{ij}^h dV - \int_{V_1} du_i^h b_i dV - \int_{\Gamma_{t,1}} du_i^h \overline{T}_i d\Gamma - \int_{\Gamma_{i,1}} du_i^h s_{ij}^h n_j d\Gamma - \int_{\Gamma_{i,1}} u_i^h ds_{ij}^h n_j d\Gamma \tag{3.5a}$$

$$d\Pi_2 = \int_{V_2} de_{ij}^h s_{ij}^h dV - \int_{V_2} du_i^h b_i dV - \int_{\Gamma_{t,2}} du_i^h \overline{T}_i d\Gamma - \int_{\Gamma_{i,2}} du_i^h s_{ij}^h n_j d\Gamma - \int_{\Gamma_{i,2}} u_i^h ds_{ij}^h n_j d\Gamma \tag{3.5b}$$

식 (3.4)로부터 최종적인 이산방정식은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} + \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{G} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{K}_{22} + \mathbf{M}_{22} & \\ \mathbf{G}^T & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{?} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \tag{3.6}$$

$$\mathbf{K}_{11} = \int_{V_1^q} \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}\mathbf{B}_1 dV - \int_{\Gamma_{i,1}} \mathbf{F}_1^T \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{B}_1 dV - \int_{\Gamma_{i,1}} \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}^T \mathbf{X}^T \mathbf{F}_1 dV \tag{3.7a}$$

$$\mathbf{K}_{22} = \int_{V_2^q} \mathbf{B}_2{}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 dV - \int_{\Gamma_{i,2}} \mathbf{F}_2{}^T \mathbf{X} \mathbf{D} \mathbf{B}_2 dV - \int_{\Gamma_{i,2}} \mathbf{B}_2^T \mathbf{D}^T \mathbf{X}^T \mathbf{F}_2 dV \tag{3.7b}$$

$$\mathbf{M}_{11} = \int_{\Gamma_i} \mathbf{F}_1^T \mathbf{F}_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_i} \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}_1^T \mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{B}_1 d\Gamma \tag{3.7c}$$

$$\mathbf{M}_{12} = \int_{\Gamma_i} -\mathbf{F}_1^T \mathbf{F}_2 d\Gamma + \int_{\Gamma_i} \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}_1^T \mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2 \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_2 d\Gamma \tag{3.7d}$$

$$\mathbf{M}_{21} = \mathbf{M}_{12}^T \tag{3.7e}$$

$$\mathbf{M}_{22} = \int_{\Gamma_i} \mathbf{F}_2^T \mathbf{F}_2 d\Gamma + \int_{\Gamma_i} \mathbf{B}_2^T \mathbf{D}_2^T \mathbf{X}_2^T \mathbf{X}_2 \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_2 d\Gamma \tag{3.7f}$$

$$\mathbf{G} = -\int_{\Gamma_{u,1}^q} \mathbf{F}_1{}^T \mathbf{N} d\Gamma - \int_{\Gamma_{u,2}^q} \mathbf{F}_2{}^T \mathbf{N} d\Gamma \tag{3.7g}$$

$$\mathbf{f}^1 = \int_{V_1^q} \mathbf{F}_1{}^T \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma_{t,1}^q} \mathbf{F}_1{}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \tag{3.7h}$$

$$\mathbf{f}^2 = \int_{V_2^q} \mathbf{F}_2{}^T \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma_{t,2}^q} \mathbf{F}_2{}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \tag{3.7i}$$

$$\mathbf{q} = -\int_{\Gamma_{u,1}^q} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma - \int_{\Gamma_{u,2}^q} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \tag{3.7j}$$

여기서,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix} \quad \text{for 2D} \tag{3.8a}$$

, n_1, n_2는 인터페이스에서의 방향벡터성분

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \cdots & \Phi_n & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & & 0 & \Phi_n \end{bmatrix} \quad \text{for 2D} \tag{3.8b}$$

위의 식에서 매트릭스 $\mathbf{K}_{11},\mathbf{K}_{22}$는 식(3.4)중에서 $d\Pi_1, d\Pi_2$에 의해 발생되는 항이고 매트릭스 $\mathbf{M}_{11},\mathbf{M}_{12},\mathbf{M}_{21},\mathbf{M}_{22}$는 식(3.4) 중에서 Constraint 항에 의해서 발생되는 항이다.

여기서 제안된 Penalty function을 이용한 Subdomain 기법은 Constraint를 적용하기 위하여 추가의 자유도가 필요하지 않은 장점이 있다. 반면에 Constraint를 적용하는 과정중 하나의 도메인에서 다른 도메인의 정보가 필요한 단점이 있다. 따라서 이 방법은 CPU 1개를 써서 해석하는 경우에 유용하다고 볼 수 있다.

3.1.2 Lagrange multiplier를 이용한 Subdomain 기법

하나의 도메인을 두개의 도메인으로 나눈 모습이 그림 4에 나타나 있다. Subdomain 기법[22]을 이용하여 식을 전개한다. 나뉘어진 각각의 도메인에서 irreducible (displacement) form을 사용하고 두 도메인의 인터페이스에서는 독립적으로 정의되는 Lagrange multiplier를 사용한다. 여기서 Lagrange multiplier는 traction을 의미한다. Domain Ω^1에서 변위 u^1과 tractions $t^1 = l_t$를 근사하는 formulation을 구한다.

가상일에 의한 식을 weak form으로 전개하면 다음과 같다.

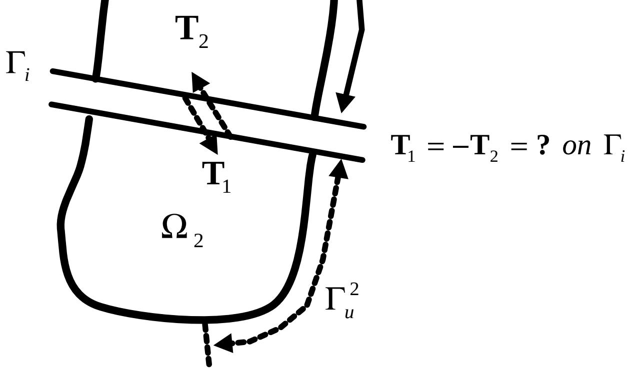


그림 4 . Subdomain

$$\int_{\Omega^1} d(\mathbf{Su}^1)^T \mathbf{D}^1 \mathbf{Su}^1 \, \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_I} d\mathbf{u}^{1T} \mathbf{?}_t \, \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega^1} d\mathbf{u}^{1T} \mathbf{b} \, \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t^1} d\mathbf{u}^{1T} \tilde{\mathbf{t}} \, \mathrm{d}\Gamma = 0 \qquad (3.9a)$$

Domain Ω^2 **에서는 두개의** domain**에서의** equilibrium**을 만족하도록 인터페이스** traction**을** $\mathbf{t}^2 = -\mathbf{?}_t$ **로 넣어주면 다음과 같다**.

$$\int_{\Omega^2} d(\mathbf{Su}^2)^T \mathbf{D}^2 \mathbf{Su}^2 \, \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_I} d\mathbf{u}^{2T} \mathbf{?}_t \, \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega^2} d\mathbf{u}^{2T} \mathbf{b} \, \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t^2} d\mathbf{u}^{2T} \tilde{\mathbf{t}} \, \mathrm{d}\Gamma = 0 \qquad (3.9b)$$

두 도메인의 인터페이스에서 변위의 연속조건은 다음과 같이 weak form**으로 정의된다**.

$$\int_{\Gamma_I} d\boldsymbol{?}_t^{\;T}(\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1)\,\mathrm{d}\Gamma \tag{3.9c}$$

식(3.9a)와 (3.9b)에서 변위경계조건은 변위함수 근사에 의해 자동적으로 만족된다고 가정하였다. 하지만 EFG 법을 사용하는 경우에는 변위경계조건이 자동으로 만족되지 않기 때문에 2.3장에서 설명하고 있는 Lagrange multiplier를 사용해야한다.

최종적인 변분식은 다음과 같다

domain 1에서

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^1} d(\mathbf{Su}^1)^T \mathbf{D}^1\mathbf{Su}^1\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_I} d\mathbf{u}^{1T}\boldsymbol{?}_t\,\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega^1} d\mathbf{u}^{1T}\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t^1} d\mathbf{u}^{1T}\tilde{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma \\ - \int_{\Gamma_u^1} d\,\boldsymbol{?}^T \cdot (\mathbf{u}^1 - \overline{\mathbf{u}})d\Gamma - \int_{\Gamma_u^1} d\,\mathbf{u}^{1T} \cdot \boldsymbol{?}\,d\Gamma = 0\end{aligned} \tag{3.10a}$$

domain 2에서

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^2} d(\mathbf{Su}^2)^T \mathbf{D}^2\mathbf{Su}^2\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_I} d\mathbf{u}^{2T}\boldsymbol{?}_t\,\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega^2} d\mathbf{u}^{2T}\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t^2} d\mathbf{u}^{2T}\tilde{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma \\ - \int_{\Gamma_u^2} d\,\boldsymbol{?}^T \cdot (\mathbf{u}^2 - \overline{\mathbf{u}})d\Gamma - \int_{\Gamma_u^2} d\,\mathbf{u}^{2T} \cdot \boldsymbol{?}\,d\Gamma = 0\end{aligned} \tag{3.10b}$$

인터페이스에서

$$\int_{\Gamma_I} d?_t^{\,T}(\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1)\,\mathrm{d}\Gamma \tag{3.10c}$$

