

공학석사학위논문

Element-Free Galerkin 법을 이용한
균열 전파 해석

Analysis of Crack Propagation
Using Element-Free Galerkin Methods

2002 년 2 월

서울대학교 대학원
지구환경시스템공학부
안 정 진

초록

이 논문에서는 요소를 사용하지 않고 절점들만을 이용하여 해석이 가능한 Element-Free Galerkin (EFG) 법을 사용하여 초기균열을 지닌 강재가 반복피로하중을 받는 경우 균열이 전파하는 과정을 해석하는 방법을 제안한다. 절점들만으로 해석하기 위하여 이동최소제곱보간법을 사용하여 형상함수를 구한다. 이 과정에서 영향영역과 가중함수의 개념을 도입하며 연속한 미분항을 구하기 위하여 exponential 가중함수를 사용한다. EFG법의 형상함수가 kronecker delta 조건을 만족시키지 못함으로써 발생하는 경계조건의 처리문제를 해결하기 위하여 Lagrange Multiplier를 사용한다. 요소의 개념이 사용되지 않으므로 수치 적분을 위한 별도의 cell structure를 도입한다.

균열해석을 위하여 균열선단의 특이성과 균열면의 불연속성을 반영할 수 있는 수치적 기법을 도입하여 균열을 모형화한다. 균열선단의 형상함수의 불연속 문제를 해결하기 위하여 빛의 회절 원리를 이용한 Diffraction Method를 사용한다.

혼합모드상태의 응력확대계수를 계산하기 위하여 J-integral을 면적분의 형태로 변환하여 적용시킨 Conservation integral을 사용한다. 균열의 성장각을 계산하기 위하여 최대주응력한계론을 사용하며 피로균열의 성장량을 계산하기 위하여 Paris의 식을 사용하고 비선형 문제를 해결하기 위하여 반복계산법을 도입한다. 균열해석과 피로 균열 전파 해석해 예제를 통해 EFG법의 타당성과 효율성을 검증한다.

주요어

Element-Free Galerkin법, 이동최소제곱보간법, 영향영역, 가중함수, diffraction method, 피로균열전파해석

학번 : 2000-21548

목차

초록.....	i
목차.....	iii
그림목차.....	v
표목차.....	vi
1. 서론.....	1
2. Element-Free Galerkin법을 이용한 균열 해석.....	4
2.1. 이동최소제곱보간법.....	4
2.2. 영향영역과 가중함수.....	8
2.3 Lagrange Multiplier를 이용한 경계조건 처리와 이산방정식	11
2.4 수치적분	14
2.5 균열의 모형화	16
2.6 Diffraction method	17
3. 균열 전파 해석 기법	20
3.1 응력확대계수의 계산	20
3.2 균열 성장 방향 예측.....	22
3.3 피로 균열 성장량 계산	25

4. 예제	27
4.1 균열선단의 절점 배치에 따른 해석 예제	27
4.2 전단응력을 받는 편측 균열 문제.....	31
4.3 모드 I 피로 균열 전파 문제.....	33
4.4 혼합모드의 피로 균열 전파 문제.....	35
5. 결론.....	39
참고문헌.....	42

그림목차

그림 1. 2차원에서의 원형의 영향영역	11
그림 2. EFG법에서 적분을 위한 셀 구조	15
그림 3. 균열의 모형화를 위한 절점배치와 균열 성장에 따른 복절점 배치 예	17
그림 4. 균열 선단 부근에서의 Visibility criterion에 의한 영향영역.....	19
그림 5. 균열 선단 부근에서의 Diffraction method에 의한 영향영역	19
그림 6. 3차원에서의 균열 전파 벡터 형상	23
그림 7. 인장을 받는 편축 균열 (예제 1).....	28
그림 8. 균열 선단 부근의 절점 배치 예	29
그림 9. 전단응력을 받는 편축 균열 (예제 2).....	31
그림 10 양축 인장을 받는 모드 I 피로 균열 전파 문제 (예제 3).....	33
그림 11 피로 하중 재하에 따른 균열 성장 곡선	34
그림 12. 혼합모드의 피로 균열 전파 문제 (예제 4).....	35
그림 13. 경사 균열의 피로 균열 전파 형상	36
그림 14. 경사균열의 균열 성장 곡선	37
그림 15. 균열 위치에 따른 등가 응력확대계수.....	38

표 목차

표 1. 절점배치에 따른 응력확대계수 값 비교	30
표 2 초기 균열 상태에서의 혼합모드 응력 확대 계수	32

1. 서론

임의의 균열 전파를 모델링 하는 것은 어떠한 공학적 대상물의 수명을 예측하는데 있어 매우 중요한 요소이다. 그럼에도 불구하고 이는 풀리지 않는 문제로 남아 있다. 오늘날 비선형 재료로 이루어진 구조물이나 셸 구조물 또는 온도 변화에 의한 힘을 받는 구조물 등의 매우 다양한 경우에서의 임의의 균열 전파를 모델링 하는 방법이 없다고 할 수 있다. 지금까지는 유한요소법과 경계요소법이 균열 전파를 해석하는데 주로 사용되어 왔지만 이들은 공학적인 문제에 적용시키는데 있어 근본적인 단점들을 가지고 있다. 유한요소법은 해석대상을 유한개의 작은 요소들로 나누어 해석하는 과정에서 요소와 절점들간의 규칙성을 항상 만족시켜주어야 한다. 이러한 제약성은 특이현상이나 응력집중이 발생하는 문제, 기하학적 형상이 계속적으로 변화하여 이에 따라 요소망을 연속적으로 재구성해야만 하는 공학문제 등에 있어서 유한요소법의 사용을 어렵게 만들고 있으며 또한 수치해의 정확성을 보장하지 못하게 된다. 또 경계요소법은 요소망을 재구성해야 하는 문제는 대부분 피할 수 있지만 편미분 방정식에서 Green함수를 필요로 하기 때문에 다룰 수 있는 문제들이 한정되어 있다. 이러한 단점들을 보완하는 새로운 수치해석 방법인 무요소 해석법이 최근 Belytschko [Belytschko et al, 1996]등에 의해 활발히 연구되고 있다. 이 방법은 요소를 배제하고 절점만으로 해석대상을 모델링 할 수 있으므로 균열해석에 있어서 특히 효과적이다.

이 연구에서 사용한 Element-Free Galerkin (EFG) 법은 요소의 개념이 없이 절점과 그 절점을 둘러싸는 영향영역만을 가지고 문제를 해석한다. 따라서 이산방정식을 세우기 위해서 기하학적 형상과 절점군들만이 필요하기 때문에 균열성장과 같은 문제들을 모델링 하기가 매우 용이하고, 요소의 찌그러짐으로 인한 해의 정확도 저하가 일어나지 않는다. 그리고 영역내에서 절점들의 위치를 임의로 배치 시킬 수 있기 때문에 균열 선단의 응력 집중을 효과적으로 나타내기 위해서 절점들을 높은 밀도로 분포 시킬 수 있는 장점이 있다. 또 요소가 없으므로 균열의 진행에 따른 균열면의 변화를 경계조건의 변화로 간단히 나타낼 수 있으므로 요소를 재구성하는 번거로움이 없다. 이러한 이유들로 EFG법은 균열전파문제 해석에 있어서 유한요소법을 사용하는 것보다 정확성과 효율성이 우수하다고 알려져 있다.

이 연구에서는 이러한 EFG법을 이용하여 피로균열성장문제를 해석하였다. EFG법을 이용하여 임의의 균열을 가진 구조물을 해석할 수 있는 프로그램을 개발하고 여기에 최대 주응력 한계론과 Paris Equation을 도입하여 반복적인 피로 하중에 의한 균열의 전파를 해석하였다.

2장에서는 EFG법의 정식화 과정과 EFG법에서 매우 중요한 역할을 하는 가중함수와 영향영역의 의미와 결정, 그리고 EFG법에서의 Lagrange Multiplier를 이용한 경계조건 처리 방법, 적분 Cell을 이용한 수치적분 방법 및 최종적인 이산방정식에 대해 기술하였고 EFG법에서 균열을 보다 효과적으로 해석하기 위한 균열 모형화 방법 및 균열 선단 주변에서의 형상함수와 가중함수의 연속성을

유지시켜주기 위한 **diffraction method** 방법을 설명하였다. 3장에서는 응력확대계수를 계산하는 방법과 균열의 전파각을 계산하는 방법, 피로균열의 성장 법칙을 이용하여 균열의 성장량을 예측하는 기법에 대하여 설명하였다. 4장에서는 수치예제를 통해 EFG법으로 해석한 결과의 타당성을 입증하였다. 5장에서는 결과를 종합하고 본 논문이 가지는 의의에 대하여 논하였다.

2. EFG법을 이용한 균열 해석

어떠한 요소에서 유효한 형상함수를 사용하여 근사 변위함수를 구하는 유한요소법과는 달리 EFG법에서는 기준점으로부터 일정한 거리 내에 포함되는 점들을 그 기준점의 영향영역에 포함되어 있다고 생각하여 임의로 분포되어 있는 영향영역내의 점들을 취하여 이동최소제곱보간법[Lancaster and Salkauskas, 1981]에 의해 기준점과 영향영역내의 다른 절점들과의 상관관계를 고려하여 형상함수를 결정하고 근사 변위함수를 구한다. 이 과정에서 형상함수는 절점과 절점의 거리에 의해 결정되기 때문에 요소가 사용되지 않는다.

