공학석사학위논문

Bayesian Theory 를 적용한 손상 탐지에서의 L_1-정규화 기법

2004 년 2 월

서울대학교 대학원
지구환경시스템공학부

박 재 형

Bayesian Theory를 적용한 손상 탐지에서의 L_1-정규화기법

L_1-Regularization Technique in System Identification Based on Bayesian Theory

지도교수 이 해 성

이 논문을 공학석사학위논문으로 제출함

2003 년 10 월

서울대학교 대학원

지구환경시스템공학부

박 재 형

박재형의 공학석사학위 논문을 인준함

2003 년 12 월

위 원 장 ________________

부위원장 ________________

위 원 ________________

초록

확률론적 관점에서의 SI는 임의의 측정값이 주어졌을 때 시스템 변수에 대한 조건부 확률분포에서 maximum likelihood에 해당하는 시스템 변수를 결정하는 과정으로 정의된다. 이 과정에서 주어진 조건부 확률 분포를 정식화하기 위한 방법으로 Bayesian Theory를 도입하였다. 이 조건부 확률 분포는 측정 오차, 모델링 오차, 그리고 시스템변수에 대한 세 가지 확률 분포의 조합으로 결정된다.

시스템 변수에 대한 확률 분포는 결정론적 SI 기법에서의 정규화와 같은 역할을 한다. 정규분포와 symmetric exponential 분포를 이용함으로써 L_2-정규화 함수와 L_1-정규화 함수의 효과를 볼 수가 있다.

확률론적 SI 기법에서는 기존의 결정론적 SI 기법과는 달리 모델링 오차를 측정 오차에서 분리하여 독립적으로 필터링하는 것이 가능하다. 이를 위해 측정 오차와 모델링 오차를 나타내는 오차 벡터를 정의하며 이 오차 벡터의 covariance 행렬을 구성하여 각각의 오차를 필터링 하게 된다. 또한 모델링 오차의 상대적인 크기에 따라서 근사식과 정식을 도입하여 얻는 효과가 달라지게 된다. 수치 해석 예제를 통해 이러한 모델링 오차의 필터링 효과를 검증한다.

주요어

확률론적 SI 기법, Bayesian Theory, L_1-정규화, L_2-정규화, 정규분포, symmetric exponential 분포, 측정오차, 모델링 오차, covariance 행렬.

학번 : 2002-21289

목차

그림목차

1. 서론

토목구조물에는 설계시 고려하지 못했던 과도한 하중이나 환경적 요인, 구조적·재료적 결함 등 다양한 요인에 의해 구조물의 사용기간 중 손상이 발생할 수 있다. 구조물에서 국부적으로 발생한 손상이라 할지라도 조기에 발견하여 적절한 보수를 수행하지 않으면 국부적인 손상이 전파하여 구조물 전체의 파괴를 초래할 수 있다. 대형 구조물의 붕괴사고는 필연적으로 많은 인적·물적 손실을 초래하게 되고 단순히 구조물의 붕괴라는 공학적인 측면을 넘어 전 사회적인 불안을 야기하게 된다. 따라서 사회 기반 시설의 경제적이고 안전한 유지 보수를 위하여 이론적으로 잘 정립된 상태 평가 기법이 절실히 요구된다.

SI (System Identification)에 기초한 구조물의 손상 탐지 기법이 최근 20 년간 국내외의 여러 연구자에 의하여 진행되어 왔다. SI 에 기초한 손상탐지 기법은 근본적으로 역해석 문제이기 때문에 많은 불안정성을 내포하고 있으며 이러한 불안정성을 적절한 기법을 통하여 안정화하지 않는 한 실제 문제에 적용하기가 어렵다. 최근 SI 기법에 의한 손상탐지 기법의 수학적 불안정성에 대한 기초적인 연구가 집중적으로 이루어져 불안정성의 원인과 해결책이 제시되었고, 이러한 불안정성의 제거에 관한 연구가 지속적으로 수행되어 많은 새로운 방법이 시도되고 있다.

기존의 결정론적 SI 기법의 경우 구조물의 외부 경계면에 위치한 측정점에서 측정된 변위와 수학적 모델에 의하여 계산된 변위의 최소 자승 오차를 목적함수로 설정하고 이 목적함수를 최소화 함으로써 시스템 변수를 추정하였다. 이와 같은 최적화 문제는 시스템 변수에 대한 비선형 최적화 문제로 선형화시킨 이차 종속 문제를 반복적으로 풀어서 최적해를 구한다. 그러나 이러한 SI 문제는 측정치의 빈곤함에 의한 해의 비유일성과 측정값에 포함되어 있는 각종 오차에 의한 해의 불연속성을 특징으로 갖는다.

이러한 SI 문제의 불안정성을 해소하기 위해 SI 문제의 안정화 기법이 제안되었다. 결정론적 SI 기법의 경우 적분식으로 주어지는 해의 정규 조건 (Regularity condition)을 사용하여 해가 존재하는 공간을 정의하고, 주어진 정규조건을 최적화 과정에 부가적인 조건으로 사용하여 SI 에서의 불안정성을 조절한다. 대표적인 안정화 기법으로는 Tikhonov 정규화 기법과 절단 특이치 분해법 (Truncated Singular Value Decomposition Method; TSVD)이 있다. 여기서 적절한 정규화 정도를 조절하여야만 물리적·수학적으로 의미있는 해를 얻을 수 있다.

기존의 안정화 기법에서 해의 정규조건을 정의하기 위하여 주로 구조물 강성 변수의 L_2-norm 을 사용해왔다. 그러나, L_2-norm 을 정규조건으로 사용한 SI 기법에서는 L_2-norm 의 특성 때문에 해의 분해 성능이 저하되는 단점이 있다. 즉, 정규조건에 의하여 해의 불안정성은 제거되지만 그 대신에 손상부재의 손상도 역시 작게 평가되어 손상부재를 정확히 분리하기가 어려워진다. 따라서 손상탐

지를 목적으로 하는 SI 기법의 경우 정규조건으로 L_2-norm 대신 L_1-norm 을 도입하면 보다 효율적인 구조물의 손상탐지가 가능하다.

기존의 결정론적 SI 기법이 오차함수의 최소화를 이용하여 시스템 변수를 추정하였다면 확률론적 SI 기법은 임의의 측정값들이 주어졌을 때 시스템 변수에 대한 조건부 확률 분포에서 maximum likelihood 에 해당하는 시스템 변수를 결정하는 것이라고 할 수 있다. 이 조건부 확률 분포는 Bayesian Theory 에 의하여 크게 측정 오차에 대한 확률분포, 이상화된 수치해석 모델과 실제 구조물 간의 차이에서 야기되는 모델링 오차에 대한 확률분포, 시스템변수에 대한 확률분포의 세가지 확률 분포의 조합으로 정식화 할 수 있다.

실제 구조물의 강성, 구조물에 작용하는 하중 등 구조 시스템을 구성하는 모든 변수들은 어떠한 정해진 값을 갖는 결정론적 상수가 아니라 특정한 확률분포를 가지고 분포하는 확률적 변수이다. 따라서 이러한 확률 변수들의 분포를 적절히 가정하고 처리해 줄 경우 보다 합리적인 시스템 변수의 추정이 가능할 것이다.

위의 세가지 확률분포를 모두 정규분포로 가정하면 최종 조건부 확률의 maximum likelihood 를 구하는 최적화 문제가 L_2-정규화 함수를 Tikhonov 기법으로 도입한 오차함수의 최소화 문제와 유사한 문제가 되며, 시스템변수의 확률분포로 symmetry exponential 확률분포를 이용할 경우 L_1-정규화 함수를 사용하는 결정론적인 SI 기법과 유사하게 된다.

3

확률론적 SI 기법을 도입할 경우 기존의 결정론적 SI 기법에서는 측정 오차의 일부로 가정했던 모델링 오차를 독립적으로 필터링하는 것이 가능해진다. 이 논문에서는 확률론적 SI 기법을 도입하여 모델링 오차를 적절하게 필터링하는 방법을 제시할 것이다. 모델링 오차를 나타내는 모델링 오차 벡터를 정의하고 이 벡터의 확률분포를 정규분포로 가정할 경우 covariance 행렬을 이용하여 모델링 오차를 필터링할 수 있다.

마지막으로 예제를 통해 Bayesian Theory 를 적용한 SI 기법에서의 L_1-정규화 효과와 모델링 오차의 필터링 효과를 검증한다.

2. 결정론적 SI 기법과 L_1-정규화

결정론적 SI 기법에서는 구조물의 외부에 위치한 측정점에서의 측정 변위와 수치해석 모델에서의 해석 변위의 norm 으로 정의되는 오차함수를 최소화하여 구조물의 시스템 변수를 추정하게 된다.

$$\underset{\mathbf{X}}{\text{Min}}\ \Pi_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{nlc}\left\|\tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{X}) - \bar{\mathbf{u}}_i\right\|_2^2 \quad \text{subject to} \quad \mathbf{R}(\mathbf{X}) \le 0 \tag{2.1}$$

여기서 $\tilde{\mathbf{u}}_i$, $\bar{\mathbf{u}}_i$, $\mathbf{R}$ 과 nlc 는 각각 i 번째 하중단계에서의 해석모델에 의한 계산 변위 벡터, 측정변위 벡터, 시스템변수에 대한 구속조건 벡터, 그리고 하중단계의 개수이다. $\|\cdot\|_2$ 는 벡터의 2-norm 벡터이다[11]. 식 (2.1)은 식 (2.2)와 같은 식으로 정렬할 수 있다.

$$\underset{\mathbf{X}}{\text{Min}}\ \Pi_E = \frac{1}{2}\left\|\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{X}) - \bar{\mathbf{U}}\right\|_2^2 \quad \text{subject to} \quad \mathbf{R}(\mathbf{X}) \le 0 \tag{2.2}$$

여기서, $\tilde{\mathbf{U}}$ 와 $\bar{\mathbf{U}}$ 는 각각 계산 변위 벡터와 측정 변위 벡터를 각 하중단계에 대해 행방향으로 정렬함으로써 얻어진 벡터들이다. 시스템변수에 대한 구속조건은, 시스템변수의 물리적 특성을 고려하여 상한값과 하한값을 결정하고 이를 식 (2.3)과 같은 선형 부등식으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{X}_l \le \mathbf{X} \le \mathbf{X}_u \tag{2.3}$$

여기서, $\mathbf{X}_l$ 와 $\mathbf{X}_u$ 는 각각 시스템변수 $\mathbf{X}$ 의 하한값과 상한값이다.

식 (2.2)의 최적화 문제는 시스템변수에 대한 비선형 최적화 문제이므로 식 (2.2)를 선형화시킨 다음과 같은 이차 종속문제를 반복적으로 풀어서 최적해를 구하게 된다.

$$\underset{\Delta\mathbf{X}}{\text{Min}} \left[\frac{1}{2} \Delta\mathbf{X}^T \mathbf{H}_{k-1} \Delta\mathbf{X} - \Delta\mathbf{X}^T \mathbf{S}_{k-1}^T \mathbf{U}_{k-1}^r \right] \quad \text{subject to} \quad \mathbf{R}(\mathbf{X}_{k-1} + \Delta\mathbf{X}) \le 0 \tag{2.4}$$

$$\mathbf{H}_{k-1} \approx \mathbf{S}_{k-1}^T \mathbf{S}_{k-1} \tag{2.5}$$

$$\mathbf{U}_{k-1}^r = \overline{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{U}}_{k-1} \tag{2.6}$$

여기서, k는 반복단계수이고, $\mathbf{S}_{k-1}$ 는 측정 변위 벡터 $\tilde{\mathbf{U}}_{k-1}$ 의 시스템변수에 대한 민감도 행렬이며, $\mathbf{H}_{k-1}$ 는 오차함수에 대한 헤시안 행렬이다. 헤시안 행렬에는 시스템변수에 대한 오차함수의 이차 미분항이 포함되어 있다. 오차함수의 이차 미분항을 정확히 계산하는 과정에는, 비선형 방정식인 강성도 방정식을 두 번 미분하여 변위의 시스템변수에 대한 이차 민감도를 계산하여야 하는 어려움이 있다. 따라서 오차함수의 헤시안 행렬을 변위의 일차 민감도만으로 근사하는, Gauss-Newton 행렬을 사용한다[12].

여기서부터는 수식의 간략화를 위하여 반복단계를 나타내는 아래첨자 (k-1)은

생략한다.

식 (2.4)의 선형 최적조건은 다음과 같다.

$$\mathbf{S}^T\mathbf{S}\Delta\mathbf{X} - \mathbf{S}^T\mathbf{U}^r = 0 \tag{2.7}$$

2.1 SI 기법의 불안정성

식 (2.2)에 의하여 정의되는 SI 문제는 측정치의 빈곤함에 의해서 해가 유일하지 않을 수 있고, 약간의 오차에 대해서도 추정된 해의 크기가 심하게 변화하는 해의 불연속성을 포함한다. 결정론적 SI 기법에서는 이러한 불안정성의 해결을 위하여 정규화 조건을 도입한다.

