

공학석사학위논문

지점운동을 받는 케이블의 동적해석을 위한
혼합 Rayleigh-Ritz 방법

Mixed Rayleigh-Ritz Method for the Dynamic Analysis of Cables

Subjected to Support Motions

2010 년 2 월

서울대학교 대학원

건설환경공학부

백 종 혁

초 록

캔틸레버 공법으로 시공되는 사장교는 가설 중의 구조계가 완성계에 비하여 강성이 낮고 풍하중에 매우 취약하다. 이에 따라 교량 가설 중 바람에 의한 진동을 저감하기 위한 내풍안정화 케이블이 도입되고 있다. 바람에 의해 크게 흔들리는 교량의 거더는 안정화 케이블에 큰 지점운동을 가할 수 있는 구조계의 특수성으로 말미암아 지점운동의 영향을 정확히 고려한 동적해석이 반드시 필요하다. 이 논문은 지점운동을 받는 케이블의 동적거동을 정확히 해석하는데 초점을 두고 있으며, 내풍안정화 케이블의 해석에 관한 선행연구로서의 목적을 가지고 있다.

기존에 제안된 방법은 탄성현수선 요소로 해석된 초기평형상태의 해를 초기값으로 사용하고, 동적 변위를 sine 함수를 사용하여 이산화하는 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법이다. 이 논문에서는 기존의 방법이 결과의 path independency 를 확보하지 못하며, 장력 분포의 추정이 부정확한 두 가지의 문제점을 가지고 있음을 밝힌다.

본 논문에서는 결과의 path independency 를 확보하기 위하여 초기 평형상태의 케이블의 형상을 동적 변위와 같은 함수공간에서 정의하여 Rayleigh-Ritz 방법으로 해석할 것을 제안한다. 또한 공간상의 장력 분포를 정확하게 추정하기 위하여 변위와 변형률을 각각 다른 함수 공간에서 가정하는 혼합 Rayleigh-Ritz 방법을 제안한다. 이를 위하여 케이블의 평형방정

식과 변위-변형률 관계를 각각 weak form 적용하여 두 식을 혼합한다. 유도된 식에 Newmark- β 방법과 같은 수치적분법을 적용하여 시간영역해석한다.

제안된 혼합 Rayleigh-Ritz 방법을 지점운동을 받는 케이블의 동적해석에 적용한다. 또한 이를 안정화 케이블이 설치된 가설 중 사장교를 간단히 모델링한 스프링-질량 시스템의 동적해석에 적용한다. 결과의 검증을 위하여 이를 지점운동을 받는 케이블의 동적해석에 적용하여 변위를 100 개의 sine 함수와 1 차식으로 가정한 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법의 해와 비교한다.

주요어

케이블, 지점운동, 비선형 해석, 초기평형상태, 혼합 Rayleigh-Ritz 방법, weak form

학번: 2008-21034

목 차

초록	iii
목차	v
그림목차	vii
표목차	ix
1. 서론	1
2. 기존연구 분석 및 문제점 제기	4
2.1 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법	4
2.2 정적해석 적용 및 문제점 제기	16
3. 초기평형상태의 Rayleigh-Ritz 해석	21
3.1 Rayleigh-Ritz 방법을 이용한 초기평형상태 해석	21
3.2 정적해석 적용	25
4. 혼합 Rayleigh-Ritz 방법	27
4.1 혼합 Rayleigh-Ritz 방법의 정식화	28

4.2 정적해석 적용	38
5. 동적해석 예제	40
5.1 지점운동을 받는 케이블	40
5.2 모델링된 안정화 케이블	45
6. 결론	51
참고문헌	54

그림 목 차

그림 2.1 동적해석을 위한 전체 좌표계와 국부좌표계	5
그림 2.2 지점운동을 받는 수평 케이블	15
그림 2.3 선형조합으로 표현되는 케이블의 수평변위	15
그림 2.4 정적해석을 위한 예제 케이블의 형상	16
그림 2.5 라그랑지 좌표 s 에 대한 케이블의 x 방향 위치	19
그림 2.6 라그랑지 좌표 s 에 대한 케이블의 y 방향 위치	19
그림 2.7 라그랑지 좌표 s 에 대한 케이블의 장력 분포	20
그림 2.8 케이블의 지점 부근의 장력 분포	20
그림 3.1 x' 의 0.1% 오차로 인한 변형률의 오차	24
그림 3.2 라그랑지 좌표 s 에 대한 케이블의 장력 분포	26
그림 3.3 케이블의 지점 부근의 장력 분포	26
그림 4.1 라그랑지 좌표 s 케이블의 장력 분포	39
그림 4.2 케이블의 중앙 부근의 장력 분포	39
그림 5.1 동적해석을 위한 예제 케이블의 형상	43
그림 5.2 $s=0$ 에 가해지는 지점변위 u_g	43

그림 5.3 $s = 0$ 에서의 시간에 따른 장력 변화	44
그림 5.4 $t = 0.3$ 초에서의 장력 분포	44
그림 5.5 안정화 케이블이 설치된 시공 단계에 있는 사장교	48
그림 5.6 예제구조물: 모델링된 시공 중의 사장교와 안정화 케이블 .	48
그림 5.7 $s = L_0/2$ 에서의 시간에 따른 케이블의 수직 진동 형상	49
그림 5.8 $s = L_0/2$ 에서의 시간에 따른 케이블의 장력 변화	49
그림 5.9 $t = 4.87$ 초에서의 케이블의 장력 분포	50

표 목 차

표 2.1 정적해석 예제로 사용된 케이블의 물성치	17
표 2.2 경우에 따른 지점간 거리와 새그비	17
표 2.3 경우에 따른 장력의 최대 오차	18
표 4.1 지배방정식과 경계조건	28
표 5.1 동적해석 예제로 사용된 케이블의 물성치.....	43
표 5.2 예제 구조물의 물성치.....	48

1. 서론

케이블 지지교량이 장대화, 세장화 되어가면서 지진 및 동적 풍하중의 영향이 중요한 화두로 떠오르고 있다. 특히 캔틸레버 공법으로 시공되는 사장교는 가설 중 구조계가 완성계에 비하여 풍하중에 매우 취약하다. 가설 중 사장교에는 동적 풍하중에 의한 교량의 시소모양의 진동으로 인하여 주탑 하단부에 큰 모멘트가 발생할 수 있으며 경우에 따라 주거터에도 예상 밖의 동적 효과가 발생할 수 있다[3]. 이러한 이유로 시공 중의 사장교의 진동을 저감하기 위한 내풍 안정화 케이블의 도입이 증대되고 있으며, 내풍 안정화 케이블이 교량의 동적응답을 효과적으로 제어한다는 사실이 보고되었다. 그러나 사장교의 거터나 주탑의 운동에 의하여 안정화 케이블에 가해지는 지점운동의 영향을 정확히 고려한 동적해석은 거의 이루어지지 않고 있으며, 이는 상대적으로 큰 지점운동을 받을 수 있는 안정화 케이블의 특수성 때문에 중요하게 고려되어야 할 점이라 판단된다.

Irvine[1], 안상섭[2] 등이 진행한 케이블의 자유진동 특성에 관한 연구나 Vortex shedding, galloping, 풍우진동 등 케이블에 진동을 발생시키는 여타 주요한 외부요인에 관한 연구에 비하여 지점운동에 의한 케이블의 진동에 관한 이론 및 실험적 연구가 많지 않은 실정이다. 안상섭 등은 지점운동에 의한 combination resonance, parametric resonance 등 다양한 케이블의 공진 현상에 대하여 연구하였으나 정식화 과정에서 팽팽한 케이블, 미소 현방향

변위, 정적 평형상태의 포물선 형상 케이블 등의 다양한 가정을 사용하였으며, 명확한 시간영역해석의 해를 제시하지 않고 있다[4].

이 논문은 내풍 안정화 케이블의 동적해석 연구를 위하여 시작되었으며 연구의 목적은 지점운동을 받는 케이블의 정확한 동적거동의 해석을 위하여 정식화 과정에서 가능한 가정을 적게 도입하고 내풍 안정화 케이블과 같은 큰 지점운동이 발생하는 경우에도 정확한 답을 낼 수 있는 시간영역 해석 방법을 제안하는 것이다.

이 논문은 기존에 제안되었던 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법(displacement-based Rayleigh-Ritz method)을 지점운동을 받는 케이블의 해석에 적용하여 해석 결과가 탄성체 문제에서의 path independency 를 확보하지 못하며, 케이블의 공간상의 장력분포가 oscillation 을 가지고 있음을 밝힌다. 이 때 해석은 손쉬운 해의 정확성 검증과 이를 기반으로 한 개선 방안 마련의 목적으로 정적해석을 수행하였다. 결과의 path independency 확보를 위하여 초기평형상태의 케이블 형상과 동적 변위를 같은 함수 공간안에서 정의해야 하며 이를 위하여 초기 평형상태를 Rayleigh-Ritz 방법으로 해석할 것을 제안한다. 또한 장력 분포의 oscillation 을 제거하기 위하여 변위와 변형률을 각각 다른 함수공간에서 정의하는 혼합 Rayleigh-Ritz 방법(mixed Rayleigh-Ritz method)를 제안한다. 혼합 Rayleigh-Ritz 방법의 정식화를 위하여 케이블의 평형방정식과 변위-변형률 관계를 weak form 적용하여 두 식을 혼합한다. 유도된 식에 시간 적분 방법인 Newmark- β 방법을 적용하여

시간영역에서의 케이블의 동적 변위와 변형률을 구한다.

제안된 방법을 적용하여 지점운동을 받는 케이블의 동적해석을 수행한다. 해의 정확성 검증을 위하여 변위를 100 개의 sine 함수와 1 차식으로 가정한 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법의 해와 비교한다. 제안된 방법의 가설 중의 사장교와 안정화 케이블에의 동적해석 적용 가능성을 확인해 보기 위하여 구조계를 스프링-질량 시스템으로 간단히 모델링하여 적용한다.

2. 기존연구 분석 및 문제점 제기

이 장에서는 정길제에 의해 연구되었던 지점운동을 받는 케이블의 동적해석을 위한 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법을 설명한다. 자중 및 지점운동을 받는 케이블의 동적해석을 위한 가상일의 원리를 유도하고 유도된 식의 선형화된 증분식을 제시한다. 케이블의 초기값을 탄성현수선 요소(ECC)를 사용하여 해석하고, 변위를 sine 함수로 가정하여 이산화하는 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법으로 증분식을 이산화한다.

유도된 증분형 운동 방정식을 이용하여 지점운동을 받는 케이블의 동적거동을 관성력을 고려하지 않고 해석한다. 해석 결과를 통하여 기존 방법 적용시의 문제점을 제기한다.

2.1 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법

그림 2.1은 정적 평형상태에서 동적 변위가 발생한 케이블을 보이고 있다. 동적 평형상태에서의 라그랑지 좌표 s 에 대한 공간 위치는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned}x(s) &= x_s(s) + x_d(s) \\ y(s) &= y_s(s) + y_d(s)\end{aligned}\tag{2.1}$$

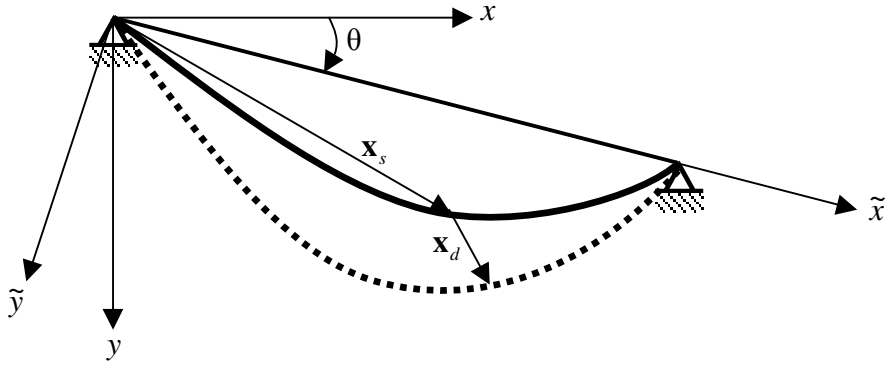


그림 2.1 동적해석을 위한 전체 좌표계와 국부좌표계

여기서 x, y, x_d, y_d 는 각각 라그랑지 좌표 s 에 대한 동적 평형상태에서의 위치 및 정적 평형상태에 대한 동적 변위를 표시한다. 정적 평형상태에서의 케이블의 공간위치인 x_s 와 y_s 는 탄성현수선 요소를 이용하여 계산한 정해이다. 동적 상태에서의 케이블 길이는 다음과 같다.

$$p(s) = \int \left(\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right)^{0.5} ds, \quad \frac{dp}{ds} = \left(\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right)^{0.5} \quad (2.2)$$

Green 변형도의 정의에 의하여 동적상태에서의 총 변형도를 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left((x')^2 + (y')^2 - 1 \right) = \frac{1}{2} \left((p')^2 - 1 \right) \quad (2.3)$$

위식에서 ε 은 총변형도이고, $()' = \frac{d()}{ds}$ 이다. 동적 상태에서의 변형 그래디

언트는 식 (2.3)에 의하여 $G = p'$ 로 정의된다. 동적 변위에 의하여 발생한 동적 Green 변형도는 다음과 같다.

$$\varepsilon_d = \varepsilon - \varepsilon_s = \frac{1}{2}((p')^2 - (p_s')^2) = x_s' x_d' + y_s' y_d' + \frac{1}{2}((x_d')^2 + (y_d')^2) \quad (2.4)$$

동적 상태에서의 이차 P-K 장력은 식 (2.3)과 식 (2.4)를 Hooke의 법칙에 적용하여 표시할 수 있다

$$\tilde{T} = EA\varepsilon = \frac{EA}{2}((x')^2 + (y')^2 - 1) = \frac{EA}{2}((p')^2 - (p_s')^2 + (p_s')^2 - 1) = \tilde{T}_s + \tilde{T}_d \quad (2.5)$$

동적 상태에서의 평형방정식은 다음과 같다.

$$T \frac{dx}{dp} + F_x^1 - \int_0^p \rho \ddot{x} dp = 0, \quad T \frac{dy}{dp} + F_y^1 + \int_0^p w dp - \int_0^p \rho \ddot{y} dp = 0 \quad (2.6)$$

동적 상태에서의 Cauchy 장력은 $T = p' \tilde{T}$ 이고, w 와 ρ 는 각각 동적상태에서의 단위 길이 당 무게와 질량이다. 식 (2.6)을 p 에 대하여 미분하여 표시하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dp} \left(T \frac{dx}{dp} \right) - \rho \ddot{x} = 0, \quad \frac{d}{dp} \left(T \frac{dy}{dp} \right) + w - \rho \ddot{y} = 0 \quad (2.7)$$

동적상태에서의 케이블의 단위 길이당 무게 및 질량은 질량보존의 법칙을 이용하여 변형 전의 단위 길이 당 무게와 질량으로 표시할 수 있다.

