

공학석사학위논문

시공단계와 크리프 현상을 고려한
콘크리트 사장교의 목표형상 해석법

Analysis of Target Configuration for Concrete Cable-stayed Bridges
Considering Construction Stages and Creep Phenomenon

2006 년 8 월

서울대학교 대학원

지구환경시스템공학부

황 재 응

초 록

케이블은 장력이 도입되기 전에는 강성이 발생하지 않으므로 무응력 상태의 기하형상을 정의할 수 없다. 그러므로 사하중 하에서의 교량 형상을 구조해석을 위한 기준 형상으로 사용하는데, 이를 초기평형상태라 한다. 그리고 초기평형상태의 기하형상이 목표형상을 만족시키는 케이블의 장력이나 무응력 길이를 결정하는 과정을 초기평형상태 해석이라 한다.

기존의 초기평형상태를 해석하는 방법으로는 초기 부재력을 이용한 방법, 기하학적인 구속조건을 이용한 방법, 구조물의 변형 에너지를 최소화시키면서 목표형상을 만족시키는 최적화된 초기평형상태 해석법 등이 있다. 그러나 기존의 해석법은 크리프 현상이 발생하지 않는 구조계에 대해서만 연구가 이루어졌기 때문에 콘크리트 사장교에 적용하는 데에는 무리가 있다. 이 논문에서는 크리프 현상이 발생하는 콘크리트 사장교에 대해 시공 단계를 고려한 목표형상 해석법을 제시한다.

콘크리트 사장교는 초기평형상태에서의 기하형상이 목표형상을 만족하더라도 시간이 지나면서 발생하는 크리프 변형에 의해 구조물의 기하 형상이 달라진다. 그러므로 이 논문에서는 구조물의 기하형상을 목표형상과 일치시키는 목표 시점을 설정하고, 목표 시점에서의 기하형상이 목표형상을 만족시키는 케이블의 무응력 길이를 Newton-Raphson 법을 이용하여 찾는 방법을 제안한다.

강재와 같이 외력에 대해 탄성 변형만 발생하는 재료를 사용한 구조물은 시공 과정 및 경로가 다르더라도 탄성 한계 내에서 시공이 이루어지면 동일한 최종 상태가 얻어진다. 그러나 시간에 따라 탄성 변형 외의 크리프와 같은 추가의 변형이 발생하는 콘크리트와 같은 재료로 구성된 구조물은 시공 과정 및 경로에 따라 목표 시점에서의 기하형상이 달라진다. 그러므로 시공단계를 고려하여 목표형상 해석법을 수행해야 한다.

제안된 방법을 일방향 캔틸레버 공법으로 시공된 지간장 104m, 케이블 개수 12 개의 펜타입 콘크리트 사장교 모델에 적용하여 제안된 방법의 적용성과 타당성을 검증하였다.

주요어

콘크리트 사장교, 크리프, 목표형상, 변위 민감도, 시공단계 해석

학번 : 2004-23518

목 차

초록	iii
목차	v
그림목차	vii
1. 서론	1
2. 콘크리트 구조물의 크리프 해석	4
2.1 크리프 변형의 정의 및 특징	4
2.2 크리프 변형도 계산	6
2.3 크리프 현상을 고려한 콘크리트 구조물의 강성도 방정식 ...	10
3. 콘크리트 사장교의 목표형상 해석	15
3.1 탄성 현수선 요소를 이용한 사장교의 강성도 방정식	16
3.1.1 탄성 현수선 요소	16
3.1.2 미지의 무응력 길이에 대한 탄성 현수선 요소	20
3.2 콘크리트 사장교의 목표형상 해석법	21
3.2.1 콘크리트 사장교의 크리프 해석	21
3.2.2 콘크리트 사장교의 목표형상 해석법	23

3.3 시공단계를 고려한 목표형상 해석법	28
4. 수치해석 예제	34
5. 결론	42
참고문헌	43
부록	45

그림 목 차

그림 2.1 크리프의 중첩 법칙	6
그림 3.1 탄성 현수선 요소	17
그림 3.2 목표형상을 만족시키는 L_0 의 계산	25
그림 3.3 시공단계를 고려한 목표형상 해석 과정.....	33
그림 4.1 팬타입 콘크리트 사장교의 기하형상	35
그림 4.2 팬타입 콘크리트 사장교의 모델링과 제어절점	35
그림 4.3 완공시점과 목표시점에서의 거더 형상	36
그림 4.4 완공시점과 목표시점에서의 주탑 형상	37
그림 4.5 시공단계 고려시 완공시점과 목표시점에서의 거더 형상...	39
그림 4.6 시간에 따른 제어 절점의 수직 변위	40
그림 4.7 시간에 따른 거더 상연의 전체 변형도	40
그림 4.8 시간에 따른 케이블 장력	41

1. 서론

1956 년 최초의 사장교인 스웨덴의 **Stromsund** 다리가 완공된 이후, 사장교의 설계 및 시공 기술은 크게 발전하였다. 사장교의 대형화 및 장지간화가 진행되면서, 구조물의 경량화를 위해 강상관을 채용한 사장교가 건설되었다. 또한 1970 년대 이후, 강재와 콘크리트의 재료 특성을 활용한 합성형 상부 구조를 도입하여 구조물의 안전성과 가격 경쟁력을 동시에 확보하게 되었다. 특히 2000 년대 강재 파동 이후, 강재의 가격 상승으로 콘크리트 사장교의 건설도 증가하고 있다.

강합성 보강형이나 콘크리트 보강형의 사용이 증가함에 따라 크리프 및 건조 수축과 같은 콘크리트 재료의 특성이 케이블 지지 구조물에 미치는 영향에 대해 고려해 줄 필요성이 증대되고 있다. 특히 외부 하중의 변화가 없더라도 시간이 지남에 따라 구조물의 변형을 일으키는 콘크리트의 크리프 현상은 재료의 특성뿐만 아니라 구조물에 재하된 과거의 응력 이력에도 영향을 받는다. 케이블 지지 교량은 외부 하중과 무관한 변위가 발생하면, 케이블의 장력이 변화하므로 구조물의 응력 상태가 바뀐다. 이에 따라 크리프 변형의 양상도 달라지게 된다. 그러므로 콘크리트의 크리프 변형과 케이블 부재의 장력 간의 상호 작용을 고려하여 콘크리트 사장교의 거동을 파악해야 한다. 콘크리트 뼈대 구조물에서 발생하는 크리프 변형도는 중첩 적분식으로 표현되는데, 강영진은 이를 효율적으로 수치 적분할

수 있도록 간략하게 정리하였다[1]. 김승대는 프리캐스트 합성형 사장교의 초기평형상태 및 시공형상결정에 관한 연구를 수행하였다[2]. 그러나 기존 연구들은 케이블의 초기 장력 및 무응력 길이가 초기치로 주어진 구조물에 대한 장기 거동 해석에 국한되었다.

케이블은 무응력 상태에서의 기하형상이 정의되지 않으므로 사하중이 재하된 상태에서의 교량 형상을 초기평형상태라 정의하며, 이 상태에서의 교량 형상을 구조해석을 위한 기준 형상으로 사용한다. 케이블 부재의 초기 장력이나 무응력 길이에 의해 결정되는 초기평형상태에서의 교량 형상은 목표형상 및 설계 조건을 만족시켜야 한다. 초기 장력을 결정하는 방법은 시산법(trial and error method), 초기 부재력법[3], Newton-Raphson 법을 이용하여 기하학적인 구속조건을 만족시키는 방법[4], 그리고 최적화된 초기 평형상태 해석법 등이 있다. 시산법이나 반복 계산법은 느린 수렴 속도와 적절한 초기 가정치를 선택해야 하는 문제가 존재하지만, Newton-Raphson 법을 이용한 초기 장력 결정법은 초기 가정치가 없어도 유일한 해가 구해지며 안정된 수렴성이 보장된다. 그러나 이러한 방법들은 시간에 따라 크리프 현상이 발생하는 구조물에 대해 적용하기는 어렵다. 콘크리트 부재를 사용한 케이블 지지 교량은 초기평형상태의 기하 형상이 목표형상을 만족하도록 케이블의 초기 장력이 결정되었더라도 크리프 현상이 발생하면서 시간이 지날수록 목표형상에서 멀어지게 된다.

이 논문에서는 콘크리트 사장교의 보강형과 주탑에서 크리프 현상이

발생하는 경우, 임의의 시점에서의 구조물 형상이 목표형상을 만족하도록 케이블의 초기 장력 및 무응력 길이를 결정하는 목표형상 해석 기법을 제안한다. 해석 모델의 보강형 및 주탑은 뼈대 요소를 사용하고, 케이블 요소는 탄성 현수선 요소를 사용한다. 케이블의 무응력 길이는 Newton-Raphson 법을 이용하여 반복 계산을 통해 구한다. 이 때 필요한 무응력 길이에 대한 변위 민감도는 케이블 지지 구조물의 평형 방정식을 무응력 길이로 직접 미분하여 구한다[5].

일방향 캔틸레버 공법으로 시공된 지간장 104m, 케이블 개수 12 개의 팬타입 콘크리트 사장교 모델에 적용하여, 목표시점 1,000 일에서의 기하형상을 목표형상과 일치하도록 하는 케이블 무응력 길이를 구하였다. 이를 통해 제안된 방법의 적용성과 타당성을 검증하였다.

2. 콘크리트 구조물의 크리프 해석

이 장에서는 크리프의 정의와 크리프 변형을 예측하는 모델의 종류, 크리프 현상의 특징을 통해 크리프 변형도를 수치해석법으로 구하는 방법을 유도한다. 이를 토대로 일반적인 뼈대 구조물의 평형 방정식에 크리프 변형도를 도입하여, 콘크리트 뼈대 구조물의 시간에 따른 크리프 거동을 계산하는 강성도 방정식을 유도한다.

2.1 크리프 변형의 정의 및 특징

구조물에 외력이 작용하면 변형이 발생하면서 평형 상태를 유지한다. 구조물에 발생한 응력이 항복 강도보다 작을 경우, 외력이 제거되면 구조물은 원래의 상태로 돌아온다. 이러한 변형을 탄성 변형이라 한다. 그러나 콘크리트와 같은 재료는 외력이 작용하면, 시간이 지남에 따라 탄성 변형 외의 추가의 변형이 발생한다. 이처럼 작용하는 외력의 크기와 작용하는 시간에 따라 지속적으로 변형이 발생하는 현상을 크리프라 하며, 이러한 변형을 크리프 변형이라 한다. 외력이 완전히 제거되면 이로 인한 탄성 변형이 즉시 발생하여 변형이 줄어들고, 시간이 지나면서 추가로 변형이 줄어들는데 이를 크리프 회복이라 한다.

콘크리트의 크리프 현상은 재하 응력, 물-시멘트 비, 양생 조건, 온도,

수분, 시멘트 종류, 혼화제, 골재 등의 인자에 영향을 받는다. 이와 같은 인자들을 고려하여 시간 경과에 따른 크리프 변형을 정확하게 계산하기는 어렵고 복잡하다. 그러므로 각종 설계기준에서는 크리프와 같은 콘크리트의 시간의존적 변형을 예측할 수 있도록 모델을 제안하고 있다. 대표적인 모델로는 ACI-209(ACI Committee 209, 1992), CEB-FIP MC 78(CEB-FIP Model Code, 1978), CEB-FIP MC 90(CEB-FIP Model Code, 1990) 등이 있다. 국내의 콘크리트 구조설계기준(2000)과 도로교설계기준(2003)은 CEB-FIP MC 90을 사용하여, 미국의 AASHTO LRFD(2004)는 ACI-209를 채용하였다. ACI-209에서 제시하는 크리프 예측 모델은 부록 A에 수록하였다.

McHenry는 크리프를 지연된 탄성 현상으로 파악하여 특정 시점 t' 에 발생한 응력 증분에 의해 시간 t 에 발생하는 콘크리트의 크리프 변형도는 t' 에서 발생한 응력 증분 이외의 다른 응력 증분의 영향은 받지 않는다는 크리프의 중첩 법칙을 제안하였다[6]. 그러므로 그림 2.1과 같이 시간 t_1 과 시간 t_2 사이에 발생한 응력으로 발생한 크리프 변형도는 양의 응력 σ^1 과 음의 응력 σ^2 으로 발생한 크리프 변형도 ϵ_c^1 와 ϵ_c^2 의 합으로 표현된다. 크리프의 중첩 법칙은 증가하는 응력 이력 상태는 크리프 거동을 잘 예측하지만, 크리프 회복을 과도하게 평가한다고 알려져 있다[7]. 그러나 실제 콘크리트 구조물에서 발생하는 크리프 회복은 무시할 수 있는 수준이며, 아직까지 크리프 회복 모델은 널리 채용되지 않는 실정이다. 그러므로 크리프의 중첩 법칙을 사용하는 데에는 무리가 없다고 사료된다.