2.1.1 특이치분해(Singular Value Decomposition)

이러한 해의 불연속성이나 비유일성 같은 문제에 대한 접근과 해결을 위하여 식 (2.7)의 민감도 행렬 $\mathbf{S}$에 대한 특이치분해(Singular Value Decomposition)를 사용한다.

$$\mathbf{S} = \mathbf{Z}\mathbf{\Omega}\mathbf{V}^T \tag{2.8}$$

시스템변수의 수가 n개이고, 측정값의 수가 m개일 경우, $m \times n$의 민감도 행렬 $\mathbf{S}$는 SVD에 의해 $m \times n$ 행렬 $\mathbf{Z}$, $n \times n$의 대각행렬 $\mathbf{\Omega}$, $n \times n$ 행렬 $\mathbf{V}$로 표현

된다. 민감도 행렬의 특이치분해에 의한 각 행렬 $\mathbf{Z}$, $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{V}$ 는 다음과 같은 특성을 갖는다.

$$\mathbf{Z}^T\mathbf{Z} = \mathbf{I}_n, \quad \mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}_n, \quad \mathbf{\Omega} = diag(\omega_j) \tag{2.9}$$

여기서 $\mathbf{I}_n$ 은 n 차의 단위 행렬이고, ω_j 는 $\omega_{\max} = \omega_1 \ge \omega_2 \ge ... \ge \omega_n = \omega_{\min} \ge 0$ 과 같이 내림차순으로 정렬된 민감도 행렬 $\mathbf{S}$ 의 특이치이다. $n > m$ 일 경우, 민감도 행렬 $\mathbf{S}$ 는 rank가 부족하게 되며, $\omega_{m+1} = ... = \omega_n = 0$ 이 된다.

2.1.2 해의 비유일성

구조물의 시스템 변수 추정에 있어서 독립적인 측정값의 수보다 시스템 변수의 수가 적을 경우 해의 비유일성이 나타나게 된다. 또한 측정값의 수가 시스템 변수의 수보다 많은 경우라 할지라도 각각의 측정값이 서로 독립적이지 않기 때문에 시스템 변수의 추정에 필요한 측정치가 충분히 확보되지 못하게 되는 경우가 많다. 이러한 측정값의 빈곤함은 구조물의 시스템 변수 추정에 있어서 매우 자주 나타나는 현상이다. 특히 구조물이 거대해지고 복잡해질수록 실제 구조물에 설치할 수 있는 측정기기의 수와 장소는 더욱 한정된다.

단순히 측정값의 수와 시스템 변수의 수를 비교하는 것 만으로는 시스템 변수의 추정에 필요한 측정치의 확보 정도를 알 수 없다. 이를 위해서는 식 (2.8)에서 소개된 민감도 행렬 $\mathbf{S}$ 의 특이치분해를 통해 민감도행렬의 rank 를 확인해

보아야 한다. rank 가 부족한 경우에, 식 (2.7)의 해는 식 (2.8)을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다[6,13].

$$\Delta\mathbf{X} = \sum_{j=1}^{r} \mathbf{v}_j \omega_j^{-1} \mathbf{z}_j^T \mathbf{U}^r + \sum_{j=r+1}^{n} \gamma_j \mathbf{v}_j \tag{2.10}$$

여기서 $\mathbf{v}_j$, $\mathbf{z}_j$는 각각 j 번째 특이치 ω_j에 대한 우측 고유벡터(RSV), 좌측 고유벡터(LSV)로 구성된 열벡터이고, $\mathbf{U}^r$, γ_j는 각각 변위 잔차와 임의의 실계수이다. 또한 식 (2.10)의 증분해 $\Delta\mathbf{X}$는 시스템 변수를 추정할 때 흔히 발생하는 rank가 부족한 경우의 증분해이며 이 때 확보된 rank값을 r 이라 한다. 식 (2.10)의 첫번째 항은 rank r 에 해당하는 성분으로 항상 일정한 값이며, 두번째 항은 부족한 rank에 해당하는 성분으로 변위 잔차 $\mathbf{U}^r$의 영향을 받지 않는 영공간(null space)의 값이다. 두번째 항은 임의의 계수 γ_j에 따라 그 값이 달라지므로 해의 비유일성과 같은 수치적 불안정성이 나타나게 된다.

2.1.3 해의 불연속성

시스템 변수의 추정을 위한 측정 데이터에는 측정기기 자체의 오차나 계측자의 실수 등의 원인으로 인한 측정오차가 항상 포함되어 있다. 이러한 측정오차는 식 (2.7)의 해에 영향을 끼치며 이로 인하여 해의 불연속성이 나타나게 된다. 해의 불연속성은 전술한 해의 비유일성과는 무관하게 독립적으로 나타나므로

rank가 충분히 확보된 문제의 경우 증분해는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{V} diag(\frac{1}{\omega_j}) \mathbf{Z}^T \mathbf{U}^r = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{v}_j \omega_j^{-1} \mathbf{z}_j^T \mathbf{U}^r \quad (2.11)$$

측정변위 $\overline{\mathbf{U}}$ 는 다음과 같이 오차가 없는 실제 변위 벡터 $\mathbf{U}$ 와 오차 벡터 $\mathbf{e}$ 로 구성된다.

$$\overline{\mathbf{U}} = \mathbf{U} + \mathbf{e} \quad (2.12)$$

식 (2.12)의 결과를 식 (2.11)의 증분해에 대입하면 식 (2.13)과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{V} diag\left(\frac{1}{\omega_j}\right) \mathbf{Z}^T (\mathbf{U} - \tilde{\mathbf{U}}) + \mathbf{V} diag\left(\frac{1}{\omega_j}\right) \mathbf{Z}^T \mathbf{e} = \Delta \mathbf{X}^f + \Delta \mathbf{X}^e \quad (2.13)$$

여기서, $\Delta \mathbf{X}^f$ 와 $\Delta \mathbf{X}^e$ 각각 측정 오차가 없는 변위 잔차와 측정 오차에 의한 증분해이다. 측정 오차가 무시하지 못할 크기이거나 오차 벡터 $\mathbf{e}$ 가 $\mathbf{Z}$ 와 직교하지 않으면 $\Delta \mathbf{X}^e$ 는 0이 되지 않으며, 결국 증분해 $\Delta \mathbf{X}$ 는 $\Delta \mathbf{X}^e$ 에 의해 실제 변위에 의한 증분해 $\Delta \mathbf{X}^f$ 로부터 멀어지게 된다.

특히, 민감도 행렬의 특이치분해에 의하여 구해진 특이치 행렬의 성분들 중 rank의 부족으로 인해 나타나는 매우 작은 특이치들에 의해 $\mathbf{Z}^T \mathbf{e}$ 성분들이 크게 증폭되어 오차가 없는 실제 변위에 의한 증분해 $\Delta \mathbf{X}^f$ 로부터 더욱 멀어

지게 한다. 아주 작은 오차로 인한 측정변위의 변화도 작은 특이치를 통해 크게 증폭되어 각 최적화 반복단계중 점점 그 정도가 커져 최종적으로 수렴한 해는 실제 시스템변수와는 무관한 결과가 나타날 수 있다.

이와 같이 측정값에 아주 작은 측정오차가 포함되어 있는 경우라도 매우 작은 특이치로 인한 증폭으로 최종적으로 구한 증분해는 전혀 다른 값을 가질 수 있게 되어 해의 불연속성이 나타나게 된다.

2.2 정규조건

이 연구에서는 해의 비유일성과 해의 불연속성과 같은 시스템확인기법에서의 불안정성을 해소하기 위해 정규조건을 도입한다. 정규조건은 해가 존재하는 적절한 함수공간을 정의함으로써 주어진 문제에 추가 구속조건을 가하게 된다. L_p-norm을 이용하는 정규화 방법의 일반적인 추가 구속조건은 다음과 같고, 이러한 추가 구속조건을 L_p-정규조건이라 한다. L_p-정규조건의 식은 다음과 같이 주어진다.

$$\|x - x_0\|_p = \left[\int_V |x - x_0|^p \, dV \right]^{1/p} \tag{2.14}$$

여기서, x와 x_0는 각각 추정하려는 시스템변수와 시스템변수의 기저값이다. L_p-정규조건은 함수의 적분가능성을 규정함으로써, 시스템변수의 함수 공간을 한정시켜준다[15]. 이때 p는 주어진 문제에서의 시스템변수의 물리적, 수학적 특

성을 고려하여 결정해야한다.

식 (2.14)에서 $p=2$ 인 경우는 시스템변수가 x_0 부근에서 그 제곱이 적분 가능하다는 것을 나타낸다. 따라서 시스템변수는 piecewise continuous 함수들로 구성되는 L_2 공간에 포함된다. L_2-정규조건은 다음과 같이 표현된다.

$$\Pi_R = \|x - x_0\|_2^2 = \int_V (x - x_0)^2 dV \tag{2.15}$$

식 (2.15)의 L_2-정규조건에 의한 시스템변수의 해는 부드러운 곡선모양의 함수의 형태를 갖는다. 따라서 이 정규조건은 값이 비교적 완만하게 변하는 유한체 내부의 물성치를 추정하는 문제에 적합하다.

$p=1$ 인 경우를 L_1-정규조건이라 하며, 이는 다음과 같이 표현된다.

$$\Pi_R = \|x - x_0\|_1 = \int_V |x - x_0| dV \tag{2.16}$$

식 (2.16)의 L_1-정규조건으로 한정되는 해공간은 Dirac-delta 함수를 포함하게 된다. L_1-정규조건은 뚜렷한 경계를 갖고 변하는 시스템변수를 추정할 때에 적합하다. 부재마다 독립적인 값을 갖는 뼈대구조물의 물성치를 추정할 때나, 이질적인 함유체를 포함하고 있어서 요소 간에 뚜렷한 경계를 갖는 연속체의 물성치를 추정할 때에 적절한 정규조건이다.

2.3 정규조건의 적용

식 (2.2)의 오차함수에 정규조건을 적용시키는 방법으로 두 가지 기법이 있다. 하나는 Tikhonov 정규화 기법이며 다른 하나는 TSVD (Truncated Singular Value Decomposition)이다. 두 방법 모두 ill-posed SI 문제에 추가 구속 조건을 도입하여 well-posed 문제로 바꾸어준다.

Tikhonov 정규화 기법은 정규화 함수가 미분 가능한 경우에만 적용이 가능하다. 반면에 TSVD 정규화 기법은 정규화 함수가 미분이 가능하거나 불가능할 경우 모두 적용이 가능하다. 이 논문에서는 L_2-정규화를 위해서는 Tikhonov 정규화 기법을 L_1-정규화를 위해서는 TSVD 정규화 기법을 사용하였다.

2.3.1 Tikhonov 정규화

Tikhonov 정규화 기법은 식 (2.2)의 목적함수에 정규화 함수를 더한 새로운 목적함수를 최소화하여 시스템 변수를 추정하는 방법이다. 정규화 함수로 L_2-정규화 조건을 사용할 경우 다음과 같은 새로운 목적함수를 얻을 수 있다.

$$\Pi_R = \frac{1}{2}\lambda^2 \int_V (x - x_0)^2 \, dV \tag{2.17}$$

여기서, λ 는 정규화 계수로서 해공간에 대한 정규화 정도를 조절한다. 정규화 계수가 너무 작으면 SI 문제 특유의 불안정성이 적절히 제거되지 않으며 정규화 계수가 너무 크면 측정치와는 무관한 결과가 얻어진다. 따라서 적절한 정규화 계수의 산정이 필수적이다. 정규화 계수를 결정하는 방법으로서 선형 SI 문

제에는 LCM (L-Curve Method)[16], GCV(Generalized Cross Validation)[13] 등이 제안되어 있으며, 비선형 SI 문제에 대해서는 GMS(Geometric Mean Scheme)[9] 및 VRFS(Variable Regularization Factor Scheme)[4,8,17] 등이 제안되어 있다. 식 (2.17)의 식은 다음과 같이 이산화 할 수 있다.

$$\Pi_R = \frac{1}{2}\lambda^2 \left\| \mathbf{X} - \mathbf{X}_0 \right\|_2^2 \tag{2.18}$$

이 정규화 함수를 식 (2.2)의 목적함수에 더해주면 최종 목적함수를 얻을 수 있다.

$$\underset{\mathbf{X}}{\mathrm{Min}}\ \Pi = \frac{1}{2}\left\| \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{X}) - \overline{\mathbf{U}} \right\|_2^2 + \frac{1}{2}\lambda^2 \left\| \mathbf{X} - \mathbf{X}_0 \right\|_2^2 \quad \text{subject to} \ \ \mathbf{R}(\mathbf{X}) \le 0 \tag{2.19}$$

여기서, $\mathbf{X}$ 는 추정하려는 시스템 변수이고, $\mathbf{X}_0$ 는 시스템 변수의 기저값이다. 식 (2.19)의 목적함수를 정규화 된 오차함수라 한다. 정규화 된 오차함수를 최소화하여 시스템 변수 $\mathbf{X}$ 를 추정할 수 있다.