$$\rho = \rho_0 \frac{ds}{dp}, \quad w = w_0 \frac{ds}{dp} \quad (2.8)$$

정적 문제와는 달리 동적 문제에서는 해석적 해를 구할 수 없다. 동적 문제의 수치적 해를 구하기 위하여 동적운동방정식에 가중잔차법을 적용한다. 식 (2.7)을 p 에 대하여 미분하고, 미소 가상 동적 변위를 곱하여 적분하면 가중잔차식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_l \delta x_d \left(\frac{d}{dp} \left(T \frac{dx}{dp} \right) - \rho \ddot{x} \right) dp = \\ - \int_l \rho \delta x_d \ddot{x} dp - \int_l \frac{d\delta x_d}{dp} T \frac{dx}{dp} dp + \delta x_d T \frac{dx}{dp} \Big|_0^l = 0 \\ \int_l \delta y_d \left(\frac{d}{dp} \left(T \frac{dy}{dp} \right) - \rho \ddot{y} + w \right) dp = \\ - \int_l \rho \delta y_d \ddot{y} dp - \int_l \frac{d\delta y_d}{dp} T \frac{dy}{dp} dp + \int_l \delta y_d w dp + \delta y_d T \frac{dy}{dp} \Big|_0^l = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

위식에서 l 은 동적 평형상태에서 변형된 케이블의 길이이다. 경계 적분값은 해석에서 고려되지 않기 때문에 제외한다. 식 (2.8)을 식 (2.9)에 대입하여 적분 변수를 라그랑지 좌표 s 에 대하여 표시하고, 두 식을 더하여 하나의 가중잔차식으로 구성하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
& \int_{L_0} \rho_0 \delta x_d \ddot{x} ds + \int_{L_0} \frac{d\delta x_d}{ds} \tilde{T} \frac{dx}{ds} ds + \int_{L_0} \rho_0 \delta y_d \ddot{y} ds + \int_{L_0} \frac{d\delta y_d}{ds} \tilde{T} \frac{dy}{ds} ds - \int_{L_0} \delta y_d w_0 ds = \\
& \int_{L_0} \rho_0 (\delta x_d \ddot{x} + \delta y_d \ddot{y}) ds + \int_{L_0} \tilde{T} \left(\frac{d\delta x_d}{ds} \frac{dx}{ds} + \frac{d\delta y_d}{ds} \frac{dy}{ds} \right) ds - \int_{L_0} \delta y_d w_0 ds = 0
\end{aligned} \tag{2.10}$$

정적 평형상태에서의 평형위치는 탄성현수선 요소를 이용하여 해석하여 구할 수 있다. 식 (2.4)에서 정의된 동적 변형도의 변분은 동적 변위에 대한 변분을 취하여 구할 수 있다.

$$\delta \mathcal{E}_d = x_s' \delta x_d' + y_s' \delta y_d' + x_d' \delta x_d' + y_d' \delta y_d' = x' \delta x_d' + y' \delta y_d' \tag{2.11}$$

식 (2.11)을 식 (2.10)에 대입하면 케이블의 동적 평형방정식에 대한 최종적인 가중잔차식을 구할 수 있다.

$$\int_{L_0} \rho_0 (\delta x_d \ddot{x} + \delta y_d \ddot{y}) ds + \int_{L_0} \tilde{T} \delta \mathcal{E}_d ds - \int_{L_0} \delta y_d w_0 ds = 0 \tag{2.12}$$

식 (2.12)는 Total Lagrangian description 에 의하여 표시된 케이블의 동적운동에 대한 가상일 원리를 표시하고 있으며, 관성력에 의한 동적 가상일, 내적 가상일 그리고 외적 가상일의 합이 영이 된다는 것을 의미한다.

시간영역에서의 해는 어떤 시간에서의 비선형 운동방정식 (2.12)를 선형화한 증분식을 반복적으로 풀어 구할 수 있다. 어떤 시간 $t + \Delta t$ 에서 식 (2.12)는 다음과 같이 표현된다.

$$\int_{L_0} \rho_0 (\delta x_d^{t+\Delta t} \ddot{x}^{t+\Delta t} + \delta y_d^{t+\Delta t} \ddot{y}^{t+\Delta t}) ds + \int_{L_0} \tilde{T}^{t+\Delta t} \delta \varepsilon_d^{t+\Delta t} ds - \int_{L_0} \delta y_d^{t+\Delta t} w_0 ds = 0 \quad (2.13)$$

식 (2.13)를 풀기 위하여 이전 시간 단계 t 에서의 모든 변수는 기저의 값으로 가정한다. 식 (2.13)의 선형화된 증분식을 유도하기 위하여 시간 $t + \Delta t$ 에서의 케이블의 위치를 증분식으로 표시한다.

$$x_i^{t+\Delta t} = x_{i-1}^{t+\Delta t} + \Delta x = \underline{x} + \Delta x, \quad y_i^{t+\Delta t} = y_{i-1}^{t+\Delta t} + \Delta y = \underline{y} + \Delta y \quad (2.14)$$

식 (2.14)에서 i 는 시간 $t + \Delta t$ 에서의 동적 평형상태를 계산하기 위한 반복 계산 단계를 의미하고, $(\underline{\quad}) = (\quad)_{i-1}^{t+\Delta t}$ 로 정의하며 전 단계에서 구한 변수 값을 지칭한다. 시간 $t + \Delta t$ 에서 케이블의 위치의 초기값인 $x_0^{t+\Delta t}$ 와 $y_0^{t+\Delta t}$ 는 이때의 지점운동량을 반영하면 다음과 같이 표현된다.

$$x_0^{t+\Delta t} = x^t + \Delta u_g^{t+\Delta t}, \quad y_0^{t+\Delta t} = y^t + \Delta v_g^{t+\Delta t} \quad (2.15)$$

$\Delta u_g^{t+\Delta t}$ 와 $\Delta v_g^{t+\Delta t}$ 는 각각 케이블이 시간 $t + \Delta t$ 에서 받는 x 방향과 y 방향의 지점이동량의 증가량에 의하여 발생한 x 방향과 y 방향의 케이블의 변위의 증가량이다. 식 (2.14)을 식 (2.5)에 대입하고 일차 증분항만 포함시켜 이차 P-K 장력의 선형화된 증분식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_i^{t+\Delta t} &= EA \frac{1}{2} \left(\left(\frac{d(\underline{x} + \Delta x)}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d(\underline{y} + \Delta y)}{ds} \right)^2 - 1 \right) \\
&= EA \frac{1}{2} \left((\underline{x}')^2 + (\underline{y}')^2 - 1 + 2(\underline{x}'\Delta x' + \underline{y}'\Delta y') + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 \right) \\
&\approx \tilde{T} + EA(\underline{x}'\Delta x' + \underline{y}'\Delta y')
\end{aligned} \tag{2.16}$$

식 (2.14) 및 식 (2.16)을 식 (2.13)에 대입하고 이차 이상의 고차 증분항을 무시하면 선형화된 증분식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\int_{L_0} \delta x_d \rho_0 \Delta \ddot{x} ds + \int_{L_0} \delta x'_d \left((\tilde{T} + EA(\underline{x}')^2) \Delta x' + \underline{x}' \underline{y}' \Delta y' \right) ds + \\
&\int_{L_0} \delta y_d \rho_0 \Delta \ddot{y} ds + \int_{L_0} \delta y'_d \left(\underline{x}' \underline{y}' \Delta x' + (\tilde{T} + EA(\underline{y}')^2) \Delta y' \right) ds = \\
&\int_{L_0} w_0 \delta y_d ds - \int_{L_0} \rho_0 (\ddot{x} \delta x_d + \ddot{y} \delta y_d) ds - \int_{L_0} \tilde{T} (\underline{x}' \delta x'_d + \underline{y}' \delta y'_d) ds
\end{aligned} \tag{2.17}$$

식 (2.17)을 행렬식 형식으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\int_{L_0} \begin{pmatrix} \delta x_d & \delta y_d \end{pmatrix} \rho_0 \begin{pmatrix} \Delta \ddot{x} \\ \Delta \ddot{y} \end{pmatrix} ds + \\
&\int_{L_0} \begin{pmatrix} \delta x'_d & \delta y'_d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T} + EA(\underline{x}')^2 & EA \underline{x}' \underline{y}' \\ EA \underline{x}' \underline{y}' & \tilde{T} + EA(\underline{y}')^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x'_d \\ \Delta y'_d \end{pmatrix} ds = \\
&\int_{L_0} \begin{pmatrix} \delta x_d & \delta y_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ w_0 \end{pmatrix} ds - \int_{L_0} \begin{pmatrix} \delta x_d & \delta y_d \end{pmatrix} \rho_0 \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} ds - \\
&\int_{L_0} \begin{pmatrix} \delta x'_d & \delta y'_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{T} \underline{x}' \\ \tilde{T} \underline{y}' \end{pmatrix} ds
\end{aligned} \tag{2.18}$$

식 (2.18)을 이산화하기 위하여 Rayleigh-Ritz 방법을 사용한다. 지점은

동을 받는 케이블의 동적변위는 현 방향과 현 수직방향에 대하여 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_d &\approx \sum_{i=1}^{nb} A_{xi}(t) \tilde{\phi}_{xi}(s) \\
 &= \sum_{i=1}^{nb-2} A_{xi}(t) \sin \frac{i\pi}{L_0} s + A_{x,nb-1}(t) \left(1 - \frac{s}{L_0}\right) + A_{x,nb}(t) \frac{s}{L_0} \\
 \tilde{y}_d &\approx \sum_{i=1}^{nb} A_{yi}(t) \tilde{\phi}_{yi}(s) \\
 &= \sum_{i=1}^{nb-2} A_{yi}(t) \sin \frac{i\pi}{L_0} s + A_{y,nb-1}(t) \left(1 - \frac{s}{L_0}\right) + A_{y,nb}(t) \frac{s}{L_0}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

여기서 \tilde{x}_d , \tilde{y}_d 그리고 nb 는 각각 현 방향과 현 수직방향 변위와 기저함수의 개수이다. 식 (2.19)에서 사용된 기저함수들 중 1 번에서 $nb-2$ 번 기저함수인 사인함수는 케이블의 양단에서의 값이 0 이다. 일차함수 중 $nb-1$ 번 기저함수는 $s=0$ 에서의 값이 1 이고 $s=L_0$ 에서의 값이 0 이다. 가장 마지막 기저함수인 nb 번 함수는 $s=0$ 에서의 값이 0 이고, $s=L_0$ 에서의 값이 1 이다. 즉 $nb-1$ 번 기저함수의 계수인 $A_{x,nb-1}$, $A_{y,nb-1}$ 은 각각 $s=0$ 에서의 현 방향 및 현 수직방향의 지점운동량이고, nb 번 기저함수의 계수인 $A_{x,nb}$, $A_{y,nb}$ 는 각각 $s=L_0$ 에서의 현 방향 및 현 수직방향의 지점운동량이다.

15 쪽의 그림 2.2 는 각 지점에 크기가 u_{g1} , u_{g2} 인 x 방향의 지점운동을 받는 수평 케이블을 도시하고 있다. 그리고 그림 2.3 은 그림 2.2 의 수평 케이블의 수평변위를 식 (2.19)의 $nb-1$ 번, nb 번의 일차함수 및 사인함수의

순서로 나누어 표현하고 있다. 케이블이 받고 있는 지점운동량 u_{g1} 과 u_{g2} 는 각각 일차함수의 계수인 $A_{x,nb-1}$ 과 $A_{x,nb}$ 와 같다. 지점운동을 포함하고 있는 일차함수와 양단에서의 크기가 0 인 사인함수가 선형조합되어 수평변위를 나타낸다.

식 (2.19)에서 정의된 동적 변위를 식 (1.18)에 대입하기 위하여 행렬식 형식으로 표시한다.

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_d \\ \tilde{y}_d \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{nb} \begin{pmatrix} A_{xi}(t)\tilde{\phi}_{xi}(s) \\ A_{yi}(t)\tilde{\phi}_{yi}(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{x1} & 0 & \cdots & \tilde{\phi}_{xn} & 0 \\ 0 & \tilde{\phi}_{y1} & \cdots & 0 & \tilde{\phi}_{yn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_{x1} \\ A_{y1} \\ \vdots \\ A_{xn} \\ A_{yn} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{A} \quad (2.20)$$

위식에서 $\tilde{\mathbf{N}}$ 및 \mathbf{A} 는 각각 기저함수 행렬과 계수 벡터이다. 현 방향 및 현 수직방향의 동적 변위는 2 차원 변환행렬을 이용하여 전체 좌표계에서의 x-방향 및 y-방향 변위로 표시할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} x_d \\ y_d \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_d \\ \tilde{y}_d \end{pmatrix} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{A} = \mathbf{N}\mathbf{A} \quad (2.21)$$

식 (2.19)을 식 (2.18)에 적용하여 이산화된 증분형 동적 운동 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
& (\delta \mathbf{A})^T \left(\int_{L_0} \mathbf{N}^T \rho_0 \mathbf{N} ds \Delta \ddot{\mathbf{A}} + \int_{L_0} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} ds \Delta \mathbf{A} \right) = \\
& (\delta \mathbf{A})^T \left(\mathbf{f}_w - \int_{L_0} \mathbf{N}^T \rho_0 \mathbf{N} ds \ddot{\mathbf{A}} - \int_{L_0} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{B} ds \mathbf{A} \right)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta \mathbf{A})^T (\mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{A}} + \mathbf{K} \Delta \mathbf{A}) = \\
& (\delta \mathbf{A})^T (\mathbf{f}_w - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{A}} - \mathbf{K}^0 \mathbf{A})
\end{aligned} \tag{2.23}$$

위에서 사용된 기호는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}} + EA(\underline{x}')^2 & EA\underline{x}'\underline{y}' \\ EA\underline{x}'\underline{y}' & \tilde{\mathbf{T}} + EA(\underline{y}')^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_w = \int_{L_0} \mathbf{N}^T \begin{pmatrix} 0 \\ w_0 \end{pmatrix} ds \\
\mathbf{M} &= \int_{L_0} \mathbf{N}^T \rho_0 \mathbf{N} ds, \quad \mathbf{K} = \int_{L_0} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} ds, \quad \mathbf{K}^0 = \int_{L_0} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{B} ds
\end{aligned} \tag{2.24}$$

식 (2.23)의 각 행렬과 벡터는 지점과 관련된 부분과 그 이외의 부분으로 나누어 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
& (\delta \mathbf{A}_f \quad \delta \mathbf{A}_s) \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ff} & \mathbf{M}_{fs} \\ \mathbf{M}_{sf} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \ddot{\mathbf{A}}_f \\ \Delta \ddot{\mathbf{A}}_s \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fs} \\ \mathbf{K}_{sf} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{A}_f \\ \Delta \mathbf{A}_s \end{pmatrix} \right\} = \\
& (\delta \mathbf{A}_f \quad \delta \mathbf{A}_s) \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{w,f} \\ \mathbf{f}_{w,s} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ff} & \mathbf{M}_{fs} \\ \mathbf{M}_{sf} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{A}}_f \\ \ddot{\mathbf{A}}_s \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff}^0 & \mathbf{K}_{fs}^0 \\ \mathbf{K}_{sf}^0 & \mathbf{K}_{ss}^0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_f \\ \mathbf{A}_s \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