Lagrange multiplier**는 다음과 같다**.

$$\mathbf{?}_t(\mathbf{x}) = N_I(s)\mathbf{?}_{tI} \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_u \tag{3.11a}$$

$$d\,\mathbf{?}_t(\mathbf{x}) = N_I(s)d\,\mathbf{?}_{tI} \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_u \tag{3.11b}$$

식 (3.11)**에서 불연속적인** traction**을 모사하기 위하여 형상함수** N_I **도 불연속이 되어야 한다**. l_t **를** interpolation**하기 위해서 인터페이스의 각 선요소마다** traction**노드를 배치한다**. **최종적인 이산방정식은 식**(3.10), (3.11)**으로 부터 다음과 같이 구해진다**.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^1 & \mathbf{O} & \mathbf{Q}^1 & \\ \mathbf{O} & \mathbf{K}^2 & \mathbf{Q}^2 & \mathbf{G} \\ \mathbf{Q}^{1T} & \mathbf{Q}^{2T} & \mathbf{O} & \\ & \mathbf{G}^T & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{?}_t \\ \mathbf{?} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \\ \mathbf{O} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \tag{3.12}$$

$$\mathbf{K}^1 = \int_{\Omega^1} \mathbf{B}^{1T}\mathbf{D}^1\mathbf{B}^1 d\Omega \tag{3.13a}$$

$$\mathbf{Q}^1 = -\int_{\Gamma_I} \mathbf{F}^{1T} \mathbf{N} d\Gamma \tag{3.13b}$$

$$\mathbf{K}^2 = \int_{\Omega^2} \mathbf{B}^{2T} \mathbf{D}^2 \mathbf{B}^2 d\Omega \tag{3.13c}$$

$$\mathbf{Q}^2 = \int_{\Gamma_I} \mathbf{F}^{2T} \mathbf{N} d\Gamma \tag{3.13d}$$

$$\mathbf{f}^1 = \int_{\Gamma_t^1} \mathbf{F}^{1T} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega^1} \mathbf{F}^{1T} \mathbf{b} d\Omega \tag{3.13e}$$

$$\mathbf{f}^2 = \int_{\Gamma_t^2} \mathbf{F}^{2T} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega^2} \mathbf{F}^{2T} \mathbf{b} d\Omega \tag{3.13f}$$

$$\mathbf{G} = -\int_{\Gamma_u^1} \mathbf{F}^{1T} \mathbf{N} d\Gamma - \int_{\Gamma_u^2} \mathbf{F}^{2T} \mathbf{N} d\Gamma \tag{3.13g}$$

$$\mathbf{q} = -\int_{\Gamma_{u,1}^q} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma - \int_{\Gamma_{u,2}^q} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \tag{3.13h}$$

이 방법은 해석을 수행할 때 하나의 도메인에서 자기 도메인의 정보만을 필요로 하는 장점이 있다. 단점은 구속조건을 위해 추가의 Lagrange multiplier를 사용하기 때문에 자유도가 늘어난다는 점이다. 따라서 이 방법은 여러 개의 CPU를 써서 해석을 수행할 경우에 유용하다고 할 수 있다.

3.1.3 Subdomain기법 타당성 검증 예제

앞에서 제안한 Penalty function을 이용한 Subdomain기법과 Lagrange multiplier를 이용한 Subdomain기법의 타당성을 검증하기 위해 그림5와 같은 직사각형 판

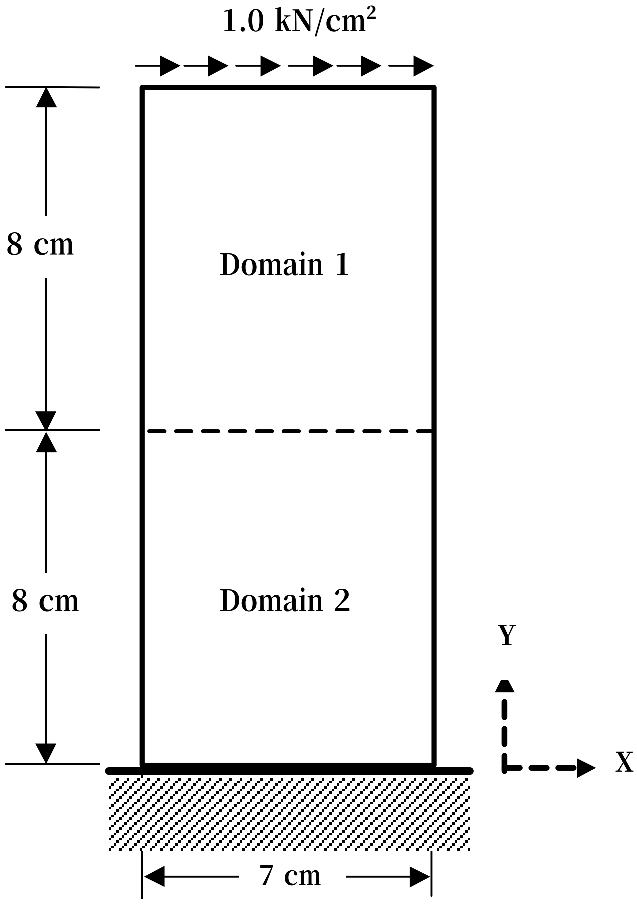


그림 5. 전단응력을 받는 직사각형 판 (예제1)

을 해석하였다. 7cm×16cm의 직사각형 판에 1.0 kN/cm^2의 전단응력을 가하였다.

판은 강철로 생각하고 물성치는 탄성계수가 210×10^2 kN/cm^2 이고 포아송비는 0.3로 가정하였다. 도메인1과 도메인2 에서 각각 255개의 절점과 224개의 적분 셀을 사용하였다.

그림6을 보면 X방향으로의 변위가 한 개의 도메인을 사용하여 해석하였을

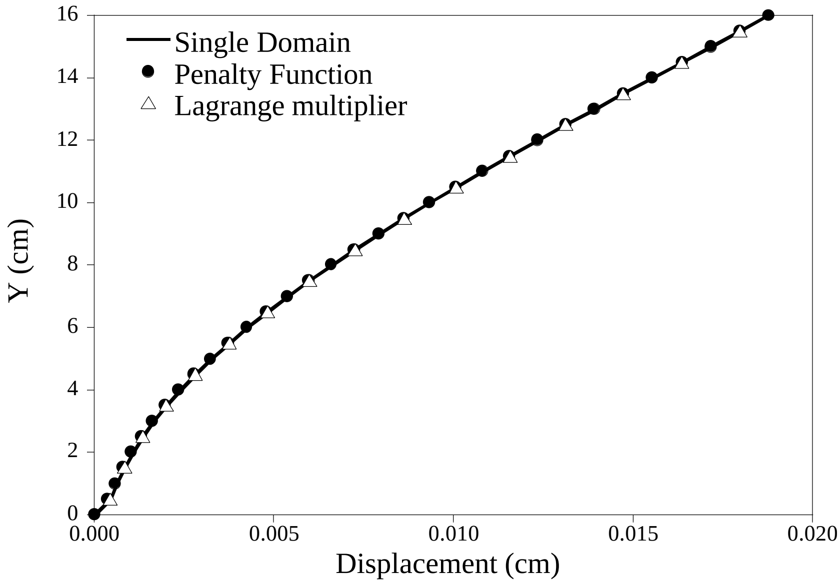


그림 6. X**방향으로의 변위**

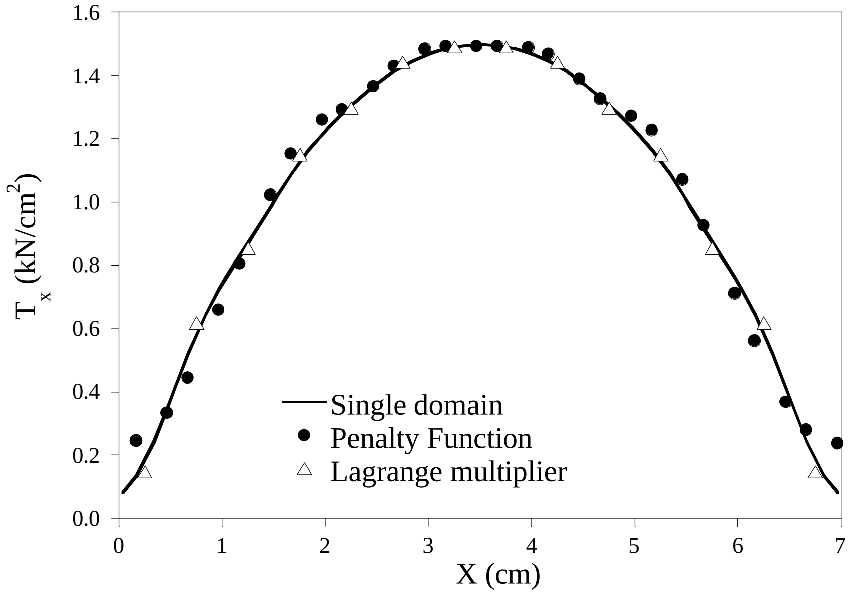


그림 7. 인터페이스에서의 Traction

때와 Penalty function을 이용한 Subdomain기법으로 해석하였을 때, 그리고 Lagrange multiplier를 이용한 Subdomain기법으로 해석하였을 때의 3가지 경우 모두 일치하는 것을 알 수 있다. 그림7에서는 인터페이스에서 트랙션 값을 비교해 보았다. Lagrange multiplier방법은 정해와 거의 일치하는 Traction을 얻을 수 있었고 Penalty function방법에서는 조금 차이가 있긴 하지만 거의 일치하는 Traction을 얻을 수 있었다.

