

공학석사학위논문

시스템 확인기법을 이용한 프레임 구조물의 접  
합부 손상진단

Damage assessment of connection in a framed structure using a  
system identification algorithm

2002 년 2 월

서울대학교 대학원  
지구환경시스템공학부  
이 규 철

시스템 확인기법을 이용한 프레임 구조물의 접합부  
손상진단

Damage assessment of connection in a framed structure using a  
system identification algorithm

지도교수 이 해 성

이 논문을 공학석사학위논문으로 제출함

2001 년 10 월

서울대학교 대학원

지구환경시스템공학부

이 규 철

이규철의 공학석사학위 논문을 인준함

2001 년 12 월

위 원 장

---

부위원장

---

위 원

---

## 초록

이 논문은 시스템 확인기법을 이용한 프레임 구조물의 접합부 손상진단 기법을 제시한다. 철골 구조물에서 접합부는 구조물의 다른 부분들보다 더욱 손상을 받기 쉽다. 따라서, 부재 손상 모델이 아닌 보다 현실적인 접합부 손상 모델을 이용하여 손상진단을 한다. 손상으로 인한 접합부의 회전 강성 감소를 표현하기 위해 반강절 접합부 모델을 이용한다. 미지의 접합부 강성을 구하기 위한 정적 측정변위를 이용하는 시스템 확인기법은 측정오차로 인해 발생하는 해의 불연속성, 측정자료의 부족으로 인해 발생하는 해의 비유일성의 문제를 지니며, 이는 해를 불안정하게 한다. 특히, 토목 구조물은 그 규모가 매우 크므로 측정자료의 부족을 피하기가 어렵다. 이 논문은 측정자료의 부족, 즉, rank-deficiency를 극복하기 위한 기법들을 제시하는데 중점을 둔다. 시스템 확인기법의 불안정성을 극복하기 위한 수치적 해결책으로 Tikhonov 정규화와 TSVD가 널리 사용되어왔다. TSVD를 적용할 때 발생하는 어려움을 해결하기 위해 일반화된 Tikhonov 정규화를 제안한다. 또한, 기존의  $L_2$ -norm에 기초한 정규화기법들의 한계를 극복하기 위해  $L_1$ -norm에 기초한 정규화기법을 제시한다. 보다 신뢰성 있는 추정결과를 얻기 위해 가설검정을 이용한 통계적 기법을 사용한다. 수치예제를 통해 이 논문의 타당성을 검증한다.

## 주요어

시스템 확인기법, 반강절 접합부, rank-deficiency, Tikhonov 정규화, TSVD, 일반화된 Tikhonov 정규화,  $L_1$ -정규화기법, 통계적 손상 진단

**학번 : 2000-21561**

## 목차

초록.....	i
목차.....	iii
그림목차.....	v
표목차.....	vi
1. 서론.....	1
2. 본론.....	4
2.1. 접합부 손상모델.....	4
2.2. 시스템 확인기법.....	7
2.3. 시스템 확인기법의 불안정성.....	10
2.3.1. 해의 불연속성.....	10
2.3.2. 해의 비유일성.....	11
2.4. 수치적 해결책.....	12
2.4.1. Tikhonov 정규화.....	12
2.4.2. TSVD.....	15
2.4.3. 일반화된 Tikhonov 정규화.....	16
2.4.4. $L_1$ -정규화.....	18

2.5. 정규화계수와 Truncation Number.....	20
2.5.1. 정규화계수.....	20
2.5.2. Truncation Number.....	21
2.6. 통계적 손상진단.....	22
2.6.1. 자료교란기법.....	22
2.6.2. 가설검정.....	23
2.6.3. 손상진단.....	24
3. 수치예제.....	25
3.1. 예제 1 : Rank-Deficiency.....	26
3.2. 예제 2 : 측정오차.....	30
3.3. 예제 3 : 모델링오차.....	35
4. 결론.....	39
참고문헌.....	41

ABSTRACT

## 그림목차

그림 1	반강절 접합부가 있는 부재의 변형 형상.....	5
그림 2	4층 프레임 구조물의 기하형상과 하중.....	25
그림 3	시스템변수와 측정점의 위치.....	27
그림 4	특이치, 정규화계수, 가중치 (예제 1).....	28
그림 5	해의 평균과 표준편차 (예제 1).....	29
그림 6	오차함수와 측정오차 (예제 2).....	30
그림 7	시스템변수의 평균과 표준편차 (예제 2).....	32
그림 8	손상도 (예제 2).....	34
그림 9	시스템변수와 손상부재의 위치 (예제 3).....	36
그림 10	시스템변수의 평균과 표준편차 (예제 3).....	37
그림 11	$L_1$ -정규화에 의한 해 (예제 3).....	37