2.3.3 Truncated Singular Value Decomposition

Rank가 부족한 문제에는 무한 개의 해가 존재하게 된다. TSVD 정규화 기법은 측정값으로 들어오는 정보 중 오차가 많이 포함되어 있는 부분은 소거시키고, 소거된 해 성분은 정규화 함수의 최소화를 통해 복원하여, 소거되지 않은 해에 더해줌으로써 시스템변수를 추정하는 방법이다. 측정값에 포함된 오차는

해 성분의 절단에 의하여 소거되며 rank의 부족으로 인한 불안정성은 정규화 함수의 최소화를 통하여 해결된다. L_1-정규화 조건에 의한 TSVD 알고리즘은 다음과 같다.

$$\underset{\mathbf{X}}{\mathrm{Min}}\left\|\mathbf{X}-\mathbf{X}_0\right\|_1 \quad \text{subject to} \quad \underset{\mathbf{X}}{\mathrm{Min}}\ \Pi=\frac{1}{2}\left\|\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{X})-\overline{\mathbf{U}}\right\|^2 \quad \text{and} \quad \mathbf{R}(\mathbf{X})\le 0 \tag{2.20}$$

식 (2.20)은 비선형 최적화 구속조건이 포함되어 있기 때문에 다음과 같은 증분형태의 구속조건을 반복계산을 통해 풀어야 한다.

$$\begin{aligned}&\underset{\mathbf{X}}{\mathrm{Min}}\left\|\mathbf{X}_{k-1}+\Delta\mathbf{X}-\mathbf{X}_0\right\|_1\\&\text{subject to} \quad \underset{\mathbf{X}}{\mathrm{Min}}\ \Pi=\frac{1}{2}\left\|\mathbf{S}_{k-1}\Delta\mathbf{X}-\mathbf{U}_{k-1}^r\right\|^2 \quad \text{and} \quad \mathbf{R}(\mathbf{X}_{k-1}+\Delta\mathbf{X})\le 0\end{aligned} \tag{2.21}$$

여기서 $\Delta\mathbf{X}$, $\mathbf{S}_{k-1}, \mathbf{U}_{k-1}^r$는 각각 k번째 반복 단계에서의 증분해, 민감도 행렬, 변위잔차를 의미한다. 식 (2.21)에서 식 (2.20)의 비선형 최적화 구속조건은 식 (2.4)의 선형화된 이차 종속문제를 통해 식 (2.7)의 선형 최적화 구속조건으로 치환된다. 또한 추정된 시스템 변수가 물리적인 의미를 가지는 영역에 존재하도록 하기 위해서 시스템 변수의 상한과 하한에 대한 구속조건을 부등식형 구속조건으로 도입한다. 식 (2.21)에 부등식형 구속조건을 도입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}&\underset{\mathbf{X}}{\text{Min}}\left\|\mathbf{X}_{k-1}+\Delta\mathbf{X}-\mathbf{X}_0\right\|_1\\&\text{subject to}\ \ \underset{\mathbf{X}}{\text{Min}}\ \Pi=\frac{1}{2}\left\|\mathbf{S}_{k-1}\Delta\mathbf{X}-\mathbf{U}_{k-1}^r\right\|^2\quad\text{and}\ \ \mathbf{X}_l\le\mathbf{X}_{k-1}+\Delta\mathbf{X}\le\mathbf{X}_u\end{aligned}\tag{2.22}$$

여기서 $\mathbf{X}_l$ 과 $\mathbf{X}_u$ 는 각각 시스템 변수의 상한과 하한을 의미하는 벡터이다. 식 (2.22)의 선형 최적화 구속조건을 특이치분해를 통하여 구한 증분해는 다음과 같다.

$$\Delta\mathbf{X}=\sum_{j=1}^{t}\mathbf{v}_j\omega_j^{-1}\mathbf{z}_j^T\mathbf{U}^r+\sum_{j=t+1}^{n}\gamma_j\mathbf{v}_j=\Delta\mathbf{X}_t+\mathbf{z}\tag{2.23}$$

여기서 t는 truncation number이고 $\Delta\mathbf{X}_t,\mathbf{z}$ 는 각각 소거되지 않은 해성분과 소거되지 않은 해성분으로부터 복원해야 하는 해성분을 나타낸다. 시스템확인기법의 불안정성은 매우 작은 크기의 특이치에 대한 해성분에 의해 발생하므로 적절한 정도에서 민감도 행렬의 정보를 취사선택 하는 것이 중요하다.

식 (2.23)은 rank가 부족한 문제이므로 임의의 $\mathbf{z}$ 에 대하여 무수히 많은 해가 존재하고 이를 해결하기 위해 추가 구속조건인 L_1-정규조건에 대입하여 하나의 해를 결정한다.

$$\begin{aligned}&\underset{\mathbf{X}}{\text{Min}}\left\|\mathbf{z}+\left(\mathbf{X}_{k-1}-\mathbf{X}_0+\Delta\mathbf{X}_t\right)\right\|_1\\&\text{subject to}\ \ \mathbf{V}_t^T\mathbf{z}=0\quad\text{and}\ \ \mathbf{X}_l-\mathbf{X}_{k-1}-\Delta\mathbf{X}_t\le\mathbf{z}\le\mathbf{X}_u-\mathbf{X}_{k-1}-\Delta\mathbf{X}_t\end{aligned}\tag{2.21}$$

여기서 $\mathbf{V}_t$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{V}_t = \left(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_t\right) \tag{2.22}$$

식 (2.21)의 등식형 구속조건은 $\mathbf{z}$가 $\mathbf{V}$의 절단된 성분들의 선형조합으로 이루어진다는 것을 의미한다. 식 (2.21)의 선형최적화 문제는 simplex 방법을 이용하여 풀 수 있으며 빠른 수렴을 위하여 line search를 실시한다.

3. 확률론적 SI 기법

3.1 Maximum likelihood estimation과 Bayesian Theory

기존의 시스템확인 기법은 시스템을 구성하는 모든 요소들이 확정론적인 값을 가진다는 가정하에 전개된다. 그러나 시스템 변수나 시스템에 작용하는 하중, 경계 조건, 해석 모델 등 구조시스템의 모든 변수들은 하나의 확정적인 값을 갖는 값이 아니라 확률적인 분포를 갖는 변수이다. 따라서 시스템확인 기법에 이를 적용할 경우 보다 합리적인 실제 문제에의 적용이 가능해 질 것이다.

확률론적 관점에서의 SI는 임의의 측정변위 $\bar{\mathbf{u}}$가 주어졌을 때 시스템변수 $\mathbf{X}$에 대한 확률분포에서 maximum likelihood에 해당하는 시스템변수를 결정하는 과정으로 정의된다. 이러한 조건부 확률분포 $p(\mathbf{X}\,|\,\bar{\mathbf{u}})$는 Bayesian Theory에 의하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$p(\mathbf{X}\,|\,\bar{\mathbf{u}}) = \frac{p(\mathbf{X} \cap \bar{\mathbf{u}})}{p(\bar{\mathbf{u}})} = \frac{p(\bar{\mathbf{u}}\,|\,\mathbf{X})\,p(\mathbf{X})}{\int p(\bar{\mathbf{u}}\,|\,\mathbf{X})\,p(\mathbf{X})d\mathbf{X}} = c\,p(\bar{\mathbf{u}}\,|\,\mathbf{X})\,p(\mathbf{X}) \tag{3.1}$$

여기서, c는 확률을 1로 기준화 시키는 상수이다. 이 때 $\bar{\mathbf{u}}$가 주어졌을 때의 $\mathbf{X}$의 조건부 확률분포 $p(\mathbf{X}|\bar{\mathbf{u}})$는 posterior 확률분포, $\mathbf{X}$가 주어졌을 때의 $\bar{\mathbf{u}}$의 조건부 확률분포 $p(\bar{\mathbf{u}}\,|\,\mathbf{X})$는 prior 확률분포라 한다. 식 (3.1)에서의 prior 확률분포 $p(\bar{\mathbf{u}}\,|\,\mathbf{X})$는 다음과 같이 두 개의 조건부 확률분포로 나누어 표현할 수

있다[21].

$$p(\overline{\mathbf{u}} \mid \mathbf{X}) = \int_U p(\overline{\mathbf{u}} \mid \mathbf{u})\, p(\mathbf{u} \mid \mathbf{X})\, d\mathbf{u} \tag{3.2}$$

여기서 $\mathbf{u}$ 는 실제의 변위이고, U 는 적합한 모든 변위의 영역으로 적분공간을 의미한다. 식 (3.2)를 식 (3.1)에 대입하면 posterior 확률분포는 다음과 같이 세 확률분포의 조합으로 결정된다.

$$p(\mathbf{X} \mid \overline{\mathbf{u}}) = c\left[\int_U p(\overline{\mathbf{u}} \mid \mathbf{u})\, p(\mathbf{u} \mid \mathbf{X})\, d\mathbf{u}\right] p(\mathbf{X}) \tag{3.3}$$

식 (3.3)에서 첫번째 조건부 확률분포 $p(\overline{\mathbf{u}} \mid \mathbf{u})$ 는 실제변위 $\mathbf{u}$ 가 주어졌을 때 측정변위 $\overline{\mathbf{u}}$ 의 조건부 확률분포로서 측정 오차와 관련된 확률분포이다. 두번째 조건부 확률분포 $p(\mathbf{u} \mid \mathbf{X})$ 는 시스템변수 $\mathbf{X}$ 가 주어졌을 때 실제변위 $\mathbf{u}$ 의 조건부 확률분포로서 계산변위와 실제변위의 차이인 모델링 오차와 관련된 확률분포이다. $p(\mathbf{X})$ 는 사전 정보에 의한 시스템변수 $\mathbf{X}$ 의 확률분포로서, 측정 데이터와는 독립적으로 결정되는 확률분포이다. 이와 같이, posterior 확률분포는 측정 오차, 모델링 오차, 사전지식에 의한 시스템변수의 확률분포의 조합으로 결정된다.

여기서 확률론적 SI기법의 장점을 알 수 있다. 기존의 결정론적 SI 기법에서는 모델링 오차와 측정 오차를 독립적으로 고려하지 않고 하나의 오차라는 개념으로 간주했다. 하지만 확률론적 SI 기법에서는 두 오차를 독립적으로 고려

하는 것이 가능하다. 각 측정점에서 독립적·무작위적으로 발생하는 측정 오차와는 달리 모델링 오차는 모델링 오차의 성질에 따라 다르지만 일반적으로 시스템과 모델 사이의 유기적인 관계를 가지고 나타난다. 따라서 모델링 오차의 필터링은 측정 오차의 필터링과는 다른 방법으로 실시되는 것이 타당하다.

3.2 Bayesian Theory를 도입한 조건부 확률분포의 정식화

이 연구에서는 posterior 확률분포의 정식화를 위하여 다음과 같은 확률분포를 가정하였다.

우선 측정 오차는 측정기기 자체의 오차나 측정기기의 오독에서 발생하는 무작위 오차로서, 구조물의 실제 변위 $\mathbf{u}$ 와 측정 변위 $\bar{\mathbf{u}}$ 간의 차이인 $(\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u})$ 로 정의된다. 측정 오차 $(\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u})$ 의 확률분포를 평균이 0 인 정규분포로 가정할 경우, 조건부 확률분포 $p(\bar{\mathbf{u}}\,|\,\mathbf{u})$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$p(\bar{\mathbf{u}}\,|\,\mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det \mathbf{C}_d}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u})^T \mathbf{C}_d^{-1} (\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\right] \tag{3.4}$$

여기서, $\mathbf{C}_d$ 는 측정 오차 벡터 $(\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u})$ 의 covariance 행렬이고 m은 측정 변위의 개수이다. 측정 오차는 무작위 오차로서 각 측정점에서 모두 독립적으로 발생한다고 볼 수 있으며, 이 경우 covariance 행렬은 대각행렬이 된다.

다음으로는 모델링 오차를 나타내는 조건부 확률 분포를 고려해보겠다. 모델링 오차는 실제 구조물의 변위 $\mathbf{u}$ 와 해석모델을 통해 계산된 변위 $\tilde{\mathbf{u}}$ 간의 차인

$(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))$ 로 표현되며, 실제 구조물을 이상화 하여 모델링하는 과정에서 발생하는 오차이다. 모델링 오차는 무작위 오차인 측정 오차와는 달리 시스템의 구조적 특성 및 모델링 과정과 유기적인 관계를 갖고 발생하는 오차이다. 기존의 결정론적 SI 기법에서와 같이 모델링 오차를 별도로 고려하지 않는 경우, 즉 모델링 오차가 없다고 가정할 경우에 모델링 오차를 나타내는 조건부 확률분포 $p(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{X})$ 는 Dirac-delta 함수로 표현된다.

$$p(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{X}) = \delta(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X})) \tag{3.5}$$

복잡한 모델링 오차의 확률분포를 단순한 확률 분포로 가정하는 것은 무리가 있지만 우선 이 논문에서는 모델링 오차 역시 정규분포로 가정하였다. 모델링 오차를 나타내는 벡터 $(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))$ 의 확률 분포를 평균이 0 인 정규 분포로 가정할 경우 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$p(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{C}_m}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))^T \mathbf{C}_m^{-1}(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))\right] \tag{3.6}$$

여기서, $\mathbf{C}_m$ 은 모델링 오차 벡터 $(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))$ 의 covariance 행렬이다.

마지막으로 사전 정보에 의한 시스템 변수의 확률 분포에 관하여 알아보자. 이 연구에서는 시스템 변수의 확률 분포로 두 가지 확률 분포를 사용하였다. 하나는 정규 분포이고 다른 하나는 symmetric exponential 분포이다. 시스템 변수

에 대한 확률 분포 $p(\mathbf{X})$가 정규 분포일 경우 다음과 같이 표현된다.

$$p(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{C}_X}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^T \mathbf{C}_X^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \right] \tag{3.7}$$

여기서, $\mathbf{C}_X$는 시스템 변수 $\mathbf{X}$의 분포에 대한 covariance 이고, n 은 시스템변수의 개수이며, $\mathbf{X}_0$는 시스템변수의 평균이 되는 기저값이다. 기저값은 그 시스템 변수에 대한 기존의 정보를 이용하여 정하며, 보통은 구조물의 초기 물성치를 사용한다.