이 예제를 통해 두 Subdomain기법의 타당성, 해석의 정확성 등을 검증하였다.

3.2 병렬프로그래밍

병렬프로그래밍이란 수퍼컴퓨터나 리눅스 클러스터등의 시스템을 이용하여 두개 이상의 CPU가 서로간에 정보를 교환하면서 계산을 수행하도록 하는 프로그래밍 방법이다. 해의 정도를 높이기 위하여 자유도를 많이 사용하는 경우에는 계산시간이 오래 걸리는 문제점이 발생된다. 또한 큰 자유도로 인하여 컴퓨터 메모리에 제한을 받게 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 앞에서 설명한 Subdomain기법과 함께 병렬프로그래밍 방법을 사용한다. 제안된 두 가지 Subdomain기법 중 이 경우에는 Lagrange multiplier기법이 적용하기 편리하므로 이 기법을 사용한다.

3.2.1 Matrix Condensation

병렬프로그래밍을 사용하여 해석을 수행할 때에는 각각의 CPU들이 각자 맡은 도메인에서 stiffness matrix를 구성하게 된다. 이때 메모리의 절약과 계산시간의 단축을 위하여 각각의 CPU에서 인터페이스 자유도부분에 해당하는 matrix를 matrix condensation에 의해 구해야한다. 그림 8 을 보면 해석대상의 절점 배치를 볼 수 있다. 하나의 도메인을 두개의 도메인으로 나누어서 CPU 2개를 사용하는 경우이다. 그림8에서 동그라미 안에 들어있는 절점들이 인터페이스 자유도이다. 인터페이스에 회색으로 추가적으로 배치되어 있는 절점들은 Lagrange multiplier를 위한 traction 절점들이다. Traction 절점을 인터페이스에 있는 한 개의 선요소당 한 개씩 배치했으므로 각 선요소에서 상수인 traction을 모사하게 된다. 이 동그라미 안에 들어 있는 인터페이스 자유도에 의한 식이 최종적인 방적식이 된다. 도메인1에서의 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{1i} \\ \mathbf{K}_{i1} & \mathbf{K}_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_i^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_i^1 \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

식 (3.14)를 $\mathbf{U}_i^1$에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$(\mathbf{K}_{ii} - \mathbf{K}_{i1}(\mathbf{K}_{11})^{-1}\mathbf{K}_{1i})\mathbf{U}_i^1 = \mathbf{P}_i^1 - \mathbf{K}_{i1}(\mathbf{K}_{11})^{-1}\mathbf{P}_1 \tag{3.15}$$

도메인2에서의 방정식은 다음과 같다.

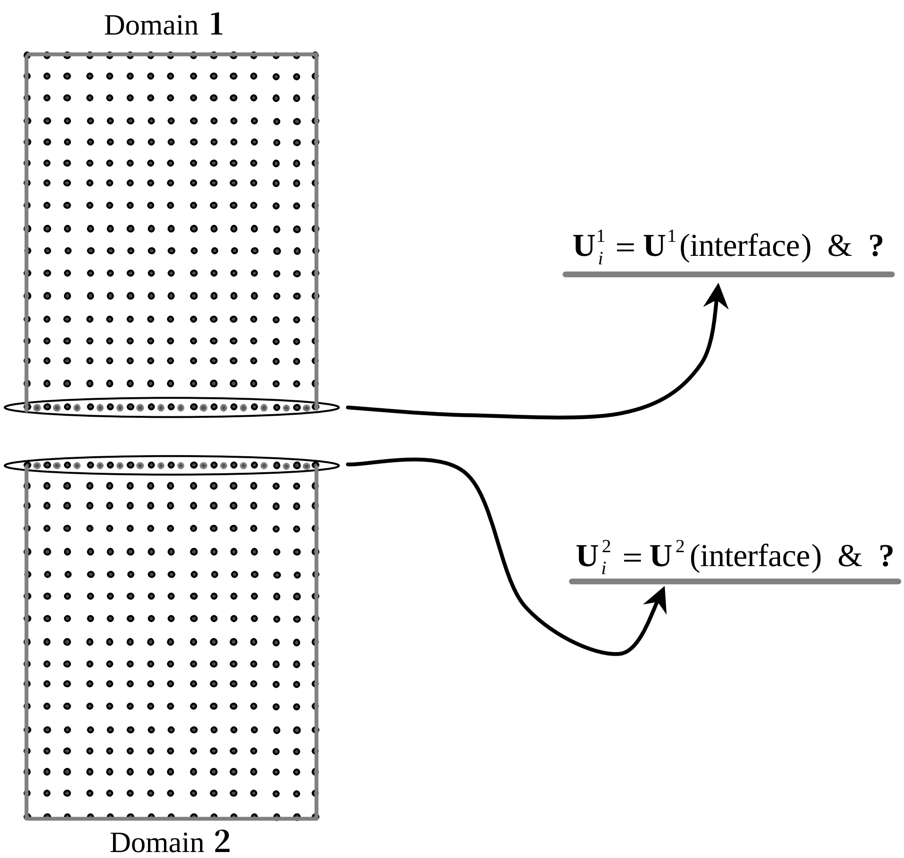


그림 8. **절점 배치**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{2i} \\ \mathbf{K}_{i2} & \mathbf{K}_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_i^2 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

(3.16)를 $\mathbf{U}_i^2$에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$(\mathbf{K}_{ii} - \mathbf{K}_{i2}(\mathbf{K}_{22})^{-1}\mathbf{K}_{2i})\mathbf{U}_i^2 = \mathbf{P}_i^2 - \mathbf{K}_{i2}(\mathbf{K}_{22})^{-1}\mathbf{P}_2 \tag{3.17}$$

식 (3.15)와 (3.17)를 하나의 식으로 합쳐서 최종방정식을 만들면 다음과 같은 형태가 된다.

$$\left[\quad\right]\begin{pmatrix} \mathbf{U}_1(\text{inteface}) \\ \mathbf{?}_t \\ \mathbf{U}_2(\text{inteface}) \end{pmatrix} = \left(\quad\right) \tag{3.18}$$

식 (3.18)을 풀면 인터페이스 자유도에 대한 해가 나오게 된다. 이것을 가지고 각각의 CPU가 자기 도메인으로 돌아가서 나머지 자유도에 대한 해를 구하게 된다. 도메인1과 도메인2에서의 나머지 자유도에 대한 방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{U}_1 = (\mathbf{K}_{11})^{-1}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{K}_{1i}\mathbf{U}_i^1) \tag{3.19}$$

$$\mathbf{U}_2 = (\mathbf{K}_{22})^{-1}(\mathbf{P}_2 - \mathbf{K}_{2i}\mathbf{U}_i^2) \tag{3.20}$$

3.2.2 해석수행방법

병렬프로그래밍과 Lagrange multiplier를 이용한 Subdomain기법을 이용하여

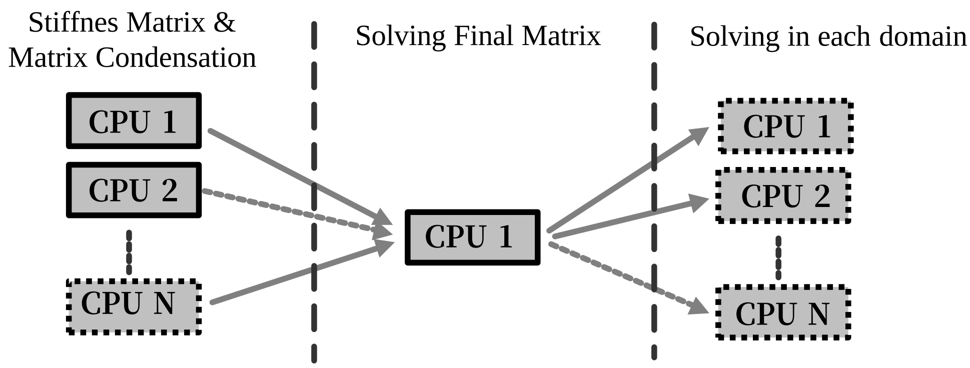


그림 9. 해석수행방법

해석을 수행하는 방법은 그림9에서 보는 바와 같다. 하나의 도메인을 N개의 작은 도메인으로 나눈 경우이다. N개의 CPU들이 각각 하나의 도메인을 맡아서 stiffness matrix를 만들고 matrix condensation을 수행한다. 그런 이후에 인터페이스 자유도에 대한 식을 CPU 1으로 모아서 인터페이스 자유도에 대한 해를 구하고 이것을 다시 N개의 CPU에 나누어 주어서 나머지 자유도에 대한 해를 구하고 해석을 끝마치게 된다. 이 과정 중에서 계산시간은 위의 3가지 step중에서 첫번째 step인 stiffness matrix & matrix condensation 에서 대부분 차지하게 된다. 그리고 자유도가 큰 문제의 경우에도 인터페이스 자유도는 작기 때문에 위의 그림에서 화살표로 표시된 데이터 전송에는 시간이 거의 걸리지 않게 된다.