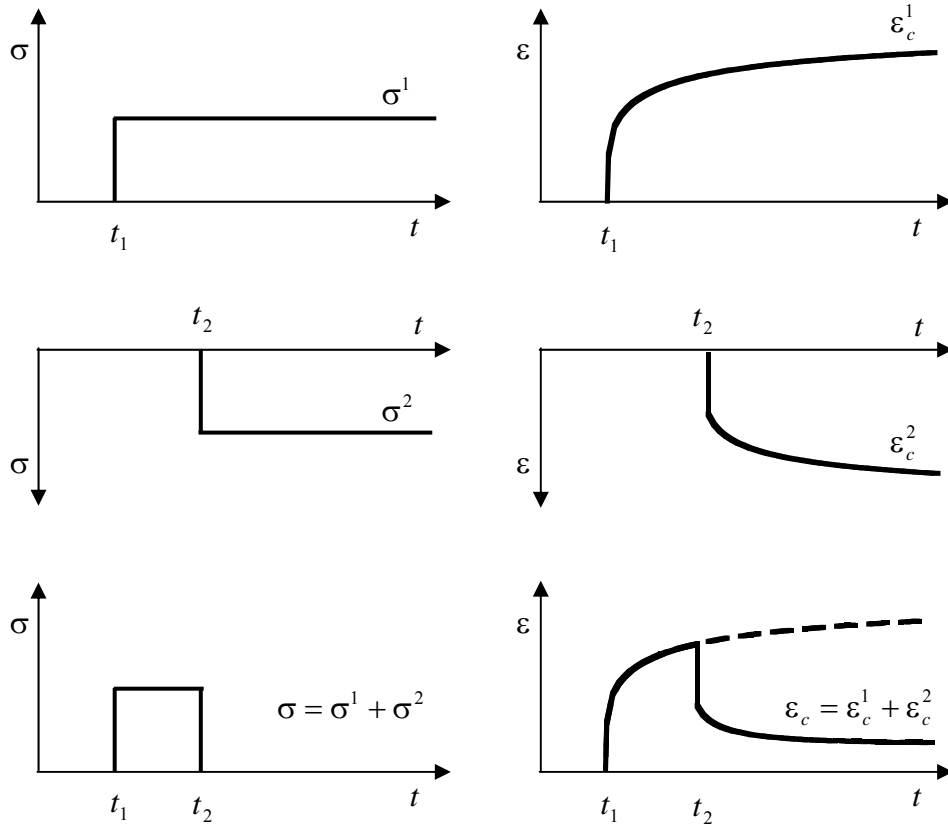


그림 2.1 크리프의 중첩 법칙

2.2 크리프 변형도 계산

콘크리트 구조물의 크리프 변형을 계산하는 방법으로는 크게 근사해법과 일반해법이 있다. 근사해법은 간단한 가정을 사용하여 간편하게 크리프 변형도를 구하는 방법으로서, 유효계수법(EMM, Effective Modulus Method), 재령 보정 유효계수법(AEMM, Age adjusted Effective Modulus Method), 크리프

변화율법(RCM, Rate of Creep Method) 등이 있다. 유효계수법은 현재의 크리프 변형은 현재의 응력에만 연관된다고 보기 때문에 응력 이력의 변화가 큰 경우에는 부적합하다. 크리프 변화율법은 크리프 변화율이 콘크리트의 재령과 무관하다는 가정을 토대로 개발되었기 때문에 콘크리트의 재령이 짧으며 응력 이력의 변화가 작은 경우에 적합하다.

이에 반해 일반해법은 근사해법과 같은 가정을 사용하지 않으므로, 시공단계에 따라 응력이 크게 변화하는 콘크리트 구조물의 크리프 해석에 적합하다. 일반해법은 다음과 같은 크리프 변형도 ϵ_c 과 응력 σ 의 관계식을 사용한다.

$$\epsilon_c^t = \int_0^t C(t, \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2.1)$$

식(2.1)은 크리프의 중첩 법칙에 기반하는 중첩 적분식(convolution integral)이므로, 연속적으로 변화하는 하중 이력을 고려해 줄 수 있는 일반식이다. 변화하는 응력 이력을 고려해 줄 수 있으므로 보다 정확한 해석이 가능하다는 장점이 있지만, 계산 시간이 오래 걸리는 단점이 있다. 그러나 최근에는 컴퓨터의 성능 향상으로 이러한 단점이 크게 개선되고 있다.

식(2.1)에서 $C(t, \tau)$ 는 비크리프 계수(specific creep coefficient)로서 단위 응력에 대한 크리프 변형도로 정의되며, 크리프 계수를 하중 재하시의 탄성 계수로 나눈 값과 같다.

$$C(t, \tau) = \frac{\phi(t, \tau)}{E(\tau)} \quad (2.2)$$

일반해법을 이용한 크리프 변형도 계산을 수치해석에 적용하기 위해서는 이산화 과정이 필요하다. 식(2.1)을 시간에 대해 n 등분하고 각 구간을 일반화된 중앙값 법칙(generalized midpoint rule)을 사용하여 적분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_c^t &= \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} C(t + \Delta t, \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &\approx \sum_{i=1}^n C(t + \Delta t, t_{i+\alpha}) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=t_{i+\alpha}} \Delta t_{i+1} \\ &= \sum_{i=1}^n C(t + \Delta t, t_{i+\alpha}) \Delta \sigma^{t_{i+1}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

여기서 $t_1 = 0, t_{n+1} = t$ 이다. 또한 α 는 0 에서 1 사이의 값을 갖는 변수로서, $t_{i+\alpha}$ 은 다음과 같이 정의 된다.

$$t_{i+\alpha} = t_i + \alpha \Delta t_{i+1} \quad (2.4)$$

각 구간의 시간 간격과 응력의 증가량을 나타내는 Δt_{i+1} , $\Delta \sigma^{t_{i+1}}$ 은 다음과 같다.

$$\Delta t_{i+1} = t_{i+1} - t_i \quad (2.5)$$

$$\Delta \sigma^{t_{i+1}} = \sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i) \quad (2.6)$$

크리프 변형도의 증분형을 구하기 위해 $t + \Delta t$ 에서의 크리프 변형도 $\varepsilon_c^{t+\Delta t}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\varepsilon_c^{t+\Delta t} &= \int_0^{t+\Delta t} C(t + \Delta t, \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= \int_0^t C(t + \Delta t, \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau + \int_t^{t+\Delta t} C(t + \Delta t, \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau\end{aligned}\quad (2.7)$$

식(2.7)을 식(2.3)과 같은 방식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\varepsilon_c^{t+\Delta t} &= \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} C(t + \Delta t, \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau + \int_t^{t+\Delta t} C(t + \Delta t, \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &\approx \sum_{i=1}^n C(t + \Delta t, t_{i+\alpha}) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=t_{i+\alpha}} \Delta t_{i+1} + C(t + \Delta t, t + \alpha\Delta t) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=t+\alpha\Delta t} \Delta t \\ &= \sum_{i=1}^n C(t + \Delta t, t_{i+\alpha}) \Delta\sigma^{t_{i+1}} + C(t + \Delta t, t + \alpha\Delta t) \Delta\sigma^{t+\Delta t}\end{aligned}\quad (2.8)$$

식(2.8)에서 식(2.3)을 빼면 t 와 $t + \Delta t$ 사이에서의 크리프 변형도 증분량이 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_c^{t+\Delta t} &= \varepsilon_c^{t+\Delta t} - \varepsilon_c^t \\ &= \sum_{i=1}^n C(t + \Delta t, t_{i+\alpha}) \Delta\sigma^{t_{i+1}} + C(t + \Delta t, t + \alpha\Delta t) \Delta\sigma^{t+\Delta t} \\ &\quad - \sum_{i=1}^n C(t, t_{i+\alpha}) \Delta\sigma^{t_{i+1}} \\ &= \sum_{i=1}^n (C(t + \Delta t, t_{i+\alpha}) - C(t, t_{i+\alpha})) \Delta\sigma^{t_{i+1}} + C(t + \Delta t, t + \alpha\Delta t) \Delta\sigma^{t+\Delta t}\end{aligned}\quad (2.9)$$

크리프 변형도를 수치 해석법으로 구하는 과정에서 비크리프 계수를

다음과 같이 Dirichlet 급수 형태로 근사한다[8].

$$C(t, \tau) = \sum_{i=1}^m a_i(\tau) [1 - e^{-\lambda_i(t-\tau)}] \quad (2.10)$$

여기서 m , λ_i 는 기존의 연구들을 통해 알려진 값을 사용한다. $a_i(\tau)$ 는 실제 크리프 실험 데이터를 토대로 구하는 것이 가장 정확한 방법이다. 하지만 실험 데이터를 취득하기 어려운 경우는 ACI-209 와 CEB-FIP MC 90 에서 제시하는 비크리프 계수식으로부터 나온 데이터를 토대로 결정한다. 만일 비크리프 계수의 데이터 개수가 m 보다 많을 경우, 최소자승법을 이용하여 최적의 $a_i(\tau)$ 를 구해야 한다. 이에 대한 자세한 내용은 부록 B 에 수록하였다.

2.3 크리프 현상을 고려한 콘크리트 구조물의 강성도 방정식

콘크리트의 크리프 현상은 하중이 작용한 후 시간이 지남에 따라 발생하는 시간의존적 변형이다. 그러므로 크리프 현상을 고려하려면 시간에 대한 평형 방정식이 필요하다. 임의의 시간 t 로부터 Δt 만큼 지난 시점 $t + \Delta t$ 에서의 콘크리트 구조물의 평형 방정식은 다음과 같다.

$$\int_V \delta \varepsilon^{t+\Delta t} \sigma^{t+\Delta t} dV = \int_V \delta u^{t+\Delta t} f^{t+\Delta t} dV \quad (2.11)$$

여기서 $\sigma^{t+\Delta t}$ 과 $f^{t+\Delta t}$ 는 $t+\Delta t$ 시점에서의 응력과 외부 하중이고, $\delta\varepsilon$ 와 δu 는 $t+\Delta t$ 시점에서 구조물에 발생하는 가상 변형도와 가상 변위이다.

앞의 식(2.9)에서 계산한 크리프 변형도의 증분량을 간단히 치환하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_c^{t+\Delta t} &= \sum_{i=1}^n (C(t+\Delta t, t_{i-1}) - C(t, t_{i-1}))\Delta\sigma^{t_i} + C(t+\Delta t, t)\Delta\sigma^{t+\Delta t} \\ &= f_c^t + C(t+\Delta t, t)\Delta\sigma^{t+\Delta t}\end{aligned}\quad (2.12)$$

여기서 f_c^t 는 하중 재하 시점에서부터 시각 t 까지 구해진 각 시간 단계의 응력 증분량에 의해 발생하는 크리프 변형도의 증분값이다. f_c^t 는 $t+\Delta t$ 시점 이전까지의 계산 결과로부터 구할 수 있는 기지수이고, $\Delta\sigma^{t+\Delta t}$ 은 $t+\Delta t$ 시점에서의 평형 방정식 식(2.11)로부터 구해지는 미지수이다.