## 표목차

표 1 부재 제원.....	26
----------------	----

## 1. 서론

구조물은 과도한 하중을 받거나 시공 후에 오랜 시간이 흐르게 되면 내부에 손상이나 결함이 발생하게 된다. 이러한 원인들에 의해 구조물은 원래의 강성을 잃게 되어 안정성과 사용성에 문제를 일으킬 수 있다.

구조물의 손상은 거동에 영향을 주게 되며, 이러한 거동으로부터 구조물의 손상위치나 손상정도를 추정하는 방법들이 많이 개발되어왔다[Yun01, Par01, Moh93, Par02, Inh00]. 시스템 확인기법은 역학적 시스템을 파악하고[Lee99, Lee00] 구조물의 손상을 탐지하는 영역에서 널리 사용되어 왔다.

시스템 확인기법을 이용한 손상탐지를 할 때, 구조물의 손상 모델은 모델링의 단순함 때문에 부재 손상 모델이 자주 사용되어왔다. 그러나, 철골 구조물에서 부재보다 접합부가 더욱 손상을 받기 쉽다[Nak98, Wei98]. 따라서, 접합부의 구조적 손상에 적합한 현실적인 손상 모델을 개발하는 것이 바람직하다.

이 논문은 프레임 구조물의 접합부 손상 모델과 정적 측정변위를 바탕으로 시스템 확인기법을 이용한 접합부 손상진단을 다룬다. 이를 통하여 구조물의 안정성 및 결함에 대한 합리적 판단에 필요한 기초자료를 제공할 수 있으리라 기대한다.

시스템 확인기법은 측정오차로 인해 발생하는 해의 불연속성, 측정자료의 부족으로 인해 발생하는 해의 비유일성을 지니며, 이는 해를 불안정하게 한다

[Han98]. 특히, 실제 구조물은 그 규모가 매우 크므로 측정자료의 부족을 피하기가 어렵다. 이 논문은 측정자료의 부족, 즉, rank-deficiency를 극복하기 위한 기법들을 제시하는데 중점을 둔다.

시스템 확인기법의 불안정성을 극복하기 위한 수치적 해결책으로 Tikhonov 정규화와 TSVD(Truncated Singular Value Decomposition)가 널리 사용되어왔다[Han98]. 시스템 확인기법을 적용할 때 비선형 최적화문제를 풀어야 하는데, TSVD는 시스템변수의 상하한치를 정의하는 구속조건이 있는 비선형 최적화문제를 해결하는데 어려움이 있다. 따라서, 하나의 2차 증속문제를 통해 TSVD를 구현할 수 있는 일반화된 Tikhonov 정규화를 제안한다.

Tikhonov 정규화와 TSVD는  $L_2$ -norm을 사용한다.  $L_2$ -norm에 기초한 정규화기법은 조각적으로 연속인 함수에 적합하다. 그러나, 프레임 구조물에서 접합부는 이산적으로 존재한다. 따라서, 이산적인 함수에 적합한  $L_1$ -norm에 기초한 정규화기법을 사용하는 것이 접합부의 손상을 추정하는데 보다 적합하다 [Par02]. 따라서,  $L_1$ -norm에 기초한 정규화기법을 제시한다.

Tikhonov 정규화와 TSVD를 적용할 때, 각각 최적의 정규화계수와 truncation number를 정의하는 것이 매우 중요하다. 이 논문에서는 Tikhonov 정규화에서 정규화계수를 결정하기 위해 GMS(Geometric Mean Scheme)를 사용하며, TSVD에서 truncation number를 정의하기 위한 방법을 제안한다.

시스템 확인기법을 통해 추정된 해가 실제의 손상으로 인한 것인지 잘못 추정된 것인지 결정하기 쉽지 않다[Inh00]. 따라서, 자료교란기법을 이용해 여러 개의 해를 얻고, 그 통계적 자료를 통해 가설검정을 한다. 그 결과로 손상유무를 판단하고 손상도를 추정하는 통계적 손상진단을 한다.

4층 프레임 구조물에 대한 수치예제를 통해 이 논문에서 제시된 방법들의 타당성을 입증한다.