3.2.3 병렬프로그래밍 예제

병렬프로그래밍의 효과를 검증해보기 위하여 그림 10과 같은 직사각형 판을 해석해 보았다. 10cm×60cm의 직사각형 판에 1.0 kN/cm^{2}의 전단응력을 가하였다. 판은 강철로 생각하고 물성치는 탄성계수가 210×10^2 kN/cm^2 이고 포아송비

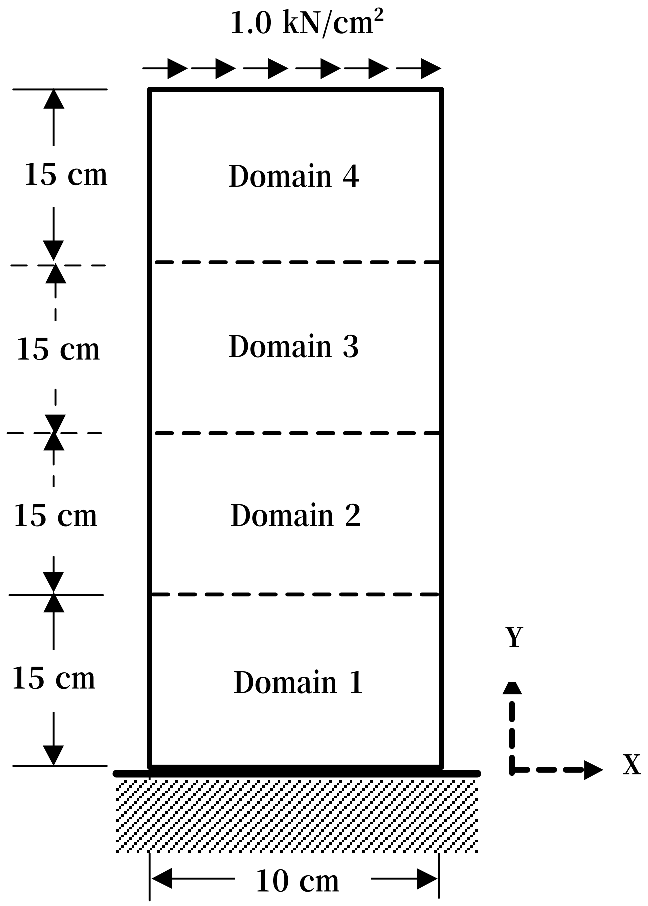


그림 10. 전단응력을 받는 직사각형 판 (예제 2)

는 0.3로 가정하였다. 전체 도메인을 4개의 도메인으로 나누고 4개의 CPU를 사용하여 해석하였다. 각 도메인마다 절점은 101×151의 배치로 절점수는 15251개이고 적분셀은 15000개이다. 한 도메인에서 자유도가 30502개이므로 총 자유도는122008개로 약 12만개이다. 프로그램을 수행에 사용된 CPU는 Intel Xeon 2.4GHz이고 Linear equation solver로는 Positive Definite Symmetry Band Solver를 사용하였다. 자유도를 한 도메인마다 약 3만개로 잡은 이유는 프로그램을 수행한 시스템에서 한 개의 CPU에서 메모리의 제한을 넘지 않으면서 계산 가능한 가장 큰 자유도가 약 3만개이기 때문이다.

계산결과 총 계산 시간이 919초 걸렸다. 대부분의 계산시간은 stiffness matrix

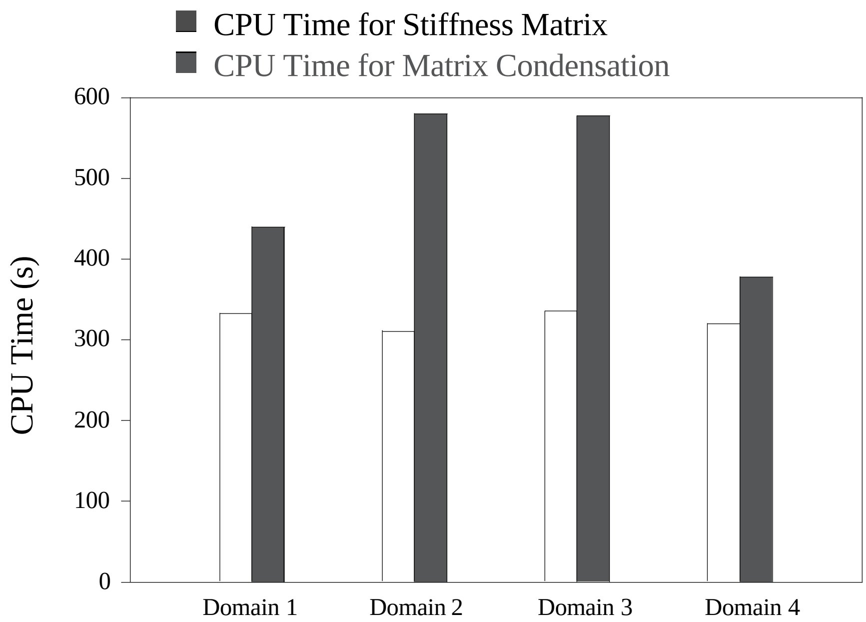


그림 11 계산시간

를 구성과 matrix condensation 과정에서 소모되는데 각 CPU당 계산시간은 그림 11에서 보는 바와 같다. 자유도가 커서 일반적인 방법으로는 계산이 불가능한 문제를 병렬프로그래밍과 Subdomain기법을 이용하여 빠른 시간 내에 해석할 수 있었다.

IV. 피로 균열

피로하중을 받는 구조물에 초기 균열이 발생할 경우 구조물의 안전성과 잔존 수명을 계산하기 위해서는 정확한 균열 전판 예측식이 요구된다. 강 또는 강합성 구조물의 피로 균열 문제는 선형탄성파괴역학(LEFM)에 기초하여 해석하려는 노력이 이루어져 왔다. 피로 균열 성장 예측식은 균열의 진전 접선 방향과 진전 크기를 결정하는 것으로 균열 선단의 응력확대계수(Stress intensity factor)[11]의 함수로 표현된다. 이 연구에서는 응력확대계수를 산정하는데 혼합모드 균열의 경우 비교적 쉽게 응력확대계수를 산정할 수 있는 J-integral 을 사용한다.

이 장에서는 EFG법에서의 균열의 모형화에 대해 설명하고 그리고 응력확대계수의 산정과 균열 성장에 대해 살펴본다. 그리고 앞장에서 설명한 Subdomain 기법을 이용하여 FEM과 EFG법을 Coupling하는 방법을 제안한다 다음으로 피로 균열 성장 예제를 해석하여 효율성을 검증한다.

4.1 EFG법에서의 균열의 모형화

EFG 법에서 적절히 배치된 절점들만을 이용하여 균열에 의한 불연속성과 특이성을 표현하는 것은 매우 중요한 일이다. 특히 수치적인 기법을 이용하여 균열의 위치를 인식시키고 처리하는 과정의 도입이 필요하며 균열 성장을 해석하

기 위해서는 균열의 성장경로를 따라 생성되는 새로운 균열의 기하학적 형상을 묘사해 주어야 한다[4,7,9].

EFG 법에서는 균열을 수치적으로 인식하기 위여 선분의 양쪽에 매우 가까운 거리로 복절점을 배치시킨다. 이 복절점들은 균열의 반대편에 서로 위치하고 있기 때문에 서로 간에 영향을 미치지 않아야 하며 영향영역도 균열의 불연속성을 반영하여 결정되어야 한다.

균열 전파에 있어서는 균열이 성장할 경우 새로운 선분이 기존의 균열 선단에 추가되며 새롭게 구해진 균열선단에 절점을 추가시키고 기존의 균열 선단에 있던 절점을 균열면을 중심으로 서로 반대방향으로 나누어 2 개의 절점으로 분리시켜 배치한다.[7,10] 또 수치해의 정도를 향상시키기 위해서 그림 12 에서와

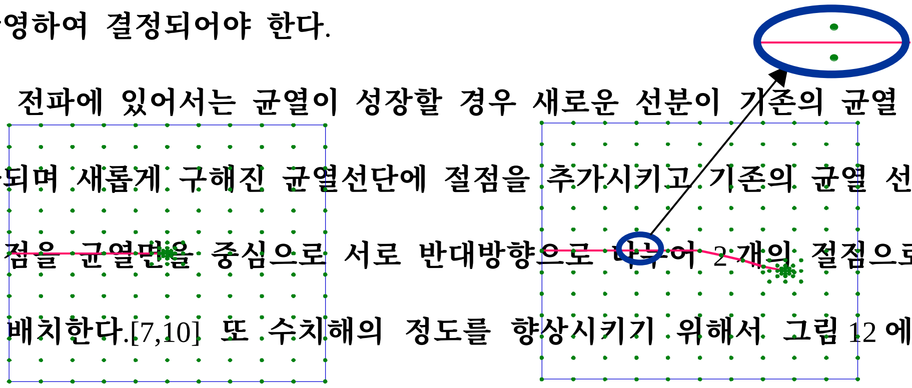


그림 12. 균열의 모형화를 위한 절점배치와 균열 성장에 따른 복절점 배치 예

같이 적절한 개수의 절점을 균열 선단 주변에 추가적으로 배치시켜서 자유도를 증가시키는 방법이 사용된다. 일반적으로 균열 선단 주변에 일정간격으로 점진적인 절점군을 배치시킴으로써 쉽게 해의 정도를 향상시킬 수 있다. 타원 안의 그림은 균열 선상의 절점을 복절점으로 나누어 배치한 예이다.