2.1 이동최소제곱보간법

주어진 영역 Ω 의 임의의 점 x 에서의 변위함수 $u(x)$ 의 이동최소제곱보간에 의한 근사변위 함수는 공간좌표계의 다항식 $p(x)$ 와 다항식의 각 항들에 대응하는 계수값 $a(x)$ 를 사용하여 다음과 같이 정의된다.

$$u^h(x) = \sum_j^m p_j(x) a_j(x) = \{\mathbf{p}(x)\}^T \{\mathbf{a}(x)\} \quad (2.1)$$

여기서 계수 $a_j(x)$ 는 x 의 함수이며, 이동최소제곱보간에 의한 변위를 결정해주는 미지값이다. 임의의 점 x 에서의 미지값 $a(x)$ 는 x 를 기준으로 하는 일정한 영향 영역내의 절점의 변위 오차에 대한 가중잔여치, 즉 가중이산형 L_2

norm을 최소화 시켜 구할 수 있다.

$$u^h(x) = J = \sum_I^n w(x-x_I) [\mathbf{p}(x)]^T \{\mathbf{a}(x) - \mathbf{u}_I\}^2 \quad (2.2)$$

여기서 n 은 x 를 중심으로 일정 거리 내에 포함되는 절점들의 개수이고, $w(x-x_I)$ 는 x 점으로부터 떨어진 거리에 따른 가중함수이다. 어떤 점 x 를 중심으로 일정 거리 내에 포함되는 점들에서 가중함수는 0이 아니며 이와 같은 점들을 x 의 영향 영역(Domain Of Influence)내의 점들이라고 부른다.

(2.2)의 식은 다음과 같은 형태로 쓸 수 있다.

$$\mathbf{J} = (\mathbf{Pa} - \mathbf{u})^T \mathbf{W}(x)(\mathbf{Pa} - \mathbf{u}) \quad (2.3)$$

여기서,

$$\mathbf{u}^T = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \dots & p_m(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_n) & p_2(x_n) & \dots & p_m(x_n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}(x) = \begin{bmatrix} w(x-x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w(x-x_2) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w(x-x_n) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{a}(x)$ 에 대해 가중잔차를 최소화시키면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{A}(x)\mathbf{a}(x) - \mathbf{B}(x)\mathbf{u} = 0 \quad (2.4)$$

여기서,

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(x) \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n w(x_i) p_1(x_i) p_1(x_i) & \sum_{i=1}^n w(x_i) p_2(x_i) p_1(x_i) & \cdots & \sum_{i=1}^n w(x_i) p_m(x_i) p_1(x_i) \\ \sum_{i=1}^n w(x_i) p_1(x_i) p_2(x_i) & \sum_{i=1}^n w(x_i) p_2(x_i) p_2(x_i) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n w(x_i) p_1(x_i) p_m(x_i) & \cdots & \cdots & \sum_{i=1}^n w(x_i) p_m(x_i) p_m(x_i) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(x) = \begin{bmatrix} w(x_1) p_1(x_1) & w(x_2) p_1(x_2) & \cdots & w(x_n) p_1(x_n) \\ w(x_1) p_2(x_1) & w(x_2) p_2(x_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ w(x_1) p_m(x_1) & \cdots & \cdots & w(x_n) p_m(x_n) \end{bmatrix}$$

따라서, $\mathbf{a}(x)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{a}(x) = \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x) \mathbf{u} \quad (2.5)$$

식 (2.1)과 (2.5)로부터 이동최소제곱보간에 의한 근사 변위함수를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u^h(x) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x) \mathbf{u} = \sum_{l=1}^n \Phi_l^k(x) u_l \quad (2.6)$$

여기서, 영향영역내에 속하는 임의의 절점 I의 형상함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\Phi_I(x) = \sum_j^m \mathbf{p}_j(x) (\mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x))_{jI} \quad (2.7)$$

위에서 언급한 매트릭스 \mathbf{A} 는 영향영역내의 절점들의 상대적 위치에 영향을 받으며 \mathbf{A}^{-1} 를 구하기 위해서는 영향영역내에 포함되는 절점들의 수가 다항식의 항의 수 m 보다 같거나 커야 한다.

형상함수의 미분형은 다음과 같이 구할 수 있으며 이를 이용하여 강성도 매트릭스를 구성할 수 있다.

$$\Phi_{I,i} = \sum_j^m \left\{ \mathbf{p}_{j,i} (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})_{jI} + \mathbf{p}_j (\mathbf{A}^{-1}_{,i} \mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{,i})_{jI} \right\} \quad (2.8)$$

여기서,

$$\mathbf{A}_{,i}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{,i} \mathbf{A}^{-1} \quad (2.9)$$

이다.

실제 연산 과정에서는 다음과 같은 방법을 사용함으로써 계산 시간을 현저히 감소시킬 수 있다.

$$\Phi_I(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}_I(\mathbf{x}) = \gamma^T(\mathbf{x}) \mathbf{B}_I(\mathbf{x}) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \gamma(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}) \quad (2.11)$$

$$\mathbf{A}_{,x}(\mathbf{x})\gamma(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{x})\gamma_{,x}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_{,x}(\mathbf{x}) \quad (2.12)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\gamma_{,x}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_{,x}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_{,x}(\mathbf{x})\gamma(\mathbf{x}) \quad (2.13)$$

식 (2.11)과 식 (2.13)에서 $\gamma(\mathbf{x})$ 와 $\gamma_{,x}(\mathbf{x})$ 를 구하여 형상함수의 미분형을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Phi_{I,x} = \gamma_{,x}^T(\mathbf{x})\mathbf{B}_I(\mathbf{x}) + \gamma(\mathbf{x})^T \mathbf{B}_{I,x}(\mathbf{x}) \quad (2.14)$$

2.2 영향영역과 가중함수

EFG법을 해의 정도를 좌우하는 중요한 요소 중의 하나는 가중함수(weight function)를 결정하는 일이다. 가중함수는 기준점 x 를 중심으로 일정한 크기의 영향영역내에 포함된 임의의 절점이 갖게 되는 가중치를 결정해 주는 함수이다.

가중함수는 기준점 x 에 가까운 점 x_I 에서는 상대적으로 큰 값을 가지고 반대로 x 에서 먼 점 x_I 에서는 작은 값을 가진다. 즉, 가중함수는 x 와 x_I 의 거리가 늘어날수록 감소해야만 한다. 따라서 다음과 같이 두 점 사이의 거리에 종속되는 가중함수를 고려할 수 있다.

$$w(x - x_I) = w_I(d) \quad (2.15)$$

여기서, $d = \|x - x_l\|$ 이며 두 절점 사이의 거리를 나타낸다. 가중함수를 보다 일
 반화하면 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$w_l(x) \equiv w_l(d^{2k}) \tag{2.16}$$

여기서, $w_l(d^{2k})$ 는 d 에 관하여 처음 m 차 미분항까지 연속한 것으로 가정한다.
 대표적인 가중함수의 형태는 다음과 같다.

Exponential weight function :

$$w_l(d^{2k}) = \begin{cases} \frac{e^{-(d_l/c)^{2k}} - e^{-(d_{ml}/c)^{2k}}}{(1 - e^{-(d_{ml}/c)^{2k}})}, & d_l \leq d_{ml} \\ 0, & d_l > d_{ml} \end{cases}$$

Cubic spline weight function :

$$w_l(d^{2k}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\left(\frac{d_l}{d_{ml}}\right)^2 + 4\left(\frac{d_l}{d_{ml}}\right)^3, & d_l \leq \frac{d_{ml}}{2} \\ \frac{4}{3} - 4\left(\frac{d_l}{d_{ml}}\right) + 4\left(\frac{d_l}{d_{ml}}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{d_l}{d_{ml}}\right)^3, & \frac{d_{ml}}{2} < d_l \leq d_{ml} \\ 0, & d_l > d_{ml} \end{cases}$$

Quartic spline weight function :

$$w_l(d^{2k}) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{d_l}{d_{ml}}\right)^2 + 8\left(\frac{d_l}{d_{ml}}\right)^3 - 3\left(\frac{d_l}{d_{ml}}\right)^4, & d_l \leq d_{ml} \\ 0, & d_l > d_{ml} \end{cases}$$

이 연구에서는 연속한 미분항을 얻기 위하여 exponential 가중함수를 사용하였다.

Exponential 가중함수에서 c 는 상대적인 가중치를 조정하는 상수이고, $d_I = \|x - x_I\|$ 이다. d_{mI} 는 x_I 의 영향영역의 크기이고 이는 A matrix가 singular하지 않도록 결정되어야 한다.

c 의 정의는 다음과 같다.

$$c = \alpha c_I \quad (2.17)$$

여기서, $1 \leq \alpha \leq 2$ 의 값을 사용하였다.

$$c_I = \max_{J \in S_J} \|x_J - x_I\| \quad (2.18)$$

여기서, S_J 는 x_I 를 둘러싸는 다각형을 만들 수 있는 x_I 주변의 절점들의 최소 집합을 의미한다. 만약 절점들이 균일하게 분포되어 있다면 c_I 는 절점사이의 최대 거리가 된다. 절점들이 무작위로 분포되어 있는 경우에는 x_I 를 포함하고 있는 적분 셀의 대각선 길이로 정의된다. Exponential 가중함수는 c 가 감소하면 기준점 x 에 가까운 x_I 에서는 더 높은 가중치를, 기준점 x 에서 멀리 떨어진 점에서는 더 낮은 가중치를 얻는다.

가중함수의 선택과 더불어 영향영역의 선택 또한 해의 정도를 결정하는 중요한 요소이다. 영향영역에 의해 이동최소제곱에 의해 근사해를 도출할 때, 몇 개

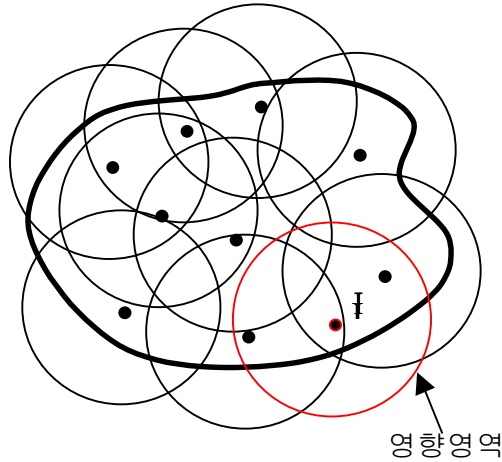


그림 1. 2차원에서의 원형의 영향영역

의 주변 절점들을 이용하여 기준점의 변위함수를 결정할 것인지가 결정된다. 기준점에 대한 영향영역은 2차원 해석이 경우는 주로 원형이나 사각형 영역을 사용하고 3차원 영역에서는 구형 영역을 사용한다. 영향영역 내에 적절한 개수의 절점이 포함되도록 해야만 수치해의 정도가 보장되는 동시에 빠른 계산을 수행할 수 있다. 그림 1은 2차원에서 각 절점들이 원형 영향영역을 선택한 예를 보여준 것이다.