여기서 \mathbf{A}_f 와 \mathbf{A}_s 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_f &= (\mathbf{A}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{A}_{nb-2})^T \\
\mathbf{A}_s &= (\mathbf{A}_{nb-1} \quad \mathbf{A}_{nb})^T
\end{aligned} \tag{2.26}$$

케이블이 지점운동을 받을 시, 지점운동량은 기지의 값이므로 $\Delta\ddot{\mathbf{A}}_s$, $\Delta\mathbf{A}_s$ 그리고 $\delta\mathbf{A}_s$ 는 영이다. 이를 반영하여 식 (2.25)를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & (\delta\mathbf{A}_f)^T (\mathbf{M}_{ff}\Delta\ddot{\mathbf{A}}_f + \mathbf{K}_{ff}\Delta\mathbf{A}_f) = \\ & (\delta\mathbf{A}_f)^T (\mathbf{f}_{w,f} - \mathbf{M}_{ff}\ddot{\mathbf{A}}_f - \mathbf{M}_{fs}\ddot{\mathbf{A}}_s - \mathbf{K}_{ff}^0\mathbf{A}_f - \mathbf{K}_{fs}^0\mathbf{A}_s) \end{aligned} \quad (2.27)$$

식 (2.27)은 모든 $(\delta\mathbf{A}_f)^T$ 에 대하여 만족하여야 하므로, 다음과 같이 정리하여 최종적인 증분형 운동 방정식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{M}_{ff}\Delta\ddot{\mathbf{A}}_f + \mathbf{K}_{ff}\Delta\mathbf{A}_f = \mathbf{f}_{w,f} - \mathbf{M}_{ff}\ddot{\mathbf{A}}_f - \mathbf{M}_{fs}\ddot{\mathbf{A}}_s - \mathbf{K}_{ff}^0\mathbf{A}_f - \mathbf{K}_{fs}^0\mathbf{A}_s = \Delta\mathbf{f} \quad (2.28)$$

식 (2.28)에 대한 시간 적분을 위하여 Newmark- β 과 같은 수치적분법을 사용할 수 있다. 각 시간 단계에서 해가 수렴할 때까지 식 (2.28)을 반복적으로 적용하여 각 시간 단계에서의 위치의 변화량을 계산한다.

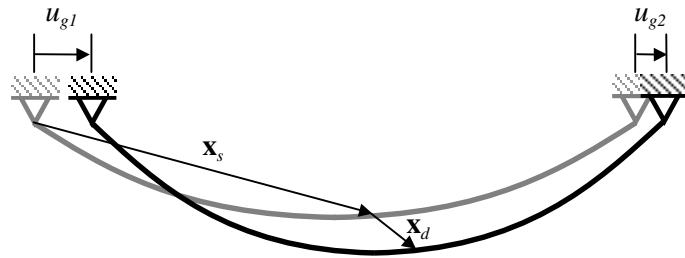


그림 2.2 지점운동을 받는 수평 케이블

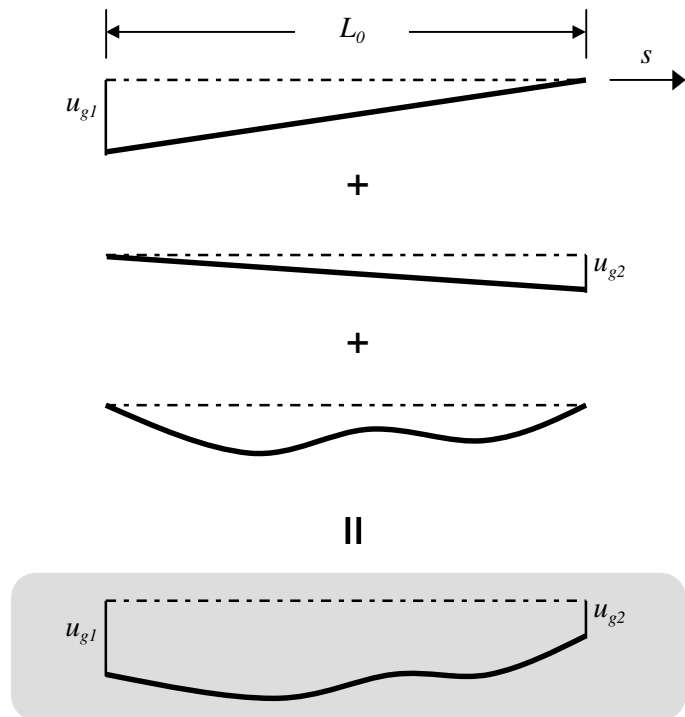


그림 2.3 선형조합으로 표현되는 케이블의 수평 변위

2.2 정적해석 적용 및 문제점 제기

이 절에서는 지점운동을 받는 케이블에 대한 식 (2.28)의 정확성을 검증하기 위하여 해석 예제에 식 (2.28)을 적용한다. 해석은 관성력을 고려하지 않고 수행되었다. 관성력을 고려하지 않고 해석한 결과는 지점운동이 케이블에 오랜 시간에 걸쳐 매우 천천히 가하여져 케이블에 동적효과를 발생시키지 않는 경우와 같은 결과를 낼 것이다. 그리고 이 경우의 정해는 탄성 현수선 요소를 사용하여 정적해석을 수행하여 얻을 수 있다. 관성력을 고려하지 않고 정적해석할 때의 장점은 다음과 같다. 첫째, 정해를 알 수 있으므로 해석의 정확도를 간단히 확인할 수 있다. 둘째, 이를 기반으로 동적 해석에 적용할 수 있는 개선사항을 마련할 수 있다.

해석에 사용된 예제는 그림 2.2 와 같은 수평 케이블이다. L 은 케이블이 지점운동을 받기 이전의 지점간 거리이다. 해석은 모두 세 가지 경우에 대하여 수행되었다. 표 2.2 에 제시된 바와 같이 케이블에 지점운동이 가해지기 이전의 지점간 거리는 경우에 따라 다르지만 케이블이 지점운동을 모

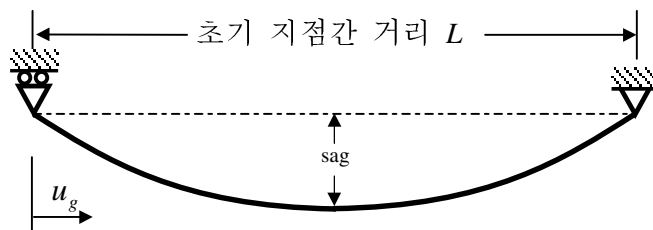


그림 2.4 정적해석을 위한 예제 케이블의 형상

표 2.1 정적해석 예제로 사용된 케이블의 물성치

종류	단위길이당 자중	탄성 계수	단면적	무응력 길이
크기	439.39 N / m	200 Gpa	53.5 cm ²	99.7 m

표 2.2 경우에 따른 지점간 거리와 새그비

경우	지점운동 전 지점간 거리 (m)	지점운동 후 지점간 거리 (m)	초기 새그비	최종 새그비
경우 1	100.0	99.4	1/590	1/30
경우 2	99.8	99.4	1/210	1/30
경우 3	99.6	99.4	1/50	1/30

두 받은 후의 지점간 거리는 모두 같다. 따라서 지점운동 발생 후의 해석 결과는 세 경우 모두 지점간 거리가 99.4 m 인 케이블을 탄성현수선 요소를 사용하여 얻은 해석결과와 동일해야 한다.

케이블의 동적변위는 현 방향과 현 수직방향으로 각각 20 개의 사인함수와 1 차식으로 가정되었다. 시간간격은 1/100 초를 사용하였고, 각 시간 단계에서 반복계산에 의한 수렴 기준은 다음과 같다.

$$\varepsilon = \frac{\|\Delta \mathbf{u}_k^{t+\Delta t}\|}{\|\mathbf{u}^{t+\Delta t}\|} \leq 10^{-8} \quad (2.27)$$

$\mathbf{u}^{t+\Delta t}$ 는 $t+\Delta t$ 시간 단계에서 계산된 총 변위이고, $\Delta \mathbf{u}_k^{t+\Delta t}$ 는 k 번째 반복계산으로부터 구한 변위이다.

지점운동이 모두 가해진 후의 라그랑지 좌표계에서의 케이블의 x 방향 및 y 방향의 위치를 그림 2.3 과 그림 2.4 에 도시하였다. 케이블의 위치는 세가지 경우 모두 탄성현수선 요소를 사용하여 계산한 정해와 동일한 값을

보이고 있다. 정적해석을 수행할 경우 케이블의 초기 평형상태에서의 새그비가 1/590 인 팽팽한 케이블 부터 1/50 인 느슨한 케이블까지 케이블의 형상은 모두 정해와 일치함을 확인하였다.

그림 2.5 는 지점운동이 모두 가해진 후의 라그랑지 좌표 s 에 대한 케이블의 장력을 도시한 그래프이다. 그림 2.6 은 이를 지점 부근에서 확대한 그래프이다. 표 2.3 은 각 경우별 최대 오차를 나타내고 있다. 케이블의 장력의 공간상의 분포는 탄성현수선 요소를 적용하여 해석한 정해와 최대 53.1 %로 많은 차이를 보이며 oscillation 을 가진다. 그리고 세 경우의 해석 결과가 각각 다른 결과를 넘으로써 탄성체 문제에서의 path independency 를 만족하지 못함을 보이고 있다.

제 3 장과 4 장에서는 장력 분포의 oscillation 과 결과의 path independency 의 미확보 문제를 해결하기 위한 방안을 제시한다.

표 2.3 경우에 따른 장력의 최대 오차

경우	지점운동 전 지점간 거리 (m)	지점운동 후 지점간 거리 (m)	초기 새그비	최대 오차 (%)
경우 1	100.0	99.4	1/590	14.4
경우 2	99.8	99.4	1/210	30.0
경우 3	99.6	99.4	1/50	53.1