영향영역은 어떠한 경계도 가로지를 수 없으며 균열문제와 같이 불연속성이 존재하는 문제에 있어서는 어느 기준점으로부터 취하는 영향영역이 불연속 경계부분을 가로질러 가지 않도록 하기 위한 판별 조건식이 추가로 요구된다. EFG 법에서 균열과 같은 불연속선이 있는 곳에서는 영향영역을 결정할 때, 그림 13 과 같이 불연속면을 불투명한 면으로 생각하고 절점과 적분점 사이에 빛이 지나가는 것으로 고려하는 Visibility criterion[3,5]이 주로 사용된다. 이 방법은 그림 13 의 J 절점과 같은 경우에 대해서는 잘 성립되어 변위장과 응력장이 적절히 불연속하도록 해준다. 하지만 I 절점과 같이 균열 선단 근처의 점들에 대해서는 A, B 에서 형상함수 뿐 아니라 가중함수에서도 의도하지 않은 불연속이 생기게 된다. 이러한 단점은 해의 정도에 큰 영향을 미친다. 이를 보완하기 위해서 빛의 회절 원리를 이용한 Diffraction method [3,5]를 사용하여 균열을 포함하는 영향영역에서 EFG 형상함수가 연속성을 유지하도록 할 수 있다. 그림 14 와 같이 기준점과 균열 반대편에 위치하는 대상 절점 사이의 거리를 실제보다 서로 더 멀리 떨어져 있는 것으로 생각하여 절점 거리를 증가시켜 주어 균열 반대편에 위치하는 절점의 영향을 덜 받도록 조절하며 가중함수나 형상함수가

그림 13. 균열 선단 부근에서의 Visibility criterion에 의한 영향영역

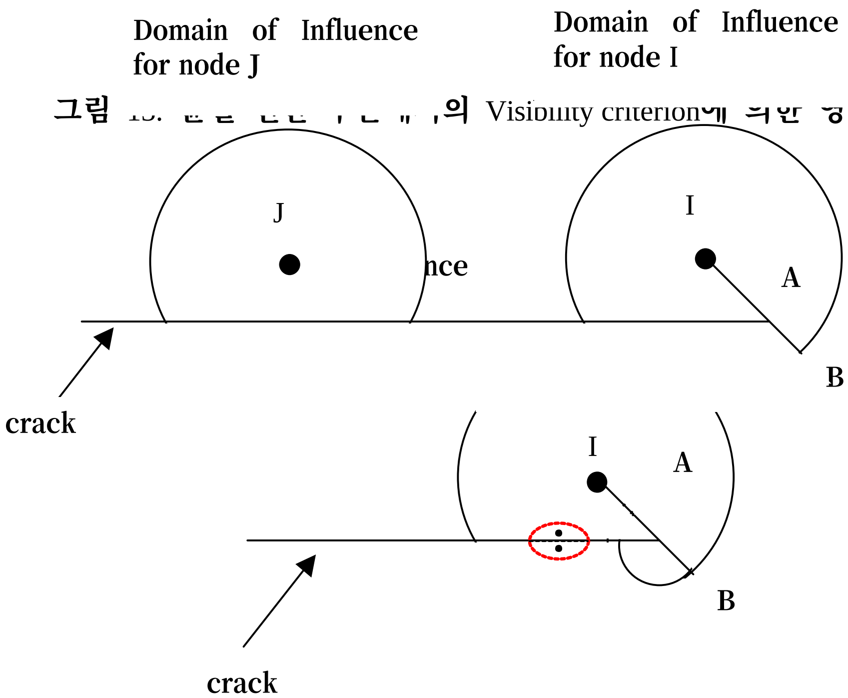


그림 14. 균열 선단 부근에서의 Diffraction method에 의한 영향영역

일치된 연속성을 유지할 수 있도록 한다. Diffraction method 에서는 절점과 Sampling point 사이를 지나는 선이 균열을 지나가고 절점의 영향반경 내에 균열 선단이 존재할 때 d_I 를 다음과 같이 재정의 한다 .

$$d_I = \left(\frac{d_1 + d_2(x)}{d_0(x)} \right)^l d_0(x) \tag{4.1}$$

여기서, $d_1 = \|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_c\|$, $d_2(x) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c\|$, $d_0(x) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|$ 이며 $\mathbf{x}_I$ 는 절점, $\mathbf{x}$

는 Sampling point, $\mathbf{x}_c$ 는 균열 선단(Crack tip)을 의미한다.

EFG법에서는 그림 13과 그림 14의 점선 안과 같이 균열면 위 아래로 복절점을 배치하고 두 절점 사이의 거리를 산정하여 균열을 표현한다. 균열 위의 점은 절점 I의 영향영역 안에 포함되므로 형상함수를 결정할 때 절점 I를 고려하지만 균열 아래의 점은 절점 I의 영향영역 안에 포함되지 않으므로 형상함수를 결정할 때 절점 I를 고려하지 않는다. 따라서 균열을 따라 변위나 응력의 불연속이 발생하게 된다.

4.2 응력확대계수의 산정

균열전파의 방향과 피로균열의 성장량을 결정하기 위해서는 응력확대계수를 구해야 한다. 이 연구에서는 응력확대계수를 산정하는데 혼합모드 균열의 경우 비교적 쉽게 응력확대계수를 산정할 수 있는 J-integral[12-14]을 사용한다.

EFG 법은 균열면 경계에서 적분값을 정확히 얻기 어렵기 때문에 균열면상에서 선적분이 필요없는 Interaction energy integral method 을 사용한다. 이 때 적분영역은 균열 선단에서 가까운 직선면만을 포함한다. 그리고 이를 Equivalent Domain Integral[13,17,18,20]을 이용하여 선적분을 면적분으로 변환하여 계산한다.

J-integral 에서 J 는 다음과 같이 응력확대계수로 표현될 수 있다.

$$J = a\,(K_{\mathrm{I}}^{\,2} + K_{\mathrm{II}}^{\,2}) \tag{4.2}$$

$$a = \begin{cases} \dfrac{1}{E} & \text{for plane stress} \\ \dfrac{1-v^2}{E} & \text{for plane strain} \end{cases} \tag{4.3}$$

여기서 E는 물질의 탄성계수, v는 포아송 비이다.

두개의 독립적인 평형상태에 대해서 생각해 보면 1과 2로 표현되는 두 가지 평형상태에서의 값을 중첩시켜 새로운 평형상태의 J값을 구할 수 있다.

$$J^{(0)} = J^{(1)} + J^{(2)} + M^{(1,2)} \tag{4.4}$$

여기서,

$$M^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \left(W^{(1,2)} dy - \left[T_i^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} + T_i^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x} \right] ds \right) \tag{4.5}$$

식 (4.2)의 관계를 이용하면 다음과 같다.

$$J^{(0)} = a\left([K_{\mathrm{I}}^{(1)} + K_{\mathrm{I}}^{(2)}]^2 + [K_{\mathrm{II}}^{(1)} + K_{\mathrm{II}}^{(2)}]^2\right) \tag{4.6}$$

이를 정리하면,

$$J^{(0)} = J^{(1)} + J^{(2)} + 2a\left(K_{\mathrm{I}}^{(1)} K_{\mathrm{I}}^{(2)} + K_{\mathrm{II}}^{(1)} K_{\mathrm{II}}^{(2)}\right) \tag{4.7}$$

식 (4.4)와 (4.7)로부터

$$M^{(1,2)} = 2a\,(K_{\mathrm{I}}{}^{(1)}K_{\mathrm{I}}{}^{(2)} + K_{\mathrm{II}}{}^{(1)}K_{\mathrm{II}}{}^{(2)}) \tag{4.8}$$

결국 식 (4.5)와 식 (4.8)의 식을 통해서 응력확대계수를 구할 수 있다. 즉, 식 (4.8)에 각각 $K_{\mathrm{I}}{}^{(2)} = 1, K_{\mathrm{II}}{}^{(2)} = 0$ 인 경우와 $K_{\mathrm{I}}{}^{(2)} = 0, K_{\mathrm{II}}{}^{(2)} = 1$ 인 상태의 응력분포를 대입하여 실제 구하고자 하는 모드 1 과 모드 2 의 응력확대계수를 산정한다. 이 때 식 (4.5)의 경계적분을 정확히 수행하기 어렵기 때문에 Equivalent domain integral method 를 사용하여 면적분으로 변환하면 다음과 같다.

$$M^{(1,2)} = \int_{\Omega}\left[(s_{ij}{}^{(1)}\frac{\partial u_i{}^{(2)}}{\partial x_1} + s_{ij}{}^{(2)}\frac{\partial u_i{}^{(1)}}{\partial x_1}) - W^{(1,2)}d_{1j}\right]\frac{\partial q_1}{\partial x_j}dA \tag{4.9}$$

4.3 균열 성장 방향 예측과 피로 균열 성장량 계산

균열 전파를 모형화하기 위해서는 균열의 성장 방향을 예측해야 한다. 균열 전파 방향을 예측하는 식으로 몇 가지가 제안되어 있다[15,16,19]. 이 중에서 가장 많이 사용되는 식으로는 최소 변형에너지 밀도 기준식과 최대 주응력 방향식을 들 수 있다. 이 두 가지의 기준에서는 균열은 기존의 균열 선단의 접면에 수직한 면을 따라 전파한다고 가정하며 전파 방향을 다음과 같은 식으로 결정한다.

$$\mathbf{v}^p = \mathbf{v}^p(\mathbf{n},\mathbf{b},\mathbf{t}) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 q_{cr}}}, \frac{\tan q_{cr}}{\sqrt{1+\tan^2 q_{cr}}}, 0\right) \tag{4.10}$$

여기서 $\mathbf{v}^{p}$는 균열의 진행 방향이며 $\mathbf{t}$는 균열 선단의 접면 방향 벡터, $\mathbf{n}$은 법선 방향 벡터 그리고 $\mathbf{b}$는 $\mathbf{n}$과 $\mathbf{t}$에 수직한 방향 벡터이다. 균열 전파각 θ_{cr}는 각 전파 방향 예측 기준에 따라 결정된다. 최소 변형 에너지 밀도 기준에서는 변형에너지 밀도를 최소화 하는 방향으로 전파각을 결정하며, 최대 주응력 방향 기준에서는 전파각을 균열 선단에서의 주응력 방향과 일치하도록 결정한다. 이 연구에서는 최대주응력한계론 (Maximum principal stress criterion) [15]을 사용하였다.