2.3 Lagrange Multiplier를 이용한 경계조건 처리와 이산방정식

EFG에서는 형상함수가 Kronecker delta condition을 만족하지 못한다. ($\Phi_I(x_j) \neq \delta_{IJ}$) 즉, 유한요소법에서는 필수경계상에 있지 않은 절점들의 형상함수는 경계에서 자동적으로 0이 되지만 EFG법에서는 경계상에 있지 않은 절점

의 형상함수를 계산할 때 그 영향 영역 내에 필수경계상의 절점이 포함되게 되면 경계상의 절점도 어떤 값을 가지게 되므로 구속조건이나 미리 정의된 경계조건이 완전하게 반영되지 못하게 된다. 마찬가지로 자연경계조건에서도 어떤 절점에 가해진 하중은 이 절점의 형상함수를 구성하면서 그 영향이 주변의 다른 절점으로 옮겨가게 된다.

자연경계조건(traction boundary condition)을 처리[Zouhui, 2000]하기 위해선 먼저 절점들을 경계면에 배치시킨 뒤 이 경계면상에 Gauss 적분점들을 설정하여 절점들에 가해진 하중을 이 적분점들로 분배시킨다. 그 후 각 적분점을 기준으로 영향영역을 설정하여 형상함수를 계산하여 영향영역내의 점들에 하중들을 다시 분배시킨다. 이 과정에서 이전에 사용했던 영향영역과 가중함수를 그대로 사용한다.

변위 경계 조건(essential boundary condition)을 처리하기 위해서 사용되는 방법으로는 penalty 방법, 경계근처에서 FEM 요소를 사용하는 방법[Belytschko and Krongauz, 1996] 등이 있지만 이 연구에서는 Lagrange multiplier를 포함하는 구속조건식을 변분 형식에 추가시켜 줌으로써 구속조건을 강제적으로 만족시키는 방법[Belytschko et al, 1994]을 사용하였다. 이 방법은 적용이 매우 간단하지만 강성도 행렬이 정치(positive-definite)가 아니고 구속조건이 늘어날수록 전체 강성도 행렬의 크기가 커져 계산량이 많아지는 단점이 있다.

Γ 로 경계 조건이 주어진 영역 Ω 내에서의 이차원 문제를 고려해 보면 평형 방정식은 다음과 같다

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{b} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2.19)$$

경계 조건은 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (2.20)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (2.21)$$

평형 방정식의 변분형태는 다음과 같다 .

$$\int_{\Omega} \delta(\nabla_s \mathbf{v}^T) : \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta v^T \cdot \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta v^T \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \lambda^T \cdot (u - \bar{u}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta v^T \cdot \lambda d\Gamma = 0 \quad (2.22)$$

식(2.22)는 평형방정식과 경계조건을 모두 만족한다. 여기서 오른쪽 두 항이 Lagrange Multiplier를 사용하여 구속 조건의 만족시켜 준 부분이다.

Lagrange Multiplier λ 는 다음과 같다.

$$\lambda(x) = N_I(s) \lambda_I \quad x \in \Gamma_u \quad (2.23)$$

$$\delta \lambda(x) = N_I(s) \delta \lambda_I \quad x \in \Gamma_u \quad (2.24)$$

여기서 $N_I(s)$ 는 Lagrange interpolant이고 s 는 경계를 따라서의 호의 길이이다.

식 (2.22), (2.23), (2.24)로부터 최종적인 이산방정식은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

and

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J d\Omega \quad (2.26a)$$

$$\mathbf{G}_{IK} = - \int_{\Gamma_u} \Phi_I \mathbf{N}_K d\Gamma \quad (2.26b)$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Gamma_t} \Phi_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \Phi_I \mathbf{b} d\Omega \quad (2.26c)$$

$$\mathbf{q}_K = - \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_K \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (2.26d)$$

여기서,

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \Phi_{I,x} & 0 \\ 0 & \Phi_{I,y} \\ \Phi_{I,y} & \Phi_{I,x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_K = \begin{bmatrix} N_K & 0 \\ 0 & N_K \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \text{ for plane stress}$$

2.4 수치적분

전체 강성도 매트릭스를 구성하기 위해서는 해석대상 영역에 대한 수치적분이 필요하다. EFG법에서는 요소의 개념을 사용하지 않으나 전체영역에 대한 수치적분을 수행하기 위해서는 대상영역을 임의의 개수의 셀로 나눌 필요가 있다.

수치적분은 각 셀의 가우스 적분점을 이용하여 수행되며 해의 정도를 높이기 위해서는 고차의 Gauss Quadrature rule을 사용하는 것이 좋다. 무요소 절점법에서의 수치적분과정은 유한요소해석의 수치적분과정과 매우 유사하다. 다만 다른점은 절점들의 분포와 셀의 가우스 적분점의 위치에 따라 적분점을 기준으로 한 영향영역 내에 포함되는 절점들의 수가 달라질 수 있으며 이 셀들은 절점들과 독립적이라는 것이다. 이에 따라 각 가우스 적분점에서 구성되는 강성도 매트릭스의 크기는 각기 달라질 수 있으며 전체 강성도 매트릭스를 구성함에 있어 assembly과정에 이를 반영해야 한다.

영향 영역은 어떠한 경계도 가로지를 수 없으며 균열문제와 같이 불연속성이 존재하는 문제에 있어서는 어느 기준점으로부터 취하는 영향영역이 불연속 경계부분을 가로질러 가지 않도록 하기 위한 판별조건식이 추가로 요구된다.

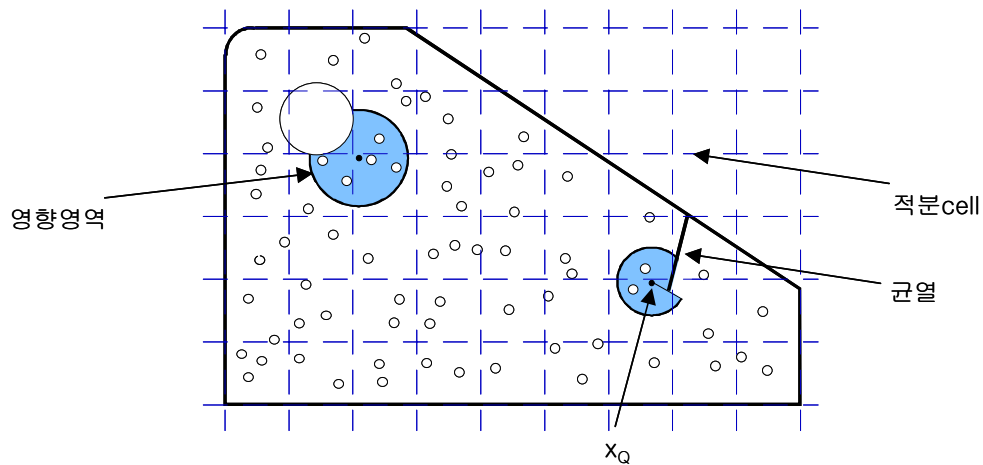


그림 2. EFG법에서 적분을 위한 셀 구조

Quadrature point의 개수는 셀 안의 절점의 개수에 의해 결정된다. 일반적으로 m 개의 절점이 있는 셀에서는 $n_Q \times n_Q$ Gauss Quadrature가 사용된다.

여기서, $n_Q = \sqrt{m} + 2$ 이다.

2.5 균열의 모형화

EFG법에서 균열을 모형화 하는 과정에서는 적절히 배치된 절점들만을 이용하여 균열에 의한 불연속성과 특이성을 표현하는 것이 매우 중요한 일이다. 특히 수치적인 기법을 이용하여 균열의 위치를 인식시키고 처리하는 과정의 도입이 필요하며, 또한 균열전파를 해석하기 위해서는 균열의 성장경로를 따라 생성되는 새로운 균열의 기하학적 형상을 묘사해 주어야 한다. [Belytschko et al, 1995; Belytschko and Tabbara, 1996; 이상호 외,1999]

EFG법에서 균열의 위치를 규정하기 위하여 연속적인 선분들을 이용하여 표현한다. 이때 균열을 수치적으로 인식하기 위하여 선분의 양쪽에 매우 가까운 거리로 복절점을 배치시킨다. 이 복절점들은 균열의 반대편에 서로 위치하고 있기 때문에 서로 간에 영향을 미치지 않아야 하며 영향영역도 균열의 불연속성을 반영하여 결정되어야 한다.

균열전파에 있어서는 균열이 성장할 경우 새로운 선분이 기존의 균열 선단에 추가되며 새롭게 구해진 균열선단에 절점을 추가시키고 기존의 균열선단에 있던 절점을 균열면을 중심으로 서로 반대방향으로 나누어 2개의 절점으로 분리

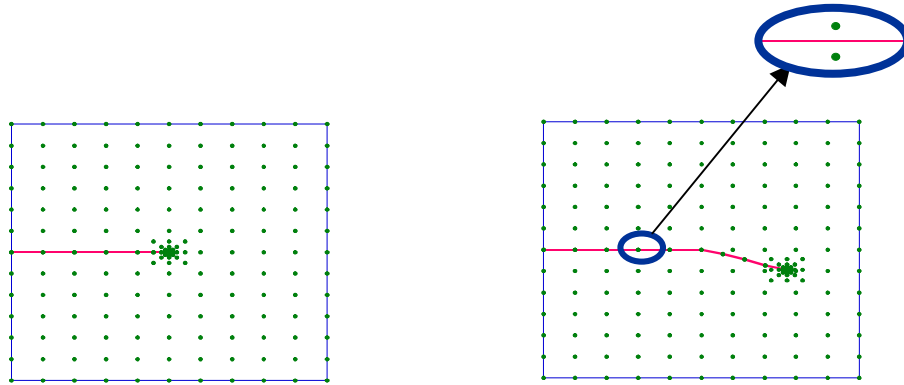


그림 3. 균열의 모형화를 위한 절점배치와 균열 성장에 따른 복절점 배치 예시
 시켜 배치한다.[Belytschko, Lu and Gu, 1995] 또 수치해의 정도를 향상시키기 위
 해서 그림 3에서와 같이 적절한 개수의 절점을 균열 선단 주변에 추가적으로
 배치시켜서 자유도를 증가시키는 방법이 사용된다. 일반적으로 균열 선단 주변
 에 일정간격으로 동심원 모양의 절점군을 배치시킴으로써 쉽게 해의 정도를 향
 상시킬 수 있다.[Belytschko et al, 1995] 원안의 그림은 균열 선상의 절점을 복절
 점으로 나누어 배치한 예이다.