또한 시스템 변수에 대한 확률 분포 $p(\mathbf{X})$가 symmetric exponential 분포일 경우의 식은 다음과 같다.

$$p(\mathbf{X}) = \frac{1}{(2\sigma_X)^n} \exp\left[-\frac{1}{\sigma_X} \sum_{i=1}^{n} \left| x_i - (x_0)_i \right| \right] \tag{3.8}$$

이상과 같이 측정 오차, 모델링 오차, 시스템 변수의 확률 분포를 각각 가정할 경우 Bayesian Theory를 통하여 유도된 조건부 확률 분포를 정식화 할 수 있다.

첫번째 경우는 세 확률 분포를 모두 정규 분포로 가정한 경우이다. 이 경우 다음과 같은 posterior 확률 분포를 얻을 수 있다.

$$p(\mathbf{X}\,|\,\overline{\mathbf{u}}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det \mathbf{C}_d}\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{C}_m}\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{C}_X}} \times \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{(\overline{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))^T \mathbf{C}_D^{-1}(\overline{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X})) + (\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)^T \mathbf{C}_X^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)\right\}\right] \tag{3.9}$$

여기서 $\mathbf{C}_D = \mathbf{C}_d + \mathbf{C}_m$ 이다. 식 (3.9)의 조건부 확률 분포를 최대화하는 시스템 변수를 추정하는 문제는 식 (3.10)과 같은 최소화 문제로 치환할 수 있다.

$$\underset{\mathbf{X}}{\text{Min}}\frac{1}{2}\left\{(\overline{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))^T \mathbf{C}_D^{-1}(\overline{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X})) + (\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)^T \mathbf{C}_X^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)\right\} \tag{3.10}$$

이 식은 기존의 결정론적 SI 기법에서의 Tikhonov L_2-정규화 기법과 유사한 형태의 식이다. 다만 식에 covariance 행렬들이 포함되어 있는 것이 조금 다르다. 따라서 이를 적절히 고려하여 시스템 변수를 추정해야 한다.

두번째 경우는 측정 오차와 모델링 오차의 분포를 정규 분포로, 시스템 변수의 분포를 symmetric exponential 분포로 가정한 경우이다. 이 경우 다음과 같은 posterior 확률 분포를 얻을 수 있다.

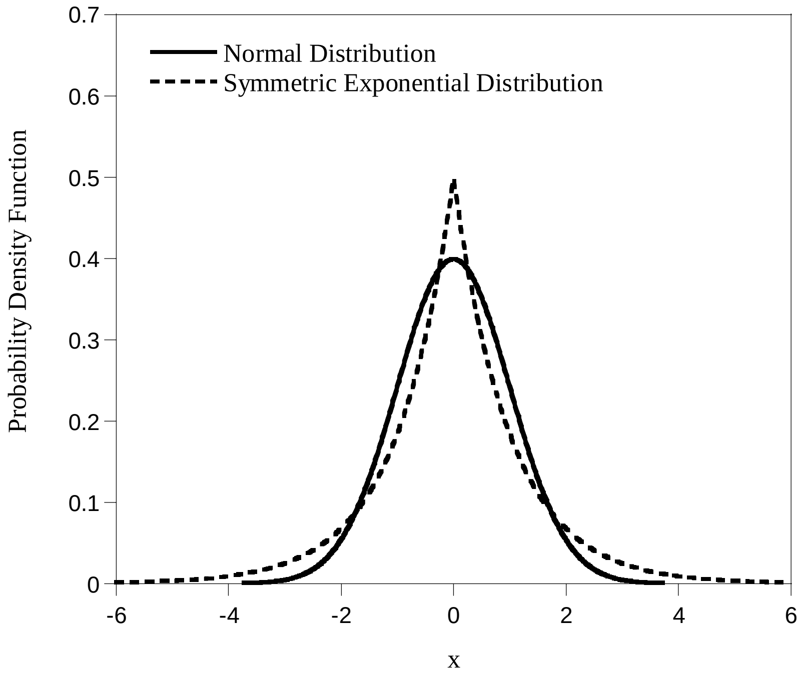
$$p(\mathbf{X}\,|\,\overline{\mathbf{u}}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det \mathbf{C}_d}\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{C}_m}\left(2\sigma_X\right)^n} \times \exp\left[-\frac{1}{2}(\overline{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))^T \mathbf{C}_D^{-1}(\overline{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X})) - \frac{1}{\sigma_X}\left|\mathbf{X}-\mathbf{X}_0\right|\right] \tag{3.11}$$

역시 $\mathbf{C}_D = \mathbf{C}_d + \mathbf{C}_m$ 이며, 이 조건부 확률 분포의 maximum likelihood에 해당하

는 시스템 변수의 추정 문제는 다음과 같은 최소화 문제로 재정의된다.

$$\underset{\mathbf{X}}{\text{Min}} \frac{1}{2}\left\{(\bar{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))^T \mathbf{C}_D^{-1} (\bar{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X})) + \frac{1}{\sigma_X}\left|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\right|\right\} \tag{3.12}$$

이 식은 기존의 결정론적 SI 기법에서의 Tikhonov L_1-정규화 기법과 유사한 형태의 식이다. 다만 식에 covariance 행렬들이 포함되어 있는 것이 조금 다르다. 역시 이에 대한 적절한 고려가 필요하다.



<그림 3.1> 같은 정도의 편차를 가지는 정규분포와 symmetry exponential 분포

식 (3.10)과 식 (3.12)에 알 수 있듯이 Bayesian Theory를 도입한 확률론적 SI 기 법에서는 시스템 변수에 대한 확률분포 $p(\mathbf{X})$가 결정론적 SI 기법에서의 정규화 함수와 같은 역할을 한다. <그림 3.1>에는 같은 정도의 편차를 가지는 정규분포와 symmetric exponential 분포의 확률밀도 함수가 도시되어 있다. symmetric exponential 분포는 정규 분포에 비하여 중앙부와 양단부에서 보다 큰 확률 밀도를 가지며 이러한 특성은 시스템변수 추정에 그대로 적용된다. 따라서 시스템 변수의 확률 분포로 정규분포를 사용할 경우 L_2-정규화 효과를 symmetric exponential 분포를 사용할 경우 L_1-정규화 효과를 볼 수 있다.

3.3 Covariance 행렬의 구성

이제 모델링 오차를 필터링하기 위한 covariance 행렬의 구성을 알아보자. 구조물의 수치해석 모델을 나타내는 정적 평형방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{K}(\mathbf{X})\mathbf{u}_i = \mathbf{P}_i \quad \text{for} \quad i = 1, \cdots, nlc \tag{3.13}$$

여기서, $\mathbf{K}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{P}_i$, nlc는 각각 구조물의 강성행렬, 시스템 변수, i번째 하중 단계에서의 변위 벡터, i번째 하중 벡터, 하중 단계를 나타낸다. 식 (3.13)에서 볼 수 있듯이 실제 구조물을 수치해석 모델로 이상화하는 과정에서 발생하는 모델링 오차는 크게 강성 $\mathbf{K}$와 하중 $\mathbf{P}_i$로 나누어 생각해 볼 수 있다. 실제 문제에 있어서는 이 두 종류의 모델링 오차가 동시에 발생할 수 있지만 여

<그림 3.2> 경계조건의 이상화에 따른 모델링 오차

기서는 각 모델링 오차가 독립적으로 발생한다고 가정한다.

3.3.1 경계 조건에 의한 모델링 오차

강성 $\mathbf{K}$ 의 모델링 오차의 한 예로 경계조건의 이상화에 의한 모델링 오차를 생각해 볼 수 있다. <그림 3.2>에는 이러한 모델링 오차의 한 예로서 힌지 지점의 이상화에 따른 모델링 오차를 도시하였다. 여기서 $\mathbf{K}_S$ 는 실제 힌지 지점의 회전 강성을 모델링하는 과정에서 도입된 회전 스프링의 강성값이다. 해석모델에 사용되는 힌지 지점은 회전강성이 0인 완전 힌지 지점이다. 하지만 실제 구조물에 사용되는 힌지 지점의 경우 회전강성이 0인 완전 힌지 지점은 존재하지 않으며 이 둘의 거동차에 의해서 모델링 오차가 발생하게 된다. 해석모델과 실제 모델의 차이를 나타내는 에러 벡터는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\mathbf{e}_m = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) - \mathbf{u} = \mathbf{S}_s \Delta \mathbf{K}_s \tag{3.14}$$

여기서, $\mathbf{S}_s$ 는 스프링의 회전강성 $\mathbf{K}_s$ 의 계산변위에 대한 민감도 행렬이고, $(\mathbf{K}_s)_m$ 는 스프링의 회전강성에 대한 확률분포의 평균값이다. $\mathbf{e}_m$ 는 계산변위와 실제변위의 차이로서 모델링 오차를 나타내는 벡터이다. 따라서 이 모델링 오차에 대한 covariance 행렬은 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_m &= E(\mathbf{e}_m \mathbf{e}_m^T) - E(\mathbf{e}_m)(E(\mathbf{e}))^T \\ &= E(\mathbf{e}_m \mathbf{e}_m^T) \\ &= E(\mathbf{S}_s \Delta\mathbf{K}_s \Delta\mathbf{K}_s^T \mathbf{S}_s^T) \\ &= \mathbf{S}_s E(\Delta\mathbf{K}_s \Delta\mathbf{K}_s^T) \mathbf{S}_s^T \end{aligned} \tag{3.15}$$

$\mathbf{K}_s$ 의 확률분포가 평균이 $(\mathbf{K}_s)_m$ 인 정규분포일 경우, $\Delta\mathbf{K}_s$ 의 확률분포는 평균이 0 인 정규분포가 된다. 따라서, $\Delta\mathbf{K}_s$ 의 선형함수인 $\mathbf{e}_m$ 의 확률분포도 평균이 0 인 정규분포가 되어 $E(\mathbf{e}_m)$ 은 0 이 된다. 여기서, $\Delta\mathbf{K}_s$ 의 각 성분이 독립적일 경우, 식 (3.15)는 다음과 같이 간략화된다.

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{S}_s diag(Var(\Delta k_{s,i}))\mathbf{S}_s^T \tag{3.16}$$

여기서, $\Delta k_{s,i}$ 는 $\Delta\mathbf{K}_S$ 의 i 번째 요소이다.

3.3.2 외부 하중의 이상화에 의한 모델링 오차

이번에는 하중의 이상화에 따른 모델링 오차에 관하여 살펴보자. 실제 구조물에 작용하는 하중 $\mathbf{P}$ 는 다음과 같이 두 부분으로 나누어 볼 수 있다.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_m + \mathbf{P}_e \tag{3.17}$$

여기서, $\mathbf{P}_m$ 는 하중의 모델링에 사용된 하중이며 $\mathbf{P}_e$ 는 실제 구조물에 작용하는 하중과 수치 해석 모델에 사용된 하중의 차이를 나타낸다. 이때 모델링 오차를 나타내는 벡터 $\mathbf{e}_m$ 은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{e}_m = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) - \mathbf{u} = -\mathbf{A}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}_e \tag{3.18}$$

여기서, $\mathbf{A}$ 는 모든 자유도에 대한 변위 벡터를 측정된 자유도에 대한 변위 벡터로 변환해주는 boolean 행렬이다. 이 모델링 오차에 대한 covariance 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_m &= E(\mathbf{e}_m\mathbf{e}_m^T) - E(\mathbf{e}_m)\{E(\mathbf{e}_m)\}^T \\ &= E(\mathbf{e}_m\mathbf{e}_m^T) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{K}^{-1}E(\mathbf{P}_e\mathbf{P}_e^T)(\mathbf{K}^{-1})^T\mathbf{A}^T \\ &= \mathbf{A}\mathbf{K}^{-1}diag(Var(p_{e,i}))(\mathbf{K}^{-1})^T\mathbf{A}^T\end{aligned} \tag{3.19}$$

여기서, $p_{e,i}$ 는 $\mathbf{P}_e$ 의 i 번째 요소이며, 외부하중의 각 요소가 서로 독립일 경우 대각행렬로 간략화할 수 있다.