2 차원에서의 균열 진전각은 다음과 같은 방법으로 계산할 수 있다. 균열 선단 주변에서 응력은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \times \begin{bmatrix} K_{\mathrm{I}}(1+\sin^{2}\frac{\theta}{2}) + K_{\mathrm{II}}(\frac{3}{2}\sin\theta - 2\tan\frac{\theta}{2}) \\ K_{\mathrm{I}}\cos^{2}\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}K_{\mathrm{II}}\sin\theta \\ \frac{1}{2}K_{\mathrm{I}}\sin\theta + \frac{1}{2}K_{\mathrm{II}}(3\cos\theta - 1) \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

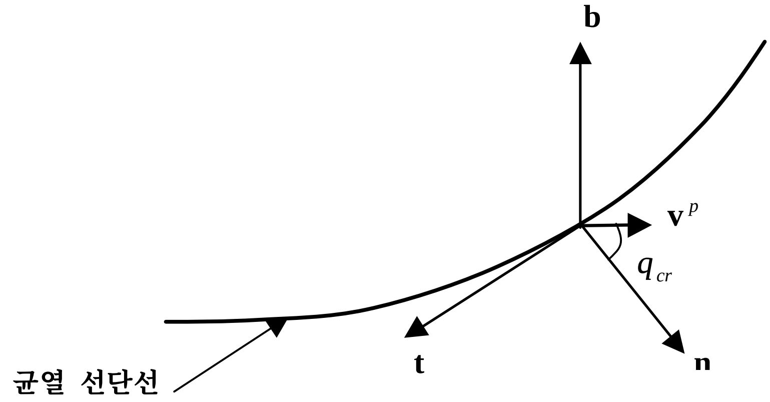


그림 15. 3차원에서의 균열 전파 벡터 형상

최대 주응력 방향은 전단응력이 0 이 되는 방향으로서 다음식을 이용하여 계산할 수 있다.

$$K_{\mathrm{I}} \sin q_{cr} + K_{\mathrm{II}}(3\cos q_{cr} - 1) = 0 \qquad (4.12)$$

여기서, q_{cr} 은 균열 진전각이다.

3차원의 경우는 모드 I 과 모드 III의 응력확대계수를 조합하여 구한 등가응력확대계수를 이용하여 구할 수 있다.[19]

$$K_{eq} = K_{\mathrm{I}} + B|K_{\mathrm{III}}| \qquad (4.13)$$

여기서, B 는 실험적으로 구한 지수이다.

진전각 q_{cr} 는 다음과 같은 식으로 구한다.

$$q_{cr} = 2\tan^{-1}\left[\frac{K_{eq}}{4K_{\mathrm{II}}} \pm \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{K_{eq}}{K_{\mathrm{II}}}\right)^{2} + 8}\right] \tag{4.14}$$

식 (4.14)에서 부호는 K_{II} 의 부호에 의해서 결정된다. K_{II} 가 음수인 경우는 (+)이고 K_{II} 가 양수인 경우는 (–)이다.

일정진폭의 주기하중에 대해 피로균열 성장비는 하중의 크기보다는 균열 선단의 응력확대계수 범위의 영향을 더 많이 받는다. Paris 는 이를 관찰하여 거시적인 관점에서 파괴역학 파라미터의 함수들로 피로균열성장에 대한 경험적인 식을 제안하였는데 이는 다음과 같다[16].

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^{m} \tag{4.15}$$

여기서, a 는 균열의 길이, N 은 피로하중 재하 횟수, $\Delta K\,(K_{\max} - K_{\min})$는 피로하중에 대한 응력확대계수 범위인데 주로 등가응력확대계수를 사용한다. C 와 m 은 재료와 관련된 상수이다. 2 차원 문제에서는 Yan 등[21]이 다음과 같은 등가 응력확대계수를 제안하였다.

$$\Delta K_{\mathrm{eq}} = \frac{1}{2}\cos\frac{q_{cr}}{2}\cdot\left\{\Delta K_{\mathrm{I}}\,(1+\cos q_{cr}) - 3\Delta K_{\mathrm{II}}\sin q_{cr}\right\} \tag{4.16}$$

3차원의 경우 Gerstle [19]가 제안한 등가 응력확대계수는 다음과 같다.

$$K_{eq}^2 = \left(K_{\mathrm{I}} + B\left|K_{\mathrm{III}}\right|\right)^2 + 2K_{\mathrm{II}}{}^2 \tag{4.17}$$

ΔK 가 균열 길이의 함수이므로 식 (4.15)는 비선형 방정식이 된다. 이 연구에서는 일정한 피로하중 횟수에 따른 균열 진전량을 계산하기 위해서 다음과 같은 반복계산법을 사용하였다.

$$\Delta a_i = C\left(\frac{(\Delta K_i^1)^m + (\Delta K_i^j)^m}{2}\right) \times \Delta N \tag{4.18}$$

여기서, 밑 첨자 i 는 균열 진전 횟수이고, 윗 첨자 j 는 i 번째 균열 진전을 위한 반복계산 횟수이다.

혼합모드의 2차원 피로균열 문제에서는 균열이 한쪽 방향으로 나아가기 보다는 꺾이거나 곡선을 이루게 된다. 이때 균열을 유한한 크기의 접선 방향으로 진전시킬 경우 실제 균열 경로에서 벗어나게 되고 균열이 진전할수록 그 차이는 커지게 된다. 따라서 균열 방향과 크기를 반복적으로 갱신해 주어야만 좀 더 정확히 균열 진전을 모사할 수 있다. 이 연구에서는 2차원 균열 문제에서 적용할 수 있는 균열 성장 곡선을 반복적으로 보정해 주는 모델링 기법[23]을 사용하였다.

4.4 Coupling of FEM and EFG법

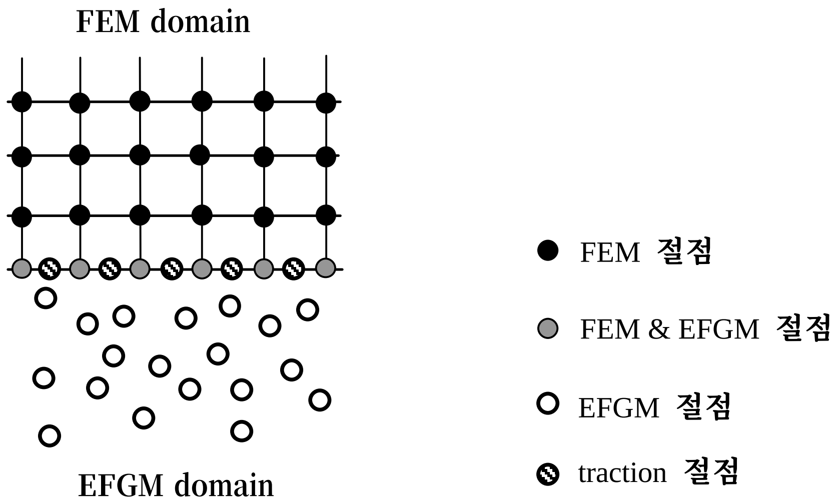


그림 16. Coupled FEM-EFGM

유한요소법은 해석대상물을 유한개의 작은 요소들로 나누어 해석하는 과정에서 요소와 절점들 간의 규칙성을 항상 만족시켜 주어야 한다. 이러한 제약성은 특이현상이나 응력집중이 발생하는 문제, 기하학적 형상이 계속적으로 변화하여 이에 따라 요소망을 연속적으로 재구성해야만 하는 공학문제 등에 있어서 유한요소법의 사용을 어렵게 만들고 있다. 반면에 EFG법은 균열문제 모델링이 용이하고 요소를 재구성 하는 번거러움이 없는 장점이 있기 때문에 피로 균열 문제에 많이 적용되고 있다. 하지만 EFG 법은 해석을 위해서 FEM보다 많은 자유도가 필요하고 영향영역내에 많은 절점들이 포함되기 때문에 계산시간이 오래 걸리는 단점이 있다. 이를 보완하기 위해서 3장에서 설명한 Subdomain기법을 도입한다. 그림 16 에 보면 하나의 도메인이 2개로 나뉜 것을 볼 수 있다.

위의 도메인은 FEM 도메인 이고 아래의 도메인은 EFG 법 도메인이다. 3.1.2 에서 설명한 Lagrange multiplier를 이용한 Subdomain기법은 비단 EFG 법뿐만 아니라 일반적인 수치해석기법에 대부분 적용할 수 있으므로 이 기법을 사용하여 균열을 포함하는 도메인은 EFG 법으로 나머지 도메인은 FEM으로 해석하면 효율적으로 해석을 수행 할 수 있다.