2.6 Diffraction method

영향 영역은 어떠한 경계도 가로지를 수 없으며 균열문제와 같이 불연속성이
 존재하는 문제에 있어서는 어느 기준점으로부터 취하는 영향영역이 불연속 경
 계부분을 가로질러 가지 않도록 하기 위한 판별조건식이 추가로 요구된다. EFG
 method에서 균열과 같은 불연속선이 있는 곳에서는 영향 영역을 결정할 때, 그

림 4와 같이 불연속면을 불투명한 면으로 생각하고 절점과 적분점 사이에 빛이 지나가는 것으로 고려하는 visibility criterion이 주로 사용된다. 이 방법은 그림 4의 J 절점과 같은 경우에 대해서는 잘 성립되어 변위장과 응력장이 적절히 불연속하도록 해준다. 하지만 I 절점과 같이 crack tip 근처의 점들에 대해서는 AB에서 형상함수 뿐 아니라 가중함수에서도 의도하지 않은 불연속이 생기게 된다. 이러한 단점은 해의 정도에 큰 영향을 미친다. 이를 보완하기 위해서 빛의 회절 원리를 이용한 diffraction method [Fleming et al, 1997]를 사용하여 균열을 포함하는 영향영역에서 EFG 형상함수가 연속성을 유지하도록 할 수 있다. 그림 5와 같이 기준점과 균열 반대편에 위치하는 대상 절점사이의 거리를 실제보다 서로 더 멀리 떨어져 있는 것으로 생각하여 절점 거리를 증가시켜줌으로써 균열 반대편에 위치하는 절점의 영향을 덜 받도록 조절하며 가중함수나 형상함수가 일치된 연속성을 유지할 수 있도록 한다. Diffraction method에서는 절점과 sampling point 사이를 지나가는 선이 균열을 지나가고 절점의 영향반경 내에 균열 선단이 존재할 때 d_I 를 다음과 같이 재정의 한다 .

$$d_I = \left(\frac{d_1 + d_2(x)}{d_0(x)} \right)^\lambda d_0(x) \quad (2.27)$$

여기서, $d_1 = \|x_I - x_c\|$, $d_2(x) = \|x - x_c\|$, $d_0(x) = \|x - x_I\|$ 이며 x_I 는 절점, x 는 sampling point, x_c 는 crack tip 을 의미한다.

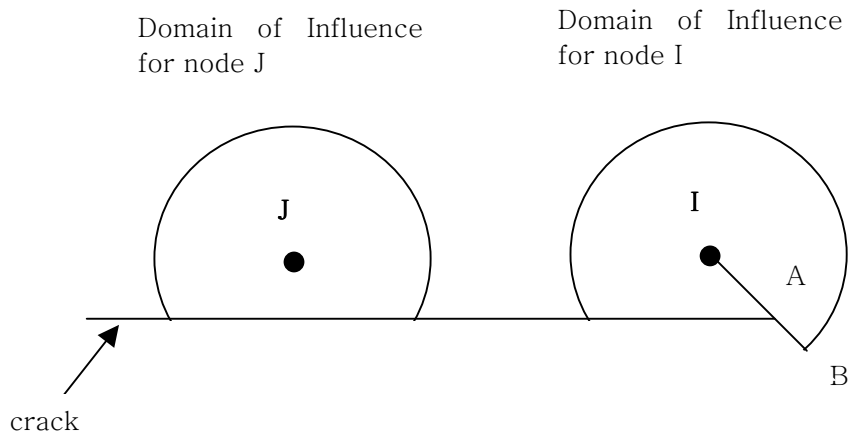


그림 4. 균열 선단 부근에서의 Visibility criterion에 의한 영향영역

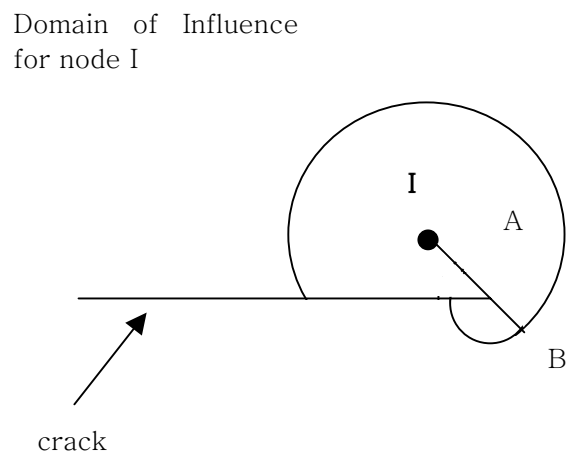


그림 5. 균열 선단 부근에서의 Diffraction method에 의한 영향영역

3. 균열 전파 해석 기법

피로하중을 받는 구조물에 초기 균열이 발생할 경우 구조물의 안전성과 잔존 수명을 계산하기 위해서는 정확한 균열 전파 예측식이 요구된다. 피로 균열 전파 예측식은 균열 진전 크기와 방향을 결정하기 위한 것으로 균열 선단에서의 응력확대계수의 함수로 표시된다. 이 장에서는 응력확대계수의 산정법을 살펴보고 피로 균열 전파 성장각 예측식과 성장량 예측식을 정리한다.

3.1 응력확대계수의 계산

균열전파의 방향과 피로균열의 성장량을 결정하기 위해서는 응력확대계수를 구해야 한다. 응력확대계수를 구하기 위해서 기지의 해를 포함하는 Conservation integral [Yau et al, 1980;Koh et al, 1988]을 사용하였으며 이를 면적분으로 변환하여 계산하였다. [Morgan and Shih, 1987; Li et al, 1985]. .

J-integral 에서 J 는 다음과 같이 응력확대계수로 표현될 수 있다.

$$J = \alpha(K_I^2 + K_{II}^2) \quad (3.1)$$

두개의 독립적인 평형상태에 대해서 생각해 보면 1 과 2 로 표현되는 두 가지 평형상태에서의 값을 중첩시켜 새로운 평형상태의 J 값을 구할 수 있다.

$$J^{(0)} = J^{(1)} + J^{(2)} + M^{(1,2)} \quad (3.2)$$

여기서,

$$M^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \left(W^{(1,2)} dy - \left[T_i^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} + T_i^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x} \right] ds \right) \quad (3.3)$$

식 (3.1)의 관계로 정리하면 다음과 같다.

$$J^{(0)} = \alpha([K_I^{(1)} + K_I^{(2)}]^2 + [K_{II}^{(1)} + K_{II}^{(2)}]^2) \quad (3.4)$$

이를 정리하면,

$$J^{(0)} = J^{(1)} + J^{(2)} + 2\alpha(K_I^{(1)}K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)}K_{II}^{(2)}) \quad (3.5)$$

식 (3.2)와 (3.5)로부터

$$M^{(1,2)} = 2\alpha(K_I^{(1)}K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)}K_{II}^{(2)}) \quad (3.6)$$

따라서, 식 (3.3)에 각각 $K_I^{(2a)} = 1, K_I^{(2a)} = 0$ 인 경우와 $K_I^{(2b)} = 0, K_I^{(2b)} = 1$ 인 상태의 응력분포를 대입하여 실제 구하고자 하는 모드 1 과 모드 2 의 응력확대계수를 직접 계산하였다.

3.2 균열 성장 방향 예측

균열 전파를 모형화 하기 위해서는 균열의 성장 방향을 예측해야 한다. 균열 전파 방향을 예측하는 식으로 몇 가지가 제안되어 있다[1]. 이 중에서 가장 많이 사용되는 식으로는 최소 변형에너지 밀도 기준식과 최대 주응력 방향식을 들 수 있다. 이 두가지의 기준에서는 균열은 기존의 균열 선단의 접면에 수직한 면을 따라 전파한다고 가정하며 전파 방향을 다음과 같은 식으로 결정한다.

$$\mathbf{v}^p = \mathbf{v}^p(n, b, t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi_p}}, \frac{\tan \varphi_p}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi_p}}, 0 \right) \quad (3.7)$$

여기서 \mathbf{v}^p 는 균열의 진행 방향이며 n 은 균열 선단의 접면 방향, t 는 법선 방향 그리고 b 는 n 과 t 에 수직한 방향이다. 균열 전파각 φ_p 는 각 전파 방향 예측 기준에 따라 결정된다. 최소 변형 에너지 밀도 기준에서는 변형에너지 밀도를 최소화 하는 방향으로 전파각을 결정하며, 최대 주응력 방향 기준에서는 전파각을 균열 선단에서의 주응력 방향과 일치하도록 결정한다. 이 연구에서는 최대주응력한계론 (maximum principal stress criterion)[Gdoutos, 1990]을 사용하였다.

2차원에서의 균열 진전각은 다음과 같은 방법으로 계산할 수 있다.

균열 선단 주변에서 응력은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \times \begin{bmatrix} K_I (1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}) + K_{II} (\frac{3}{2} \sin \theta - 2 \tan \frac{\theta}{2}) \\ K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \\ \frac{1}{2} K_I \sin \theta + \frac{1}{2} K_{II} (3 \cos \theta - 1) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

최대 주응력 방향은 전단응력이 0이 되는 방향으로서 다음식을 이용하여 계산할 수 있다.

$$K_I \sin \theta_m + K_{II} (3 \cos \theta_m - 1) = 0 \quad (3.9)$$

여기서, θ_m 은 균열 진전각이다.