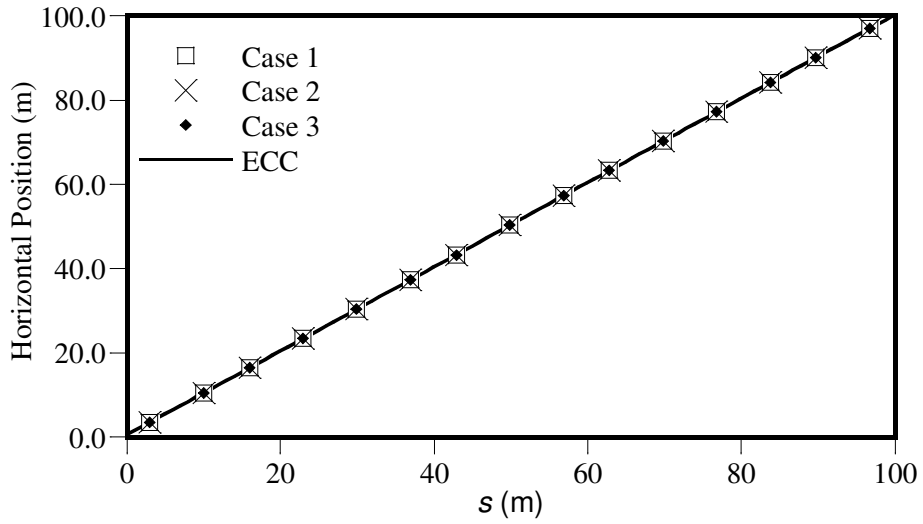


그림 2.5 라그랑지 좌표 s 에 대한 케이블의 x 방향 위치

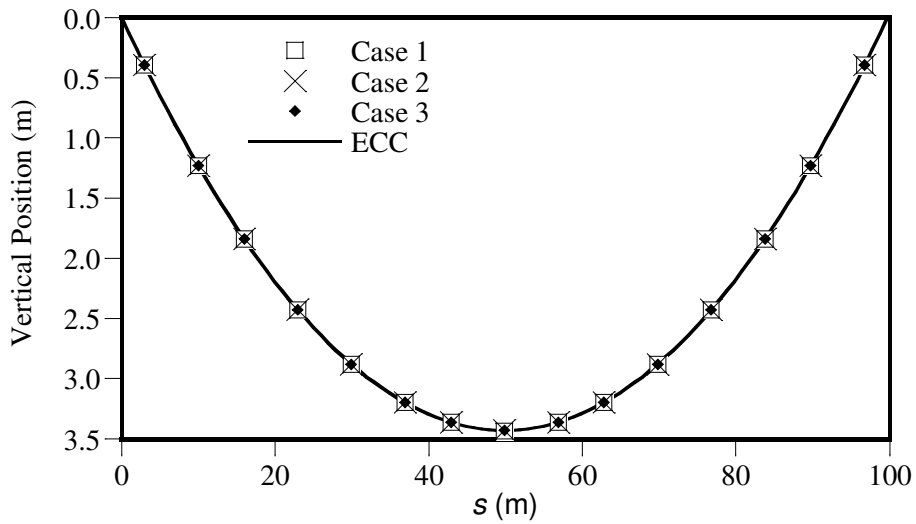


그림 2.6 라그랑지 좌표 s 에 대한 케이블의 y 방향 위치

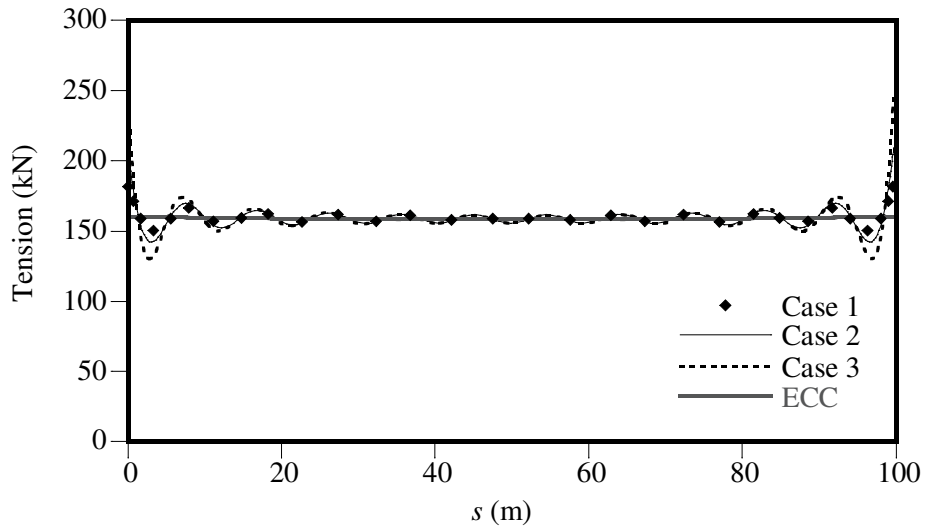


그림 2.7 라그랑지 좌표 s 에 대한 케이블의 장력 분포

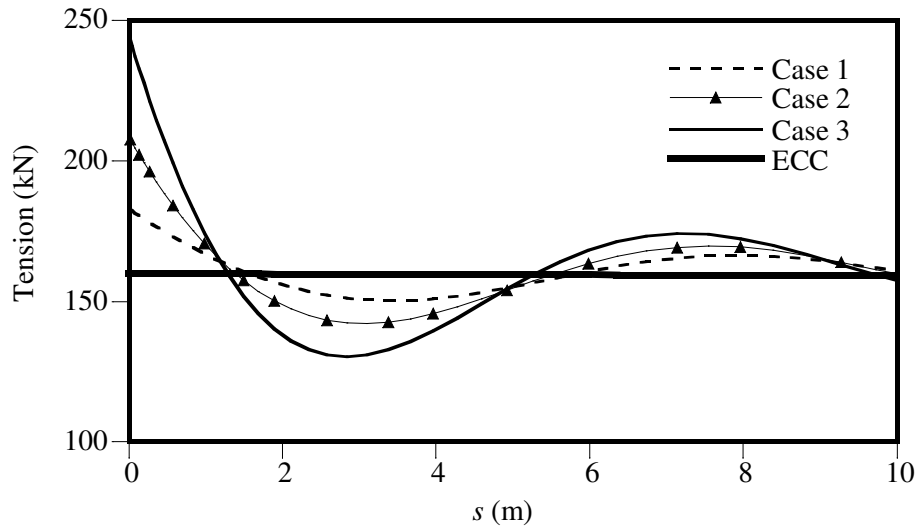


그림 2.8 케이블의 지점 부근의 장력 분포

3. 초기평형상태의 Rayleigh-Ritz 해석

앞서 2.2 절에서 케이블이 지점운동을 받을 경우, 기존에 제안되었던 식 (2.27)을 적용하여 해석하면 결과의 path independency 의 미확보와 장력의 부정확함이라는 두 가지 문제점이 발생됨을 밝혔다. 이 장에서는 path independency 를 확보하기 위하여 Rayleigh-Ritz 방법을 이용한 초기평형상태 해석을 제안한다

3.1 Rayleigh-Ritz 방법을 이용한 초기평형상태 해석

이산화된 케이블의 동적운동에 대한 가상일의 원리는 다음과 같다.

$$(\delta\mathbf{A})^T \left\{ \int_{L_0} \mathbf{N}^T \rho_0 \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} ds + \int_{L_0} \mathbf{B}^T \tilde{T} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} ds - \int_{L_0} \mathbf{N}^T \begin{pmatrix} 0 \\ w_0 \end{pmatrix} ds \right\} = 0 \quad (3.1)$$

2.2 절에서 정해와의 손쉬운 비교와 개선사항의 마련의 목적으로 해석 시 관성력을 고려하지 않았다. 식 (3.1)에서 관성항을 제거하면 다음의 식이 나온다.

$$\int_{L_0} \mathbf{B}^T \tilde{T} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} ds - \int_{L_0} \mathbf{N}^T \begin{pmatrix} 0 \\ w_0 \end{pmatrix} ds = 0 \quad (3.2)$$

식 (3.2)의 둘째 항은 케이블의 자중과 무응력 길이가 같으면 초기평형 상태의 지점 간 거리에 관계없이 항상 일정한 값을 가지므로 첫째 항 역시 항상 일정한 값을 가져야 한다.

$$\int_{L_0} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{x}' ds = \mathbf{f}_w = \mathbf{c} \quad (3.3)$$

앞서 2 장 2 절의 예제에서 초기 지점간 거리가 서로 다른 세가지 경우의 케이블에 대하여 최종 지점간 거리가 모두 같도록 지점운동을 수행하였다. 해석을 통하여 각 경우 간 서로 일치하는 \mathbf{x}' 을 얻을 수 없다면 식 (3.3)을 만족시키기 위한 서로 다른 \mathbf{x}' 값이 계산되어야 한다.

이산화된 케이블의 위치를 무응력좌표 s 에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}'_s + \mathbf{u}' = \mathbf{B}_s \mathbf{A}_s + \mathbf{B}_u \mathbf{A}_u \quad (3.4)$$

식 (3.4)의 \mathbf{x}_s 는 초기평형상태에서의 케이블의 위치벡터를 나타내고, \mathbf{u} 는 식 (3.2)를 만족시키기 위해 초기평형상태에 추가로 발생한 변위벡터를 나타낸다. \mathbf{B}_s 와 \mathbf{B}_u 는 각각 \mathbf{x}_s 와 \mathbf{u} 의 기저함수 행렬을 라그랑지 좌표 s 에 대하여 미분한 것이고, \mathbf{A}_s 와 \mathbf{A}_u 는 진폭 벡터이다. 케이블의 초기형상과 변위의 함수공간이 일치한다면 \mathbf{B}_s 와 \mathbf{B}_u 가 동일하고 초기 지점간 거리가 서로 다르더라도 세 경우의 \mathbf{x}' 값이 일치하게 하는 \mathbf{u}' 가 존재한다. 반면 케이

블의 초기형상과 변위의 함수공간이 다르면 \mathbf{B}_s 와 \mathbf{B}_u 가 동일하지 않고, 경우별로 식 (3.2)를 만족시키기 위한 서로 다른 \mathbf{x}' 값이 계산될 것이다.

한편, 케이블의 변위-변형률 관계는 아래와 같다.

$$\varepsilon = \frac{1}{2}((x')^2 + (y')^2 - 1) \quad (3.5)$$

케이블의 위치 x, y 에 오차가 발생하였다면 이를 정해와 오차의 합으로 나타낼 수 있다.

$$x = x_e + \bar{x}, \quad y = y_e + \bar{y} \quad (3.6)$$

x_e 와 y_e 는 각각 전체 좌표계에서의 케이블의 수평위치와 수직위치의 정해이고, \bar{x} 와 \bar{y} 는 각각의 오차이다. 식 (3.6)을 식 (3.5)에 대입하여 변형률의 오차를 얻을 수 있다.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}((\bar{x}')^2 + (\bar{y}')^2 + 2x'_e\bar{x}' + 2y'_e\bar{y}') \quad (3.7)$$

그림 3.1은 2장 2절의 예제 케이블의 해석 결과 중 x' 에 오차가 라그랑지 좌표 s 전체에 걸쳐 0.1% 만큼 발생하였을 때 변형률에 발생하는 오차를 도시한 그림이다. x' 에 0.1%의 오차가 발생하여도 변형률에는 전체적으로 약 670%의 오차가 남을 확인할 수 있다. 다시 말해 변형률은 변위의 오차에 매우 민감하게 반응한다.

이러한 이유로 식 (3.4)의 \mathbf{B}_s 와 \mathbf{B}_u 가 동일하지 않을 경우 식 (3.2)를 만족시키기 위해 계산된 세 경우의 \mathbf{x}' 가 조금만 달라져도 장력의 차이는 매우 뚜렷할 것이다. 초기 지점간 거리가 다르더라도 같은 결과를 내기 위해서는 케이블의 초기위치 \mathbf{x}_s 가 추가변위 \mathbf{u} 와 같은 함수공간에서 가정되어야 한다. 따라서 케이블의 초기위치 \mathbf{x}_s 를 동적변위 \mathbf{u} 와 같은 함수공간 내에서 가정하여 Rayleigh-Ritz 방법으로 해석해야 한다.

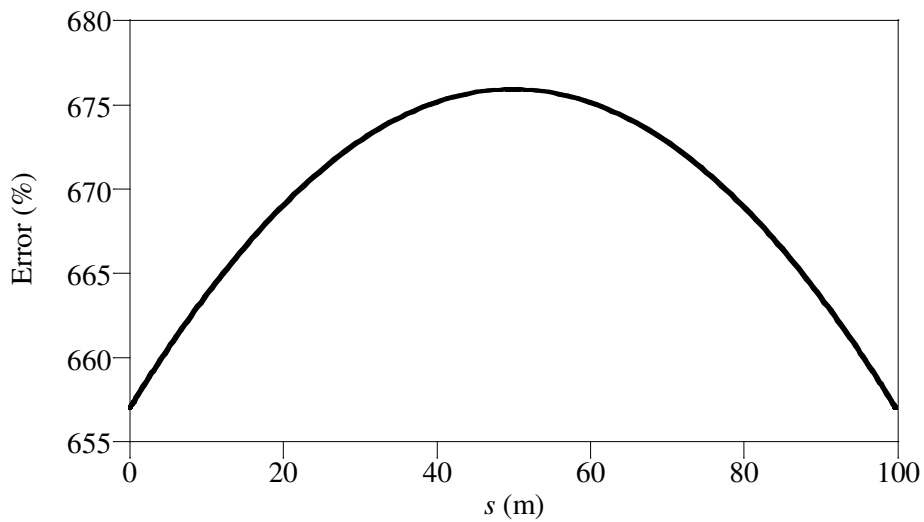


그림 3.1 x' 의 0.1% 오차로 인한 변형률의 오차

3.2 정적해석 적용

이 절에서는 케이블의 초기 평형상태의 형상과 변위를 같은 함수공간에서 정의하여 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법으로 2 장 2 절의 예제 케이블을 정적해석하였다. 가정에 사용된 sine 함수의 개수는 총 20 개이다. 그림 3.2 는 라그랑지 좌표 s 에 대한 장력을 도시하고 있다. 세 경우의 장력이 동일한 값을 가지고 있으며, 지점 부근에서의 장력 곡선의 oscillation 이 완화된 것을 확인할 수 있었다. 그림 3.3 은 결과의 path independency 의 확보 여부를 자세히 살펴보기 위하여 그림 3.2 의 장력 그래프를 라그랑지 좌표 0 ~ 10 m 구간에 대하여 확대한 그림이다. 장력 결과가 path independency 를 완벽히 확보하고 있음을 알 수 있다.

탄성현수선 요소를 사용하여 얻은 정해와 해석 결과 간의 최대 오차는 4 % 가량으로 합리적인 결과로 판단된다. 그러나 이는 정적해석의 결과일 뿐이며 동적해석에서는 초기 평형상태를 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 로 해석하여 적용하여도 장력의 추정이 정확하지 않으며 장력 곡선의 oscillation 이 크게 나타난다(그림 5.4). 동적해석 예제는 5 장에서 집중적으로 다룰 것이다.

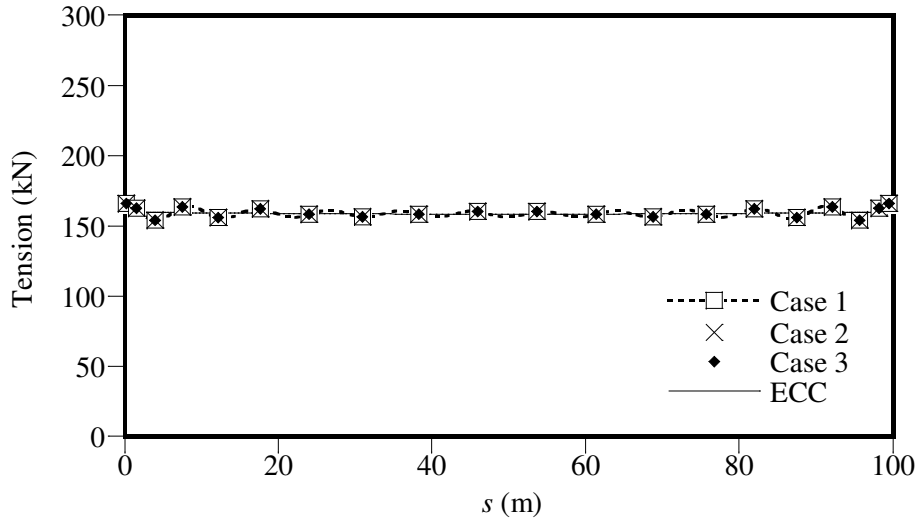


그림 3.2 라그랑지 좌표 s 에 대한 케이블의 장력 분포

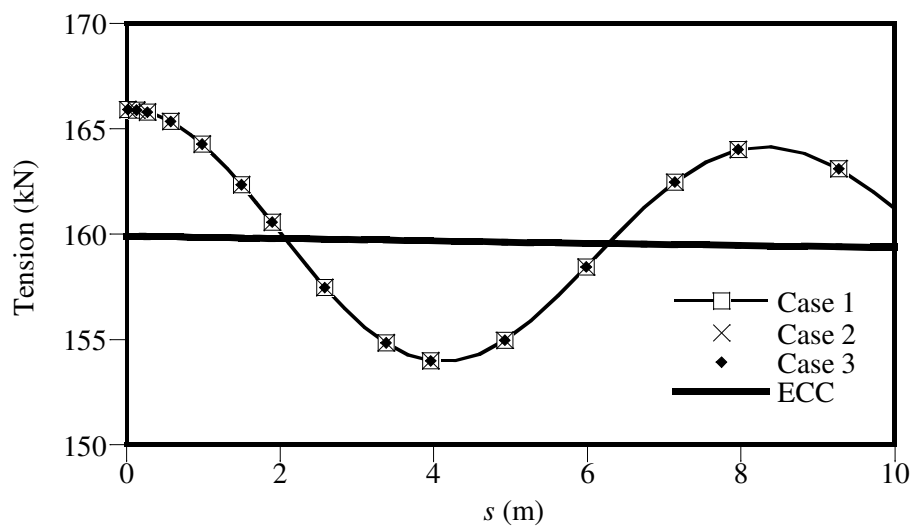


그림 3.3 케이블의 지점 부근의 장력 분포

4. 혼합 Rayleigh-Ritz 방법

2.1 절에서 케이블의 변위와 변형률이 식 (2.3)의 관계를 가짐을 설명하였다. 또한 장력과 변형률의 관계는 Hooke의 법칙을 따른다. 따라서 케이블의 변위와 장력은 다음과 같은 관계를 가짐을 밝혔다.

$$\tilde{T} = EA\varepsilon = \frac{EA}{2}((x')^2 + (y')^2 - 1) \quad (4.1)$$

2.1 절에서 제시되어 있는 방법은 변위-변형률 관계를 strong form으로 적용하여 동적변위만을 미지수로 가지는 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법이었다.

2.2 절에서 20개의 기저함수를 사용한 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법이 케이블의 형상을 완벽하게 만족시킴을 확인하였다. 그러나 케이블의 장력은 변위의 변화에 상당히 민감하게 반응하기 때문에 적은 수의 기저함수를 사용하면 장력 추정이 정확하지 않고, 곡선이 oscillation을 가짐을 확인하였다. 계산량이 많아 장시간의 해석을 요하는 케이블의 동적해석에서 기저함수의 개수를 몇 배로 늘리는 것은 큰 시간상의 비효율성을 초래한다. 이러한 이유로 변형률이 식 (4.1)을 완벽하게 만족시키지 못하는 대신 적은 양의 기저함수로도 변형률의 공간상의 분포를 잘 만족할 수 있는 변형률의 기저함수를 독립적으로 설정하여 적용시키는 혼합 Rayleigh-Ritz 방법을 제안한다.