구조물의 전체 변형은 외부 하중에 의해 발생하는 탄성 변형과 시간에 따라 발생하는 비역학적 변형인 크리프 변형으로 나뉜다. 그러므로 구조물에 작용하는 실제 응력은 전체 변형도에서 크리프 변형도를 제외한 변형도를 이용하여 구한다. 이를 이용하면 크리프 변형도를 고려한 $t+\Delta t$ 에서의 응력-변형도 관계식은 다음과 같다.

$$\sigma^{t+\Delta t} = E^{t+\Delta t} (\varepsilon^{t+\Delta t} - \varepsilon_c^{t+\Delta t}) \quad (2.13)$$

여기서 $E^{t+\Delta t}$ 는 $t+\Delta t$ 시점의 콘크리트 탄성 계수이고, $\varepsilon^{t+\Delta t}$ 은 $t+\Delta t$ 시

점의 전체 변형도이다. 식(2.13)을 이용하여 시간 t 와 $t + \Delta t$ 사이에서 발생하는 응력 증분량은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Delta\sigma^{t+\Delta t} = E^{t+\Delta t} (\Delta\varepsilon^{t+\Delta t} - \Delta\varepsilon_c^{t+\Delta t}) \quad (2.14)$$

식(2.14)에 식(2.12)를 대입하면 다음과 같다.

$$\Delta\sigma^{t+\Delta t} = E^{t+\Delta t} (\Delta\varepsilon^{t+\Delta t} - (f_c^t + C(t + \Delta t, t)\Delta\sigma^{t+\Delta t})) \quad (2.15)$$

식(2.15)를 $\Delta\sigma^{t+\Delta t}$ 에 대해 다음과 같이 정리한다.

$$\begin{aligned} \Delta\sigma^{t+\Delta t} &= (1 + E^{t+\Delta t}C(t + \Delta t, t))^{-1} (\Delta\varepsilon^{t+\Delta t} - f_c^t) \\ &= E_e^{t+\Delta t} (\Delta\varepsilon^{t+\Delta t} - f_c^t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

여기서 $E_e^{t+\Delta t}$ 는 유효탄성계수로서 $t + \Delta t$ 에서의 응력 증분량 $\Delta\sigma^{t+\Delta t}$ 로 인한 크리프 변형도를 비크리프 계수 $C(t + \Delta t, t)$ 를 이용하여 탄성계수의 감소 형태로 나타내는 변수이다. 식(2.11)을 $\Delta\sigma^{t+\Delta t}$ 에 대해 분리시키면 다음과 같다.

$$\int_V \delta\varepsilon^{t+\Delta t} (\sigma^t + \Delta\sigma^{t+\Delta t}) dV = \int_V \delta u^{t+\Delta t} f^{t+\Delta t} dV \quad (2.17)$$

식(2.16)을 평형 방정식인 식(2.11)에 대입하면 다음과 같다.

$$\int_V \delta \varepsilon^{t+\Delta t} (\sigma^t + (E_e^{t+\Delta t} (\Delta \varepsilon^{t+\Delta t} - f_c^t))) dV = \int_V \delta u^{t+\Delta t} f^{t+\Delta t} dV \quad (2.18)$$

식(2.18)을 전체 변형도의 증분에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_V \delta \varepsilon^{t+\Delta t} E_e^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon^{t+\Delta t} dV &= \int_V \delta u^{t+\Delta t} f^{t+\Delta t} dV - \int_V \delta \varepsilon^t E_e^t \varepsilon^t dV \\ &+ \int_V \delta \varepsilon^{t+\Delta t} E_e^{t+\Delta t} f_c^t dV \end{aligned} \quad (2.19)$$

여기서 $\int_V \delta \varepsilon^{t+\Delta t} E_e^{t+\Delta t} f_c^t dV$ 은 $t + \Delta t$ 이전에 발생한 응력 증분이 기여하는 크

리프 변형도 f_c^t 에 상응하는 힘이다. 식(2.19)를 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \Delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} = \Delta \mathbf{P}^{t+\Delta t} + \mathbf{P}_c^{t+\Delta t} \quad (2.20)$$

여기서 \mathbf{D} 는 구성 행렬이고, $\Delta \mathbf{P}^{t+\Delta t}$ 는 $t + \Delta t$ 에서 작용하는 전체 외부 하중 $\int_V \delta u^{t+\Delta t} f^{t+\Delta t} dV$ 를 t 에서의 부재력 $\int_V \delta \varepsilon^t E_e^t \varepsilon^t dV$ 으로 뺀 값으로서, t 와 $t + \Delta t$ 사이에서 증가한 외력으로 정의된다. 다시 식(2.20)을 강성도 행렬을 사용한 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_F^{t+\Delta t} \Delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} = \Delta \mathbf{P}^{t+\Delta t} + \mathbf{P}_c^{t+\Delta t} \quad (2.21)$$

여기서 $\mathbf{K}_F^{t+\Delta t}$ 는 뼈대 요소의 강성도 행렬로서 재령일에 따른 $E_e^{t+\Delta t}$ 값에 따

라 변화한다. 만일 콘크리트의 재령 효과를 무시한다면 $E_c^{t+\Delta t}$ 값의 변화가 없으므로 뼈대 요소의 강성도 행렬은 \mathbf{K}_F 와 같이 시간에 무관한 형태로 표현될 수 있다.

3. 콘크리트 사장교의 목표형상 해석

사장교는 사장케이블의 장력으로 보강형에 발생하는 휨모멘트를 효과적으로 제어하며 보강형을 지지하는 교량 형식이다. 그러나 케이블에 의한 보강형의 휨모멘트 분담량이 증가하면, 이에 비례하여 보강형에 발생하는 압축력도 증가한다. 특히 주탑 부근의 보강형은 전면사장재(fore cable)와 배면사장재(back cable)의 장력으로 발생한 압축력이 누적되므로 주의해야 한다. 강재에 비해 압축 저항이 탁월한 콘크리트를 사장교의 보강형으로 채용하면, 과도한 압축력으로 인한 문제를 해결할 수 있다. 또한 케이블로 인해 보강형에 재하되는 압축력은 콘크리트 보강형에 프리스트레스를 도입하는 효과도 얻을 수 있다.

그러나 콘크리트 부재는 크리프 및 건조수축과 같은 비역학적 변형에 의해 구조물에 부정적인 영향을 끼칠 수 있다. 특히 크리프 현상은 재료 특성 및 시간과 함께 응력에 영향을 받으므로, 해석이 복잡하고 어렵다. 완공 후 평형을 이루고 있는 케이블 지지 구조물이라도, 콘크리트 부재에서 발생하는 크리프 변형은 케이블의 장력을 변화시킨다. 케이블의 장력이 변화하면 전체 구조물의 응력이 바뀌므로, 크리프 변형의 양상이 달라지게 된다. 그러므로 케이블의 장력과 크리프 변형의 상호 작용을 고려하여 크리프 해석을 수행하여야 한다.

케이블 지지 구조물은 주어진 목표형상 및 설계 조건을 만족시키는

케이블의 장력이나 무응력 길이를 결정하는 목표형상 해석을 수행하게 되는데, 기존의 크리프를 고려하지 않은 해석법은 구조계가 완공시점에서 목표형상을 만족시키는 초기치를 구하는 과정이었다. 그러나 크리프 현상을 고려하는 경우는 완공시점 이후, 구조물이 실제로 사용되는 시점을 목표시점으로 설정하고, 목표시점까지 크리프 해석으로 얻어진 구조물의 형상이 목표형상을 만족시키는 초기치를 구해야 한다.

이 논문에서는 콘크리트 주탑 및 콘크리트 보강형을 채용한 케이블 지지 교량에 대해 크리프 해석을 수행하여 목표시점에서 목표형상을 만족시키는 케이블의 무응력 길이를 구하는 목표형상 해석법을 제안한다. 대부분의 교량 시공 과정에서 발생하는 응력 변화는 무시할 수 없는 수준의 크리프 변형을 유발한다. 또한 이렇게 발생한 크리프 변형은 시공 과정에서 외력과 무관한 추가의 변위를 발생시키고, 이는 이후의 시공 과정에 영향을 미친다. 그러므로 시공단계별로 발생하는 응력 변화와 크리프 변형을 반영하여, 목표시점에서 목표형상을 만족시키는 케이블의 무응력 길이를 구한다.

3.1 탄성 현수선 요소를 이용한 사장교의 강성도 방정식

3.1.1 탄성 현수선 요소

그림 3.1 은 케이블의 자중과 양단에서 장력을 받고 있는 2 차원 케이

블 요소이다. 케이블 요소 e 의 외적 평형 조건은 다음과 같다.

$$\mathbf{F}_2^e = -\mathbf{F}_1^e - \mathbf{w}^e L_0^e \quad (3.1)$$

여기서 \mathbf{F}_j^e 와 L_0^e 는 각각 절점 j 에서 작용하는 장력 벡터와 케이블 요소의 무응력 길이이다. 또한 $\mathbf{w}^e = (0, w^e)^T$ 이고, w^e 는 무응력 상태의 케이블 부재가 갖는 단위 길이 당 자중이다. 절점 1에 대한 절점 2의 상대적 위치로 결정되는 탄성 현수선 케이블에 대한 해석적 해는 절점의 재단력, 케이블 요소의 자중과 무응력 길이로 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{x}_2^e - \mathbf{x}_1^e = \boldsymbol{\phi}^e(\mathbf{F}_1^e, L_0^e) \quad (3.2)$$

여기서 \mathbf{x}_1^e 과 \mathbf{x}_2^e 는 요소 e 의 절점 1과 절점 2의 좌표이며, $\boldsymbol{\phi}^e$ 의 성분은

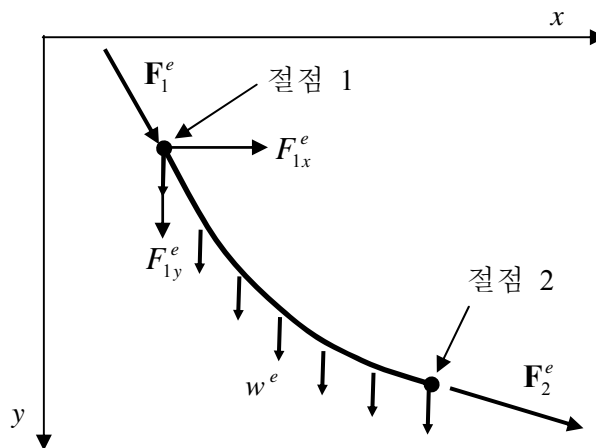


그림 3.1 탄성 현수선 요소

다음과 같다.

$$\begin{aligned}\phi_x^e &= -\frac{F_x L_0^e}{EA} - \frac{F_x}{w^e} \left(\sinh^{-1} \left(\frac{F_y + w^e L_0^e}{F_x} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right) \right) \\ \phi_y^e &= -\frac{F_y}{EA} L_0^e - \frac{w^e}{2EA} (L_0^e)^2 - \frac{1}{w^e} \left(\sqrt{F_x^2 + (F_y + w^e L_0^e)^2} - \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \right)\end{aligned}\quad (3.3)$$

여기서 F_x 와 F_y 는 \mathbf{F}_1^e 의 x -, y -방향의 재단력이다. 변위법에 기초한 일반적인 유한요소 해석법을 적용하려면, 케이블 요소 양단의 재단력을 절점 변위에 대하여 표시하여야 한다. 케이블 요소의 재단력을 변위에 대하여 표시하기 위하여는 식(3.3)을 재단력에 대하여 풀어야 한다. 그러나 비선형 방정식인 식(3.3)을 재단력에 대하여 해석적으로 풀 수 없으므로, 증분형 관계식을 사용하여야 한다. 식(3.1)과 식(3.2)를 증분형으로 표현하면 다음과 같다.

$$\Delta \mathbf{F}_2^e = -\Delta \mathbf{F}_1^e \quad (3.4)$$

$$\Delta \mathbf{x}_2^e - \Delta \mathbf{x}_1^e = \Delta \boldsymbol{\phi}^e(\mathbf{F}_1^e, L_0^e) \quad (3.5)$$

또한 식(3.3)을 Taylor 급수의 1차 항까지 전개하면 다음과 같다.

$$\Delta \boldsymbol{\phi}^e(\mathbf{F}_1^e, L_0^e) = \begin{pmatrix} \Delta \phi_x^e \\ \Delta \phi_y^e \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_x^e}{\partial F_x^e} \Delta F_x^e + \frac{\partial \phi_x^e}{\partial F_y^e} \Delta F_y^e \\ \frac{\partial \phi_y^e}{\partial F_x^e} \Delta F_x^e + \frac{\partial \phi_y^e}{\partial F_y^e} \Delta F_y^e \end{pmatrix} = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \Delta \mathbf{F}_1^e \quad (3.6)$$

식(3.6)을 식(3.5)에 대입하고 식(3.4)를 이용하면, 재단력의 증분에 대해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{F}_1^e &= \left(\frac{\partial \Phi^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \right)^{-1} (-\Delta \mathbf{x}_1^e + \Delta \mathbf{x}_2^e) = \mathbf{k}_c^e (-\Delta \mathbf{x}_1^e + \Delta \mathbf{x}_2^e) \\ \Delta \mathbf{F}_2^e &= -\Delta \mathbf{F}_1^e = -\mathbf{k}_c^e (-\Delta \mathbf{x}_1^e + \Delta \mathbf{x}_2^e)\end{aligned}\quad (3.7)$$

식(3.7)을 하나의 행렬식으로 표현하면 증분형 케이블 요소 강성도 행렬식을 구할 수 있다.

$$\Delta \mathbf{F}_{ca}^e = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{F}_1^e \\ \Delta \mathbf{F}_2^e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_c & \mathbf{k}_c \\ \mathbf{k}_c & -\mathbf{k}_c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}_1^e \\ \Delta \mathbf{x}_2^e \end{pmatrix} = \mathbf{K}_c^e \Delta \mathbf{x}^e \quad (3.8)$$

사장교와 같은 케이블 지지 구조물에서 케이블 부재는 무응력 상태에서 구조물의 형상이 결정되지 않으나, 뼈대 구조물은 무응력 상태에서의 형상이 결정되므로 각 절점에서의 변위를 정의할 수 있다. 사장교와 같은 구조물에 사용되는 케이블 부재는 양단이 항상 뼈대 구조물에 연결되므로 양단 위치는 뼈대 구조물에서 정의된 절점 변위로 표현할 수 있다. 그러므로 뼈대 구조물의 기준형상을 무응력 상태의 형상으로 사용하면, 케이블 요소 양단 위치의 증분은 케이블 요소가 연결될 뼈대 구조물의 자유도로 표현할 수 있게 되어 식(3.8)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta \mathbf{F}_{ca}^e = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{F}_1^e \\ \Delta \mathbf{F}_2^e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_c & \mathbf{k}_c \\ \mathbf{k}_c & -\mathbf{k}_c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_1^e \\ \Delta \mathbf{u}_2^e \end{pmatrix} = \mathbf{K}_c^e \Delta \mathbf{u}^e \quad (3.9)$$

여기서 $\Delta \mathbf{u}^e$ 는 케이블 요소가 연결된 뼈대 구조물의 절점 변위를 나타낸다.