3차원의 경우는 모드 I 과 모드 III의 응력확대계수를 조합하여 구한 모드 I의 등가응력확대계수를 이용하여 구할 수 있다.[dell'Erba and Aliabadi,2000]

$$K_{Ieq} = K_I + B|K_{III}| \quad (3.10)$$

여기서, B 는 실험적으로 구한 지수이다.

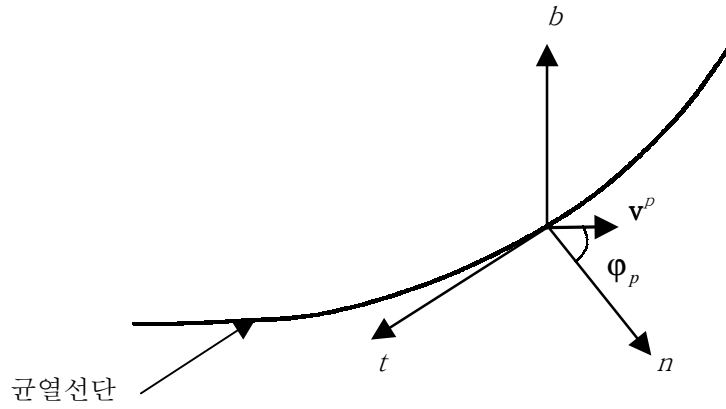


그림 6.3차원에서의 균열 전파 벡터 형상

진전각 φ_p 는 다음과 같은 식으로 구한다.

$$\varphi_p = 2 \tan^{-1} \left[\frac{K_{Ieq}}{4K_{II}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_{Ieq}}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right] \quad (3.11)$$

식 (3.11)에서 부호는 K_{II} 의 부호에 의해서 결정된다. K_{II} 가 음수인 경우는 + 이고 K_{II} 가 양수인 경우는 - 이다.

3.3 피로 균열 성장량 계산

일정진폭의 주기하중에 대해 피로균열 성장비는 하중의 크기보다는 균열 선단의 응력확대계수 범위의 영향을 더 많이 받는다. Paris는 이를 관찰하여 거시적인 관점에서 파괴역학 파라미터의 함수들로 피로균열성장에 대한 경험적인 식을 제안하였는데 이는 다음과 같다.[Barsom and Rolfe, 1999]

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (3.12)$$

여기서, a 는 균열의 길이, N 은 피로하중주기, ΔK ($\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$)는 피로하중에 대한 응력확대계수 범위이며, C 와 m 은 재료와 관련된 상수이다.

여기서 ΔK 는 등가응력확대계수의 값을 사용한다. 2차원의 경우 등가의 모드 I 응력확대계수를 이용하는데 다음과 같이 구할 수 있다.

$$K_{Ieq} = K_I \cos^3 \frac{\theta_m}{2} - 3K_{II} \cos^2 \frac{\theta_m}{2} \sin \frac{\theta_m}{2} \quad (3.13)$$

3차원에서의 등가 응력확대계수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$K_{eq}^2 = (K_I + B|K_{III}|)^2 + 2K_{II}^2 \quad (3.14)$$

ΔK 가 균열 길이의 함수이므로 식은 비선형 방정식이 된다. 일정한 피로하중 횟수에 따른 균열 진전량을 계산하기 위해서 다음과 같은 반복계산법을 사용하였다.

$$\Delta a_i = C \left(\frac{(\Delta K^j)^m + (\Delta K_i^{j+1})^m}{2} \right) \times \Delta N \quad (3.15)$$

여기서, 밑 첨자 i 는 균열 진전 횟수이고, j 는 i 번째 균열 진전을 위한 반복계산 횟수이다.

4. 예제

이 논문에서 사용한 EFG법의 수치적 정확성을 검증하며 균열 모형화 및 해석의 편이성을 확인하고 피로균열의 전파를 해석해 보기 위해서 네가지 예제를 수행해 보았다.

첫번째 예제는 인장을 받은 균열판 문제로서 모드 I에 대한 응력확대계수를 비교한다. 두번째 예제는 전단을 받은 균열판 문제로서 혼합모드의 응력확대계수를 비교 검토하여 제안한 방법의 타당성과 개발한 프로그램의 정확성을 검증한다. 세번째 예제에서는 모드I 균열에서의 피로 균열 진전 해석을 수행한다. 네번째 예제에서는 경사 균열 문제에서 혼합모드 상태에서 성장각과 성장량 계산을 통한 피로 균열 진전을 예측한다. 이때 피로 균열 진전해석에서 균열 진전률에 대한 수렴 조건은 다음과 같다.

$$\left| \frac{\Delta a_i - \Delta a_{i-1}}{\Delta a_i} \right| \leq 10^{-3} \quad (4.1)$$

4.1 균열 선단의 절점 배치에 따른 해석 예제

일축응력을 받는 균열판 문제의 모델은 그림 7과 같이 편측균열이 있는 직사각형의 판을 이용하였다. 20cm×40cm의 직사각형 판으로서 좌변에 8cm의 균열이 있고 상하 양 변에 $\sigma_y = 20 \text{ kN/cm}^2$ 의 인장을 받고 있다. 판의 물성치는 탄성계

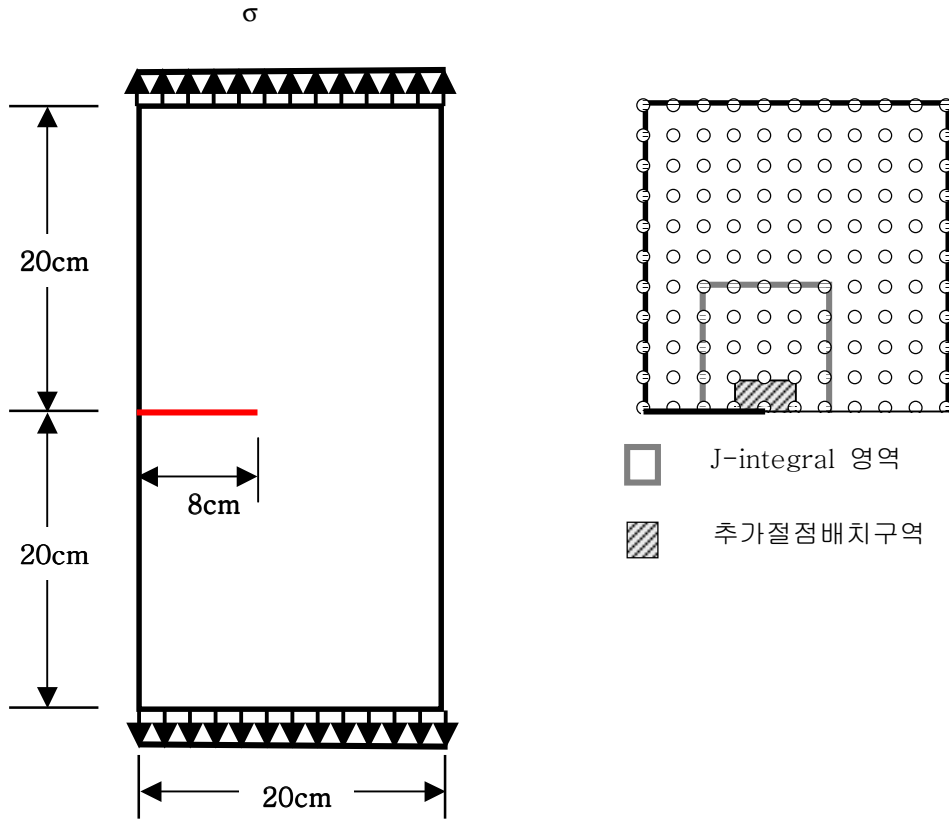


그림 7. 인장을 받는 편측 균열 (예제 1)

수가 $210 \times 10^2 \text{ kN/cm}^2$ 이고 포아송비는 0.3이다.

편측 균열판 문제의 응력확대 계수는 다음과 같다.

$$K_I = \sigma \sqrt{a\pi} \cdot f(a/b) \quad (4.2)$$

여기서 수정계수 $f(a/b)$ 는 $a/b=0.4$ 이고 $L/b=1.0$ 일 때 2.10으로 알려져 있

다[Harber and Koh, 1985]. 따라서 주어진 문제의 $K_I = 210.56$ 이다.

균열문제에서 해의 정확도를 높이기 위해서 균열 선단 부근에 그림 8과 같이

4가지 방식으로 추가적인 절점을 배치시켜 그 결과를 비교해 보았다. 기본적으로 그림 7과 같이 적분셀과 동등하게 231개의 절점을 배치시켰고 빗금 친 부분에는 추가적으로 절점들을 높은 밀도로 분포 시켰다. 전체 영역을 10×20의 적분셀로 나누었고 각 셀은 4×4의 가우스 적분점을 사용하였다.

균열 선단 부근에서는 해의 정확도를 향상시키기 위해서 9×9의 가우스 적분점을 사용하였다. 또 모드 I 응력확대계수 K_I 을 구하기 위한 J-integral은 그림 7

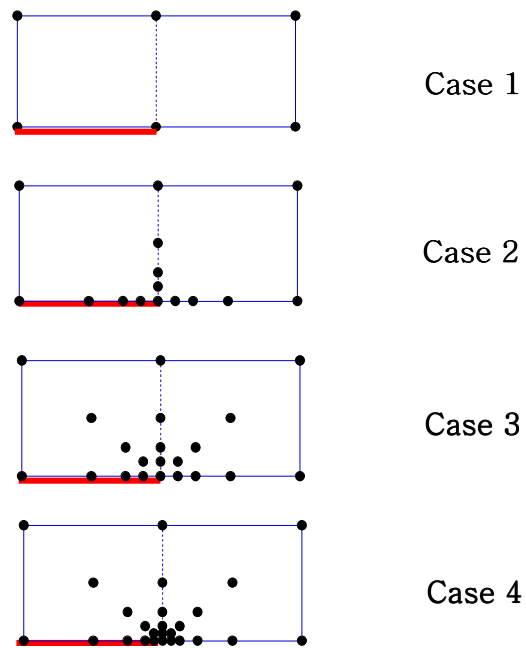


그림 8. 균열 선단 부근의 절점 배치 예

표 1. 절점배치에 따른 응력확대계수 값 비교

	K_I	$K_{analytic}$	오차(%)
Case 1	197.00	210.56	6.2
Case 2	201.83	210.56	3.9
Case 3	204.46	210.56	2.6
Case 4	205.17	210.56	2.3

에 표시되어 있는 것처럼 $12 \times 24 \text{cm}^2$ 의 영역에서 수행하였고 이를 10×10 의 요소로 나누어 적분을 수행하였다. 영향영역의 크기는 적분셀의 한면의 크기의 3.5배로 하였으며 exponential 가중함수의 계수 c 는 적분셀의 한면의 길이의 0.5배로 하였다.