3.3.3 온도하중의 이상화에 의한 모델링 오차

이번에는 온도하중의 이상화에 따른 모델링 오차에 관하여 알아보자. 만일 실

제 구조물에서 구조물의 응답을 측정하였을 때의 온도와 수치해석 모델에 사용한 구조물의 온도가 다르다면 이 차이에 의하여 모델링 오차가 발생할 수 있다. 가령 실제 구조물의 변위를 측정할 경우 기준 온도가 아니였을 경우 이에 대한 고려가 필요하다. 특히 구조물의 동해석을 위하여 가속도 데이터를 측정할 경우 오랜 시간동안 측정이 일어나게 되므로 온도에 대한 보정이 필수적이다. 우선 구조물의 정적 평형 방정식의 변화로 인한 민감도 행렬의 보정이 필요하다. 다음은 온도 하중이 주어졌을 경우 구조물의 정적 평형 방정식이다.

$$\mathbf{K}(\mathbf{X})\mathbf{u}_i = \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_{\Delta T,i} \quad \text{for} \quad i = 1, \cdots, nlc \tag{3.20}$$

여기서 $\mathbf{P}_{\Delta T,i}$ 는 i 번째 하중 단계에서의 온도 하중이다. 양변을 시스템 변수 $\mathbf{X}$ 에 대하여 미분하면 다음과 같은 민감도 행렬을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = -\mathbf{K}^{-1}\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{X}}\mathbf{u} + \mathbf{K}^{-1}\frac{\partial \mathbf{P}_{\Delta T,i}}{\partial \mathbf{X}} \tag{3.21}$$

이제 온도 하중의 이상화에 의한 모델링 오차 벡터를 생각해보자. 이 모델링 오차 벡터 역시 해석 모델과 실제 구조물의 변위 차에 의하여 정의되며 식 (3.22)과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{e}_m = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) - \mathbf{u} = -\mathbf{A}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}_{\Delta T,i} \tag{3.22}$$

여기서, **A** 는 모든 자유도에 대한 변위 벡터를 측정된 자유도에 대한 변위 벡터로 변환해주는 boolean 행렬이다. 이 모델링 오차에 대한 covariance 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_m &= E(\mathbf{e}_m\mathbf{e}_m^T) - E(\mathbf{e}_m)\{E(\mathbf{e}_m)\}^T \\ &= E(\mathbf{e}_m\mathbf{e}_m^T) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{K}^{-1}E(\mathbf{P}_{\Delta T,i}\mathbf{P}_{\Delta T,i}^T)(\mathbf{K}^{-1})^T\mathbf{A}^T \end{aligned} \tag{3.23}$$

이 경우 온도 하중의 기대값은 외부 하중에서의 기대값과는 달리 서로 독립적이지 않으므로 대각행렬로 간략화 할 수 없다.

3.4 Covariance 행렬이 포함된 L_1-정규화 기법

이제 식 (3.10)과 식 (3.12)처럼 covariance 행렬이 포함된 경우의 최적화 방법에 대하여 알아보자. 우선 경계조건의 이상화에 의한 모델링 오차나 외부 하중의 이상화에 의한 모델링 오차와 같이 상대적으로 모델링 오차의 영향이 적은 문제에 있어서의 최적화 방법에 대하여 살펴보고, 다음으로는 온도 하중에 의한 모델링 오차화 같이 비교적 모델링 오차의 영향이 큰 경우의 최적화 방법에 관하여 알아보자.

3.4.1 모델링 오차가 상대적으로 작은 경우의 근사 해법

식 (3.12)의 Tikhonov 형식의 L_1-정규화는 다음과 같은 TSVD 방법으로 바꿀 수 있다.

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{X}}{\text{Min}}\left\|\mathbf{X}-\mathbf{X}_0\right\|_1 \\ &\text{subject to}\quad \underset{\mathbf{X}}{\text{Min}}\left\{\frac{1}{2}(\bar{\mathbf{u}}-\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))^T\,\mathbf{C}_D^{-1}(\bar{\mathbf{u}}-\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))\right\}\quad \text{and}\quad \mathbf{R}(\mathbf{X}) \end{aligned} \tag{3.24}$$

모델링 오차의 크기가 상대적으로 작은 경우 측정 오차와 모델링 오차를 필터링하는 covariance 행렬 $\mathbf{C}_D^{-1}$의 시스템 변수 $\mathbf{X}$에 대한 변화율이 매우 작다고 가정할 수 있고 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{C}_D^{-1}}{\partial \mathbf{X}} \cong 0 \tag{3.25}$$

식 (3.25)의 가정을 도입하여 첫번째 종속조건을 풀면 다음의 결과를 얻는다. 식 (2.7)의 결과와 유사하나 covariance 행렬이 포함되어 있는 것을 알 수 있다.

$$\mathbf{S}_{k-1}^T\mathbf{C}_D^{-1}\mathbf{S}_{k-1}\Delta\mathbf{X}-\Delta\mathbf{S}_{k-1}^T\mathbf{C}_D^{-1}\mathbf{U}_{k-1}^r=0 \tag{3.26}$$

만일 C_D^{-1}이 positive definite 할 경우 이 행렬은 Cholesky Decomposition 에 의하여 다음과 같은 삼각 행렬의 곱으로 분해 된다.

$$\mathbf{C}_D^{-1}=\mathbf{L}^T\mathbf{L} \tag{3.27}$$

이 결과를 식 (3.26)에 대입하여 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$(\mathbf{LS})^T(\mathbf{LS})\Delta\mathbf{X} = (\mathbf{LS})^T(\mathbf{LU}^r) \tag{3.28}$$

$$(\mathbf{S}^*)^T\mathbf{S}^*\Delta\mathbf{X} = (\mathbf{S}^*)^T\mathbf{U}^{r*} \tag{3.29}$$

여기서 $\mathbf{S}^* = \mathbf{LS}$, $\mathbf{U}^{r*} = \mathbf{LU}^r$ 이다. 이후 종전의 방법대로 $\mathbf{S}^*$ 을 특이치분해하여 TSVD 방법으로 풀 수 있다.

$$\Delta\mathbf{X} = \sum_{j=1}^{t}\mathbf{v}_j^*(\omega_j^*)^{-1}\mathbf{z}_j^*\mathbf{U}^{r*} + \sum_{j=t+1}^{n}\gamma_j\mathbf{v}_j^* = \Delta\mathbf{X}_t + \mathbf{z} \tag{3.30}$$

$$\underset{\mathbf{X}}{\mathrm{Min}}\left\|\mathbf{z} + (\mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X}_t)\right\|_1 \quad \text{subject to} \quad \mathbf{v}^T\mathbf{z} = 0 \quad \text{and} \quad \mathbf{R}(\mathbf{X}) \le 0 \tag{3.31}$$

이 알고리즘은 simplex method 를 이용하여 풀 수 있으며 빠른 수렴을 위하여 line search 를 실시한다.

3.4.2 모델링 오차가 상대적으로 큰 경우의 해법

모델링 오차의 크기가 상대적으로 큰 경우 식 (3.25)의 가정은 더 이상 유효하지 않다. 따라서 이 경우 3.4.1 절에서 제안한 방법은 사용할 수 없다. 모델링 오차가 상대적으로 큰 경우는 다음과 같은 방법을 사용해야 한다. 모델링 오차가 상대적으로 큰 경우라도 식 (3.27)의 가정은 성립하다. 이를 식 (3.24)에 대입하면 식 (3.32)의 결과를 얻는다.

$$\underset{\mathbf{X}}{\text{Min}} \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\|_1$$
$$\text{subject to} \quad \underset{\mathbf{X}}{\text{Min}} \left\{ \frac{1}{2} (\overline{\mathbf{u}}^* - \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{X}))^T (\overline{\mathbf{u}}^* - \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{X})) \right\} \quad \text{and} \quad \mathbf{R}(\mathbf{X}) \tag{3.32}$$

여기서, $\overline{\mathbf{u}}^* = \mathbf{L}\overline{\mathbf{u}}$, $\tilde{\mathbf{u}}^* = \mathbf{L}\tilde{\mathbf{u}}$ 이다. 이 알고리즘을 풀기 위해서는 새로운 변위장 $\mathbf{u}^*$의 시스템 변수 $\mathbf{X}$에 대한 민감도 행렬 $\mathbf{S}^*$을 계산해 주어야 한다. 이 민감도 행렬은 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}^* = \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{L}\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X})) = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{X}} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) + \mathbf{L}\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \tag{3.33}$$

여기서, $\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$는 기존의 민감도 행렬을 그대로 사용하면 된다. 따라서 이 문제에서 새로운 민감도 행렬 $\mathbf{S}^*$을 구하기 위해서는 $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{X}}$을 먼저 구해야만 한다. $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{X}}$은 식 (3.27)의 양변을 시스템 변수 $\mathbf{X}$에 대하여 미분하여 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{C}_D^{-1}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{L}^T}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{X}} \tag{3.34}$$

식 (3.34)의 식에서 $\frac{\partial \mathbf{C}_D^{-1}}{\partial \mathbf{X}}$, $\mathbf{L}$ 행렬은 이미 알고 있는 값이고 $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{X}}$는 구하고자 하는 값이다. 다만 $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{X}}$와 $\frac{\partial \mathbf{L}^T}{\partial \mathbf{X}}$가 동시에 포함되어 있어 이를 구하기 위해

서는 약간의 조작이 필요하다. 이를 indicial notation을 이용하여 표기하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial C_{ij}^{-1}}{\partial X_l} = \frac{\partial L_{ki}}{\partial X_l} L_{kj} + L_{ki} \frac{\partial L_{kj}}{\partial X_l} \quad \text{where } \; i < j, \quad k = 1,2,\cdots,i \tag{3.35}$$

우선 $\frac{\partial \mathbf{C}_D^{-1}}{\partial \mathbf{X}}$ 를 구하는 방법을 먼저 살펴보자. 외부 하중의 모델링 오차의 필터링의 경우 이것을 담당하는 covariance 행렬은 식 (3.23)과 같이 구성된다. 따라서 $\frac{\partial \mathbf{C}_D^{-1}}{\partial \mathbf{X}}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{C}_D^{-1}}{\partial \mathbf{X}} &= -\mathbf{C}_D^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}_D}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{C}_D^{-1} \\
&= -\mathbf{C}_D^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}_m}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{C}_D^{-1} \\
&= \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{A} \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P} (\mathbf{K}^{-1})^T \mathbf{A}^T \mathbf{C}_D^{-1} \\
&\quad + \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{A} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P} (\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{K}^{-1})^T \mathbf{A}^T \mathbf{C}_D^{-1} \\
&= \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{A} \mathbf{K}^{-1} \left\{ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{X}} \right\} (\mathbf{K}^{-1})^T \mathbf{A}^T \mathbf{C}_D^{-1} \\
&= \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{A} \mathbf{K}^{-1} \left\{ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P} + (\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P})^T \right\} (\mathbf{K}^{-1})^T \mathbf{A}^T \mathbf{C}_D^{-1}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

여기서, $\mathbf{C}_D = \mathbf{C}_m + \mathbf{C}_d$ 이며 $\mathbf{P} = diag(Var(\Delta p_i))$ 이다.

온도 하중의 모델링 오차를 필터링 할 경우 $\dfrac{\partial \mathbf{C}_D^{-1}}{\partial \mathbf{X}}$ 는 다음과 같은 항이 추가된다.

$$\frac{\partial \mathbf{C}_D^{-1}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{C}_D^{-1}\mathbf{A}\mathbf{K}^{-1}\left\{\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{X}}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{X}} + (\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{X}}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P})^T\right\}(\mathbf{K}^{-1})^T\mathbf{A}^T\mathbf{C}_D^{-1} \tag{3.37}$$

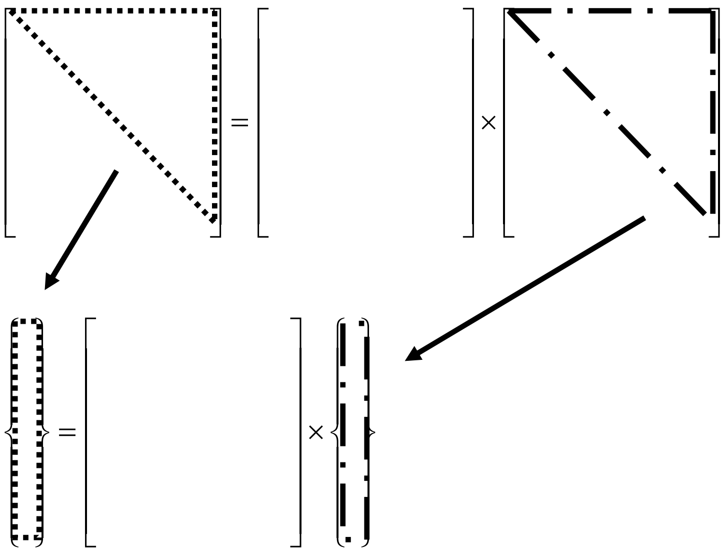
여기서, $\mathbf{C}_D = \mathbf{C}_m + \mathbf{C}_d$ 이며 $\mathbf{P} = E(\mathbf{P}_{\Delta T,i}\mathbf{P}_{\Delta T,i}^T)$ 이다.