3.1.2 미지의 무응력 길이에 대한 탄성 현수선 요소

크리프 현상이 발생하는 콘크리트 사장교의 기하 형상이 목표형상을 만족시키도록 하는 케이블의 무응력 길이를 Newton-Raphson 법으로 구하려면, 양단 좌표 변화에 따른 장력 변화 외에도 케이블의 무응력 길이 변화가 장력에 미치는 영향도 필요하다. 이를 위해 케이블의 재단력과 함께 무응력 길이를 미지수로 설정하면 식(3.1)을 증분형으로 표현하면 다음과 같다.

$$\Delta \mathbf{F}_2^e = -\Delta \mathbf{F}_1^e - \mathbf{w}^e \Delta L_0^e \quad (3.10)$$

또한 식(3.3)을 Taylor 급수의 1차 항까지 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\phi}^e(\mathbf{F}_1^e, L_0^e) &= \begin{pmatrix} \Delta \phi_x^e \\ \Delta \phi_y^e \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_x^e}{\partial F_x} \Delta F_x + \frac{\partial \phi_x^e}{\partial F_y} \Delta F_y + \frac{\partial \phi_x^e}{\partial L_0^e} \Delta L_0^e \\ \frac{\partial \phi_y^e}{\partial F_x} \Delta F_x + \frac{\partial \phi_y^e}{\partial F_y} \Delta F_y + \frac{\partial \phi_y^e}{\partial L_0^e} \Delta L_0^e \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \Delta \mathbf{F}_1^e + \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^e}{\partial L_0^e} \Delta L_0^e \end{aligned} \quad (3.11)$$

식(3.11)을 식(3.5)에 대입하고 식(3.10)을 이용하면, 재단력의 증분에 대해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{F}_1^e &= \left(\frac{\partial \phi^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \right)^{-1} (-\Delta \mathbf{x}_1^e + \Delta \mathbf{x}_2^e) - \left(\frac{\partial \phi^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \right)^{-1} \frac{\partial \phi^e}{\partial L_0^e} \Delta L_0^e \\
&= \mathbf{k}_c (-\Delta \mathbf{x}_1^e + \Delta \mathbf{x}_2^e) + \mathbf{k}_g \Delta L_0^e \\
\Delta \mathbf{F}_2^e &= -\Delta \mathbf{F}_1^e - \mathbf{w}^e \Delta L_0^e = -\mathbf{k}_c (-\Delta \mathbf{x}_1^e + \Delta \mathbf{x}_2^e) - (\mathbf{k}_g + \mathbf{w}^e) \Delta L_0^e
\end{aligned} \tag{3.12}$$

식(3.12)를 하나의 행렬식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{F}_{ca}^e &= \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{F}_1^e \\ \Delta \mathbf{F}_2^e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_c & \mathbf{k}_c \\ \mathbf{k}_c & -\mathbf{k}_c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}_1^e \\ \Delta \mathbf{x}_2^e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{k}_g \\ -\mathbf{k}_g - \mathbf{w}^e \end{pmatrix} \Delta L_0^e \\
&= \mathbf{K}_c^e \Delta \mathbf{x}^e + \mathbf{K}_g^e \Delta L_0^e
\end{aligned} \tag{3.13}$$

뼈대 구조물의 기준형상을 무응력 상태의 형상으로 사용하면, 식(3.9)와 같이 케이블 부재 양단 위치의 증분은 뼈대 구조물의 절점 변위로 나타낼 수 있다. 식(3.13)을 뼈대 구조물의 절점 변위로 표현하면 다음과 같다.

$$\Delta \mathbf{F}_{ca}^e = \mathbf{K}_c^e \Delta \mathbf{u}^e + \mathbf{K}_g^e \Delta L_0^e \tag{3.14}$$

3.2 콘크리트 사장교의 목표형상 해석법

3.2.1 콘크리트 사장교의 크리프 해석

콘크리트 구조물의 평형방정식인 식(2.21)을 이용하여 주탑 및 보강형이 콘크리트 부재로 구성된 케이블 지지 구조물의 평형 방정식을 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_F^{t+\Delta t} \Delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} + \mathbf{F}_{ca}(\mathbf{L}_0, \mathbf{x}^{t+\Delta t}) = \Delta \mathbf{P}^{t+\Delta t} + \mathbf{P}_c^{t+\Delta t} \quad (3.15)$$

여기서 $\mathbf{F}_{ca}(\mathbf{L}_0, \mathbf{x}^{t+\Delta t})$ 는 케이블의 무응력 길이 \mathbf{L}_0 와 $t + \Delta t$ 시점에서의 케이블 양단 좌표 $\mathbf{x}^{t+\Delta t}$ 에 의해 결정되는 케이블 부재의 장력이다. 식(3.15)를 $t + \Delta t$ 에서의 케이블 양단 좌표 변화량 $\Delta \mathbf{x}^{t+\Delta t}$ 에 대해 분리하여 정리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_F^{t+\Delta t} \Delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} + \mathbf{F}_{ca}(\mathbf{L}_0, \mathbf{x}^t) + \frac{\partial \mathbf{F}_{ca}}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x}^{t+\Delta t} = \Delta \mathbf{P}^{t+\Delta t} \quad (3.16)$$

여기서 $\frac{\partial \mathbf{F}_{ca}}{\partial \mathbf{x}}$ 은 케이블의 양단 좌표가 $\Delta \mathbf{x}^{t+\Delta t}$ 만큼 변화하였을 때의 케이블 부재의 강성이다. 식(3.8)과 식(3.9)에 나타난 케이블 양단 좌표와 뼈대 구조물 절점 변위 간의 관계를 이용하여 식(3.16)을 $\Delta \mathbf{u}^{t+\Delta t}$ 로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_F^{t+\Delta t} \Delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} + \mathbf{F}_{ca}(\mathbf{L}_0, \mathbf{u}^t) + \frac{\partial \mathbf{F}_{ca}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} = \Delta \mathbf{P}^{t+\Delta t} + \mathbf{P}_c^{t+\Delta t} \quad (3.17)$$

식(3.17)을 $t + \Delta t$ 에서의 변위 증분에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$\left(\mathbf{K}_F^{t+\Delta t} + \frac{\partial \mathbf{F}_{ca}}{\partial \mathbf{u}} \right) \Delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} = \Delta \mathbf{P}^{t+\Delta t} - \mathbf{F}_{ca}(\mathbf{L}_0, \mathbf{x}^t) + \mathbf{P}_c^{t+\Delta t} \quad (3.18)$$

여기서 $\Delta \mathbf{P}^{t+\Delta t}$ 는 t 와 $t + \Delta t$ 사이에서 증가한 외력으로서, $t + \Delta t$ 에서 작용

하는 전체 외부 하중 $\mathbf{P}^{t+\Delta t}$ 를 t 에서의 뼈대 요소 부재력 $\int_V \delta \varepsilon^t E^t \varepsilon^t dV$ 과 케이블 요소 부재력 $\mathbf{F}_{ca}(\mathbf{L}_0, \mathbf{u}^t)$ 로 뺀 값으로 다시 정의한다. 콘크리트의 재령 효과를 무시한다면 식(3.18)을 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$(\mathbf{K}_F + \mathbf{K}_{ca})\Delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} = \Delta \mathbf{P}^{t+\Delta t} + \mathbf{P}_c^{t+\Delta t} \quad (3.19)$$

3.2.2 콘크리트 사장교의 목표형상 해석법

콘크리트 사장교는 시간에 따른 비역학적 변형에 의해 완공 직후의 초기평형상태가 시간이 지남에 따라 변화하게 된다. 그러므로 초기평형상태가 목표형상이나 설계종단곡선과 같은 설계조건을 만족시키는 상태로 완공되었다라도 시간이 지나면서 크리프 변형이 발생하여 구조물이 사용되는 시점에서는 구조물의 형상이 목표형상에서 벗어나게 된다. 그러므로 콘크리트 사장교의 목표형상 해석에서는 목표형상을 만족시키는 목표시점을 설정하여야 한다. 목표시점은 크리프 변형이 안정화되어 구조물에 큰 영향을 미치지 못하는 시점이 바람직하다. 교량 개통시점을 목표시점으로 설정하고 해석을 수행하였을 때, 목표시점을 전후로 구조물의 거동에 큰 영향을 미칠 수준의 크리프 변화가 발생한다면 케이블의 무응력 길이나 시공단계를 조정하여야 한다.

목표시점까지 콘크리트 구조물에서 발생한 변위가 목표형상과 일치해

야 한다는 조건을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \bar{\mathbf{u}} \quad (3.20)$$

여기서 $\bar{\mathbf{x}}$ 는 목표형상이고, \mathbf{x} 는 뼈대 구조물의 초기형상, $\bar{\mathbf{u}}$ 는 목표형상을 맞추기 위해 필요한 변위이다. 콘크리트 구조물은 시간에 따라 발생하는 크리프 변형 등의 시간의존적 거동이 존재하므로 변위는 시간에 대한 함수로 표현된다. 또한 사장교와 같은 케이블 지지 구조물은 케이블의 무응력 길이에 따라 변위가 변화하므로 무응력 길이도 변위에 대한 변수가 된다. 그러므로 식(3.20)을 콘크리트 사장교에 대해 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &= \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x} \\ &= \mathbf{u}(\mathbf{L}_0, \bar{t}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

여기서 \bar{t} 는 목표시점이다. 즉, $\mathbf{u}(\mathbf{L}_0, \bar{t})$ 는 주어진 케이블 무응력 길이 \mathbf{L}_0 에 대해 목표시점 \bar{t} 까지 발생한 변위이다. 식(3.21)은 비선형식이므로 Newton-Raphson 법을 이용하여 케이블의 무응력 길이 \mathbf{L}_0 를 구할 수 있다. 식(3.21)을 Taylor 급수로 1차 항까지 전개하면 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_k^{\bar{t}} + \frac{\partial \mathbf{u}_k^{\bar{t}}}{\partial \mathbf{L}_0} \Delta \mathbf{L}_0 + \text{H.O.T.} \quad (3.22)$$

여기서 $\mathbf{u}_k^{\bar{t}}$ 는 $k-1$ 번째 계산으로 구해진 \mathbf{L}_0 에 대한 목표시점 \bar{t} 에서의 변위로서 $\mathbf{u}(\mathbf{L}_0^k, \bar{t})$ 와 같다. 그림 3.2는 k 번째 반복계산으로 구한 \mathbf{L}_0^k 와 목

표시점 \bar{t} 로 결정되는 변위 $\mathbf{u}_{k+1}^{\bar{t}}$ 가 $\bar{\mathbf{u}}$ 에 반복 계산을 통해 가까워지는 것을 보이고 있다.