표 1에서 이 연구에서 모드 I 응력 확대 계수값의 이론해와 이 연구에서의 해석결과를 비교하였다. 균열 선단 절점 배치가 조밀할수록 더 이론해와 가까워짐을 확인할 수 있다. 이로부터 EFG법에서 요소의 연결에 따른 규칙성이나 제약성에 구애 받지 않고 단지 절점들을 원하는 대로 조밀하게 분포 시킴으로써 손쉽게 해의 정확도를 향상시킬 수 있음을 확인하였다.

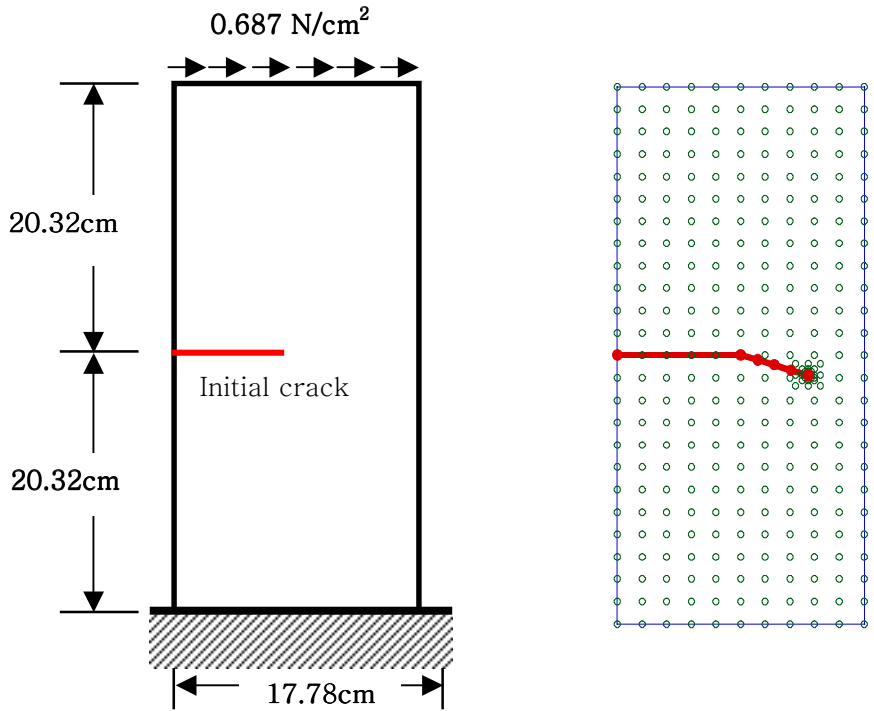


그림 9 전단응력을 받는 편측 균열 (예제 2)

4.2 전단응력을 받는 편측 균열 문제

이번 절에서는 혼합모드상태의 균열문제를 다루기 위하여 그림 9와 같은 전단 응력을 받는 부재의 균열 전파를 다루었다. 부재의 치수는 그림 9와 같이 가로 17.78cm, 세로 40.64cm이며 초기 균열의 길이는 8.89cm 이다. 하단이 고정되고 상단에 0.687 N/cm²의 전단응력이 작용하는 경우에 대해 균열의 진전해석을 수행하였다. 재료의 물성치는 앞절의 예제와 같이 $E = 210 \times 10^2 \text{ KN/cm}^2$, $\nu = 0.3$

표 2 초기 균열 상태에서의 혼합모드 응력 확대 계수

단위 : $N/cm^{3/2}$

	K_I	K_{II}
이론해*	37.39	5.00
수치해	36.62	5.03
오차(%)	2.05	0.6

*: Wilson boundary collocation method

를 사용하였다. 또 매 단계에서 균열의 진전각을 계산하여 구하였으며 진전량 Δa 는 1.5cm로 가정하였다. 총 5번의 반복계산을 통해 균열을 진전시켰다. 그림 9의 오른쪽의 형상은 균열 진전한 모양을 나타낸 것이며 전단응력에 의해 꺾이면서 성장한 것을 확인할 수 있다.

표 2는 초기상태 균열에 대한 모드 I 과 모드 II의 해석에 구한 수치해와 Wilson이 Boundary Collocation Method를 통해 구한 이론해의 응력 확대 계수값을 비교한 것이다. 모드 I과 모드 II에서 이론해와 각각 2.05%와 0.6%의 차이로 혼합모드 상태에서도 높은 정확도를 유지함을 확인할 수 있었다.

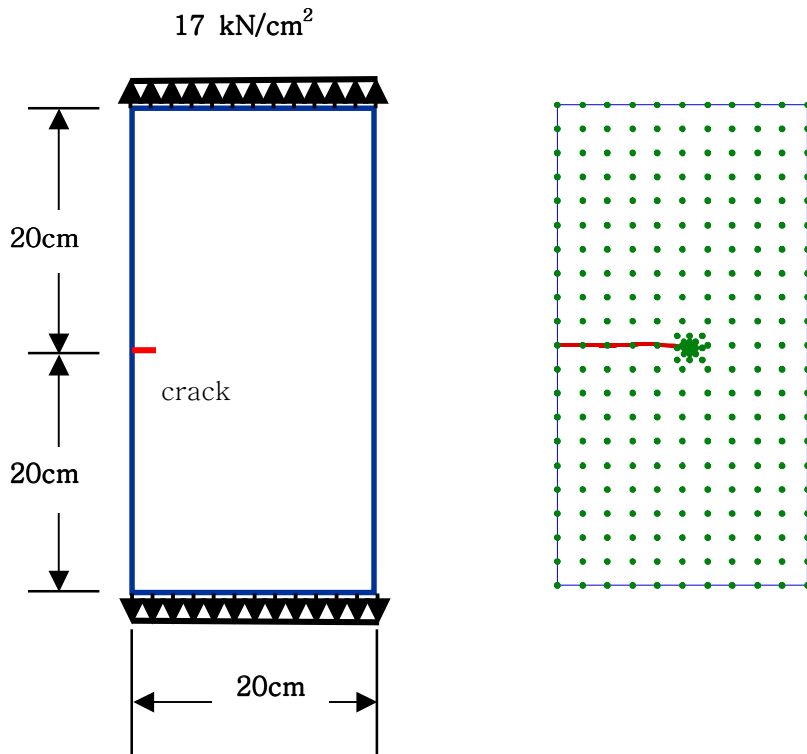


그림 10 양측 인장을 받는 모드 I 피로 균열 전파 문제 (예제 3)

4.3 모드 I 피로 균열 전파 문제

이번 절에서는 5.1절의 예제와 같은 크기의 부재에 $\sigma = 17 \text{KN/cm}^2$ 의 피로하중이 가해질 때의 경우를 다루었다. 초기 균열은 왼쪽의 편측 균열로 2cm로 가정하였다. 재료의 물성치는 마찬가지로 $E = 210 \times 10^2 \text{KN/cm}^2$, $\nu = 0.3$ 로 하였고 재료의 파괴인성치를 $203 \text{KN/cm}^{3/2}$ 로 가정하였다. Paris의 식을 통해 피로 균열의 성장량을 계산하였으며 균열 성장비와 관련된 재료 상수 C 와 m 은 각각 $C = 3.2185 \times 10^{-9}$, $m = 2.25$ 를 사용하였다. 또 균열을 한 회 진전시키기 위한 $\Delta N = 2000$ 회로 하였다.

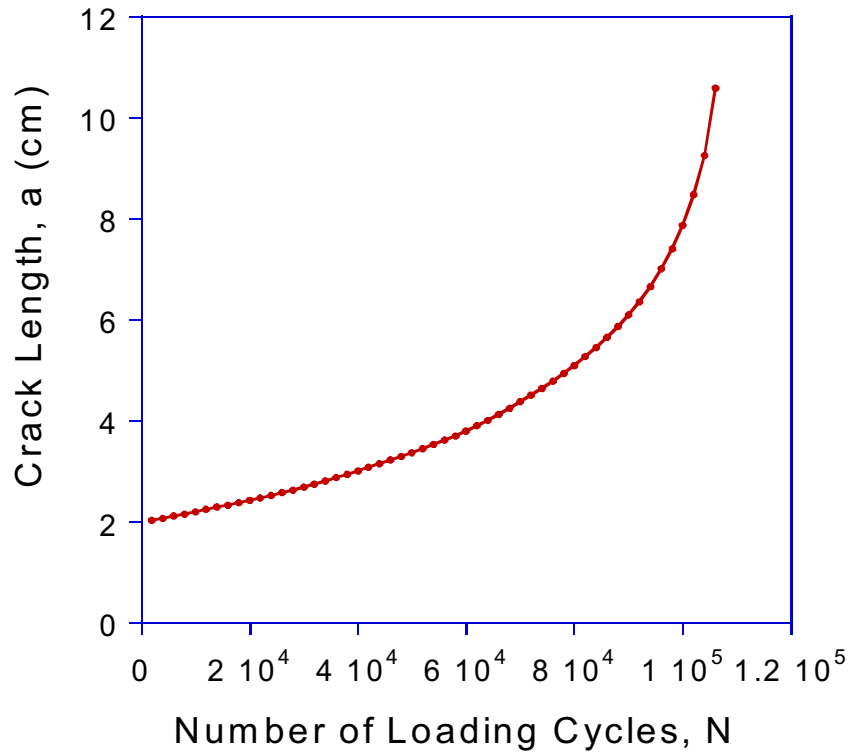


그림 11 피로 하중 재하에 따른 균열 성장 곡선

그림 11 은 피로수명을 보여주는 피로 성장 곡선이다. 하중의 횟수가 늘어남에 따라 균열 진전량이 급격히 늘어나는 형상을 보여주고 있다. 116000회의 하중이 주어졌을 때 에서 부재의 파괴가 일어났다.