4.1 혼합 Rayleigh-Ritz 방법의 정식화

표 4.1 은 케이블의 동적거동을 지배하는 방정식과 경계조건을 나타내고 있다.

표 4.1 지배방정식과 경계조건

명칭	방정식 및 경계조건	비고
평형방정식	$T \frac{dx}{dp} + F_x^1 - \int_0^p \rho \ddot{x} dp = 0$ $T \frac{dy}{dp} + F_y^1 + \int_0^p w dp - \int_0^p \rho \ddot{y} dp = 0$	Weak form 적용
Hooke 의 법칙	$\tilde{T} = EA \varepsilon$	
변위-변형률 관계	$\varepsilon = \frac{1}{2}((x')^2 + (y')^2 - 1)$	Weak form 적용
변위 경계조건	$\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \text{ on } S$	

2.1 절에서 설명한 바와 같이 동적 문제에서는 해석적 해를 구할 수 없으므로 수치적 해를 구하고자 평형방정식을 weak form 적용하는 가중잔차법을 사용하였다. 이 장에서 제안하고자 하는 혼합 Rayleigh-Ritz 방법에서는 변형률을 변위와 독립적인 기저함수를 사용하여 가정하므로 평형방정식과 더불어 변위-변형률 관계 또한 weak form 으로 적용한다.

2.1 절에서 평형방정식에 가중잔차법을 적용하여 케이블의 동적운동에 대한 가상일의 원리를 얻었다.

$$\int_{L_0} \rho_0 (\delta x_d \ddot{x} + \delta y_d \ddot{y}) ds + \int_{L_0} \varepsilon EA (\delta x'_d x' + \delta y'_d y') ds - \int_{L_0} \delta y_d w_0 ds = 0 \quad (4.2)$$

시간영역에서의 해를 구하려면 어떤 시간 $t + \Delta t$ 에서의 비선형 운동방정식 (4.2)의 선형화한 증분식을 우선적으로 얻어야한다. 식 (4.2)의 두 번째 항에 포함된 케이블의 변형률 ε 은 식 (2.3)의 변위-변형률 관계를 정확히 만족시키지 못하므로, strong form 으로 적용시킬 수 없다. 따라서 2.1 절에 제시된 바와는 다른 형태의 선형화된 증분식이 얻어진다.

선형화된 증분식을 구하기 위하여 나타낸 어떤 시간 $t + \Delta t$ 에서의 식 (4.2)은 다음과 같다.

$$\int_{L_0} \rho_0 (\delta x_d^{t+\Delta t} \ddot{x}^{t+\Delta t} + \delta y_d^{t+\Delta t} \ddot{y}^{t+\Delta t}) ds + \int_{L_0} \varepsilon^{t+\Delta t} EA \left(\frac{d\delta x_d^{t+\Delta t}}{ds} \frac{dx^{t+\Delta t}}{ds} + \frac{d\delta y_d^{t+\Delta t}}{ds} \frac{dy^{t+\Delta t}}{ds} \right) ds - \int_{L_0} \delta y_d^{t+\Delta t} w_0 ds = 0 \quad (4.3)$$

식 (4.3)을 풀기 위하여 이전 시간 단계 t 에서의 모든 변수는 기지의 값으로 가정한다. 또한 시간 $t + \Delta t$ 에서 케이블이 받는 지점운동의 방향과 크기 또한 기지의 값이다. 식 (4.3)의 선형화된 증분식을 유도하기 위하여 시간 $t + \Delta t$ 에서의 케이블의 위치와 변형률을 증분식으로 표시한다.

$$\begin{aligned} x_i^{t+\Delta t} &= x_{i-1}^{t+\Delta t} + \Delta x = \underline{x} + \Delta x, & y_i^{t+\Delta t} &= y_{i-1}^{t+\Delta t} + \Delta y = \underline{y} + \Delta y \\ \varepsilon_i^{t+\Delta t} &= \varepsilon_{i-1}^{t+\Delta t} + \Delta \varepsilon = \underline{\varepsilon} + \Delta \varepsilon \end{aligned} \quad (4.4)$$

식 (4.4)를 식 (4.2)에 대입하고 이차 이상의 고차 증분항을 무시하면 선형화된 증분식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
& \int_{L_0} \rho_0 (\delta x_d^{t+\Delta t} \ddot{x}^{t+\Delta t} + \delta y_d^{t+\Delta t} \ddot{y}^{t+\Delta t}) ds + \\
& \int_{L_0} \varepsilon^{t+\Delta t} EA \left(\frac{d\delta x_d^{t+\Delta t}}{ds} \frac{dx^{t+\Delta t}}{ds} + \frac{d\delta y_d^{t+\Delta t}}{ds} \frac{dy^{t+\Delta t}}{ds} \right) ds - \int_{L_0} \delta y_d^{t+\Delta t} w_0 ds = \\
& \int_{L_0} (\underline{\varepsilon} + \Delta \varepsilon) EA ((\underline{x}' + \Delta x') \delta x'_d + (\underline{y}' + \Delta y') \delta y'_d) ds + \\
& \int_{L_0} \rho_0 ((\underline{\ddot{x}} + \Delta \ddot{x}) \delta x_d + (\underline{\ddot{y}} + \Delta \ddot{y}) \delta y_d) ds - \int_{L_0} w_0 \delta y_d ds \approx \\
& \int_{L_0} \underline{\varepsilon} EA (\underline{x}' \delta x'_d + \underline{y}' \delta y'_d) ds + \int_{L_0} \varepsilon EA (\Delta x' \delta x'_d + \Delta y' \delta y'_d) ds + \\
& \int_{L_0} \Delta \varepsilon EA (\underline{x}' \delta x'_d + \underline{y}' \delta y'_d) ds + \int_{L_0} \rho_0 (\underline{\ddot{x}} \delta x_d + \underline{\ddot{y}} \delta y_d) ds + \\
& \int_{L_0} \rho_0 (\Delta \ddot{x} \delta x_d + \Delta \ddot{y} \delta y_d) ds - \int_{L_0} w_0 \delta y_d ds = 0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

식 (4.5)의 선형화된 증분식에서 기지의 항을 등호 오른쪽으로 이항하여 정리하면 최종적인 증분형 운동방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
& \int_{L_0} \underline{\varepsilon} EA (\Delta x' \delta x'_d + \Delta y' \delta y'_d) ds + \int_{L_0} \Delta \varepsilon EA (\underline{x}' \delta x'_d + \underline{y}' \delta y'_d) ds \\
& + \int_{L_0} \rho_0 (\Delta \ddot{x} \delta x_d + \Delta \ddot{y} \delta y_d) ds = \\
& \int_{L_0} w_0 \delta y_d ds - \int_{L_0} \rho_0 (\underline{\ddot{x}} \delta x_d + \underline{\ddot{y}} \delta y_d) ds - \int_{L_0} \underline{\varepsilon} EA (\underline{x}' \delta x'_d + \underline{y}' \delta y'_d) ds
\end{aligned} \tag{4.6}$$

식 (4.6)을 식 (2.18)과 유사한 행렬식 형식으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
& \int_{L_0} (\delta x_d \quad \delta y_d) \rho_0 \begin{pmatrix} \Delta \ddot{x} \\ \Delta \ddot{y} \end{pmatrix} ds + \int_{L_0} (\delta x'_d \quad \delta y'_d) \underline{\varepsilon} EA \begin{pmatrix} \Delta x' \\ \Delta y' \end{pmatrix} ds + \\
& \int_{L_0} (\delta x'_d \quad \delta y'_d) \Delta \varepsilon EA \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} ds = \tag{4.7} \\
& \int_{L_0} (\delta x_d \quad \delta y_d) \begin{pmatrix} 0 \\ w_0 \end{pmatrix} ds - \int_{L_0} (\delta x_d \quad \delta y_d) \rho_0 \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} ds - \int_{L_0} (\delta x'_d \quad \delta y'_d) \underline{\varepsilon} EA \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} ds
\end{aligned}$$

식 (4.7)을 이산화하기 위하여 Rayleigh-Ritz 방법을 사용한다. 케이블의 공간위치와 변형률은 각각 정적 위치와 동적 변위, 정적 변형률과 동적 변형률의 합으로 표현된다.

$$\begin{aligned}
x(s) &= x_s(s) + x_d(s) \\
y(s) &= y_s(s) + y_d(s) \\
\varepsilon(s) &= \varepsilon_s(s) + \varepsilon_d(s)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

여기서 x_s , y_s , ε_s 는 path independency 를 확보하기 위하여 동적변위와 같은 함수공간을 가지도록 혼합 Rayleigh-Ritz 방법으로 해석한 값이다. 케이블의 위치와 변형률을 각각 현 방향과 현 수직방향에 대하여 아래와 같이 가정한다.

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_d &\approx \sum_{i=1}^{nb} A_{xi}(t) \tilde{\phi}_{xi}(s) \\
&= \sum_{i=1}^{nb-2} A_{xi}(t) \sin \frac{i\pi}{L_0} s + A_{x,nb-1}(t) \left(1 - \frac{s}{L_0}\right) + A_{x,nb}(t) \frac{s}{L_0}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_d &\approx \sum_{i=1}^{nb} A_{yi}(t) \tilde{\phi}_{yi}(s) \\
&= \sum_{i=1}^{nb-2} A_{yi}(t) \sin \frac{i\pi}{L_0} s + A_{y,nb-1}(t) \left(1 - \frac{s}{L_0}\right) + A_{y,nb}(t) \frac{s}{L_0} \\
\mathcal{E}_d &\approx \sum_{i=1}^{nb\epsilon} A_{\epsilon i}(t) \tilde{\phi}_{\epsilon i}(s) \\
&= \sum_{i=1}^{nb\epsilon-2} A_{\epsilon i}(t) \sin \frac{i\pi}{L_0} s + A_{\epsilon,nb\epsilon-1}(t) \left(1 - \frac{s}{L_0}\right) + A_{\epsilon,nb\epsilon}(t) \frac{s}{L_0}
\end{aligned}$$

케이블의 위치는 기존의 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법과 동일한 기저함수를 사용하여 가정하였다. 변형률 또한 지점에서 영이 아닌 값을 가지므로 사인함수 뒤에 일차식을 추가하였다. 케이블이 받는 지점운동량을 알고 있으므로 케이블의 동적 변위의 기저함수 중 일차식의 계수인 $A_{x,nb-1}$, $A_{x,nb}$, $A_{y,nb-1}$ 그리고 $A_{y,nb}$ 는 기지의 값이다. 반면, 지점에서의 케이블의 변형률은 알 수 없으므로 변형률의 기저함수의 계수는 모두 미지수이다.

식 (4.9)을 식 (4.7)에 대입하여 정리하면 이산화된 증분형 동적운동 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
(\delta \mathbf{A}_x) & \left[\int_{L_0} \mathbf{N}_x^T \rho_0 \mathbf{N}_x ds \ddot{\mathbf{A}}_x + \int_{L_0} \mathbf{N}_x^T \rho_0 \mathbf{N}_x ds \Delta \ddot{\mathbf{A}}_x + \int_{L_0} \mathbf{B}_x^T \underline{\epsilon} E \mathbf{A} \mathbf{B}_x ds \mathbf{A}_x + \right. \\
& \left. \int_{L_0} \mathbf{B}_x^T \underline{\epsilon} E \mathbf{A} \mathbf{B}_x ds \Delta \mathbf{A}_x + \int_{L_0} \mathbf{B}_x^T \begin{pmatrix} EA \underline{x}' \\ EA \underline{y}' \end{pmatrix} \mathbf{N}_\epsilon ds \Delta \mathbf{A}_\epsilon - \int_{L_0} \mathbf{N}_x^T \begin{pmatrix} 0 \\ w_0 \end{pmatrix} ds \right] = 0 \quad (4.10)
\end{aligned}$$

\mathbf{N}_x 와 \mathbf{N}_ϵ 은 각각 케이블의 변위와 변형률의 기저함수 행렬이고, \mathbf{B}_x 와 \mathbf{B}_ϵ 는 각각의 기저함수 행렬을 무응력 상태에서의 라그랑지 좌표 s 에 대

하여 미분한 것이다.

식 (4.10)를 간단히 정리하면 아래와 같다.

$$(\delta \mathbf{A}_x)[\mathbf{M}\ddot{\mathbf{A}}_x + \mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{A}}_x + \mathbf{K}_x\mathbf{A}_x + \mathbf{K}_x\Delta\mathbf{A}_x + \mathbf{Q}^T\Delta\mathbf{A}_\varepsilon - \mathbf{f}_w] = 0 \quad (4.11)$$

위식에서 사용된 \mathbf{M} , \mathbf{K}_x , \mathbf{Q} , \mathbf{f}_w 는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_{L_0} \mathbf{N}_x^T \rho_0 \mathbf{N}_x ds, \quad \mathbf{K}_x = \int_{L_0} \mathbf{B}_x^T \underline{\varepsilon} E \mathbf{A} \mathbf{B}_x ds, \\ \mathbf{Q} &= \int_{L_0} \mathbf{N}_\varepsilon^T \begin{pmatrix} EA x' & EA y' \end{pmatrix} \mathbf{B}_x ds, \quad \mathbf{f}_w = \int_{L_0} \mathbf{N}_x^T \begin{pmatrix} 0 \\ w_0 \end{pmatrix} ds \end{aligned} \quad (4.12)$$

앞서 2.1 절에서 설명한 바와 같이 지점운동을 받는 케이블의 경우 케이블의 지점에서의 변위를 알고 있으므로, 식 (4.11)를 지점부분과 그 외의 부분으로 나누어 표현할 수 있다. 단, 변형률의 진폭은 모두 미지수이므로 나누어 표현하지 않는다.

$$\begin{aligned} & \left(\delta \mathbf{A}_{x,f}^T \quad \delta \mathbf{A}_{x,s}^T \right) \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ff} & \mathbf{M}_{fs} \\ \mathbf{M}_{sf} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\ddot{\mathbf{A}}_{x,f} \\ \Delta\ddot{\mathbf{A}}_{x,s} \end{pmatrix} + \right. \\ & \left. \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{x,ff} & \mathbf{K}_{x,fs} \\ \mathbf{K}_{x,sf} & \mathbf{K}_{x,ss} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{A}_{x,f} \\ \Delta\mathbf{A}_{x,s} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_f^T \\ \mathbf{Q}_s^T \end{bmatrix} (\Delta\mathbf{A}_\varepsilon) \right\} = \\ & \left(\delta \mathbf{A}_{x,f}^T \quad \delta \mathbf{A}_{x,s}^T \right) \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{w,f} \\ \mathbf{f}_{w,s} \end{pmatrix} - \right. \\ & \left. \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ff} & \mathbf{M}_{fs} \\ \mathbf{M}_{sf} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{A}}_{x,f} \\ \ddot{\mathbf{A}}_{x,s} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{x,ff} & \mathbf{K}_{x,fs} \\ \mathbf{K}_{x,sf} & \mathbf{K}_{x,ss} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{x,f} \\ \mathbf{A}_{x,s} \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