4.5 피로 균열 성장 예제

이 예제는 인장을 받는 2 차원 균열 문제로서 피로하중이 가해졌을 때 균열 성장을 예측하는 예제이다. 그림 17 은 가운데에 균열이 있는 강판의 기하형상과 하중조건을 보여준다. 물성치는 탄성계수가 210×10^{2} kN/cm^{2,} 재료의 특성 C 와 m 은 각각 0.32186×10^{-8} , 2.25 이다[11]. 최소 하중 $s_{min} = 0$ kN/cm^2 와 최대 하중 $s_{max} = 5$ kN/cm^2 이 반복적으로 작용한다고 가정한다. 하중 재하 횟수 $\Delta N = 1000$ 에 대하여 균열 성장을 해석해 보았다. 균열 진전에 의해 강판이 파괴될 때 까지 해석하여 $N = 581000$ 이 될 때까지 수행하였다. 균열 성장 곡선을 결정하기 위한 반복 계산 과정에서 성장길이의 상대오차가 0.1% 보다 작고, 균열 성장각의 절대 오차가 0.00175 rad 보다 작으면 수렴한 것으로 판단하였다.

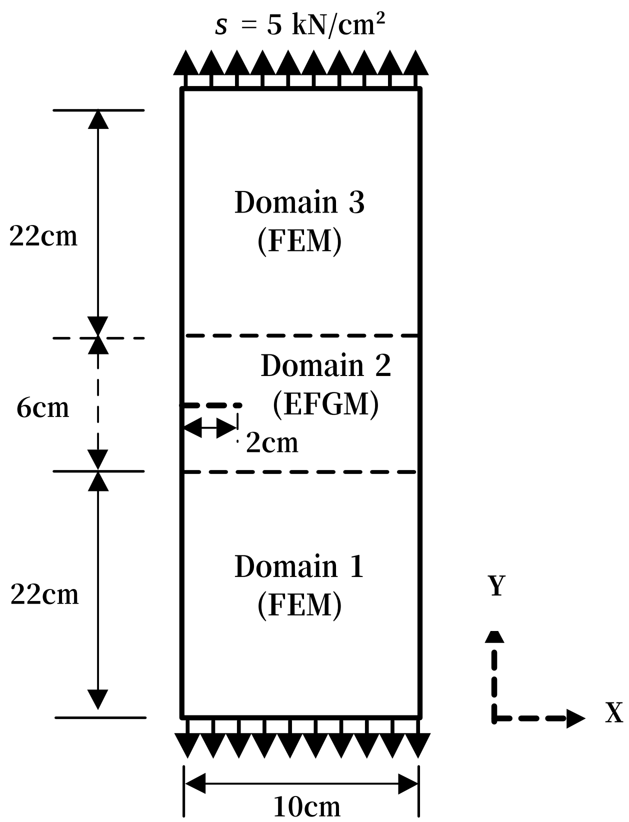


그림 17. 전단응력을 받는 균열 (예제 3)

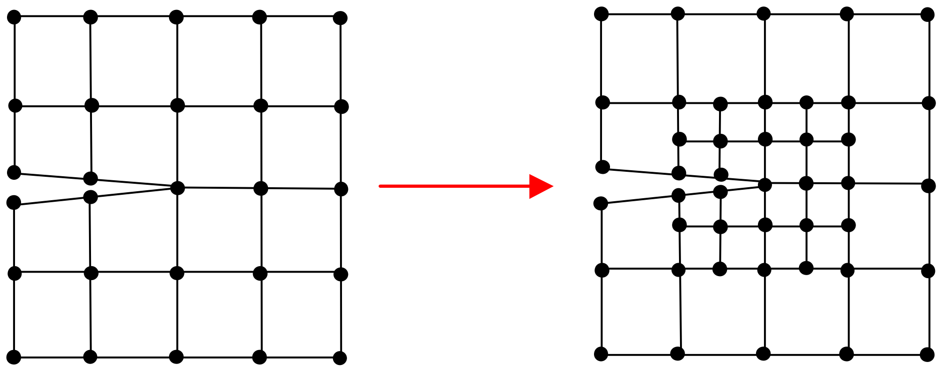


그림 18. 균열 선단 주변의 절점 배치 방법

$$\left|\frac{\Delta a_i^{'} - \Delta a_i}{\Delta a_i^{'}}\right| \le 10^{-3} \qquad (4.19a)$$

$$\left|q_{i+1}^{'} - q_{i+1}\right| \le 1.75 \times 10^{-3} \qquad (4.19b)$$

4.4에서 설명한 Lagrange multiplier를 사용한 Subdomain기법을 이용한 Coupled FEM-EFGM방법을 이용하여 해석을 수행하였다. 균열을 포함하는 도메인은 EFG 법으로 해석하고 나머지 도메인은 FEM으로 Bilinear 요소를 사용하여 해석하였다. 기본적인 절점배치는 EFG법을 사용하는 도메인1과 도메인3에서는 각각 11 × 23 의 배치로 253개를 사용하였고 FEM을 사용하는 도메인2에서는 11 × 7 의 배치로 77개를 사용하였다. 균열 선단에서는 응력집중이 집중되므로 선단 부근에서 그림 18 에서와 같이 기본 정방 배치를 기준으로 요소망을 점진적으로 분할하고 이에 따라 추가적인 절점들을 조밀하게 분포 시키는 방법[23]으로 도메인2에 176개의 추가 절점을 배치하였다. 균열이 한 단계 성장할 때마다 기본 정방 배치를 기준으로 균열 선단을 중심으로 계속적으로 요소망을 분할하고 절점을 추가하는 방식을 선택하였다. 계산에 사용한 CPU는 Intel Pentium 1.7GHz 이고 Linear equation solver로는 sparse solver를 사용하였다.

그림 19 를 보면 피로 하중에 의해 균열 선단의 X방향으로의 위치변화를 볼 수 있다. EFG 법만으로 계산한 결과와 동일한 결과를 확인했다. 그림 20 에 계

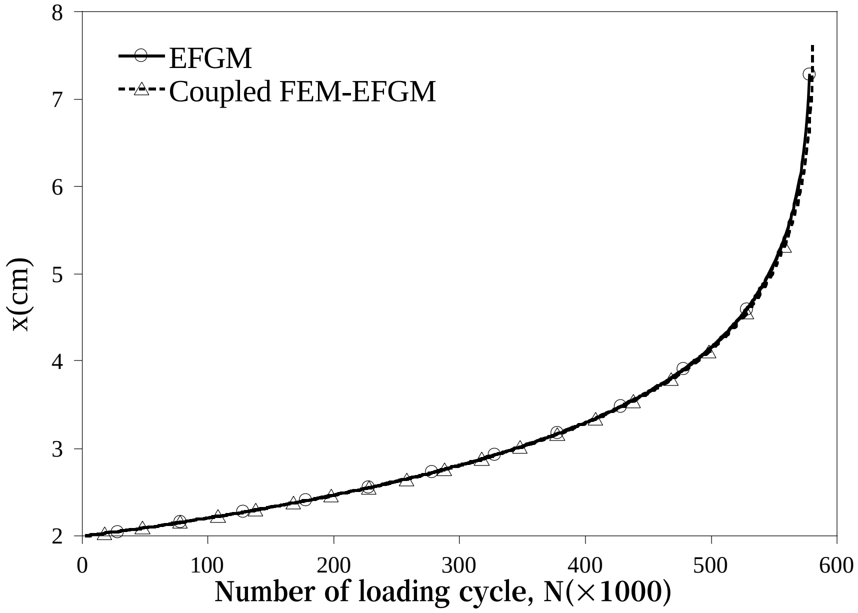


그림 19. 균열 선단 위치 변화

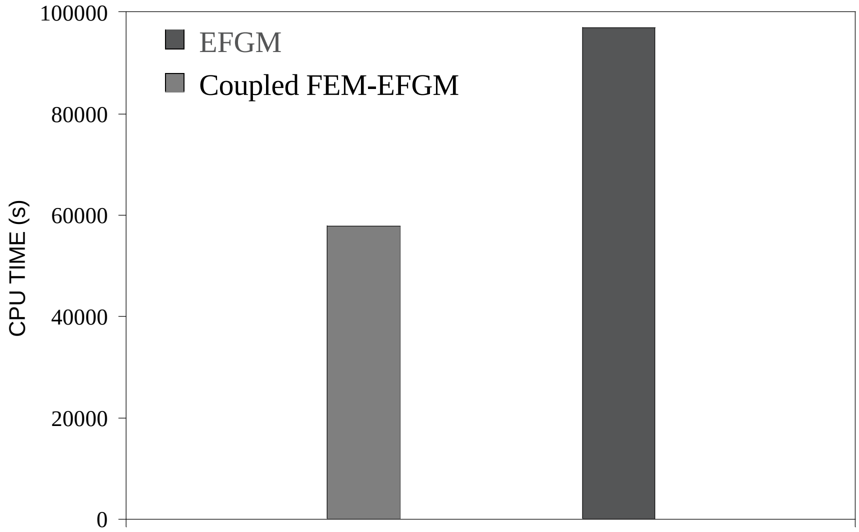


그림 20. 계산 시간

산시간을 비교해 보았다. EFG법으로 계산했을 때 96993초로 약 27시간정도 걸렸는데 Coupled FEM-EFGM으로 해석했을 때는 57935초로 약 16시간 걸렸다. 따라서 균열 진전 문제의 계산시간을 크게 단축할 수 있음을 확인했다

Ⅴ. 결론

이 논문에서는 EFG 법에 대해서 소개하고 정식화하였다. 그리고 EFG 법에서의 두 가지 Subdomain기법을 제안하고 검증한 후 이 기법과 병렬프로그래밍을 이용하여 큰 자유도 문제를 해석하여 이 방법의 유용성을 검증하였다. 또 Subdomain기법을 이용한 Coupled FEM-EFGM 기법을 제안하여 균열 진전 문제 해석에 적용해서 계산시간의 이득을 확인할 수 있었다.