식(3.22)의 무응력 길이에 대한 변위 민감도는 케이블 지지 구조물의 평형 방정식을 \mathbf{L}_0 에 대해 직접 미분하여 구할 수 있다[5]. 식(3.15)를 \mathbf{L}_0 에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\int_V \mathbf{B}^T \frac{\partial \sigma^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{L}_0} dV + \frac{\partial \mathbf{F}_{ca}(\mathbf{L}_0, \mathbf{u}^{t+\Delta t})}{\partial \mathbf{L}_0} = 0 \quad (3.23)$$

$$\int_V \mathbf{B}^T \frac{\partial \sigma^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{L}_0} dV + \mathbf{K}_{ca}^{t+\Delta t} \frac{\partial \mathbf{u}^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{L}_0} + \mathbf{K}_g^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.24)$$

식(3.24)에서 변위 민감도를 구하기 위해서는 응력 민감도를 알아야 한다. 응력 민감도는 크리프 변형도 민감도로부터 구할 수 있으며, 크리프 변형도 민감도는 식(2.8)을 이용하여 구할 수 있다. 식(2.8)을 \mathbf{L}_0 에 대해 직접

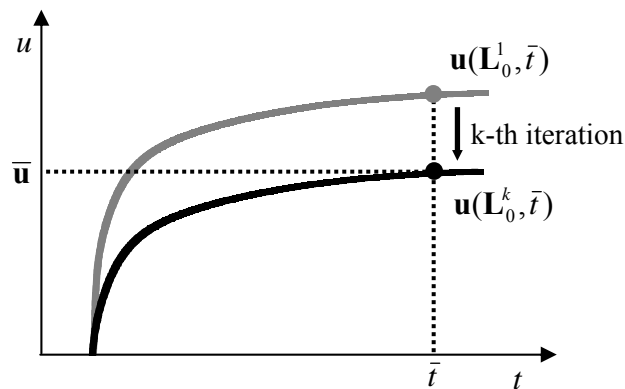


그림 3.2 목표형상을 만족시키는 \mathbf{L}_0 의 계산

미분하면 크리프 변형도의 민감도를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_c^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{L}_0} &= \sum_{i=1}^n C(t+\Delta t, t_{i-1}) \left(\frac{\partial \sigma^{t_i}}{\partial \mathbf{L}_0} - \frac{\partial \sigma^{t_{i-1}}}{\partial \mathbf{L}_0} \right) + C(t+\Delta t, t) \left(\frac{\partial \sigma^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{L}_0} - \frac{\partial \sigma^t}{\partial \mathbf{L}_0} \right) \\ &= g_c^t + C(t+\Delta t, t) \left(\frac{\partial \sigma^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{L}_0} - \frac{\partial \sigma^t}{\partial \mathbf{L}_0} \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

여기서 g_c^t 는 $t+\Delta t$ 이전의 응력 민감도 증분이 기여하는 $t+\Delta t$ 에서의 크리프 변형도 민감도이다. 과거의 응력이 현재의 크리프 변형도에 미치는 영향을 f_c^t 가 나타냈다면, g_c^t 는 시간에 따라 발생하는 크리프 변형도의 민감도를 나타낸다. 식(2.13)을 \mathbf{L}_0 에 대해 미분하면 다음과 같은 응력 민감도와 변형도 민감도의 관계식이 구해진다.

$$\frac{\partial \sigma^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{L}_0} = E^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial \varepsilon^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{L}_0} - \frac{\partial \varepsilon_c^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{L}_0} \right) \quad (3.26)$$

식(3.26)에 식(3.25)를 대입하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \sigma^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{L}_0} = E^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial \varepsilon^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{L}_0} - g_c^t - C(t+\Delta t, t) \left(\frac{\partial \sigma^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{L}_0} - \frac{\partial \sigma^t}{\partial \mathbf{L}_0} \right) \right) \quad (3.27)$$

식(3.27)을 응력 민감도에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{L}_0} &= \frac{E^{t+\Delta t}}{1 + E^{t+\Delta t} C(t + \Delta t, t)} \left(\frac{\partial \varepsilon^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{L}_0} - g_c^t \right) \\
&= E_e^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial \varepsilon^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{L}_0} - g_c^t \right)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

식(3.28)에 계산된 무응력 길이에 대한 응력 민감도를 식(3.24)에 대입하면 다음과 같다.

$$\int_V \mathbf{B}^T E_e^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial \varepsilon^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{L}_0} - g_c^t \right) dV + \mathbf{K}_{ca}^{t+\Delta t} \frac{\partial \mathbf{u}^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{L}_0} + \mathbf{K}_g^{t+\Delta t} = 0 \tag{3.29}$$

식(3.29)을 변위 민감도에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$\left(\mathbf{K}_F^{t+\Delta t} + \mathbf{K}_{ca}^{t+\Delta t} \right) \frac{\partial \mathbf{u}^{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{L}_0} - \int_V \mathbf{B}^T E_e^{t+\Delta t} g_c^t dV + \mathbf{K}_g^{t+\Delta t} = 0 \tag{3.30}$$

주어진 목표형상에 대해 목표시점 \bar{t} 에서 계산된 변위와 식(3.30)에서 구해진 변위 민감도 값을 식(3.22)에 대입하면 무응력 길이의 보정량 $\Delta \mathbf{L}_0$ 이 구해진다. 식(3.22)를 보면, 실제로 필요한 변위 민감도는 목표시점에서의 변위 민감도 값이지만, 목표 시점의 변위 민감도를 알기 위해서는 식(3.30)을 통해 목표시점 바로 직전의 g_c^t 을 알아야 한다. g_c^t 는 시간 t 까지의 응력 민감도를 이용하여 계산되므로, 식(3.28)을 통해 t 에서의 변형도 민감도를 구해야 한다. 결국, 목표 시점의 변위 민감도는 구조물에 응력이 발생하는 시점부터 목표 시점까지 앞의 식을 이용하여 축차적으로 계산해야 얻어

진다.

식(3.22)를 통해 얻어진 $\Delta \mathbf{L}_0$ 는 다음 식에 대입하여 무응력 길이를 보정한다.

$$\mathbf{L}_0^{k+1} = \mathbf{L}_0^k + \Delta \mathbf{L}_0 \quad (3.31)$$

\mathbf{L}_0^{k+1} 를 새로운 무응력 길이로 설정하고 $k+1$ 번째 반복계산을 수행하여 무응력 길이의 보정량 $\Delta \mathbf{L}_0$ 와 \mathbf{L}_0^{k+1} 의 차이가 허용 오차 이내에 들어올 때까지 반복 계산한다.

3.3 시공단계를 고려한 목표형상 해석법

사장교는 케이블의 긴장, 추가 부재 가설 등의 시공 과정으로 인해 응력이 수시로 바뀐다. 특히 기존의 케이블 장력이 바뀌므로 구조물 자체의 응력 변화가 심하다. 그러므로 크리프를 고려하여 목표형상을 만족시키기 위해서는 정밀한 시공단계 해석이 요구된다.

사장교의 가설 방법에는 가벤투 이용 방법, ILM(Incremental Launching Method)공법과 같은 압출식 공법, FCM(Free Cantilever Method)과 같은 캔틸레버 공법 등이 있다. 이 중, 캔틸레버 공법은 가장 보편적으로 사용되는 공법으로서 일방향 캔틸레버 공법(1-Direction Free Cantilever Method)과 균형 캔틸레버 공법(Balanced Cantilever Method)으로 다시 나뉜다. 일방향 캔틸레

버 공법은 측경간을 먼저 시공한 후, 주탑부에서부터 캔틸레버 공법으로 중앙 경간을 가설한다. 반면, 균형 캔틸레버 공법은 주탑부에서 측경간과 중앙경간 양 방향으로 동시에 하나씩 세그먼트를 가설하는 방식이다.

현장 타설 콘크리트 사장교를 캔틸레버 공법으로 가설하면, 각 세그먼트별로 타설 시점, 하중 재하 시점 등이 달라진다. 그러므로 이러한 조건을 각각의 부재별로 고려하여 구조해석을 수행하여야 한다. k 번째 부재의 크리프 변형도는 다음과 같다.

$$\varepsilon_c^t = \int_{t_k}^t C(t, \tau - t_k) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3.32)$$

여기서 t_k 는 이동식 작업차(form traveler) 내지는 거푸집에 콘크리트가 타설되는 시점이고, τ 는 이동식 작업차나 거푸집이 제거되면서 k 번째 부재에 자중이 재하되어 구조 부재로 작용하는 시점이다. 식(3.32)를 식(2.9)와 식(2.12)에 대입하여 k 번째 부재의 크리프 변형도 증분량을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_c^{t+\Delta t} &= \sum_{i=t_k}^n (C(t+\Delta t, t_{i-1} - t_k) - C(t, t_{i-1} - t_k)) \Delta\sigma^i \\ &\quad + C(t+\Delta t, t - t_k) \Delta\sigma^{t+\Delta t} \\ &= f_c^{t-t_k} + C(t+\Delta t, t - t_k) \Delta\sigma^{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (3.33)$$

여기서 $f_c^{t-t_k}$ 는 t_k 부터 t 까지 k 번째 부재에 가해진 응력 이력에 의해 t 와

$t + \Delta t$ 구간 사이에 발생하는 크리프 변형도의 증분량이다. 식(3.33)을 식(2.14)에 대입하여 식(2.16)과 같이 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} &= (1 + \mathbf{E}^{t+\Delta t-t_k} \mathbf{C}(t + \Delta t, t - t_k))^{-1} \mathbf{E}^{t+\Delta t-t_k} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{t+\Delta t} - f_c^{t-t_k}) \\ &= \mathbf{E}_e^{t+\Delta t-t_k} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{t+\Delta t} - f_c^{t-t_k})\end{aligned}\quad (3.34)$$

식(3.34)를 식(2.17)에 대입하여 변위의 증분에 관한 식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\int_{V_k} \mathbf{K}_F^{t+\Delta t-t_k} dV \Delta \mathbf{u}^{t+\Delta t} = \mathbf{P}^{t+\Delta t} - \int_{V_k} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} dV + \int_{V_k} \mathbf{B}^T \mathbf{E}_e^{t+\Delta t-t_k} f_c^{t-t_k} dV \quad (3.35)$$

여기서 V_k 는 k 번째 부재의 양생이 완료되는 시점부터 존재하게 되는 적분 영역을 나타낸다. 식(3.35)에서 보인 k 번째 부재의 강성도 방정식을 이용하여 가설시간이 다른 각각의 부재별로 크리프 해석을 할 수 있다.

임의의 시각 t_1 에서 그림 3.3(a)와 같이 평형을 이룬 사장교의 평형 방정식은 식(3.15)를 사용하면 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{n(t_1)} \int_{V_k} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{t_1} dV + \sum_{l=1}^{m(t_1)} \mathbf{F}_{ca}^l(L_0^l, \mathbf{u}^{t_1}) = \mathbf{P}^{t_1} \quad (3.36)$$

여기서 $n(t_1)$ 은 t_1 까지 가설된 뼈대 부재의 개수를 개수, $m(t_1)$ 은 케이블 부재의 개수이다. $\mathbf{F}_{ca}^l(L_0^l, \mathbf{x}^{t_1})$ 은 무응력 길이가 L_0^l 인 l 번째 케이블이 시간 t_1 에서의 좌표 \mathbf{x}^{t_1} 을 가질 때 발생하는 장력을 나타낸다. 그림 3.3(b)는

추가의 보강형이 t_2 에 가설되었을 때의 상태이다. 이 때, 추가의 보강형은 거푸집에 타설되므로 구조 부재로 작용하지 못한다. 그러므로 보강형 및 케이블의 개수는 동일하며, 하중만 추가된다. t_2 에서의 평형 방정식은 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{n(t_2)} \int_{V_k} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{t_2} dV + \sum_{l=1}^{m(t_2)} \mathbf{F}_{ca}^l(L_0^l, \mathbf{u}^{t_2}) = \mathbf{P}^{t_1} + \Delta \mathbf{P}^{t_2} \quad (3.37)$$

여기서 t_2 에서의 보강형 개수 $n(t_2)$ 와 케이블의 개수 $m(t_2)$ 는 각각 $n(t_1)$ 과 $m(t_1)$ 으로서 t_1 에서의 부재 개수와 동일하다. $\Delta \mathbf{P}^{t_2}$ 는 t_2 에 타설된 추가 보강형의 자중으로 인해 기존의 보강형 끝단에 작용하는 집중하중이다. 그림 3.3(c)는 추가의 보강형이 타설된 시간 t_2 와 양생이 완료되어 거푸집이 제거되는 t_4 사이의 크리프 변형이 발생한 상태이다. t_2 와 t_4 사이의 임의의 시간 t_3 에 대한 평형 방정식은 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{n(t_3)} \int_{V_k} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{t_3} dV + \sum_{l=1}^{m(t_3)} \mathbf{F}_{ca}^l(L_0^l, \mathbf{u}^{t_3}) = \mathbf{P}^{t_1} + \Delta \mathbf{P}^{t_2} \quad (3.38)$$

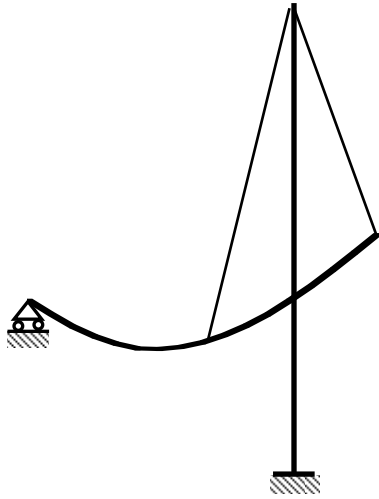
여기서 t_3 에서의 보강형 개수 $n(t_3)$ 와 케이블의 개수 $m(t_3)$ 는 각각 $n(t_1)$ 과 $m(t_1)$ 으로서 t_1 및 t_2 에서의 부재 개수와 동일하다. t_3 와 $t_3 + \Delta t$ 사이의 변위 증분량은 식(3.18)을 적용하면 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{n(t_3)} \mathbf{K}_{V_k}^{t_3+\Delta t-t_k} \Delta \mathbf{u}^{t_3+\Delta t} + \sum_{l=1}^{m(t_3)} \frac{\partial \mathbf{F}_{ca}^l}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u}^{t_3+\Delta t} = \mathbf{P}^{t_1} + \Delta \mathbf{P}^{t_2} - \sum_{k=1}^{n(t_3)} \int_{V_k} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{t_3} dV + \sum_{k=1}^{n(t_3)} \int_{V_k} \mathbf{B}^T E_e^{t_3+\Delta t-t_k} f_c^{t_3-t_k} dV - \mathbf{F}_{ca}^l(L_0, \mathbf{u}^{t_3}) \quad (3.39)$$