케이블의 지점운동량은 기지의 값이므로 $\Delta\ddot{\mathbf{A}}_{x,s}$, $\Delta\mathbf{A}_{x,s}$ 그리고 $\delta\mathbf{A}_{x,s}$ 는 영이다. 따라서 식 (4.13)은 모든 $\delta\mathbf{A}_{x,f}$ 에 대하여 만족되어야 하므로 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ff}\Delta\ddot{\mathbf{A}}_{x,f} + \mathbf{K}_{x,ff}\Delta\mathbf{A}_{x,f} + \mathbf{Q}_f^T\Delta\mathbf{A}_\varepsilon = \\ \mathbf{f}_{w,f} - \mathbf{M}_{ff}\ddot{\mathbf{A}}_{x,f} - \mathbf{M}_{fs}\ddot{\mathbf{A}}_{x,s} - \mathbf{K}_{x,ff}\mathbf{A}_{x,f} - \mathbf{K}_{fs}\mathbf{A}_{x,s} \end{aligned} \quad (4.14)$$

식 (2.28)과 비교하여 식 (4.14)의 방정식의 개수는 같으나 미지수의 개수가 변형률의 기저함수의 개수만큼 증가하였다. 따라서 미지수가 식의 개수보다 많아지게 되어 유일한 해를 구할 수 없다. 추가의 식은 변위-변형률 관계에 가중잔차법을 적용하여 얻어낼 수 있다.

$$\int_{l_0} \delta\varepsilon EA[\varepsilon - \frac{1}{2}((x')^2 + (y')^2 - 1)]ds = 0 \quad (4.15)$$

시간영역해석을 위하여 식 (4.15)를 시간 $t + \Delta t$ 에 대하여 표현한다.

$$\int_{l_0} \delta\varepsilon^{t+\Delta t} EA[\varepsilon^{t+\Delta t} - \frac{1}{2}((\frac{dx^{t+\Delta t}}{ds})^2 + (\frac{dy^{t+\Delta t}}{ds})^2 - 1)]ds = 0 \quad (4.16)$$

식 (4.4)를 식 (4.16)에 대입하고 고차항을 무시하여 선형화된 증분식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
& \int_{L_0} \delta \varepsilon^{t+\Delta t} EA \left[\varepsilon^{t+\Delta t} - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{dx^{t+\Delta t}}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy^{t+\Delta t}}{ds} \right)^2 - 1 \right) \right] ds = \\
& \int_{L_0} \delta \varepsilon EA \left[(\underline{\varepsilon} + \Delta \varepsilon) - \frac{1}{2} \left((\underline{x}' + \Delta x')^2 + (\underline{y}' + \Delta y')^2 - 1 \right) \right] ds \approx \\
& \int_{L_0} \delta \varepsilon EA \left[\underline{\varepsilon} - \frac{1}{2} \left((\underline{x}')^2 + (\underline{y}')^2 - 1 \right) \right] ds + \int_{L_0} \delta \varepsilon EA \Delta \varepsilon_d ds - \\
& \int_{L_0} \delta \varepsilon EA (\underline{x}' \Delta x' + \underline{y}' \Delta y') ds = 0
\end{aligned} \tag{4.17}$$

식 (4.9)를 식 (4.17)에 대입하여 이산화한다.

$$\begin{aligned}
& (\delta \mathbf{A}_\varepsilon)^T \left[\int_{L_0} \mathbf{N}_\varepsilon^T EA \left(\underline{\varepsilon} - \frac{1}{2} \left((\underline{x}')^2 + (\underline{y}')^2 - 1 \right) \right) ds + \right. \\
& \left. \int_{L_0} \mathbf{N}_\varepsilon^T EAN_\varepsilon ds (\Delta \mathbf{A}_\varepsilon) - \int_{L_0} \mathbf{N}_\varepsilon^T \begin{pmatrix} EA \underline{x}' & EA \underline{y}' \end{pmatrix} \mathbf{B}_x ds (\Delta \mathbf{A}_x) \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.18}$$

식 (4.18)를 간단히 정리하면 다음과 같다.

$$(\delta \mathbf{A}_\varepsilon)^T [\mathbf{Q}(\Delta \mathbf{A}_x) - \mathbf{K}_\varepsilon(\Delta \mathbf{A}_\varepsilon) - \mathbf{f}_\varepsilon] = 0 \tag{4.19}$$

식 (4.19)에 사용된 \mathbf{K}_ε 과 \mathbf{f}_ε 는 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_\varepsilon &= \int_{L_0} \mathbf{N}_\varepsilon^T EAN_\varepsilon ds \\
\mathbf{f}_\varepsilon &= \int_{L_0} \mathbf{N}_\varepsilon^T EA \left(\underline{\varepsilon} - \frac{1}{2} \left((\underline{x}')^2 + (\underline{y}')^2 - 1 \right) \right) ds
\end{aligned} \tag{4.20}$$

식 (4.19)을 지점 부분과 지점 이외의 부분으로 나누어 표현할 수 있다.

$$(\delta \mathbf{A}_\varepsilon)^T \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_f & \mathbf{Q}_s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{A}_{x,f} \\ \Delta \mathbf{A}_{x,s} \end{pmatrix} - [\mathbf{K}_\varepsilon] (\Delta \mathbf{A}_\varepsilon) \right\} = (\delta \mathbf{A}_\varepsilon)^T (\mathbf{f}_\varepsilon) \quad (4.21)$$

변형률의 모든 진폭은 미지수이므로 진폭의 변분형인 $\delta \mathbf{A}_\varepsilon$ 의 모든 요소는 영이 아니다. 따라서 식 (4.19)의 모든 $(\delta \mathbf{A}_\varepsilon)^T$ 에 대하여 아래의 식이 성립되어야 한다.

$$\mathbf{Q}_f (\Delta \mathbf{A}_{x,f}) - \mathbf{K}_\varepsilon (\Delta \mathbf{A}_\varepsilon) = \mathbf{f}_\varepsilon \quad (4.22)$$

케이블의 평형방정식과 변위-변형률 관계를 weak form 으로 반영하여 식 (4.14)과 식 (4.22)의 두개의 식을 얻었다. 두 식을 모아 하나의 행렬식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ff} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \ddot{\mathbf{A}}_{x,f} \\ \Delta \ddot{\mathbf{A}}_\varepsilon \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{x,ff} & \mathbf{Q}_f^T \\ \mathbf{Q}_f & -\mathbf{K}_\varepsilon \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{A}_{x,f} \\ \Delta \mathbf{A}_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_x \\ \mathbf{f}_\varepsilon \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

위식의 \mathbf{f}_x 는 아래와 같다.

$$\mathbf{f}_x = \mathbf{f}_{w,f} - \mathbf{M}_{ff} \ddot{\mathbf{A}}_{x,f} - \mathbf{M}_{fs} \ddot{\mathbf{A}}_{x,s} - \mathbf{K}_{x,ff} \mathbf{A}_{x,f} - \mathbf{K}_{fs} \mathbf{A}_{x,s} \quad (4.24)$$

식 (4.23)의 모든 행렬은 대칭행렬이 됨을 확인할 수 있다. 식을 간단히 정리하기 위하여 식의 아랫부분, 즉 식 (4.22)의 $\Delta \mathbf{A}_{x,f}$ 를 제외한 모든 항을 우변으로 넘겨 식 (4.14)에 대입한다.

$$\Delta \mathbf{A}_\varepsilon = \mathbf{K}_\varepsilon^{-1}(\mathbf{Q}\Delta \mathbf{A}_{x,f} - \mathbf{f}_\varepsilon) \quad (4.25)$$

구하여진 증분형 진폭 벡터 $\Delta \mathbf{A}_{x,f}$ 와 $\Delta \mathbf{A}_\varepsilon$ 의 관계식 (4.25)를 식 (4.13)에 대입하여 정리한다.

$$\mathbf{M}_{ff}\Delta \ddot{\mathbf{A}}_{x,f} + \mathbf{K}_{x,ff}\Delta \mathbf{A}_{x,f} + \mathbf{Q}_f^T \mathbf{K}_\varepsilon^{-1} \mathbf{Q}_f \Delta \mathbf{A}_x = \mathbf{f}_{x,f} + \mathbf{Q}_f^T \mathbf{K}_\varepsilon^{-1} \mathbf{f}_\varepsilon \quad (4.26)$$

위식을 간단히 정리하여 최종적인 증분형 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{M}_{ff}\Delta \ddot{\mathbf{A}}_{x,f} + \mathbf{K}_{ff}\Delta \mathbf{A}_{x,f} = \Delta \mathbf{f} \quad (4.27)$$

식 (4.27)에서 사용된 \mathbf{K}_{ff} 와 $\Delta \mathbf{f}$ 는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ff} &= \mathbf{K}_{x,ff} + \mathbf{Q}_f^T \mathbf{K}_\varepsilon^{-1} \mathbf{Q}_f \\ \Delta \mathbf{f} &= \mathbf{f}_{x,f} + \mathbf{Q}_f^T \mathbf{K}_\varepsilon^{-1} \mathbf{f}_\varepsilon \end{aligned} \quad (4.28)$$

Newmark- β 과 같은 수치적분법을 이용하여 각 단계별로 식 (4.27)의 $\Delta \ddot{\mathbf{A}}_{x,f}$ 와 $\Delta \mathbf{A}_{x,f}$ 를 구하고, 이를 식 (4.25)에 대입하여 $\Delta \mathbf{A}_\varepsilon$ 구한다. 해가 수렴할 때 까지 식 (4.27)를 반복적으로 적용하여 시간영역해석을 수행한다.

4.2 정적해석 적용

그림 4.1 은 2.2 절의 예제를 혼합 Rayleigh-Ritz 방법으로 정적해석한 케이블의 장력이다. 세 가지 경우의 지점운동에 대하여 해석된 장력이 탄성현수선 요소를 통해 계산된 장력과 거의 같은 결과를 보이고 있으며 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법의 결과에서 보이던 라그랑지 좌표 s 에 대한 장력 곡선의 oscillation 이 사라졌음을 확인할 수 있다.

혼합 Rayleigh-Ritz 방법은 결과의 path independency 를 확보하기 위하여 초기평형상태 역시 혼합 Rayleigh-Ritz 방법으로 해석하여 적용한다고 하였다. 그 결과값이 Path independency 를 확보하고 있음을 확인하기 위하여 40 m ~ 60 m 구간의 장력 그래프를 확대하여 그림 4.2 에 그렸다. 세 가지 경우에 대한 장력 곡선이 정확히 일치함을 확인할 수 있다. 혼합 Rayleigh-Ritz 방법에 의한 장력이 탄성현수선 요소의 장력에 비해 약 0.03 kN 가량 작게 해석되었는데 이는 근사 해석을 하였기 때문에 나타난 오차로 판단된다.

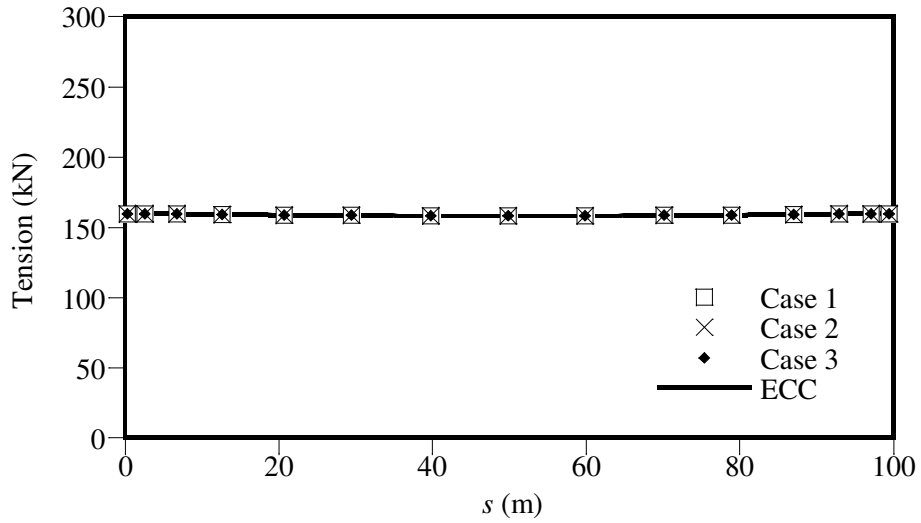


그림 4.1 라그랑지 좌표 s 케이블의 장력 분포

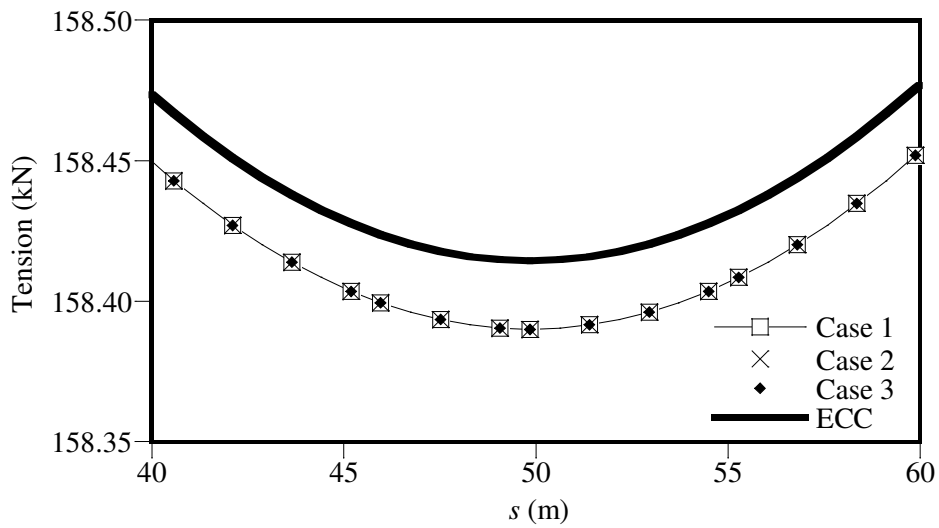


그림 4.2 케이블의 중앙 부근의 장력 분포

5. 동적해석 예제

앞의 2 장, 3 장 그리고 4 장에서는 지점운동을 받는 케이블의 정적해석을 통하여 기존에 제안되었던 탄성현수선 요소의 초기값을 이용한 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법의 문제점을 찾아내고, 이를 해결하기 위하여 본 논문에서 제안한 Rayleigh-Ritz 방법을 사용한 초기평형상태 해석과 혼합 Rayleigh-Ritz 방법의 정적해석에서의 정확성을 검증하였다. 이 장에서는 제안된 방법을 동적해석에 적용하여 그 결과의 타당성을 검증한다.