EFG 법은 요소의 개념이 없이 절점과 구조물의 기하학적 형태만으로 문제를 해석한다. 따라서 균열 문제 같은 특이성이 높은 문제에 적당하다. 하지만 특성상 계산시간이 많이 걸리고 컴퓨터 메모리에 제한을 받는 단점이 있다. 이를 해결하기 위하여 EFG 법에서의 Subdomain기법과 병렬프로그래밍을 도입하였다. Lagrange multiplier를 이용한 Subdomain기법은 해석시에 한 도메인에서 다른 도메인의 정보가 필요 없는 장점이 있고 Penalty function을 이용한 Subdomain기법은 구속조건의 적용에 있어 추가의 자유도가 필요없는 장점이 있다. 두 가지 기법 중 문제에 따라 적절한 기법을 사용하게 된다. 제안된 Subdomain기법과 병렬프로그래밍을 이용하여 일반적인 방법으로는 해석 불가능한 자유도가 상당히 큰 문제를 효율적으로 해석할 수 있었다.

피로 균열을 해석하기 위해 EFG 법에서의 균열의 모형화를 설명하고 J-integral을 이용한 응력확대계수 산정을 알아보고 또 최대 주응력 한계론과 Paris

Equation을 알아보았다. 다음으로 Lagrange multiplier를 이용한 Subdomain기법으로 FEM과 EFG 법을 Coupling 하여서 피로 균열 성장을 해석을 수행하여 계산 시간상의 큰 이득을 얻을 수 있었다.

이 연구에서 제시한 Subdomain기법과 병렬프로그래밍 방법을 이용하면 자유도가 아주 큰 문제나 균열 문제와 같이 국부적으로 높은 정확도를 얻어야 하는 공학문제를 효과적으로 해석할 수 있을 것으로 보인다. 또 많은 자유도를 필요로 하는 3 차원 문제를 해석하는 경우에는 더욱 효율적으로 해석을 수행할 수 있을 것으로 사료된다.

참고문헌

[1] T. Belytschko, Y. Y. Lu, L. Gu, “Element-free Galerkin Methods”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 229-256, 1994.

[2] P. Lancaster, K. Salkauskas, “Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods”, *Mathematics of Computation*, Vol. 37, No. 155, pp. 141-158, 1981.

[3] T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming , P. Krysl, ”Meshless methods: An overview and recent developments”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 3-47, 1996.

[4] T. Belytschko, Y.Y. Lu, L. Gu, “Crack Propagation by Element-Free Galerkin Methods”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 51, No. 2, pp. 295-315, 1995.

[5] M. Fleming, Y.A. Chu, B. Moran, T. Belytschko, “Enriched Element-Free Galerkin Methods for Crack Tip Fields”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 1483-1504, 1997.

[6] P. Zuohui, “Treatment of Point Loads in Element-Free Galerkin Method (EFGM)”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 16, pp. 335-341, 2000.

[7] T. Belytschko, Y.Y. Lu, L. Gu, M. Tabbara, “Element-Free Galerkin Methods for Static and Dynamic Fracture”, *International Journal of Solids Structures*, Vol. 32, No. 17/18, pp. 2547-2570, 1995.

[8] T. Belytschko, Y. Krongauz, “Enforcement of Essential Boundary Conditions in Meshless Approximations Using Finite Elements”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 131, pp. 133-145, 1996.

[9] T. Belytschko, M. Tabbara, "Dynamic Fracture Using Element-Free Galerkin Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, pp. 923-938, 1996.

[10] **안정진**, Element-Free Galerkin **법을 이용한 균열 전파 해석**, **석사학위논문**, **서울대학교**, 2002.

[11] M. F. Kanninen, C. H. Popelar, Advanced Fracture Mechanics, Oxford University Press, New York, 1985.

[12] J.F. Yau, S.S. Wang, H.T. Corten, "A Mixed-Mode Crack Analysis of Isotropic Solids Using Conservation Laws of Elasticity", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, pp. 335-341, 1980.

[13] B. Morgan, C.F. Shih, "Crack Tip and Associated Domain Integrals from Momentum and Energy Balance", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 27, No.6, pp. 615-642, 1987.

[14] J. W. Eischen, "An improved method for computing the J_2 integral", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 26, No. 5, pp. 691-700, 1987.

[15] E. E. Gdoutos, Fracture Mechanics Criteria and Applications, Kluwer Academic Publishers, 1990.

[16] J.M. Barsom and S. T. Rolfe, Fracture and fatigue control in structures, 3rd Ed., Book News, 1999.

[17] F.Z. Li, C.F. Shih, A. Needleman, "A Comparison of Methods for Calculating Energy Release Rates", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 21, No. 2, pp. 405-421, 1985.

[18] H. Rajaram, S. Sccrate, D.M. Parks, “Application of domain integral methods using tetrahedral elements to the determination of stress intensity factors”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 66, pp. 455-482, 2000.

[19] D.N. dell’Erba and M.H. Aliabadi, “Three-dimensional thermo-mechanical fatigue rack growth using BEM”, *International Journal of Fatigue*, Vol.22, pp.261-273, 2000.

[20] Carlos Cueto-Felgueroso, “Implementation of Domain Integral Approach for J Integral Evaluations”, *Transations*, SMiRT 16, Washington DC, August 2001, Paper #1355.

[21] J. Qian, A. Fatemi, “Mixed mode fatigue crack growth: A literature survey”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 55, No. 6, pp. 969-990, 1996.

[22] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, The Finite Element Method, 4rd Ed., McGraw-Hill, 1989.

[23] 안남규, Element-Free Galerkin 법을 이용한 혼합모드의 피로 균열 성장 해석, 석사학위논문, 서울대학교, 2003.

ABSTRACT

Element-Free Galerkin Method (EFGM) is used mainly for crack analysis. But to get high accuracy of solutions, more degree-of-freedom (DOF) is needed. In this case more analyzing time is needed and analysis is restricted by computer memory. This paper presents subdomain techniques in EFGM. The method using Penalty function as a constraint and the method using Lagrange multiplier as a constraint are presented and the validities of these methods are demonstrated by a example.

To analyze high DOF problem, parallel processing is introduced with subdomain techniques. A domain is divided into several domains and each divided domain is taken by each CPU. In each CPU a stiffness matrix is constructed and matrix condensation is performed respectively. Final equation, which only interface DOF is in, is constructed and solved. The validity of this process is demonstrated by a example.

For the analysis of fatigue crack growth, the effects of the singularity of crack tip and the discontinuity of crack are considered by numerical techniques. To avoid discontinuities of the shape functions in crack tip fields, the dffraction method is used. J-integral is used to evaluate stress intensity factor and maximum circumferential stress theory is used to measure the direction of crack growth and Paris equation is used to measure the extension of fatigue crack growth. For the analysis of fatigue crack growth, much analyzing time is needed. To settle this problem, A coupled FEM-EFGM by a subdomain technique is proposed and the validity of this method is demonstrated by a example.

Key Word

Element-Free Galerkin Method, subdomain techniques, parallel processing, fatigue crack growth, coupled FEM-EFGM

Student number : 2001-23277

감사의 글

어느덧 2년간의 대학원 생활의 막바지에 다다랐습니다. 언제나 그렇듯이 열심히 하지 못한데 대한 후회도 있지만 많은 분들의 도움에 힘을 얻어 마침내 한편의 논문을 남기게 되어 무척이나 기쁩니다.

먼저 2년간의 생활동안 끊임없는 조언과 꾸지람을 해주시고 한편의 부끄러운 논문을 완성할 수 있도록 지도해주신 이해성 선생님께 깊이 감사드립니다. 그리고 여러 방면에 걸쳐서 많은 가르침을 주신 장승필 교수님, 고현무 교수님, 오병환 교수님, 김재관 교수님께도 감사 드립니다.

연구실의 대장으로서 힘든 일을 도맡아 하면서 제 논문에 지대한 도움을 준 기석형, 회사에서 적극적으로 도움 준 남규형, 인생설계에 많은 도움을 주신 용한형, 미국에서 종종 신경 써주시는 현우형, 별 보는거 좋아하는 양광형, 스키 같이 탔던 천종형, 인호형, 경남누나, 윤석형, 문성형, 종승형, 종명형, 문구형, 한도형, 주성형에게 감사드립니다.

반년간 같이 생활했던 병규형, 정진형, 규철형, 정희, 1년동안 같이 보냈던 착한 만우, 영곤형에게도 감사드립니다. 연구실 동기로써 언제나 솔선수범해서 일하는 재형형, 나름대로 유머있는 창현형, 분위기메이커 승근에게 2년동안 고생했다고 전하고 싶습니다. 혼자라서 항상 불쌍한 민권이에게는 부족한 선배로서 미안하다는 말과 앞으로 좋은 논문 쓰고 졸업하길 바란다는 말을 전하고 싶

고 신입생 연철이에게는 앞으로 2년간 잘 살라고 전하고 싶습니다.

힘들때마다 큰 힘이 되어준 많은 강원과고 친구들, 선후배들에게 감사드리고 언제나 저를 이해해주고 정식적인 지주가 되어준 현희에게 특별한 감사를 드립니다.

무엇보다 멀리서 응원해주는 형과 언제나 저를 믿고 26년동안 뒷바라지 해주신 부모님께 감사드리며 이 논문을 바칩니다.