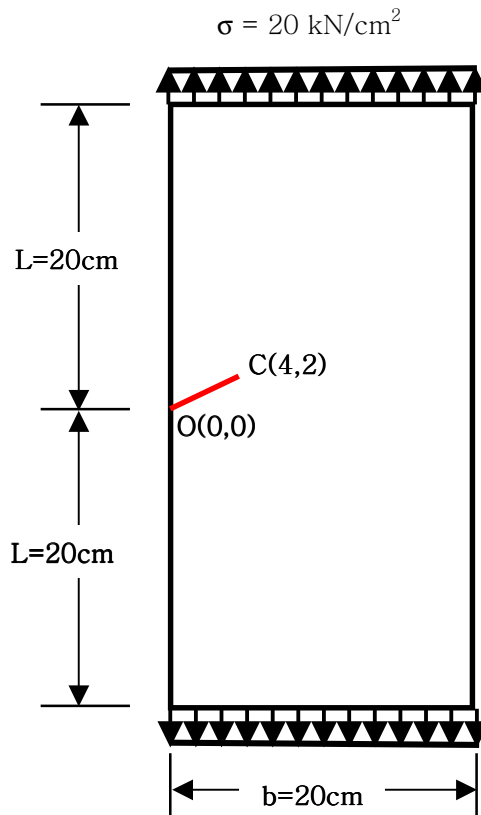


그림 12. 혼합모드의 피로 균열 전파 문제 (예제 4)

4.4 혼합모드의 피로 균열 전파 문제

이번 절에서는 이전에 사용했던 일축응력을 받는 직사각형판에 초기 균열로 혼합모드 상태의 경사진 편축 균열이 있는 경우에 대해 피로하중이 가해졌을 때 균열의 전파를 모델링하는 예제를 수행하였다. 물성치와 기하학적 형상은 4.1절의 예제와 같으며 초기 균열을 그림 12와 같이 경사균열로 하였다. 피로 균열 진전률에 대한 Paris의 방정식 재료의 특성 C와 m은 각각 $0.32186 \times 10^{-}$

⁸, 2.25이다. 최소 하중 $\sigma_{\min} = 0 \text{ kN/cm}^2$ 와 최대 하중 $\sigma_{\max} = 20 \text{ kN/cm}^2$ 이 반복적으로 작용한다고 가정한다. 하중 재하 횟수를 $\Delta N = 2000$ 과 $\Delta N = 100$ 두 가지 경우에 대해 해석하였다. 두 방법 모두 균열이 4~5cm 정도 진전할 때까지 수행하였다.

균열이 한단계 성장할 때마다 이전 단계의 균열 선단 위치에 절점을 추가시키는 방법을 사용하지만 이번 예제와 같이 균열 성장량이 매우 작은 경우에

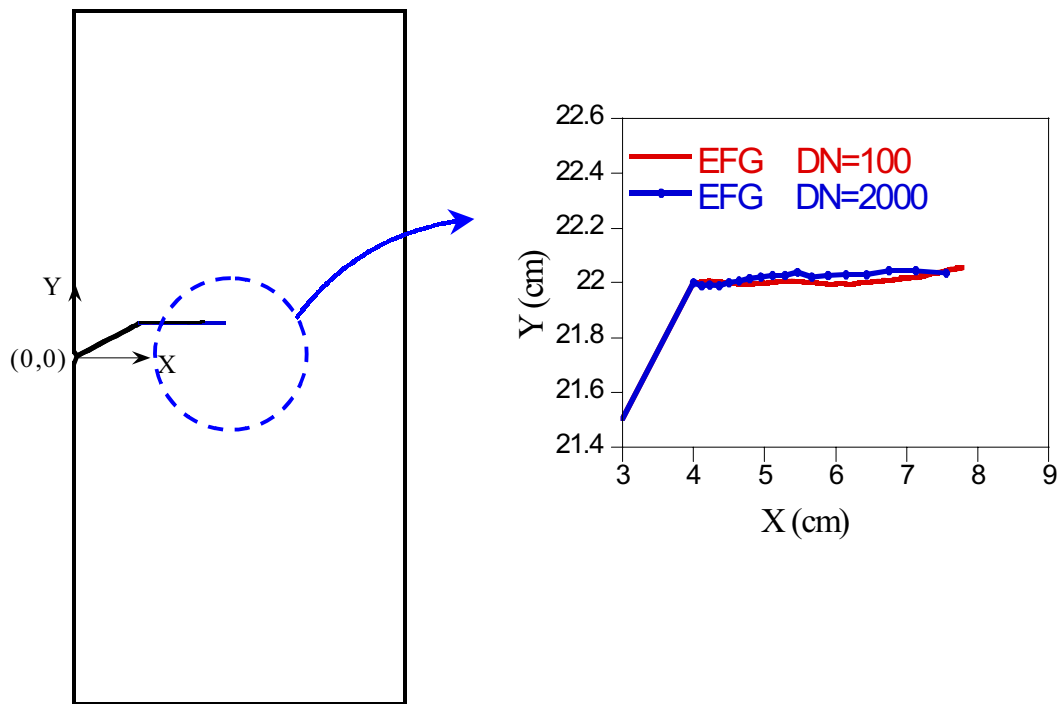


그림 13. 경사 균열의 피로 균열 전파 형상

는 균열 진전에 따라 정의된 절점들을 이동시켜주고 경계를 재설정해 주면 시스템 방정식의 크기 변화가 없어 효과적이다.

그림 13은 피로 균열 진전을 보여주는데, EFGM은 약간의 진동을 보여주고 있다. 하중 재하 횟수를 $\Delta N = 2000$ 에서 $\Delta N = 100$ 로 줄이면 전체적인 양상은 비슷하지만 균열은 부드러운 곡선을 그리며 진전함을 볼 수 있다. 그림 14는 하중 재하 횟수에 따른 균열 성장 길이를 보여준다. 하중 재하 횟수가 늘어남에 따라 성장량이 증가함을 확인할 수 있다.

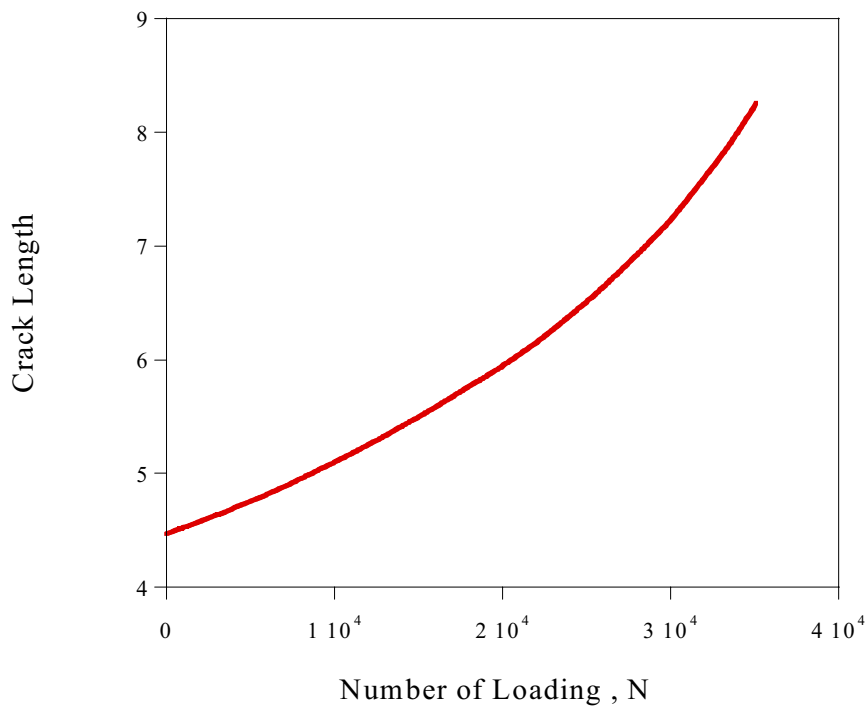


그림 14. 경사균열의 균열 성장 곡선

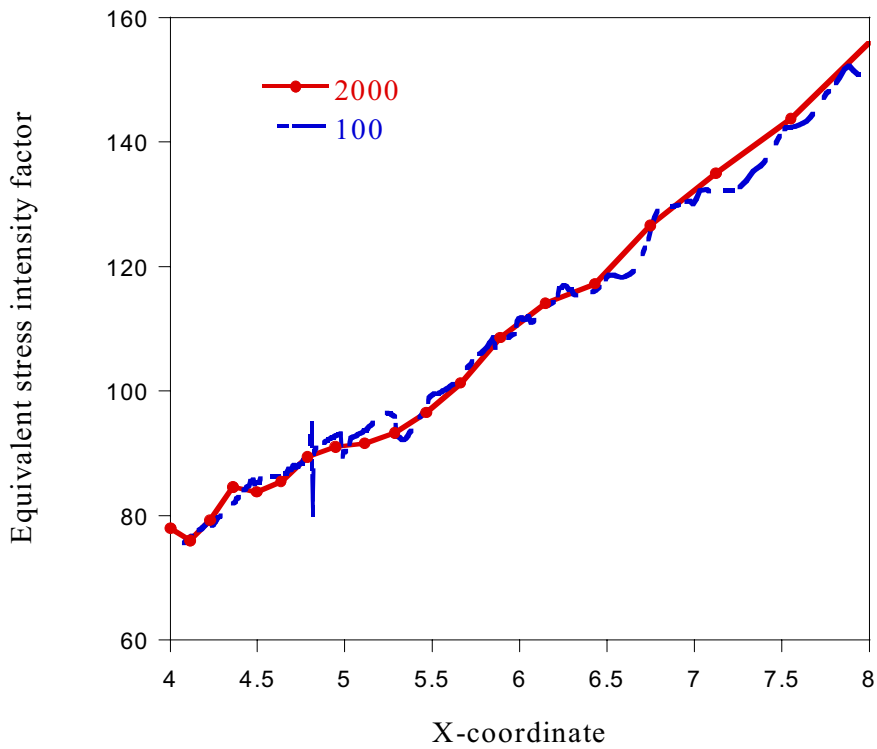


그림 15. 균열 위치에 따른 등가 응력확대계수

그림 15는 균열의 위치에 따른 등가 응력확대계수 값을 보여준다. 균열 위치의 x좌표에 따른 응력확대계수의 값이다. 이 예제를 통해 EFG를 통해 혼합모드에서의 피로 균열 성장을 자동화된 프로그램을 통해 효과적으로 예측할 수 있음을 확인하였다.