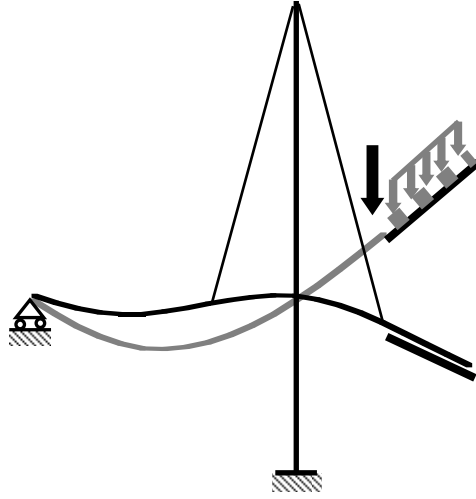
그림 3.3.(d)는 양생이 완료되어 케이블이 정착 및 긴장되고 거푸집이 제거되는 시점 t_4 에서의 평형 상태를 보이고 있다. 추가된 보강형이 구조 부재로 작용하면서 구조 부재의 개수가 추가된 보강형 부재 개수만큼 증가하여 $n(t_3)$ 에서 $n(t_4)$ 로 늘어난다. 추가된 케이블도 구조 부재로 작용하면서 $m(t_4)$ 는 $m(t_3)$ 에서 추가된 케이블 수 만큼 늘어난 값이다. t_4 에서 양생이 완료되어 추가된 부재의 적분 범위를 $V_{n(t_4)}$ 라 하면 평형 방정식은 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{n(t_3)} \int_{V_k} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{t_4} dV + \int_{V_{n(t_4)}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{t_4} dV + \sum_{l=1}^{m(t_4)} \mathbf{F}_{ca}^l(L_0^l, \mathbf{u}^{t_4}) = \mathbf{P}^{t_4} \quad (3.40)$$

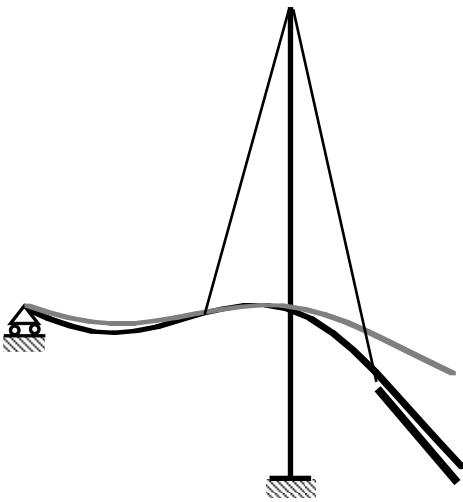
여기서 \mathbf{P}^{t_4} 는 V_1 에서 $V_{n(t_4)}$ 까지 작용하는 분포하중으로서, 시간 t_2 에서 기존 보강형의 끝 단에 집중하중 형태로 가해진 추가된 보강형의 하중 $\Delta \mathbf{P}^{t_2}$ 이 제거되고, 기존의 하중 \mathbf{P}^{t_1} 과 함께 $V_{n(t_4)}$ 에 작용하는 분포하중을 의미한다. 이후 새로운 부재가 추가되면 식(3.36)부터 (3.40)까지를 반복하여 해석한다.



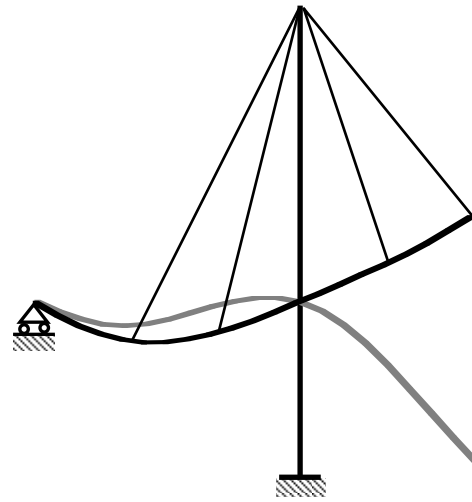
(a) t_1 에서의 평형상태



(b) t_2 에 타설된 추가의 보강형



(c) t_3 에서의 크리프 변형



(d) t_4 에서의 거푸집 제거 및 케이블 긴장

그림 3.3 시공단계를 고려한 목표형상 해석 과정

4. 수치해석 예제

이 장에서는 펜 타입 콘크리트 사장교 모델에 목표형상 해석법을 제안된 방법으로 수행하여, 제안된 방법의 적용 가능성과 타당성을 검증하였다. 그림 4.1 은 전체 길이가 104m 이고, 주탑 높이가 30m 인 콘크리트 사장교 모델을 보이고 있다. 목표형상은 주탑 상단의 수평 변위와 거더의 케이블 정착 지점 수직 방향 변위가 0 이 되는 형상으로 설정하였다. 제어 절점은 그림 4.2 과 같이 지점부를 제외한 거더의 정착구와 양쪽 주탑의 정점부이며, 제어 자유도는 거더는 수직 방향이고 주탑은 수평 방향으로 설정하였다. 계산은 무응력 길이의 변화량에 대한 상대 오차가 다음의 기준을 만족할 때까지 반복하였다.

$$\frac{\|\Delta \mathbf{L}_0^k\|}{\|\mathbf{L}_0^k\|} \leq 10^{-12} \quad (4.1)$$

크리프 변형도를 계산하기 위한 수치적분에서 $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 1 \text{ day}$ 를 사용하였다.

왼쪽부터 오른쪽까지 순서대로 1 번부터 12 번까지 케이블 번호를 부여한다. 제어절점은 왼쪽 주탑 정점부를 1 번, 오른쪽 주탑 정점부를 2 번, 나머지 제어절점을 왼쪽부터 오른쪽 순으로 3 번부터 12 번까지 번호를 부여하였다.

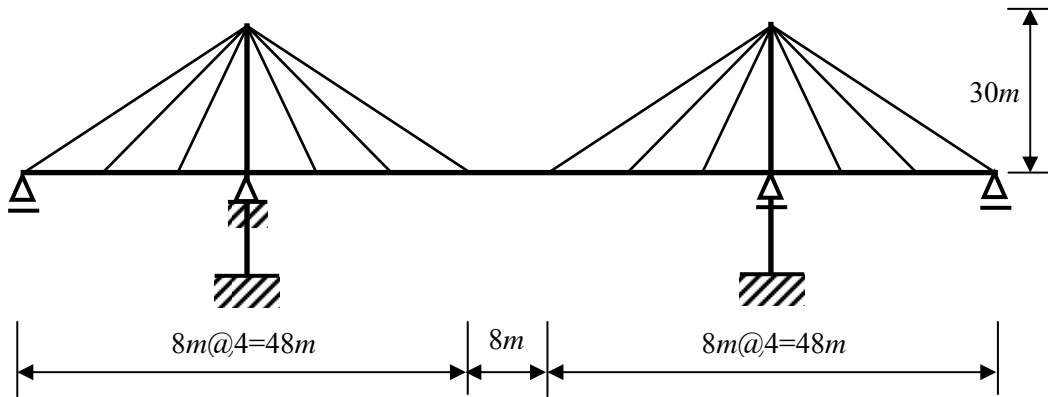


그림 4.1 팬타입 콘크리트 사장교의 기하형상

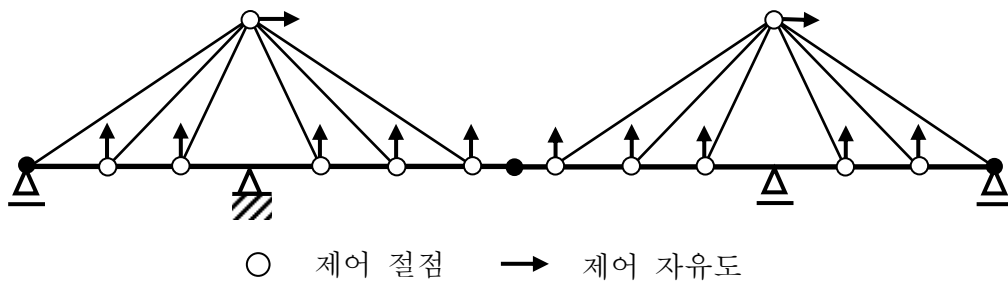


그림 4.2 팬타입 콘크리트 사장교의 모델링과 제어 절점

그림 4.3 과 그림 4.4 는 시공단계를 고려하지 않았을 때의 목표형상 해석 결과이다. 30 일에 구조물이 완공되고, 30 일 이후에 크리프 현상이 발생하였다. 크리프 현상에 의해 시간에 따라 변하던 거더 형상이 목표 시점 1000 일에서 주어진 목표형상을 정확히 만족시키고 있다. 그림 4.4 는 구조물이 완공된 시점과 목표 시점에서의 왼쪽 주탑 형상을 나타낸 것이다. 완

공 시점에서는 주탑이 측경간 쪽으로 휘어져있다. 그러나 시간이 지나면서 목표 시점에서 주탑 정점부의 수평 변위가 정확하게 0 이 됨을 보이고 있다.

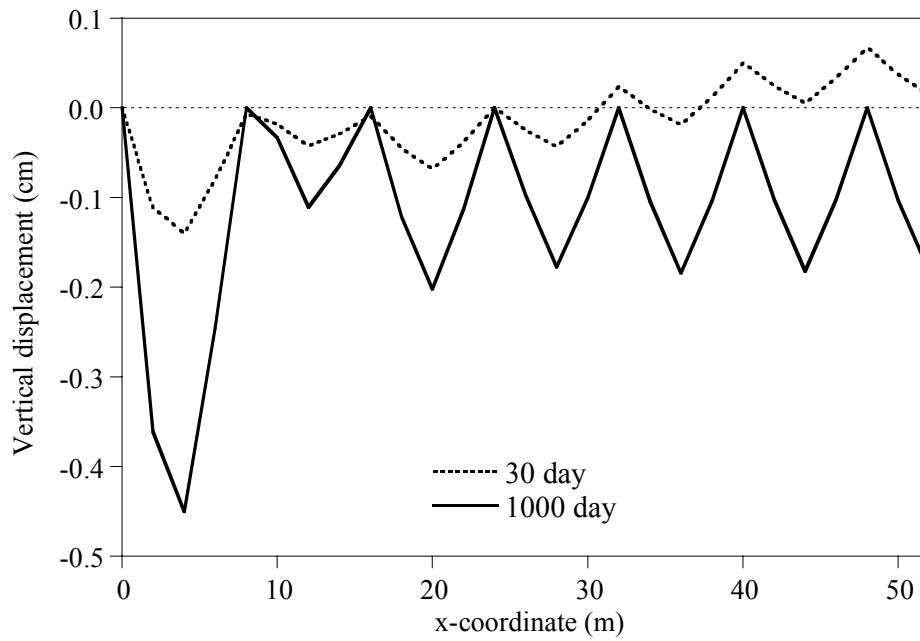


그림 4.3. 완공시점과 목표시점에서의 거더 형상

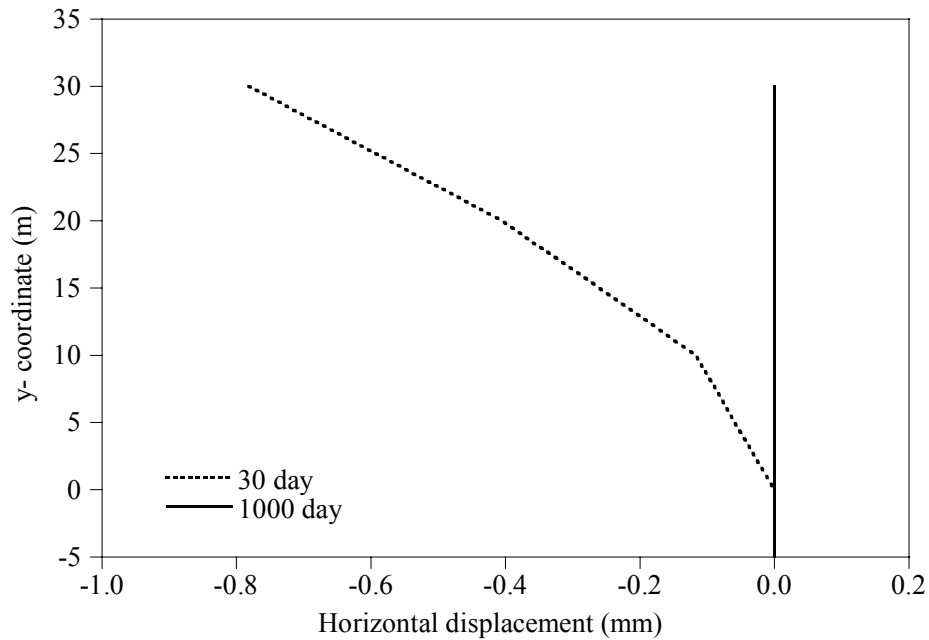


그림 4.4. 완공시점과 목표시점에서의 주탑 형상

그림 4.5 ~ 그림 4.8 은 시공단계를 고려한 예제 구조물의 목표형상 해석 결과를 나타낸 그래프이다. 시공단계를 고려하였을 때 완공 후 시점과 목표 시점에서의 거더 형상을 그림 4.5 에 비교하였다. 그림 4.3 과 비교하였을 때, 시공과정에서 발생하는 응력의 변화가 완공 이후, 크리프 변형에 큰 영향을 주고 있는 것을 알 수 있다. 시공단계를 고려한 목표형상 해석 법도 반복 계산을 통해 구한 케이블의 무응력 길이가 목표형상을 정확하게 만족시킴을 알 수 있다.