식 (3.36) 또는 식 (3.37)을 통해 구한 $\dfrac{\partial \mathbf{C}_D^{-1}}{\partial \mathbf{X}}$ 의 값을 식 (3.35)에 대입하여 풀면 $\dfrac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{X}}$ 를 구할 수 있다. 이때 다음과 같은 변환이 필요하다.

$$\begin{aligned} &\mathbf{matrix}(\mathrm{m}\times\mathrm{m}) \\ &= \mathbf{matrix}(\mathrm{m}\times\mathrm{m})\times\mathbf{matrix}(\mathrm{m}\times\mathrm{m}) + \mathbf{matrix}(\mathrm{m}\times\mathrm{m})\times\mathbf{matrix}(\mathrm{m}\times\mathrm{m}) \\ &\Rightarrow \mathbf{vector}(\mathrm{m}^*) = \mathbf{matrix}(\mathrm{m}^*\times\mathrm{m}^*)\times\mathbf{vector}(\mathrm{m}^*) \end{aligned} \tag{3.38}$$

여기서, $\mathrm{m}^* = \dfrac{\mathrm{m}(\mathrm{m}+1)}{2}$ 이다. <그림 3.3>에는 이러한 시스템 변환 과정이 도시되어 있다. 이때 배열을 위하여 $i > j$ 인 경우 위치 지정 정보가 필요하며 배열 순서는 다음의 관계로 주어진다.

$$\mathbf{C}_{ij} = \mathbf{V}_n \qquad \text{where, } n = \frac{(i-1)(2m-i+2)}{2} + j - i + 1 \tag{3.39}$$



<그림 3.3> 벡터 시스템으로의 변환

식 (3.38)을 통하여 구해진 $\dfrac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{X}}$ 벡터를 다시 원래의 행렬 형식으로 배열해주면 $\dfrac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{X}}$ 행렬을 구할 수 있고 이를 식 (3.33)에 대입하여 새로운 민감도 행렬 $\mathbf{S}^*$ 을 얻는다. 이제 종전과 같은 방법으로 첫번째 종속 조건을 다음과 같이 풀어준다.

$$\underset{\Delta\mathbf{X}}{\mathrm{Min}}\left\{\frac{1}{2}\Delta\mathbf{X}^T\mathbf{S}^{*T}_{k-1}\mathbf{S}^*_{k-1}\Delta\mathbf{X}-\Delta\mathbf{X}^T\mathbf{S}^{*T}_{k-1}\mathbf{U}'^{r}_{k-1}\right\} \tag{3.40}$$

여기서, $\mathbf{S}^*_{k-1}=\dfrac{\partial\tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{X}_{k-1})}{\partial\mathbf{X}}$, $\mathbf{U}^{*r}_{k-1}=\overline{\mathbf{U}}^*-\tilde{\mathbf{U}}^*(\mathbf{X}_{k-1})$ 이다. 이를 풀어주면 다음과 같은 1차 식을 얻는다.

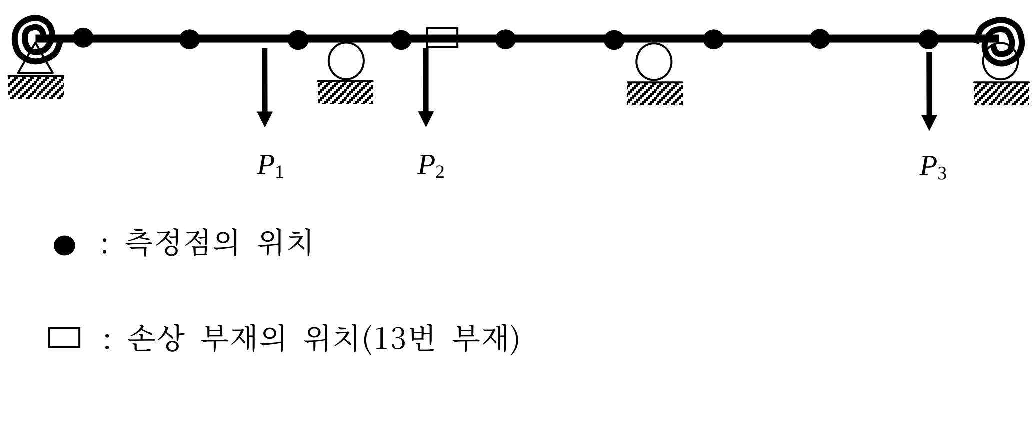
$$\mathbf{S}^{*^T}\mathbf{S}^{*}\Delta\mathbf{X} = \mathbf{S}^{*^T}\mathbf{U}^{*^r} \tag{3.41}$$

이는 종전과 같은 형식의 L_1 최적화이므로 새로 구한 민감도 행렬 $\mathbf{S}^*$을 특이치분해하여 같은 방법으로 풀 수 있다.

4. 수치 해석 예제

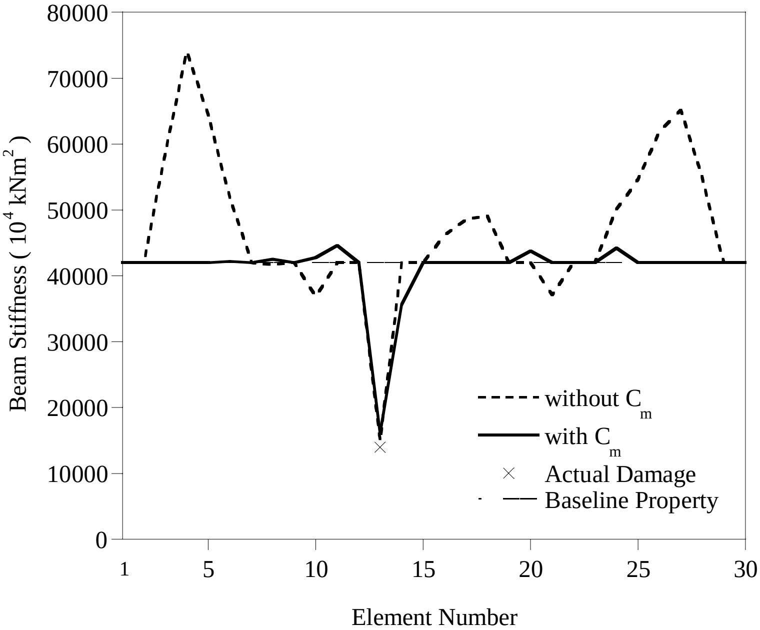
4.1 경계 조건의 이상화에 따른 모델링 오차의 필터링

경계 조건의 이상화에 따른 모델링 오차를 필터링 하는 수치 해석 예제를 살펴보자. 여기서는 <그림 4.1>의 3경간 연속보를 사용하였다. 이 들보 한 경간의 길이는 20m이며, 총 길이는 60m이다. 또한 경간당 10개씩의 요소를 사용, 총 30개의 요소를 사용하여 모델링 하였다. 측정점은 경간당 3개씩 총 9개의 측정점을 배치하였으며 측정점에서의 수직 변위를 측정값으로 사용하였다. 이 예제에서 추정해야 할 시스템 변수는 들보의 휨강성 EI 값이다. 손상이 없는 부재의 휨강성 값은 420×10^6 (kN m^2) , 손상이 있는 13번 부재의 휨강성 값은 140×10^6 (kN m^2) 이다.



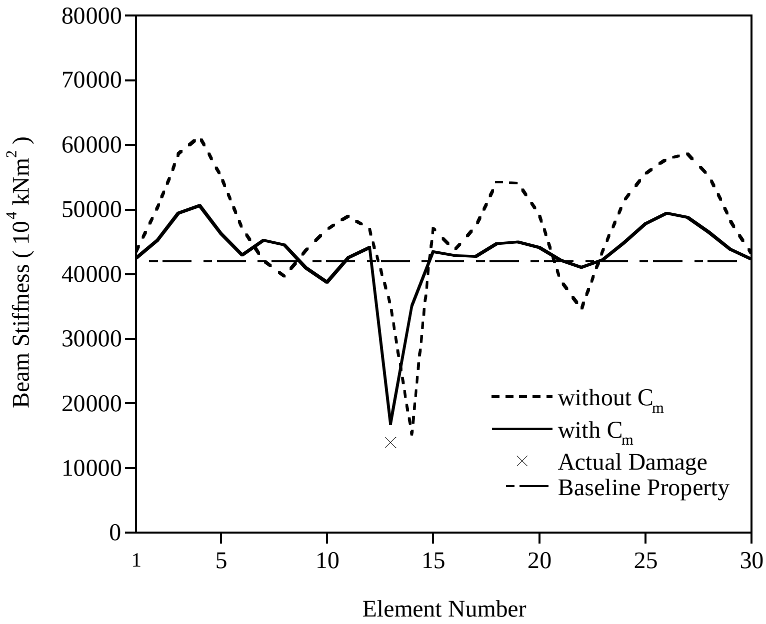
<그림 4.1> 경계 조건의 이상화에 따른 모델링 오차에 사용된 예제

측정값을 얻기 위한 모델에서는 3경간 연속보의 좌우 지점에 그림과 같이 회전 스프링이 있는 모델을 사용하였으며, 역해석을 위한 모델에서는 회전 스프링이 없는 것을 사용하였다. 회전 스프링의 회전 강성의 평균값 $(\mathbf{K}_S)_m$ 은 들보 휨강성의 10%인 42×10^6 (kN m^2) 이며, 표준편차 σ_S 는 회전 강성의 10%인 4.2×10^6 (kN m^2) 인 것으로 가정하였다. 측정 변위는 스프링의 회전 강성이 평균으로부터 σ_S 만큼 떨어진 $(\mathbf{K}_S)_m - \sigma_S$ 일 때의 값을 가질 때 측정하였으며, 각각 1%, 5% 수준의 무작위 측정 오차가 포함되어 있다.



<그림 4.2> L_1-정규화를 사용한 물성치 추정 결과(측정오차 1%)

: 경계 조건의 이상화에 따른 모델링 오차

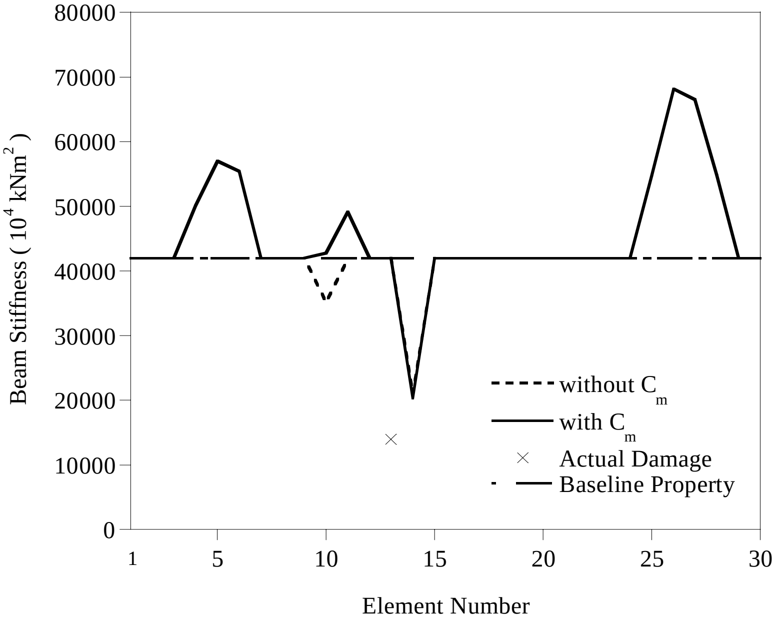


<그림 4.3> L_2-정규화를 사용한 물성치 추정 결과(측정오차 1%)

: 경계 조건의 이상화에 따른 모델링 오차

<그림 4.2>와 <그림 4.3>에는 측정 오차가 1%일 경우 경계 조건의 이상화에 따른 모델링 오차를 필터링하여 시스템 변수를 추정한 결과가 도시되어 있다.

<그림 4.2>는 L_1-정규화를 사용한 물성치 추정 결과이고, <그림 4.3>은 L_2-정규화를 사용한 물성치 추정 결과이다. 점선으로 표시된 것은 모델링 오차를 필터링 하지 않았을 경우의 결과이며, 실선으로 표시된 것은 covariance 행렬을 사용하여 모델링 오차를 필터링 했을 경우의 결과이다. L_1-정규화 또는 L_2-정규화를 사용한 경우 모두 모델링 오차를 필터링하지 않았을 경우 손상이 없는 부재의 휨강성 추정값들이 기저값을 중심으로 매우 크게 진동하고 있는 것을 볼 수 있다. 또한 L_2-정규화를 사용한 경우 보다는 L_1-정규화를 사용한 경우의 물성치

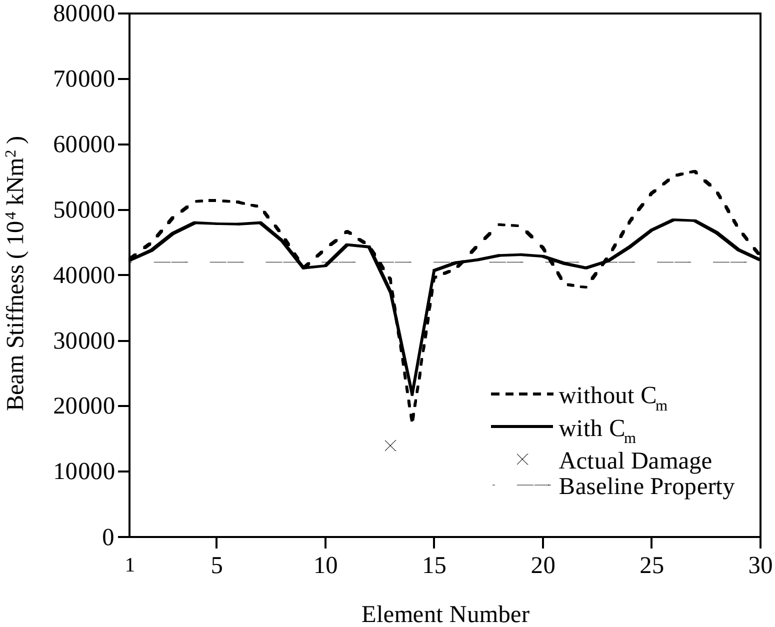


<그림 4.4> L_1-정규화를 사용한 물성치 추정 결과(측정오차 5%)

: 경계 조건의 이상화에 따른 모델링 오차

추정 결과가 보다 정확한 부재의 손상 위치와 정도를 알려주고 있다.