5 장의 해석에서 시간영역 해석을 위한 시간 간격은 1/100 초를 사용하였다. 각 시간 단계에서 반복계산에 의한 수렴 기준은 다음과 같다.

$$\varepsilon = \frac{\|\Delta \mathbf{u}_k^{t+\Delta t}\|}{\|\mathbf{u}^{t+\Delta t}\|} \leq 10^{-8} \quad (2.27)$$

$\mathbf{u}^{t+\Delta t}$ 는 $t+\Delta t$ 시간 단계에서 계산된 총 변위이고, $\Delta \mathbf{u}_k^{t+\Delta t}$ 는 k 번째 반복계산으로부터 구한 변위이다.

5.1 지점운동을 받는 케이블

지점운동을 받는 케이블의 동적해석에 사용된 예제 구조물은 그림 5.1에 제시되어 있다. 표 5.1에는 케이블의 물성치가 표시되어 있다. 지점운동은

$s=0$ 에 가해지며 그림 5.2는 케이블이 받는 지점 변위를 보이고 있다. 지점운동은 케이블이 느슨해지는 방향으로 서서히 가해지기 시작하여 1.5 초에 걸쳐 총 0.4 m를 움직인 후 1.5 초에 걸쳐 초기 지점 위치로 돌아온다.

그림 5.3 과 그림 5.4 에 사용된 범례의 괄호 안에 있는 숫자의 의미는 변위의 가정에 사용된 sine 함수의 개수이다. 혼합 Rayleigh-Ritz 방법을 사용한 경우 두개의 숫자를 괄호 안에 m-n 과 같이 넣어 m 과 n 이 각각 변위와 변형률의 가정에 사용된 sine 함수의 개수를 나타내도록 하였다. 초기 평형상태를 탄성현수선 요소를 사용하여 해석하였을 경우, 범례의 괄호 안에 ECC static state 를 포함시켰다. 초기 평형상태를 Rayleigh-Ritz 로 해석한 경우에는 괄호 안에 기저함수의 개수 이외의 특별한 표시를 하지 않았다. 범례의 괄호 안의 표시는 논문을 읽음에 있어서의 간편한 인식을 위하여 글에도 사용하도록 하겠다.

정적해석에서는 탄성현수선 요소를 통해 정해를 구해낼 수 있기 때문에 제안된 방법의 정확성을 손쉽게 검증할 수 있었다. 그러나 케이블의 동적거동에서는 정해를 구해낼 수 없다. 앞의 정적해석을 통하여 밝힌 바와 같이 변위기반의 Rayleigh-Ritz 방법의 변위는 정해와 일치하나 장력은 변위의 변화에 대하여 민감하게 변화하기 때문에 장력의 함수 공간이 충분히 커질 수 있도록 sine 100 개와 1 차 함수를 변위의 기저함수로 사용한 변위기반 Rayleigh-Ritz 방법의 해를 정해와 가까운 해로 판단하고 이를 기준으로 삼아 동적해석 결과들을 비교하였다.

그림 5.3 은 지점운동이 가해지는 위치인 $s=0$ 에서의 시간에 따른 케이블의 장력 변화를 도시한 그래프이다. 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법(ECC,20)의 시간에 따른 장력은 100 개의 sine 함수를 사용한 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법의 장력에 비하여 대부분의 시간에 걸쳐 100 kN 이상의 차이를 보이고 있다. Rayleigh-Ritz 방법으로 초기평형상태를 해석한 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법(20)의 장력은 기존의 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법(ECC)에 비하여 100 개의 sine 함수를 사용한 값의 오차가 적으나 그 위, 아래를 오르내리는 높은 주파수의 파형을 포함하고 있다. 혼합 Rayleigh-Ritz 방법의 장력은 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법(100)의 장력과 거의 일치한다. 적은 양의 기저함수를 사용하여도 정확한 해석을 했음을 확인할 수 있다.

그림 5.4 는 시간 0.3 초에서의 라그랑지 좌표 s 에 대한 장력을 도시하고 있다. 변위 기반의 Rayleigh-Ritz(ECC)의 장력은 정적해석의 결과와 마찬가지로 정확히 계산되지 않았으며, 장력 곡선이 oscillation 을 가지고 있다. 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법(20)의 결과는 초기평형상태를 탄성현수선 요소로 해석을 한 결과에 비하여 지점 부근에서의 장력의 오차가 절반가량 줄었으나 케이블의 중앙부로 갈수록 장력의 오차를 줄이지 못하였고 두 장력의 크기는 거의 일치하는 경향을 보인다. 반면 혼합 Rayleigh-Ritz 방법의 장력은 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법(100)의 해와 거의 일치하고 있으며, 곡선에 보이는 작은 oscillation 도 나타나지 않고 있다.

표 5.1 동적해석 예제로 사용된 케이블의 물성치

종류	단위길이당 자중	탄성 계수	단면적	무응력 길이
크기	439.39 N / m	200 Gpa	53.5 cm ²	99.7 m

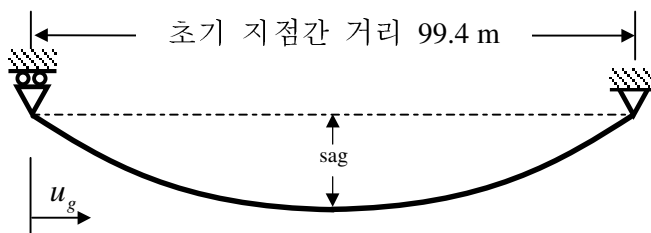


그림 5.1 동적해석을 위한 예제 케이블의 형상

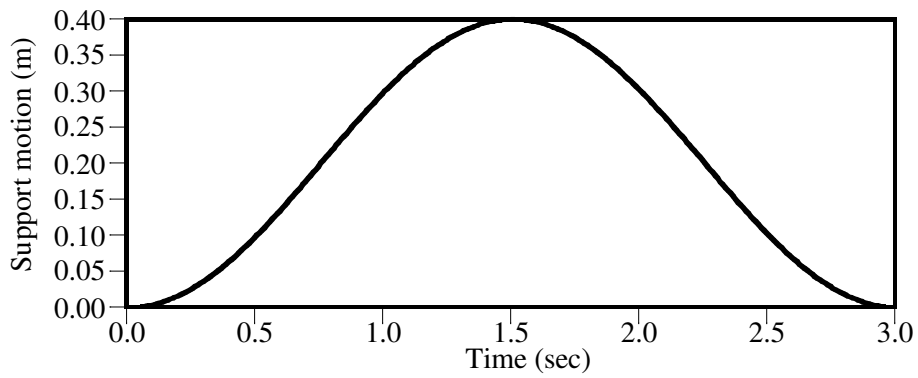


그림 5.2 $s=0$ 에 가해지는 지점변위 u_g

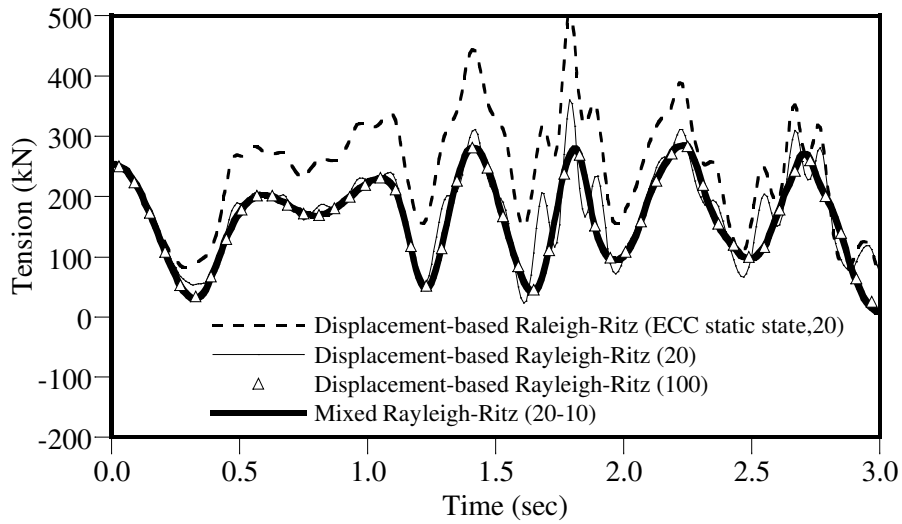


그림 5.3 $s=0$ 에서의 시간에 따른 장력 변화

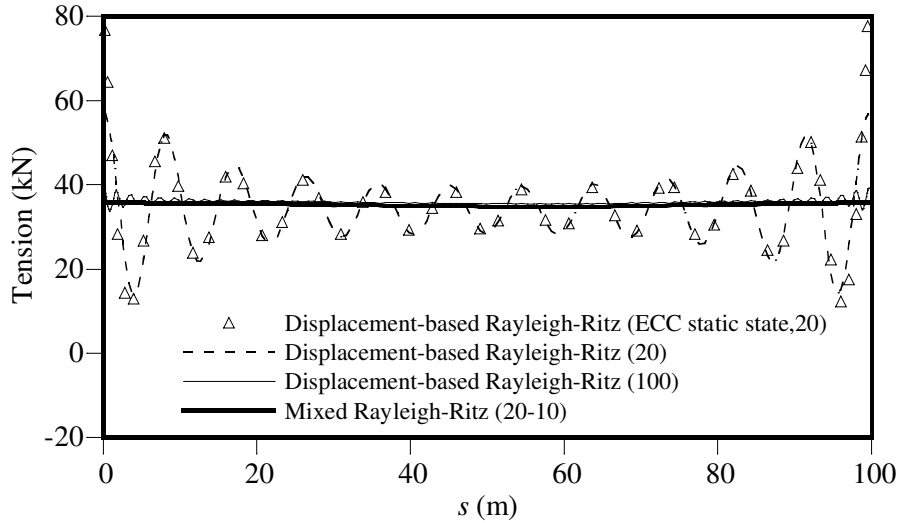


그림 5.4 $t=0.3$ 초에서의 장력 분포

5.2 모델링된 안정화 케이블

서론에서 기술한 바와 같이 이 논문은 시공 단계에 있는 사장교를 지지하는 내풍안정화 케이블의 동적해석에 관한 선행연구로서의 목적을 지니고 있다. 따라서 3장과 4장에서 제안된 방법의 안정화 케이블에의 적용 가능성을 검토해보기 위하여 안정화 케이블이 연결된 가설 중 사장교 시스템을 간단히 모델링하여 제안된 방법을 적용하여 보았다. 사장교가 받는 난류에 의한 바람하중은 예측하기 어렵고 이에 따른 안정화 케이블의 거동도 복잡하게 나타낼 수 있기 때문에 모델링된 구조물이 받는 하중에 특수성을 주고자 parametric excitation 형태의 하중을 적용하였다. Parametric excitation 이란 시스템의 고유진동수의 2 배의 가진진동수를 가지는 가진을 뜻하며, Lilien 등은 케이블의 지점이 고유진동수의 2 배의 진동수로 가진될 때 케이블의 최대 수직 진폭이 가장 크게 나타나고, 그 값이 가진진폭의 100 배 가량이 됨을 확인하였다[6]. 따라서 parametric excitation 이 모델링된 구조물에 가해지는 특수한 하중으로써 적합하다고 판단되었다.

그림 5.1 은 내풍안정화 케이블이 설치되어있는 가설 중의 팬 타입 사장교를 간단히 나타내고 있다. 실제 구조물의 해석을 하기 위해서는 첨단화되고 정밀한 모델링과 해석기법이 필요하나 이는 본 연구의 범위를 벗어난다. 본 논문에서는 제안된 방법을 실제 구조물의 해석에 적용함에 있어서 그 가능성을 확인하고자 시스템을 최대한 간단히 모델링하였다. 그림

5.2 는 예제 구조물로써 스프링-질량 시스템으로 모델링된 시공 중의 안정화 케이블을 나타내고 있다. 여기서 케이블, 스프링의 강성 그리고 집중질량 m 은 각각 그림 5.1 의 안정화 케이블, 사장교의 강성 그리고 사장교의 전체질량을 대체한다. 예제 구조물의 정적평형상태의 케이블의 지점간 거리는 그림 5.2 에 표시된 바와 같이 110.258 m 이고, sag 비는 1/200 이다. 예제 구조물의 주요 물성치는 표 4.2 에 제시하였다.

구조물은 집중질량에 외부하중 $P_{ex}(t)$ 가 아래와 같은 조화하중의 형태로 가진된다.

$$P_{ex}(t) = P_0[1 - \exp(-2\pi\alpha ft)]\sin(2\pi f_{ex}t) \quad (5.1)$$

대괄호 안의 항은 해석 결과의 수치적 불안정성을 피하기 위해 단계적으로 가진하기 위하여 포함된 항이다. 본 연구에서는 $\alpha = 0.1$ 을 사용하였다. 대괄호 안의 항은 수 주기 후 1 이 된다. f 는 가진 진동수, P_0 는 가진 진폭, t 는 시간을 의미한다. 가진 진동수 f 는 parametric excitation 을 가하기 위해 고유치 해석을 통해 구한 시스템의 1 차 고유진동수의 2 배를 사용하였고, 가진 진폭 P_0 는 100 kN 을 사용하였다.

그림 5.7 은 케이블 중앙에서의 수직 변위의 시간에 따른 변화를 도시하고 있다. 케이블은 가진을 받는 초반에는 적은 진폭으로 수직 진동하지만 약 7 초부터 진폭이 증가하여 2 m 에 가까운 진폭을 가지게 되어 parametric excitation 의 특성을 보이고 있다. 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법

과 혼합 Rayleigh-Ritz 방법의 수직 변위는 거의 일치하고 있다. 2 장 2 절의 정적해석시 Rayleigh-Ritz 방법의 케이블의 형상이 탄성현수선 요소의 정해와 일치하는 것과 같은 맥락으로 판단된다.

시간에 따른 집중질량에서의 케이블의 장력은 그림 5.8 에 나타나 있다. 변위 결과와는 달리 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법의 장력과 혼합 Rayleigh-Ritz 방법의 장력은 수직 변위가 증폭되는 7 초부터 조금씩 차이를 보이기 시작한다. 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법의 시간에 따른 장력 변화 곡선은 그림 5.3 의 결과와 같이 두드러지지 않는 않지만 역시 위, 아래로 오르내리는 작은 파형을 가지고 있음을 알 수 있다.

그림 5.9 는 4.87 초에서의 라그랑지 좌표 s 에 따른 장력 분포를 도시하고 있다. 5 장 1 절의 예제와 비슷한 결과가 나왔으며 혼합 Rayleigh-Ritz 방법으로 해석한 결과는 oscillation 을 가지지 않으며 변위의 기저함수 100 개를 사용한 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법의 해와 그 크기가 일치하는 경향을 보이고 있다.