5. 결론

본 논문에서는 EFG법에 대해서 소개하고 이를 정식화하여 균열 문제에 대해 적용하고 피로균열전파를 예측하는 방법을 제안하고 이 방법에 대한 정확도와 효율성에 대해 검증하여 보았다. EFG법을 사용함에 따라 균열 문제에서 요소의 연결에 따른 규칙성이나 제약성에 구애 받지 않고 단지 절점들을 원하는 대로 조밀하게 분포 시킴으로써 손쉽게 해의 정확도를 향상시킬 수 있음을 확인할 수 있었다. 또 균열전파해석 문제를 자동적으로 성장단계에 따라 해석할 수 있는 알고리즘을 개발하였으며 혼합모드상태에서도 균열이 성장하는 경로를 높은 정확도를 유지하면서 손쉽게 예측할 수 있음을 확인하였다. 피로 균열의 성장을 예측하기 위하여 균열 성장량을 계산하는데 반복계산법을 도입함으로써 보다 정확하게 피로균열 성장거동과 피로수명을 예측할 수 있었다. 하지만 성장량 뿐 아니라 성장각을 동시에 반복계산법을 통해 계산하는 방법의 개발이 연구되어야 한다.

EFG 법은 요소의 개념이 없이 절점과 그 절점을 둘러싸는 영향영역만을 가지고 문제를 해석하므로 요소와 요소간의 연속성을 만족시킬 필요가 없으므로 모델링이 쉽고, 요소의 찌그러짐으로 인한 해의 정확도 저하가 일어나지 않을 뿐 아니라 요소의 개념이 없기 때문에 요소간의 응력점프현상이 없으므로 해의 미분값이 연속이다. 따라서, 응력의 복원과정이 필요 없다는 장점이 있었다. 또

절점의 추가 삭제가 자유롭기 때문에 적응적 해석에 적용이 쉽다.

EFG법은 그 계산과정이 유한요소법에 비해 다소 복잡하나 국부적으로 높은 정확도를 얻어야 하는 공학문제에 효과적으로 적용될 수 있을 것으로 보이며 이를 이용한 피로균열전파 해석법은 보다 발전되면 균열이 발생한 강구조물의 균열 전파에 따른 보수나 보강의 필요성 여부나 시기를 결정하는데 유용하게 활용될 수 있을 것으로 사료된다.

참고문헌

1. Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L., “Element-Free Galerkin Methods”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.37, pp. 229-256, 1994
2. Lancaster, P. and Salkauskas, K., “Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods”, *Mathematics of Computation*, Vol. 37, No. 155, pp. 141-158, 1981
3. Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M. and Krysl, P., “Meshless methods: An overview and recent developments”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 3-47, 1996
4. Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L., “Crack Propagation by Element-Free Galerkin Methods”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 51, No.2, pp. 295-315, 1995
5. Fleming, M., Chu, Y.A., Moran, B. and Belytschko, T., “Enriched Element-Free Galerkin Methods for Crack Tip Fields”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 1483-1504, 1997
6. Zuohui, P., “Treatment of Point Loads in Element-Free Galerkin Method (EFGM)”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 16, pp. 335-341, 2000

7. Belytschko, T., Lu, Y. Y., Gu, L. and Tabbara, M., "Element-Free Galerkin Methods for Static and Dynamic Fracture", *Int. J. Solids Structures*, Vol.32, No.17/18, pp.2547-2570, 1995
8. Harber, R. B. and Koh, H. M., "Explicit Expressions for Energy Release Rates Using Virtual Crack Extensions", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 301-315, 1985
9. Koh, H. M., Lee, H. S. and Haber, R. B., "Dynamic Crack Propagation Analysis Using Eulerian-Lagrangian Kinematic Descriptions", *Computational Mechanics*, Vol. 3, pp. 141-155, 1988
10. Belytschko, T. and Krongauz, Y., "Enforcement of Essential Boundary Conditions in Meshless Approximations Using Finite Elements", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 131, pp. 133-145, 1996
11. Li, F. Z., Shih, C. F. and Needleman, A., "A Comparison of Methods for Calculating Energy Release Rates", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 21, No.2, pp. 405-421, 1985
12. dell'Erba, D. N. and Aliabadi, M. H., "Three-dimensional thermo-mechanical fatigue

- crack growth using BEM”, *International Journal of Fatigue*, Vol. 22, pp. 261-273, 2000
13. Yau, J. F., Wang, S. S. and Corten, H. T., “ A Mixed-Mode Crack Analysis of Isotropic Solids Using Conservation Laws of Elasticity”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, pp 335-341, 1980
 14. Morgan, B. and Shih, C. F., “Crack Tip and Associated Domain Integrals from Momentum and Energy Balance”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 27, No.6, pp. 615-642, 1987
 15. Belytschko, T. and Tabbara, M., ”Dynamic Fracture Using Element-Free Galerkin Methods”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, pp. 923-938, 1996
 16. Koh, H. M., Lee, H. S. and Jeong, U. Y., “An incremental formulation of the moving-grid finite element method for the prediction of dynamic crack propagation”, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 158, pp. 295-309, 1995
 17. 이상호, 윤영철, “EFG법을 이용한 혼합모드상태 균열이 균열진전해석”, 전산구조공학회 논문집 제12권 제3호, pp.485-494, 1999
 18. Gdoutos, E. E., *Fracture Mechanics Criteria and Applications*, Kluwer Academic

Publishers, 1990

19. Barsom, J. M., Rolfe, S. T., Fracture and Fatigue Control in Structures : Applications of Fracture Mechanics, Butterworth-Heinemann, 1999

ABSTRACT

This paper presents a crack propagation analysis algorithm in a steel structural component under cyclic fatigue loading using Element-Free Galerkin (EFG) methods. Moving least square interpolants are employed for shape function, in which domain of influence and exponential weight function are introduced. Lagrange multipliers are used to satisfy the essential boundary condition in EFG formulation since shape function does not satisfy Kronecker delta condition. In order to perform a numerical integration in EFG formulation, a cell structure independent of the nodes is used.

In EFG crack analysis, the effects of the discontinuity of crack and the singularity of crack tip are considered by numerical techniques. To avoid discontinuities of the shape functions in crack tip fields, the diffraction method based on the way light diffraction is used. Conservation integrals are used to directly evaluate the individual stress intensity factors for the mixed-mode crack problem in terms of known auxiliary solutions. The maximum circumferential stress theory is used to measure the direction of crack growth. Paris equation is used to measure the extension of fatigue crack growth. Successive iteration is adopted to solve Paris equation.

The validity of the proposed algorithm is demonstrated by numerical examples of mixed mode crack propagation problem.

Key Word

Element-Free Galerkin Methods, Moving least square interpolants, domain of influence, weight function, diffraction method, fatigue crack propagation

Student number : 2000-21548

감사의 글

2년이라는 어떻게 보면 짧은 시간이 지나고 어느새 대학원 생활의 마지막에 와 있습니다. 지금 저의 2년을 돌아보면 열심히 하지 못하는데 대한 후회도 많지만 그 동안 정말 많은 분들의 도움을 받으며 많은 것을 배우고 느낀 것 같습니다.

저에게 너무나 큰 가르침을 주신 이해성 선생님께 감사드립니다. 끊임없는 조언과 꾸지람을 아끼지 않으셨고 제가 바른길로 가도록 항상 인도해 주셔서 감사합니다. 그리고 학부 때부터 많은 가르침을 주신 장승필 교수님, 고현무 교수님, 오병환 교수님 김재관 교수님께도 깊은 감사드립니다.

연구실의 정신적 지주로서 어떤 것을 물어봐도 항상 관심을 갖고 지도해 준 현우형, 연구실의 만형으로써 연구실의 분위기를 밝게 만들어주고 살아가는데 많은 조언을 주신 용한형, 연구실 살림을 도맡아 하면서 연구실을 이끌어 주고 많은 것을 가르쳐준 기석형, 옆에서 항상 저의 귀감이 되어준 주성형에게 감사드립니다. 2년동안 저와 모든 것을 함께 한 저의 동기들 병규, 양광, 규철이에게도 감사합니다. 또 항상 공부 열심히 하시는 튼튼원 누나, 1년 동안 같이 보냈던 한도형, 문구형, 언제나 터프한 멋진 천종형, 문성형, 경남이 누나 항상 따뜻한 윤석이형, 종승형, 종명형, 너무도 부족한 선배이기에 항상 미안한 남규, 영곤형, 정희, 만우에게도 감사드립니다.

힘들 때마다 옆에서 제 투정을 받아준 저의 오랜 친구 기남, 정한이와 항상

저에게 힘을 주는 현규, 상범 등 많은 친구들에게 감사를 드립니다. 힘든 대학원 생활 동안 제 옆을 지켜주고 항상 용기와 위안을 준 리나에게 특별한 감사를 드립니다.

언제나 저를 믿고 아껴주신 가족, 친지 여러분들에게 감사드리며 성질 못된 동생을 너무도 사랑해주는 형과 항상 저를 믿고 지켜봐 주시는 아버지, 언제나 무한한 사랑을 주시는 어머니께 이 논문을 바칩니다.