그림 4.6 은 시간에 따른 4 번, 5 번, 6 번 제어 절점의 수직 변위를 비교

한 그래프이다. 시공단계에 따라 탄성 변형과 크리프 변형이 발생하는 것을 알 수 있다. 4번 제어 절점의 경우, 30일에 양생이 완료되어 이후 크리프 변형이 발생하다가, 42일부터 추가의 세그먼트가 가설되어 집중하중이 작용함에 따라 탄성 처짐이 발생하는 것을 알 수 있다. 또한 70일에 추가의 케이블이 정착, 긴장됨에 따라 거더의 하중이 분산되어 탄성 처짐이 위쪽으로 발생한다.

그림 4.7은 왼쪽 주탑과 4번 케이블, 4번 케이블과 5번 케이블, 5번 케이블과 6번 케이블의 세그먼트 중앙부의 상연에 발생하는 전체 변형도를 시간에 대해 나타낸 그래프이다. 세그먼트가 가설되는 시점부터 탄성 변형도와 함께 시간에 따라 크리프 변형도가 발생하는 것을 알 수 있다. 28m 지점의 상연부의 전체 변형도를 보면, 4번 케이블의 장력이 도입되는 30일부터 탄성 변형도와 함께 크리프 변형도가 압축 방향으로 발생하며, 추가의 세그먼트가 가설되는 42일에는 인장 방향으로 발생한다. 이후 시공 단계에 따라 변형도의 증감이 발생하다가 시공이 완료되는 150일부터 안정화된다.

그림 4.7은 왼쪽 주탑 오른쪽의 4번, 5번, 6번 케이블의 시간에 따른 장력 변화를 나타낸 그래프이다. 세그먼트가 추가되는 시점에서는 장력이 급격하게 증가하고, 케이블이 추가되는 시점에서는 기존 케이블의 장력이 감소하는 것을 알 수 있다. 또한 정착구에서 발생하는 크리프 변형으로 장력이 크리프 변형과 같은 양상으로 시간에 따라 서서히 증가하거나 감소하

는 모습을 관찰할 수 있다. 이 결과를 토대로 4 번 케이블은 60 일에서 보강형에 발생하는 크리프로 인해 300tonf 에 가까운 장력이 발생하게 된다. 이 예제에서는 4 번 케이블의 단면적이 $4.2 \times 10^{-3} m^2$ 이므로, 약 670 MPa 이상의 항복 강도를 가져야 시공 과정에서 발생하는 인장력에 저항할 수 있다.

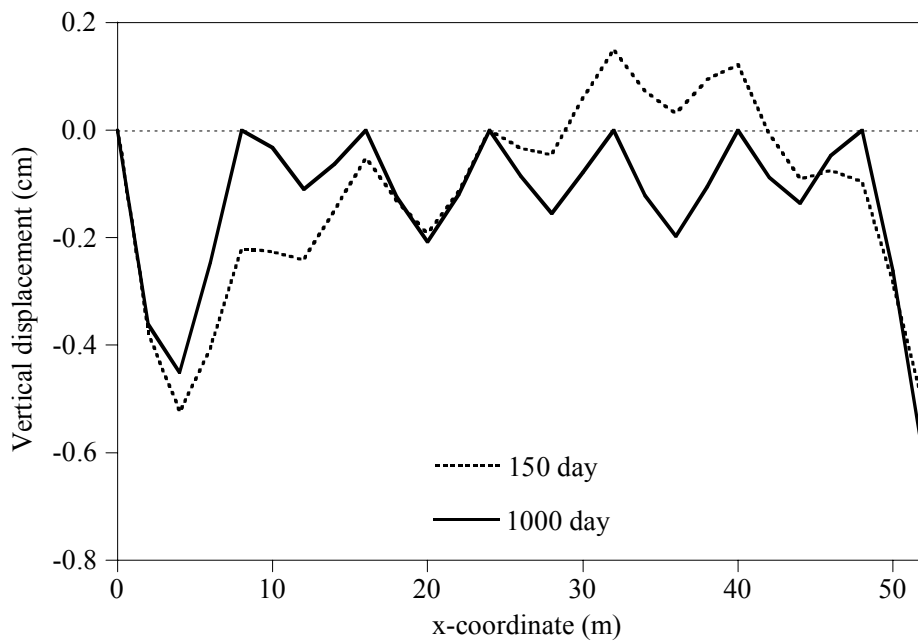


그림 4.5 시공단계 고려시 완공시점과 목표시점에서의 거더 형상

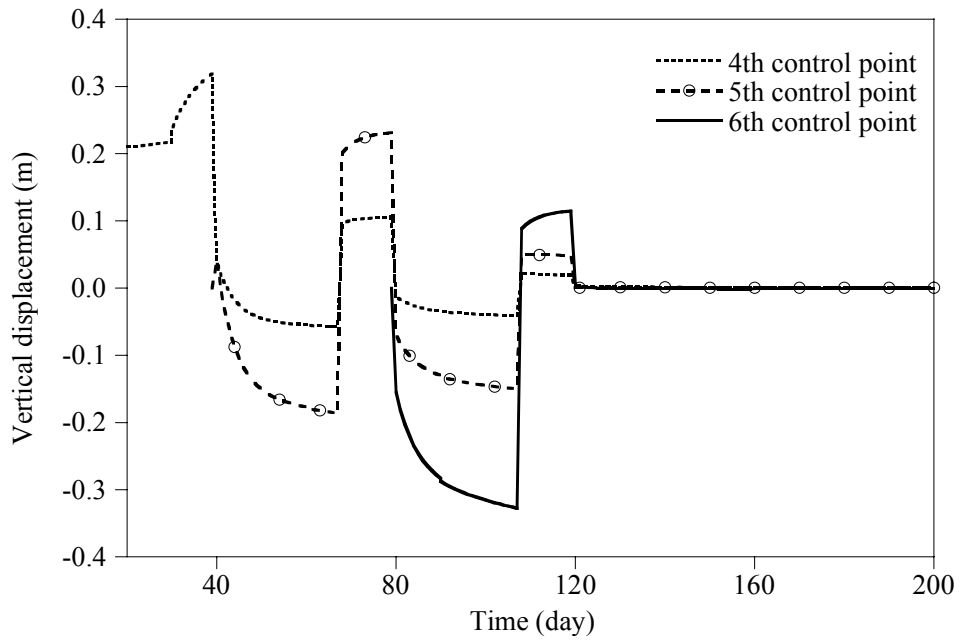


그림 4.6 시간에 따른 제어 절점의 수직 변위

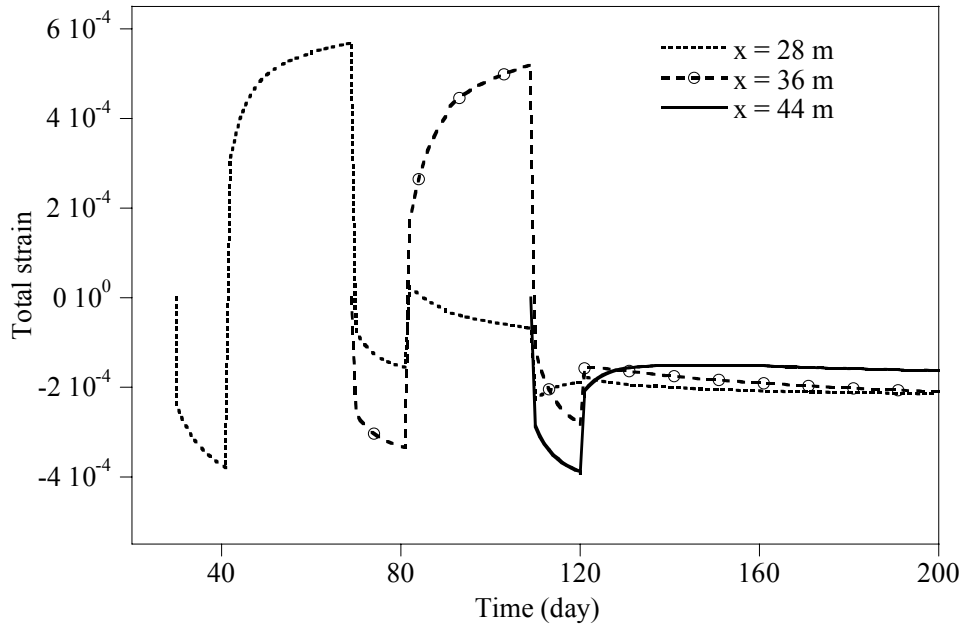


그림 4.7. 시간에 따른 거더 상연의 전체 변형도

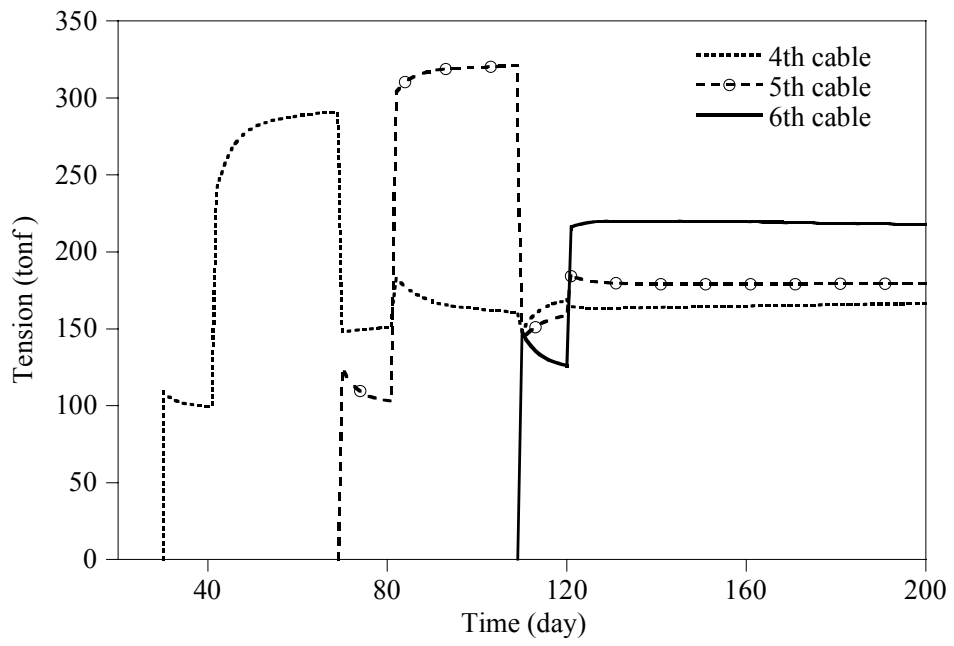


그림 4.8 시간에 따른 케이블 장력

5. 결론

콘크리트 사장교는 초기평형상태에서 목표형상과 일치하는 구조물의 기하 형상을 나타내더라도 크리프 현상에 의해 시간이 지남에 따라 기하 형상이 목표형상에서 멀어지게 된다. 이 연구에서는 콘크리트 사장교의 형상이 목표형상과 일치하는 임의의 시점을 목표 시점으로 설정하고, 주어진 목표 시점에서 콘크리트 사장교의 기하 형상을 목표형상과 일치하도록 하는 케이블의 무응력 길이를 찾는 방법을 제안하였다.

중첩적분식 형태의 크리프 변형도 식을 바탕으로 크리프 현상을 고려한 콘크리트 구조물의 강성도 행렬식을 유도하였다. 이를 바탕으로 탄성 현수선 요소를 사용한 콘크리트 사장교의 강성도 행렬식을 유도하였다. 그리고 목표 시점에서의 콘크리트 사장교 기하 형상이 목표형상을 만족시키는 케이블의 무응력 길이를 찾기 위해 Newton-Raphson 법을 이용한 목표형상 해석법을 제시하였다. 목표 시점에서의 변위 민감도는 콘크리트 사장교의 평형방정식을 직접 미분하여 구한 식을 이용하여, 시간에 따라 축차적으로 계산하였다. 마지막으로 콘크리트 구조물의 크리프 변형은 시공 과정에 발생하는 응력에 적지않은 영향을 받으므로 시공단계를 고려한 목표형상 해석법을 제시하였다.