<그림 4.4>와 <그림 4.5>는 같은 예제에서 측정 오차 수준이 5%로 증가하였을 경우의 물성치 추정 결과이다. 측정 오차의 증가로 인해 두 경우 모두 정확히 13번 부재의 손상을 탐지하지 못하고 옆 부재인 14번 부재를 손상 부재로 추정하고 있음을 알 수 있다. 하지만 이 경우 역시 covariance 행렬을 이용하여 모델링 오차를 필터링 하였을 경우 훨씬 좋은 결과를 얻을 수 있다. 즉 측정 오차가 1% 수준일 경우와 마찬가지로 손상을 입지 않은 부재의 물성치 추정값의 진동이 많이 줄어드는 것으로 나타난다. 이는 L_1-정규화와 L_2-정규화를 사용



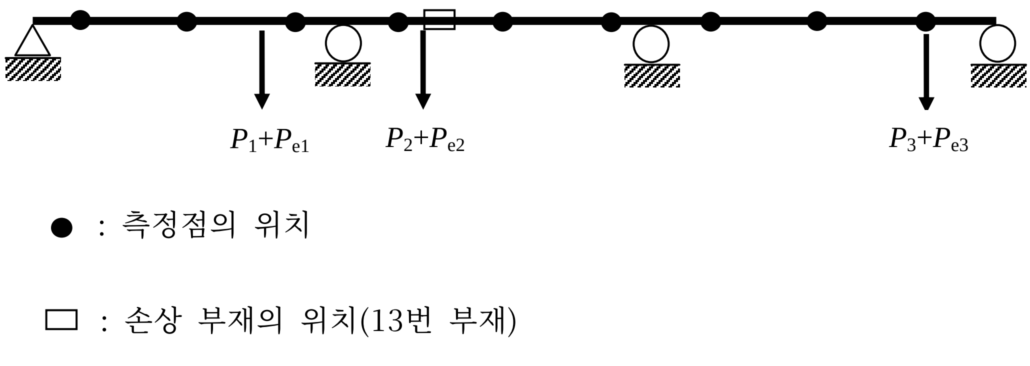
<그림 4.5> L_2-정규화를 사용한 물성치 추정 결과(측정오차 5%)
: 경계 조건의 이상화에 따른 모델링 오차

하였을 경우 공통적으로 나타나는 현상이다. 이상의 네 가지 그래프에서 볼 수 있듯이 손상 탐지에 있어서 물성치의 분포로 symmetric exponential 분포를 사용하여 L_1-정규화를 도입하고 $\mathbf{C}_m$ 행렬로 모델링 오차를 필터링 한 경우가 가장 좋은 결과를 보여주고 있음을 알 수 있다. L_1-정규화를 이용하면 손상부분을 보다 뚜렷하게 찾아주고 손상이 없는 부분의 진동 현상이 줄어드는 효과가 있다.

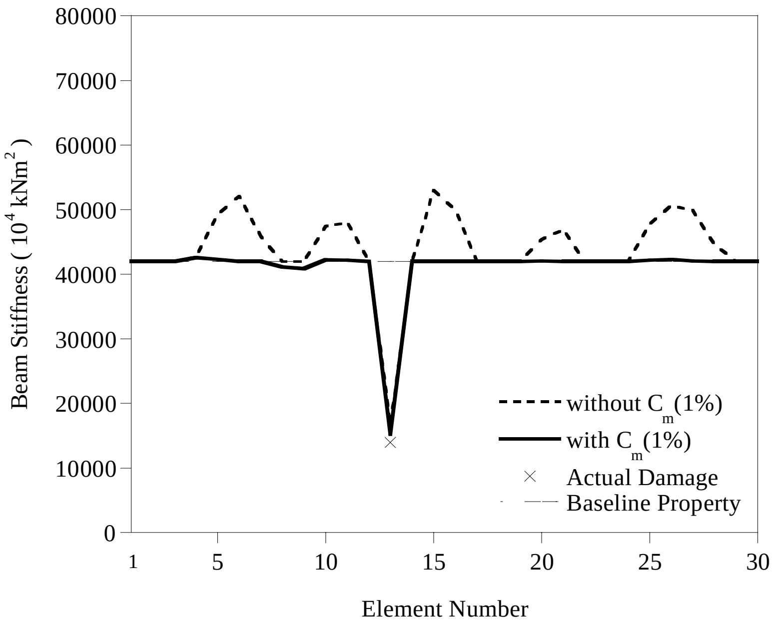
4.2 하중의 이상화에 따른 모델링 오차의 필터링

이번에는 하중의 이상화에 의한 모델링 오차에 관한 예제를 살펴보자. <그림 4.6>에는 이 예제에 사용된 3경간 연속보 모델의 형상이 도시되어 있다. 이 연속보는 4.1절에서 사용된 예제와 유사하다. 이번에는 측정값을 얻기 위한 모델의 경우는 외부하중에 오차 부분이 포함되어 있는 것을 사용하였고, 역해석을 위한 모델의 경우는 외부하중에 오차 부분이 포함되어 있지 않은 것을 사용하였다.

모델에 작용된 하중은 평균 5kN, 표준편차는 그 10%인 0.5kN인 확률 변수이다. 측정변위를 얻기 위해서 평균으로부터 표준편차만큼 떨어진 4.5kN의 하중이 작용한 모델을 사용하였으며, 역해석 모델에서는 평균하중인 5kN의 하중이 작용한 것을 사용하였다.



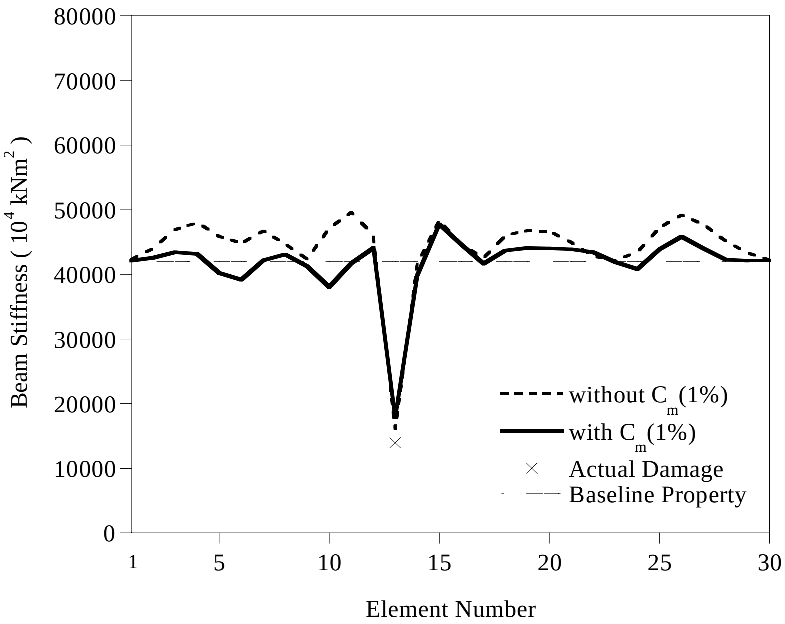
<그림 4.6> 하중의 이상화에 따른 모델링 오차에 사용된 예제



<그림 4.7> L_1-정규화를 사용한 물성치 추정 결과(측정오차 1%)

: 외부 하중의 이상화에 따른 모델링 오차

<그림 4.7>과 <그림 4.8>은 측정 오차가 1%일 경우 하중의 이상화에 따른 모델링 오차를 필터링하여 시스템 변수를 추정한 결과가 도시되어 있다. 먼저 <그림 4.7>은 L_1-정규화를 사용한 물성치 추정 결과이고, <그림 4.8>은 L_2-정규화를 사용한 물성치 추정 결과이다. 또한 점선으로 표시된 것은 모델링 오차를 필터링 하지 않았을 경우의 결과이며, 실선으로 표시된 것은 covariance 행렬을 사용하여 모델링 오차를 필터링 했을 경우의 결과이다. 이 경우 역시 경계 조건의 이상화에 의한 모델링 오차를 필터링하는 예제에서와 같이 L_1-정규화 또는 L_2-정규화를 사용한 경우 모두 모델링 오차를 필터링하지 않았을 경우 손상이 없는 부재의 휨강성 추정값들이 기저값을 중심으로 매우 크게 진동하고 있



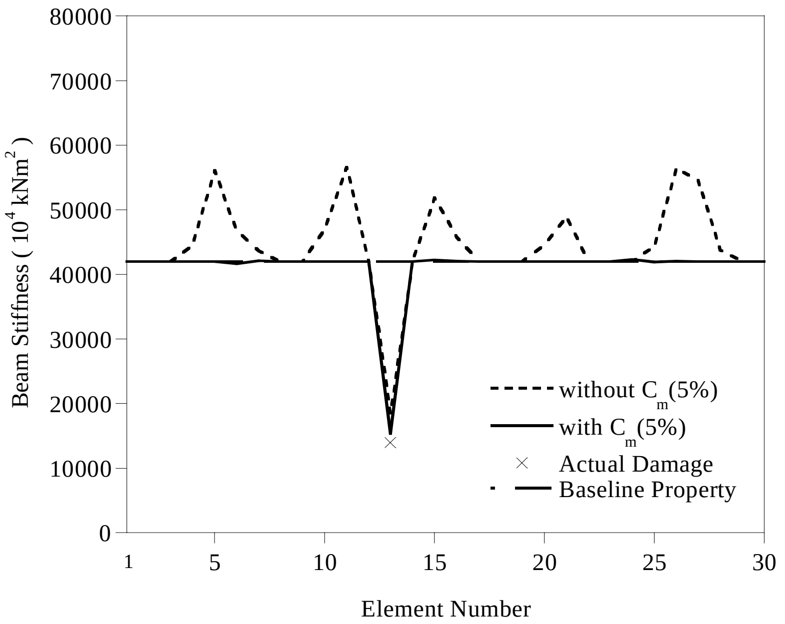
<그림 4.8> L_2-정규화를 사용한 물성치 추정 결과(측정오차 1%)

: 외부 하중의 이상화에 따른 모델링 오차

는 것을 볼 수 있다. 또한 L_2-정규화를 사용한 경우 보다는 L_1-정규화를 사용한 경우의 물성치 추정 결과가 보다 정확한 부재의 손상 위치와 정도를 알려주고 있다.

<그림 4.9>와 <그림 4.10>은 같은 예제에서 측정 오차 수준이 5%로 증가하였을 경우의 시스템 변수 추정 결과이다. <그림 4.9>는 L_1-정규화를 사용한 결과이며 <그림 4.10>은 L_2-정규화를 사용한 결과이다.

먼저 L_2-정규화를 사용한 결과를 살펴보자. $\mathbf{C}_m$ 을 사용하거나 사용하지 않은 경우 모두 정확한 손상탐지가 이루어지지 않고 있다. 물론 13번과 14번 부재의

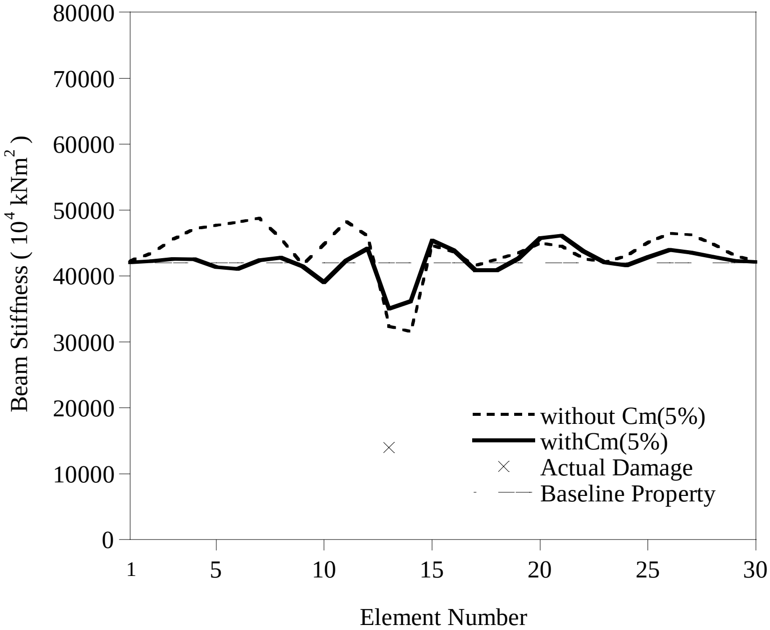


<그림 4.9> L_1-정규화를 사용한 물성치 추정 결과(측정오차 5%)

: 외부 하중의 이상화에 따른 모델링 오차

물성치가 약간 감소한 것으로 나타나기는 하지만 실제 문제에서 이러한 결과가 나타날 경우 이것이 손상에 의한 것인지 각종 오차에 의한 것인지 판별하는 것은 다소 어려울 것이다. 다만 $\mathbf{C}_m$ 를 고려했을 경우 손상을 입지 않은 부재의 휨강성 추정값의 진동이 약간 줄어드는 것을 관찰할 수 있다.