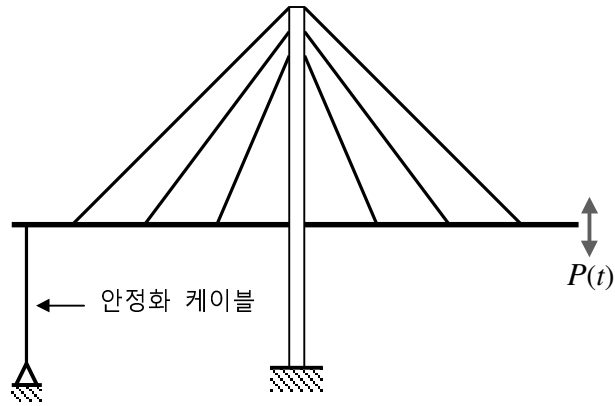


그림 5.5 안정화 케이블이 설치된 시공 단계에 있는 사장교

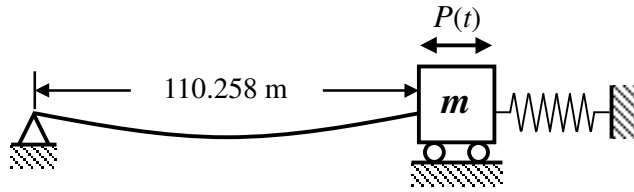


그림 5.6 예제구조물: 모델링된 시공 중의 사장교와 안정화 케이블

표 5.2 예제 구조물의 물성치

케이블 탄성계수 (Gpa)	케이블 유효 단면적 (cm ²)	케이블 자중 (N/m)	케이블 무응력 길이 (m)	스프링 탄성계수 (kN/m)	집중 질량 m (ton)
210	82.6	635.873	110.195	5000	375

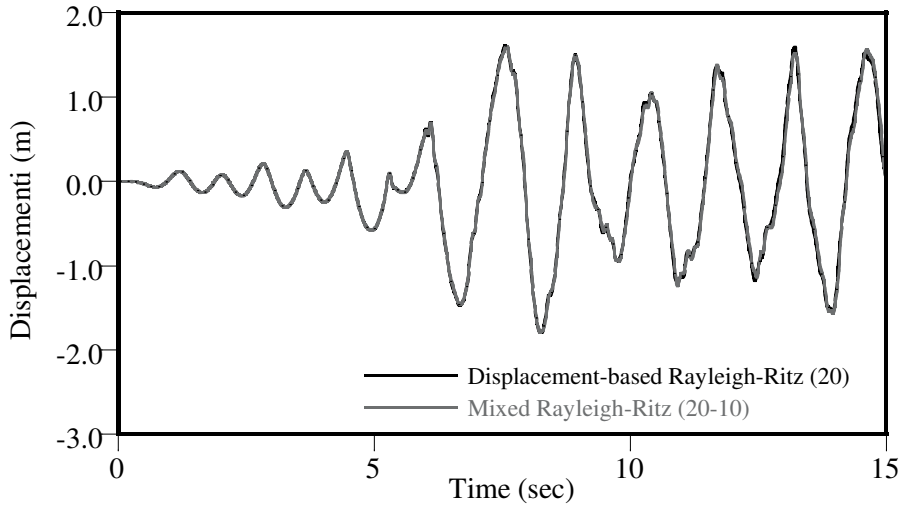


그림 5.7 $s = L_0/2$ 에서의 시간에 따른 케이블의 수직 진동 형상

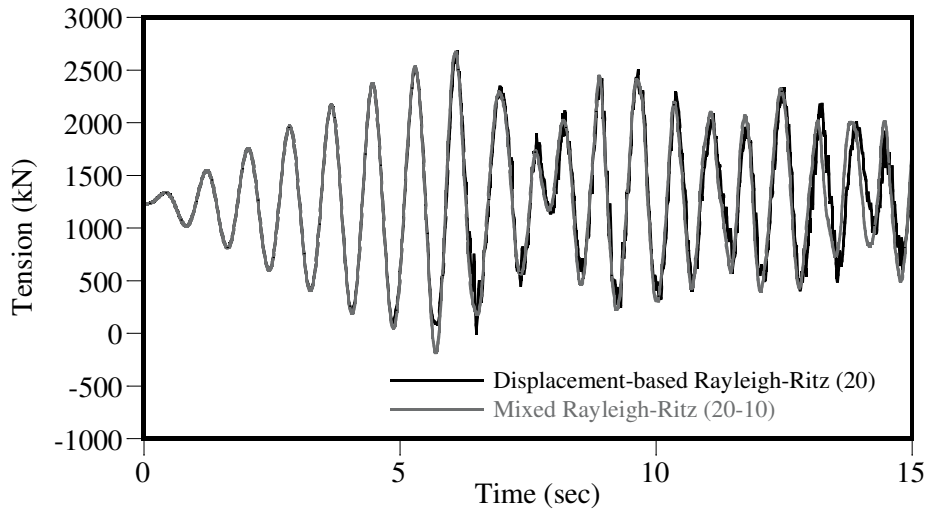


그림 5.8 $s = L_0$ 에서의 시간에 따른 케이블의 장력 변화

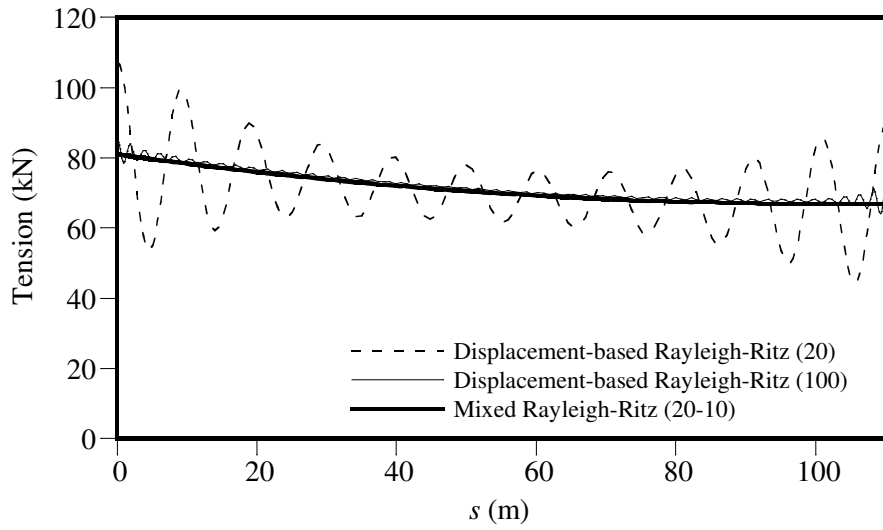


그림 5.9 $t = 4.87$ 초에서의 케이블의 장력 분포

6. 결론

이 논문에서는 지점운동을 받는 케이블의 정확한 동적해석을 위하여 초기 평형상태를 Rayleigh-Ritz 방법을 이용하여 해석할 것과 변형률을 변위와 다른 함수공간에서 정의하는 혼합 Rayleigh-Ritz 방법을 제안하였다.

케이블의 초기평형상태를 탄성현수선 요소를 적용하여 해석한 후 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법으로 동적해석을 수행하는 기존에 연구되었던 방법을 지점운동을 받는 케이블의 해석에 적용하였다. 정해와의 비교와 개선 사항의 마련을 목적으로 정적해석을 수행하였다. 그 결과 케이블의 장력이 path independency 를 확보하지 못하며, 공간상에서 장력분포의 부정확함이라는 두 가지의 문제점이 나타났다. 따라서 이 두 가지 문제점의 해결을 목표로 연구를 수행하였다.

케이블의 동적거동은 비선형, 탄성 거동이므로 케이블 문제는 탄성체 문제에서의 결과의 path independency 를 항상 확보하여야 한다. Path independency 의 확보를 위하여 케이블의 초기 형상과 변위의 기저함수를 일치하도록 초기평형상태 또한 Rayleigh-Ritz 방법으로 해석할 것을 제안하였다.

케이블은 장력이 변위에 대한 복잡한 함수로 정의되기 때문에 장력이 변위의 변화에 매우 민감하고, 가정된 변위의 기저함수를 이용하여 장력을 정확히 표현하기 어렵다는 것을 밝혔다. 이러한 이유로 변위-변형률 관계

를 정확히 만족시키지 못하지만 변형률의 공간상의 분포를 정확히 표현할 수 있는 변형률의 기저함수를 변위와 독립적으로 가정하는 혼합 Rayleigh-Ritz 방법을 제안하였다. 평형방정식에 가중잔차법을 적용하여 지점운동을 받는 케이블의 가상일의 원리를 유도하였다. 독립적으로 가정된 변위와 변형률의 함수가 변위-변형률 관계를 완벽히 만족시키지 못하므로 변위-변형률 관계에 가중잔차법을 적용하였다. 케이블의 시간영역 해석을 위하여 유도된 식을 증분식으로 표시한 후 두 식을 혼합하여 최종적인 선형화된 증분형 운동방정식을 유도하였다.

제안된 방법을 단순 지점운동을 받는 케이블의 동적해석에 적용하였다. 기저함수 100 개를 사용한 변위 기반의 Rayleigh-Ritz 방법의 해와 비교하여 해의 타당성을 검증하였고, 제안된 방법의 시간상의 효율성을 증명하였다. 또한 제안된 방법을 시공 단계 중의 사장교에 설치된 내풍안정화 케이블을 간단히 모델링한 스프링-질량 시스템의 동적해석에 적용하여 타당성을 검증함으로써 안정화 케이블에 관한 연구의 선행연구로서의 가능성을 확인하였다.

이 연구는 내풍안정화 케이블의 연구에 대한 선행연구의 목적으로 시작되었다. 내풍안정화 케이블은 지면에 수직으로 설치되지만 이 연구에서 제안된 방법으로는 지면에 수직인 케이블에 대한 동적해석을 수행할 수 없다. 따라서 안정화 케이블의 동적해석을 위하여 수직 케이블의 동적해석에 관한 추후연구가 필요할 것으로 생각한다. 더불어 혼합 Rayleigh-Ritz 방법

에서는 변위-변형률 관계를 weak form 으로 대입하여 이 관계를 완벽히 만족시키지 못한다. 이는 자연 범칙에 어긋나는 일이라 할 수 있다. 따라서 변위-변형률 관계를 완벽히 만족시키면서 지점운동을 받는 케이블을 정확히 해석할 수 있는 방법에 대한 추후연구가 필요할 것이라 생각한다.

참고문헌

- [1] Irvine, H.M. and Caughey, T.K. (1974), “The Linear Theory of Free Vibrations of Suspended Cable”, *Proceedings of the Royal Society*, London, England, Series A, Vol.341, pp. 299-315
- [2] 안상섭. (1997), 경사케이블의 자유진동 특성과 동적 강성행렬을 이용한 케이블 구조물의 해석, 공학박사 학위논문, 서울대학교
- [3] 최성원, 김호경. (2007), “버페팅 해석에 의한 가설 중 사장교의 동적 내풍안정화 설계 절차”, 대한토목학회논문집, 대한토목학회, 제 27 권, 제 4A 호, pp. 493-503
- [4] 안상섭, 박민석. (1998), 지점운동에 의한 케이블 공진과 길이조절에 의한 제진대책 연구, 한국도로공사 도로연구소
- [5] 정길제, 박연철, 김현겸, 이해성. (2007), 케이블의 동적해석을 위한 가상일 원리의 정식화, 교량설계핵심기술연구단
- [6] Lilien, J.L. and Pinto Da Costa, A. (1994), “Vibration Amplitudes Caused by Parametric Excitation of Cable Stayed Structures”, *Journal of Sound and Vibration*, 174(1), pp. 69-90
- [7] Chopra, A.K, *Dynamics of Structures*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River. NJ
- [8] Cook, R.D, Malkus, D.S, Plesha, M.E. and Witt, R.J, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4th ed., Wiley, John Wiley & Sons Inc.

ABSTRACT

Aerodynamic stabilizing cables have been introduced for reducing oscillation of erected cable-stayed bridges by wind loads because stiffness of the under-construction bridge constructed by a balanced cantilever method is less compared with that of completed one. The trembling girder in wind loads can apply large support motions to stabilizing cables. Thus precise dynamic analysis considering effect of support motions is required. This study was performed to develop a precise dynamic analysis method for cables subjected to support motions.

Previous method is displacement-based Rayleigh-Ritz method which uses solutions of initial equilibrium state by ECC(elastic catenary cable) analysis for initial values and using sine functions for discretizing dynamic displacement. This thesis proves that the previous method does not satisfy “path independency in elastic problem” and does not give precise value of tension.

It is proposed that initial equilibrium state be analyzed by Rayleigh-Ritz method assuming cable position of the state using same function space with dynamic displacement to satisfy path independency. Mixed Rayleigh-Ritz method assuming displacement and strain respectively is also proposed to obtain precise value of tension. The equilibrium equations and strain-displacement relationship are imposed by weak form and combined together. Newmark- β method is applied to perform time domain analysis.

Dynamic analysis of a cable subjected to support motions is performed by

mixed Rayleigh-Ritz method. It is also applied to a simple model of the stabilizing cable and the erected cable-stayed bridge. Its results are compared with the results of the displacement-based formulation using 100 sine function to demonstrate the validity and the effectiveness of the proposed method.

Keywords:

Cable, Support motion, Nonlinear analysis, Initial equilibrium state, Mixed Rayleigh-Ritz method, Weak form

Student Number: 2008-21034

감사의 글

이 논문이 완성되기까지 열과 성을 다하여 지도해 주신 이해성 교수님께 진심으로 감사드립니다. 학부와 대학원에서 가르침을 베푸신 고현무 교수님, 김재관 교수님, 조재열 교수님, 김호경 교수님께 깊이 감사드립니다.

저의 석사 생활 2년 동안 항상 지켜봐주시고 도와주신 연구실 형님들께 감사인사를 전합니다. 연구실의 대들보 승근형, 잠도 제대로 못 주무시며 발표 준비 도와주신 윤화형, 연구실을 든든히 지켜주시고 저의 논문 연구에 **많은 도움**을 주신 길제형 감사합니다. 앞으로 연구실을 훌륭하게 이끌어 나가실 근원형, 재밌는 우리형 승한형, 형언할 수 없는 개그하시는 종서형 정말 감사합니다.

32 동에서 함께 공부하고 고뇌하다 나를 두고 떠나가신 연구실 동기형들께도 감사인사를 전합니다. 현수형, 광연형 감사합니다. 그리고 먼 곳 와서 고생하는 바쉬르, 감사하고 논문연구에 행운이 있길 빕니다(Thanks Bashir. Good luck). 6개월 동안 연구로 지친 저를 즐겁게 해주신 규환형, 새로 들어오신 진호형께도 고마움을 전합니다. 모두 언제나 건강하고 행복하십시오.

마지막으로 그 누구보다 저에게 큰 힘이 되었던 친척과 가족들에게 고마움을 전하며 이 논문을 바칩니다.