이 논문에서 제안한 방법을 이용하여 콘크리트 사장교에서 발생하는 크리프 현상에 기인한 변형을 효과적으로 제어할 수 있으리라 사료된다.

참고문헌

- [1] 강영진. (1992). 철근 및 프리스트레스트 콘크리트 뼈대구조의 유한 요소해석(시간의존성 포함), 콘크리트학회지, 한국콘크리트학회, 제 4 권, 제 4 호, pp 40~46
- [2] 김승대. (2001). 프리캐스트 합성형 사장교의 초기평형상태 및 시공형상결정, 공학석사학위논문, 서울대학교.
- [3] 김제춘. (1993). 사장교의 초기평형상태 및 시공형상 결정, 공학박사 학위논문, 서울대학교.
- [4] Kim, K.S. and Lee, H.S. (2001). "Analysis of target configurations under dead loads for cable-supported bridges", *Journal of Computers and Structures*, Vol. 79, Issue 29-30, pp. 2681-2692.
- [5] 이민권, 이해성(2006), 대칭형 강 사장교의 폐합해석과 시공오차 예측, 토목학회논문집, Vol. 25, No.6A, pp. 1071-1084.
- [6] McHenry, D. (1943). "A new aspect of creep in concrete and its application to design", *Proc. ASTM*, 43, pp. 1069-1084
- [7] 김세훈. (1998). 크리프 회복식을 이용한 철근콘크리트 및 프리스트레스트 콘크리트 부재의 크리프 해석에 관한 연구 공학석사학위 논문, 서울대학교.
- [8] M. A. Ketchum and A. C. Scordelis. (1986). Redistribution of stresses in segmentally erected prestressed concrete bridges. Report no. UCB/SESM-86/07, University of California, Berkeley, CA.

- [9] ACI Committee 209. (1992). "Prediction of Creep Shrinkage and Temperature Effects in Concrete Structures", 209R-82, ACI Manual of Concrete Practice, Part 1, ACI Publ.
- [10] 김영진. (2005). 종방향 및 연직방향 시공단계를 갖는 프리스트레스트 콘크리트 박스거더 교량의 휨거동에 관한 연구 공학박사학위논문, 서울대학교.

부록

A. ACI-209 의 크리프 예측 모델

ACI-209 모델에서는 콘크리트의 탄성 처짐 δ_e 에 크리프 계수 $\phi(t, \tau)$ 를 곱하여 크리프 변형을 산정한다. 그러므로 크리프에 의한 처짐을 포함한 전체 처짐 δ_{total} 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\delta_{total} = [1 + \phi(t, \tau)] \times \delta_e \quad (A.1)$$

크리프 계수는 하중 재하 시점 τ 과 크리프를 관찰하는 시점 t 의 함수로서 다음과 같이 정해진다.

$$\phi(t, \tau) = \frac{(t - \tau)^{0.6}}{10 + (t - \tau)^{0.6}} \phi_{\infty} \quad (A.2)$$

여기서 ϕ_{∞} 는 극한 크리프 계수로서 표준상태(재하시의 재령이 습윤양생이면 7 일, 증기 양생이면 1~3 일이고 습도가 40%, 부재의 평균 두께가 6 in. 이하, 슬럼프가 4 in.)의 경우 2.35 의 값을 갖는다. 콘크리트의 상태가 이와 다를 경우, 다음의 식을 이용하여 보정한 극한 크리프 계수를 사용한다

$$\phi_{\infty} = 2.35 K_{\tau}^c K_H^c K_T^c K_S^c K_F^c K_A^c \quad (A.3)$$

여기서 K_{τ}^c 는 재하시의 재령 보정계수, K_H^c 는 습도 보정계수, K_T^c 는 부재의 평균 두께 보정계수, K_S^c 는 슬럼프 보정계수, K_F^c 는 잔골재율 보정계수, K_A^c 는 공기량 보정계수이며, 콘크리트의 상태에 따라 다음과 같이 보정하여 사용한다.

$$\begin{aligned} K_{\tau}^c &= 1.25\tau^{-0.118} : \text{습윤양생} \\ K_{\tau}^c &= 1.13\tau^{-0.094} : \text{증기양생} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$K_H^c = 1.27 - 0.0067H : H \geq 40\% \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} K_T^c &= 1.14 - 0.023T : \tau \leq 365 \text{일} \\ K_T^c &= 1.10 - 0.017T : \tau > 365 \text{일} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$K_S^c = 0.82 + 0.67S \quad (\text{A.7})$$

$$K_F^c = 0.88 + 0.0024F \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} K_A^c &= 1.0 && : A \leq 6\% \\ K_A^c &= 0.46 + 0.09A && : A > 6\% \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

여기서 τ 는 하중 재하시의 재령(일), H 는 습도(%), T 는 부재의 평균두께 ($T = 4V/S$, V : 체적, S : 표면적, $in.$), S 는 슬럼프($in.$), F 는 잔골재율(%), A 는 공기량(%)이다.

B. 비크리프 계수의 근사계산

크리프 변형도를 수치 해석법으로 구하는 과정에서 비크리프 계수를 적절하게 근사할 필요가 있다. 비크리프 계수를 근사하는 다양한 방법이 있으나, 본 연구에서는 다음과 같은 Dirichlet 급수 형태로 근사하는 방법을 사용한다.

$$C(t, \tau) = \sum_{i=1}^m a_i(\tau) [1 - e^{-\lambda_i(t-\tau)}] \quad (\text{B.1})$$

여기서 $a_i(\tau)$ 는 재료변수로서 하중 재하 시점 τ 에 따라 비크리프 계수의 초기 형상에 영향을 준다. 많은 학자들의 연구에 의하면 $m=4$ 일 때, 실제 크리프 거동을 잘 나타낸다고 알려져 있다. 또한 λ_i 는 i 번째항의 지연시간 $t_r \times 10^{i-1}$ 의 역수로서 ACI-209에서는 $t_r = 5$ 로 제시한다.

$$\lambda_i = \frac{1}{t_r \times 10^{i-1}} = \frac{1}{5 \times 10^{i-1}} \quad (\text{B.2})$$

$a_i(\tau)$ 는 실제 크리프 실험 데이터를 토대로 구하는 것이 가장 정확한 방법이나, 실험 데이터를 취득하기 어려운 경우는 ACI-209와 CEB-FIP MC 90에서 제시하는 비크리프 계수식으로부터 나온 데이터를 토대로 결정한다. 각 설계 기준에서 제시하는 비크리프 계수식은 다음과 같다.

$$C(t, \tau) = \frac{\phi(t, \tau)}{E_c(\tau)} \quad (\text{B.3})$$

$$C(t, \tau) = \frac{\phi(t, \tau)}{E_c(28)} \quad (\text{B.4})$$

여기서 ACI-209 는 하중 재하 시점 τ 에서의 접선 탄성계수를 이용하지만, CEB-FIP MC 90 은 28 일 접선 탄성계수를 이용한다는 것이 다르다.

이 같은 방법을 이용하여 구한 비크리프 계수의 데이터 개수가 m 보다 많을 경우, 최소자승법을 이용하여 최적의 $a_i(\tau)$ 를 구해야 한다. 임의의 재령일 τ 에 대해 다양한 시간 t 에 대한 n 개의 비크리프 계수 데이터를 취득하였다면, 식(B.1)에 대입하여 다음과 같은 n 개의 연립방정식을 얻는다.

$$c_j = \sum_{i=1}^m a_i (1 - e^{-\frac{t_j - \tau}{5 \times 10^{i-1}}}) \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (\text{B.5})$$

식(B.5)를 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A} \quad (\text{B.6})$$

여기서 $\mathbf{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ 이고, $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$ 이다. \mathbf{B} 는 다음과 같다.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 - e^{-\frac{t_1 - \tau}{5}} & 1 - e^{-\frac{t_1 - \tau}{50}} & 1 - e^{-\frac{t_1 - \tau}{500}} & 1 - e^{-\frac{t_1 - \tau}{5000}} \\ 1 - e^{-\frac{t_2 - \tau}{5}} & 1 - e^{-\frac{t_2 - \tau}{50}} & 1 - e^{-\frac{t_2 - \tau}{500}} & 1 - e^{-\frac{t_2 - \tau}{5000}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 - e^{-\frac{t_n - \tau}{5}} & 1 - e^{-\frac{t_n - \tau}{50}} & 1 - e^{-\frac{t_n - \tau}{500}} & 1 - e^{-\frac{t_n - \tau}{5000}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

비크리프 계수의 데이터 개수 n 가 재료 변수 $a_i(\tau)$ 의 개수 m 보다 많기 때문에 식(B.6)을 만족시키는 정해를 구하기는 어렵다. 다만 비크리프 계수 데이터를 가장 잘 근사하는 $a_i(\tau)$ 를 찾기 위해 오차를 다음과 같이 설정한다.

$$\{e\} = \mathbf{C} - \mathbf{BA} \quad (\text{B.8})$$

식(B.8)의 양변을 제곱하여 오차 제곱의 합을 표현하면 다음과 같다.

$$\{e\}^T \{e\} = (\mathbf{C} - \mathbf{BA})^T (\mathbf{C} - \mathbf{BA}) \quad (\text{B.9})$$

식(B.9)의 미분값을 0으로 만드는 \mathbf{A} 를 구하면 다음과 같다.

$$\mathbf{A} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \quad (\text{B.10})$$

이와 같은 방법으로 각각의 τ 에 대해 오차 제곱의 합을 최소로 하는 \mathbf{A} 를 구한다.

ABSTRACT

Since the lateral stiffness of a cable is developed from applied tensions, no unique undeformed configuration of a cable structure is defined in the stress-free state. Therefore, deformed shape of a structure under dead loads is used as the reference configuration, and is referred to the target configuration under dead loads or the initial equilibrium configuration. In addition, the process determining the initial tension or the length of cables for the satisfying the target configuration is defined as initial equilibrium state analysis.

The several established methods analyzed initial equilibrium state are the initial member force method, the geometric constraint method, and the optimal TCUD analysis method which is based on both the geometric constraint method and the minimizing energy method. However, the previous analysis methods are developed for the structural system had no creep phenomenon. Therefore, these methods don't apply to concrete cable-stayed bridges. This thesis presents the analysis of target configuration for concrete cable-stayed bridges considering construction stages and creep phenomenon.

Overtime, the geometry configuration of a concrete cable-stayed bridge is changed by the creep phenomenon although it satisfied the target configuration at the initial equilibrium state. Therefore, this thesis proposes the approach based on Newton-Raphson method for obtaining the undeformed length of cables, which assimilate deformed shape of a structure to target configuration at the specified target

time when structural geometry configuration is satisfied with target configuration.

A steel structure is obtained only unique configuration although it had different construction stages and processes if it constructed under elastic limit condition. However a concrete structures increasing the additional deformation as a creep deformation except for the elastic deformation has a variety of configurations according to the construction stages and processes. Therefore, the proposed method should apply to concrete cable-stayed bridges considering their construction stages.

A numerical example is performed to demonstrate the validity and the effectiveness of the proposed analysis method. The example bridge constructed using one-side cantilever method has $104m$ span length and 12 cables.

Key Word

Concrete cable-stayed bridge, Creep, Target configuration, Displacement sensitivity, Analysis of construction stage

Student Number: 2004-23518

감사의 글

많은 분들의 도움이 있었기에 미흡한 논문이 완성될 수 있었습니다. 먼저 학교에 있는 시간동안은 저에게 부모님 같았던 이해성 선생님께 감사 드립니다. 학문적 가르침 뿐만 아니라, 학문 외적인 부분의 가르침까지 모두 가슴 깊이 새기며 살겠습니다. 그리고 많은 가르침을 주신 장승필 교수님, 고현무 교수님, 김재관 교수님께도 심심한 감사를 드립니다.

늘 철없는 후배에게 많은 가르침을 주신 김용한 부장님, 박현우 박사님, 김기석 박사님께 감사 드립니다. 까불기만 하는 후배를 귀엽게 봐주시는 주성이 형, 승근이 형, 연철이 형에게도 감사 드립니다. 그리고 종헌이 형, 호진이 형, 윤화 형, 길제, 상훈이 형, 근원이, 승한이를 비롯한 모든 구조해석연구실 선후배님들께 진심으로 감사드립니다.

학부 때부터 지금까지 나를 챙겨주는 승환이 형, 윤경이, 광진이, 영화 등 모든 생자공 동기 및 선후배님들께 고맙다는 말을 전합니다. 그리고 무슨 일이 생기면 가장 먼저 생각나는 동현이, 준호를 비롯한 이수 패밀리 친구들에게도 감사드립니다.

남들처럼 못해줘도 언제나 다 이해해주는 우리 민이에게도 고맙다는 말을 전합니다.

제대로 챙겨주지도 못하는 동생 정현이, 물심양면으로 불효자 큰 아들을 지원해주는 사랑하는 부모님께 감사드리며 이 논문을 바칩니다.