다음은 <그림 4.9>의 L_1-정규화를 사용한 결과를 살펴보자. $\mathbf{C}_m$ 을 고려하거나 고려하지 않은 경우 모두 비교적 정확한 손상 부재의 위치와 정도를 추정하고 있다. 하지만 $\mathbf{C}_m$ 을 이용하여 모델링 오차를 필터링하지 않은 경우 손상을 입지 않은 부재의 물성치 추정값이 매우 크게 진동하고 있음을 알 수 있다. 반



<그림 4.10> L_2-정규화를 사용한 물성치 추정 결과(측정오차 5%)
: 외부 하중의 이상화에 따른 모델링 오차

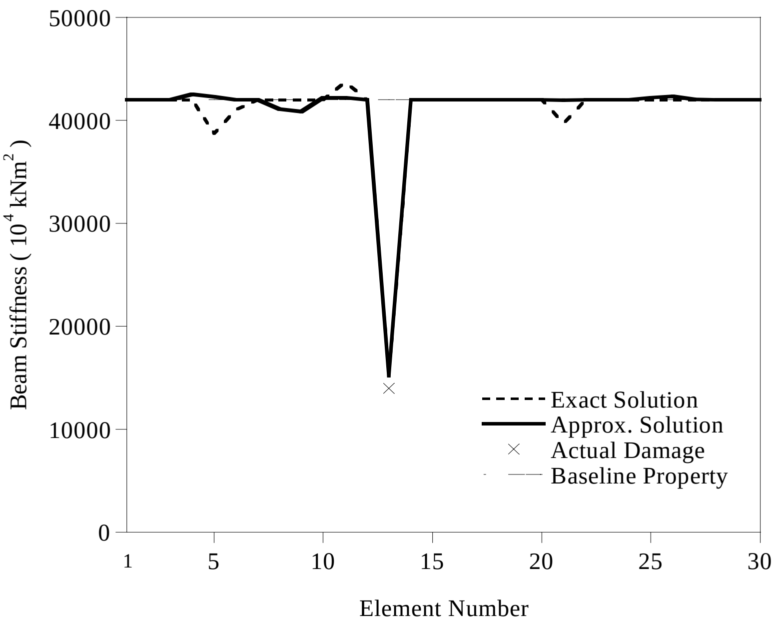
면 $\mathbf{C}_m$을 이용한 경우 손상 부재의 탐지는 물론이거니와 손상을 입지 않은 부재들의 물성치 역시 매우 정확하게 탐지해내고 있다. 따라서 이 예제 역시 앞에서의 예제와 마찬가지로 L_1-정규화와 $\mathbf{C}_m$을 이용한 경우에서 가장 좋은 결과를 보여준다.

4.3 정식을 사용한 모델링 오차의 필터링

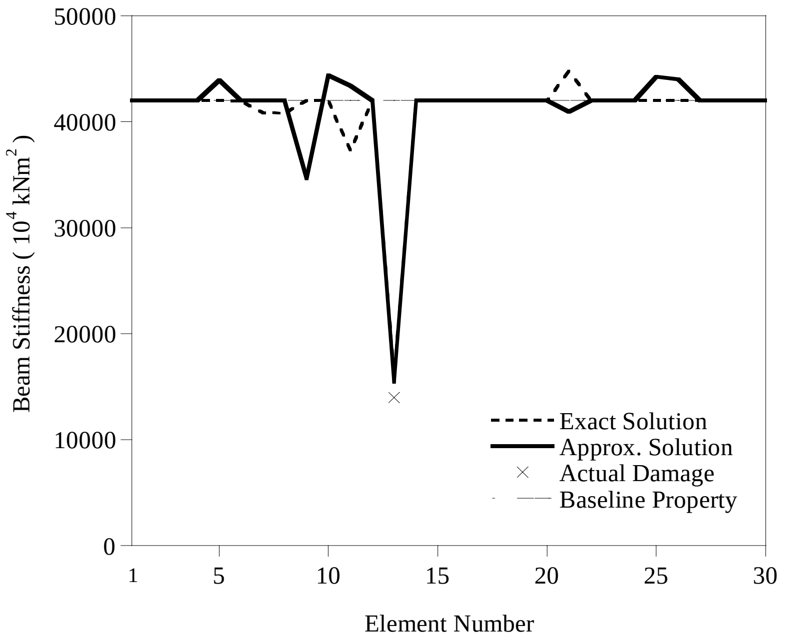
이번에는 3.4.1절의 근사식이 아닌 3.4.2절의 정식을 사용한 경우의 예제를 살펴보자. 온도 하중과 같이 비교적 모델링 오차의 영향이 큰 문제의 경우 근사

식을 사용해서는 정확히 모델링 오차를 필터링 할 수 없고 정식을 사용해야만 한다. 반면에 모델링 오차의 영향이 상대적으로 적은 문제에서 정식을 사용할 경우는 아주 약간의 결과 개선이 있을 것이다. 이 논문에서는 정식을 사용하여 모델링 오차를 필터링하는 예제로 외부 하중에 의한 모델링 오차의 필터링 예제를 사용하였다.

<그림 4.11>과 <그림 4.12>는 각각 측정오차가 1%와 5%일 경우 정식과 근사식을 사용하여 물성치를 추정한 결과를 나타낸 것이다. 정식과 근사식 모두 구조물의 손상 부위와 정도를 효과적으로 추정하고 있다.



<그림 4.11> 정식 L_1-정규화를 사용한 물성치 추정 결과(측정오차 1%)
: 외부 하중의 이상화에 따른 모델링 오차



<그림 4.12> 정식 L_1-정규화를 사용한 물성치 추정 결과(측정오차 5%)
: 외부 하중의 이상화에 따른 모델링 오차

측정 오차가 5%인 경우 손상을 입지 않은 부재의 물성치 추정결과의 진동이 다소 감소하는 것을 확인할 수 있다. 다만 오차의 크기가 비교적 작은 이 문제의 경우 정식을 사용하더라도 그리 큰 효과가 나타나지 않음을 알 수 있다.

온도 하중에 의한 모델링 오차와 같이 비교적 모델링 오차가 큰 문제의 경우 이러한 정식에 의한 L_1-정규화를 적용할 경우에는 보다 효과적으로 모델링 오차를 필터링 할 수 있을 것으로 보인다.

5. 결론

이 연구에서는 SI 기법에서 나타나는 불안정성 해소를 위한 방안으로 확률론적 관점에서의 L_1-정규화 기법을 제시하였다. 기존의 결정론적 SI 기법에서는 측정 오차와 모델링 오차를 독립적으로 분리하여 필터링 할 수 없었고, 다만 모델링 오차를 측정 오차의 일부분으로 간주하여 정규화 효과를 도입, 시스템 변수를 추정하였다.

하지만 확률론적 관점의 SI 기법을 도입할 경우 모델링 오차를 독립적으로 필터링하는 것이 가능해진다. 확률론적 관점에서의 SI 는 임의의 측정값이 주어졌을 때 시스템 변수에 대한 조건부 확률분포에서 maximum likelihood 에 해당하는 시스템 변수를 결정하는 과정으로 정의된다. 이 과정에서 주어진 조건부 확률 함수를 정식화하기 위한 방법으로 Bayesian Theory 를 도입하였다.

기존 지식에 의한 시스템 변수의 확률 분포를 정규분포로 가정할 경우 L_2-정규화 효과가, symmetric exponential 분포로 가정할 경우 L_1-정규화 효과가 나타나게 된다. 또한 측정 오차와 모델링 오차의 필터링을 위하여 측정 오차와 모델링 오차로 인한 에러 벡터를 정의하였고 이 벡터들의 covariance 행렬을 구성하였다. 이 covariance 행렬에 측정 오차 및 모델링 오차에 관한 정보가 포함되며, covariance 행렬을 통해서 모델링 오차의 필터링 효과가 도입된다.

제안된 기법의 유효성을 검증하기 위하여 경계 조건의 이상화에 따른 모델링 오차의 필터링 예제와 외부 하중의 이상화에 의한 모델링 오차의 필터링 예제를 수록하였다. 각각의 예제에서 L_1-정규화와 L_2-정규화의 사용과 covariance 행렬의 사용에 따른 시스템 변수의 추정 결과를 나타냈다. 이상의 결과에서 L_1-정규화를 사용하고 모델링 오차를 필터링하기 위한 covariance 행렬을 사용할 경우 가장 좋은 결과를 나타냄을 알 수 있었다.

또한 상대적으로 모델링 오차가 작은 경우와 큰 경우에 있어서 L_1-정규화 기법을 사용하기 위한 방법으로 근사식과 정식을 제안하였다. 정식을 사용할 경우 보다 나은 결과를 얻을 수 있으나 보다 큰 계산 비용이 소요된다. 하지만 온도 하중에 의한 모델링 오차와 같이 상대적으로 모델링 오차가 큰 경우 근사식을 통해서는 모델링 오차를 적절히 필터링 할 수 없었다. 따라서 이와 같은 경우 정식을 통하여 이를 처리하는 과정이 필수적이다. 추후 이와 같이 모델링 오차가 상대적으로 큰 경우 정식을 통하여 모델링 오차를 필터링 하는 연구가 요구된다.

참고문헌

1. Doebling, S. W., Farrar, C. R., Prime, M. B., and Shevitz, D. W. (1996). "Damage identification and health monitoring of structural and mechanical system from changes in their vibration characteristics: a literature review," *Los alamos National Laboratory Report LA-13070-MS*, Engineering Science and Application Division Engineering Analysis Group, Los Alamos National Laboratory, New Mexico.
2. Hjelmstad, K. D., Shin, S. (1996). "Damage detection and assessment of structures from static response," *J. of Engineering Mechanics*, ASCE, 123(6), 568-576
3. Sanayei, M., and Onipede, O. (1991). "Damage assessment of structures using static test data," *AIAA J.*, 29(7), 1174-1179.
4. Yeo, I. H., Shin, S., Lee, H. S. and Chang, S. P. (2000). "Statistical damage assessment of framed structures from static response," *J. of Engineering Mechanics*, ASCE, 126(14), 414-421.
5. Bui, H. D. (1994). *Inverse problem in the mechanics of materials: An introduction*, CRC Press, Boca Raton.
6. Hansen, P. C. (1998). *Rank-deficient and discrete ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion*, SIAM, Philadelphia.
7. Hjelmstad, K. D. (1996). "On the uniqueness of modal parameter estimation" *J. of Sound and Vibration*, 192(2), 581-598.

8. Lee, H. S., Kim, Y. H., Park, C. J., and Park, H. W. (1999). "A new spatial regularization scheme for the identification of geometric shapes of inclusions in finite bodies," *International J. for Numerical Methods in Engineering*, 46(7), 973-992.

9. Park, H. W., Shin, S. B., and Lee, H. S. (2001). "Determination of an optimal regularization factor in system identification with Tikhonov function for linear elastic continua," *International J. for Numerical Methods in Engineering*, 51(10), 1211-1230.

10. 박현우 (2002), “구조물의 손상진단을 위한 SI 기법에서의 정규화 기법”, 서울대학교 토목공학과.

11. Watson, G. A. (1980). *Approximation Theory and Numerical Methods*, Wiley, Chichester.

12. 안병규 (2002), “PP-TSVD 에 의한 유한체 내부영역의 물성치 결정을 위한 시스템확인기법”, 서울대학교 지구환경시스템공학부.

13. Golub, G. H., and Van Loan, C. F. (1996). *Matrix comutations*, 3rd ed., The Johns Hopkins University Press, London.

14. Johnson, C. (1987). *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Methods*, Cambridge University Press, New York.

15. Oden, J. T. (1979). *Applied Functional Analysis: A First Course for Students of Mechanics and Engineering Science*, Prentice-Hall, Enlgewood Cliffs, NJ.

16. Hansen, P. C. (1992). "Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve," *SIAM review*, 34(4), 561-580.

17. Lee, H. S., Park, C. J., and Park, H. W. (2000). "Identification of geometric shapes and material properties of inclusions in two dimensional finite bodies by boundary

parameterization," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181(1-3), 1-20.

18. Vogel, C. R. (1986). "Optimal choice of a truncation level for the truncated SVD solution of linear first kind integral equations when data are noisy," *SIAM J. of Numerical Analysis*, 23(1), 109-117.
19. Morozov, V. A. (1993). *Regularization methods for ill-posed problems*, M. Stessin, translator, CRC Press, Boca Raton.
20. Barrondale, I., and Roberts, F. D. K. (1973). "An improved algorichm for descrete l_1 linear approximation," *SIAM J. Numerical Analysis*, 10(5), 839-848.
21. Tarantola, A. (1987). *Inverse Problem Theory - Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation*, Elsevier Science Publisher B. V., New York.
22. 박만우 (2003), “Bayesian Theory 에 기초한 손상탐지 기법”, 서울대학교 지구환경시스템공학부.

ABSTRACT

This paper presents a new approach to eliminate effect of modeling errors in system identification scheme. It is well-known that SI problems are a type of ill-posed problems, which suffers from instabilities characterized by non-uniqueness and discontinuity of solutions. The instabilities become severe when measured responses of structures are noisy and incomplete. Regularization techniques have been proven to be very effective in stabilizing the ill-posedness of inverse problems such as SI problems of mechanical systems. Most previous works on the regularization of SI scheme have concerned on the measurement error rather than modeling error.

The modeling error represents the discrepancy between a real structure and its mathematical model employed in the SI. The modeling errors cannot be filtered with regularization techniques used before. Because the measurement errors are random while the modeling errors are systematic in nature. This paper proposes a new error function based on Bayesian theory to reduce the instability caused by modeling error. The L_1-regulariztion function is employed to filter out noise in measure responses. The optimization for SI is performed by the PP-TSVD.

The validity of the proposed method is demonstrated through numerical examples on discrete structures under various damage scenarios. The proposed method is able to control the modeling error and measurement error effectively by the combination of the new error function and L_1-regulariztion function.

Key Word

Statistical SI, Bayesian Theory, L_1-regularization, L_2-regularization, normal distribution, symmetric exponential distribution, measurement error, modeling error, covariance matrix.

Student Number : 2002-21289