## 2. 본론

### 2.1. 접합부 손상모델

접합부의 거동은 전체 구조물의 거동에 중요한 영향을 미치며, 접합부의 손상은 많은 구조물 파괴의 중요한 요인 중 하나이다. 접합부 손상에는 볼트 구멍 사이의 피로 균열, 볼트 파괴 그리고 접합부의 심한 소성 변형 등이 있다. 접합부의 손상은 접합부 강성의 감소로 정량화 될 수 있다. 그러나, 기존의 구조해석에서는 접합부는 완전한 힌지 또는 강절이라고 가정하므로, 손상으로 인한 접합부 강성의 감소를 정량화 할 수 없다. 따라서, 반강절 접합부 모델을 사용하여 접합부의 손상을 모델링한다.

실제 구조물에서 완전한 힌지 또는 강절인 접합부는 존재하지 않는다. 반강절 접합부 모델은 힌지와 강절 사이에 존재하는 접합부의 실제 거동을 표현하여 보다 정확한 구조물 해석을 하기 위해 개발되었다[Dhi90, Ho91].

반강절 접합부는 그림 1과 같이 부재 양단에 있는 길이가 없는 회전 스프링에 의하여 표현된다. 보의 왼쪽 단에 있는 스프링의 회전강성  $k_{r,1}$ 은 가해지는 모멘트  $M_1$ 와 slip angle  $\phi_1$ 의 비에 의하여 정의된다.  $\theta_1^*$ 은 스프링 왼쪽(외부 절점)에서의 변형된 축방향에 대한 회전이고,  $\bar{\theta}_1$ 은 스프링 오른쪽(내부 절점)에서의 회전이다.

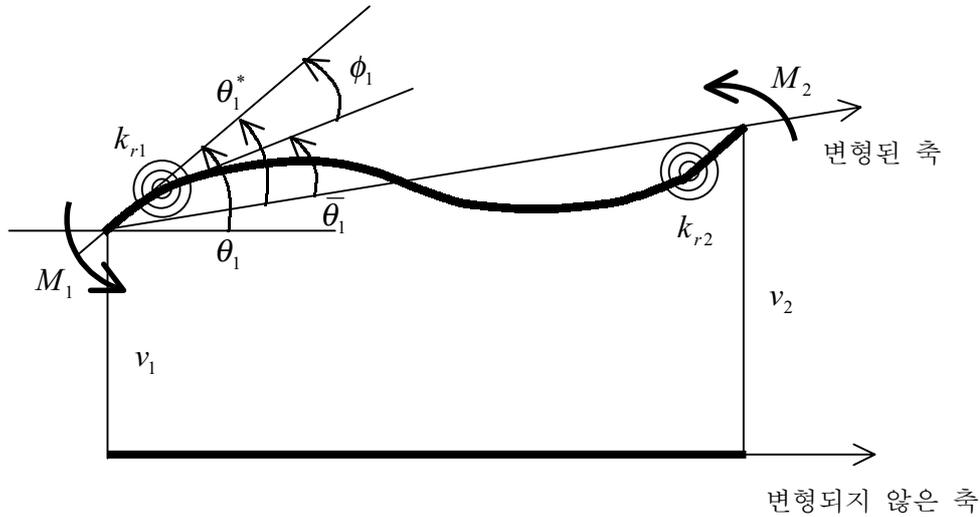


그림 1 반강절 접합부가 있는 부재의 변형 형상

부재 양단 스프링의 회전 강성에 의하여 무차원의 joint fixity factor  $\gamma_1, \gamma_2$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\gamma_1 = \frac{1}{1 + \frac{3EI}{L k_{r1}}}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{1 + \frac{3EI}{L k_{r2}}} \quad (1)$$

여기서,  $E, I, L$ 은 각각 접합부가 위치하는 부재의 영의계수, 단면 2차모멘트, 길이를 나타낸다.

식(1)에서 알 수 있듯이, joint fixity factor는  $0 \leq \gamma_1, \gamma_2 \leq 1$ 의 범위를 갖는다. 스프링의 강성이 무한히 크다면 강절이고 강성이 없다면 힌지이다. 즉, joint fixity factor가 1이면 강절, 0이면 힌지이다. 반강절 접합부는 이 양 극단 사이에 존재



## 2.2. 시스템 확인기법

손상으로 인한 미지의 접합부 회전강성을 구하기 위해 정적 측정변위를 이용한 시스템 확인기법을 적용한다.

이산화 된 프레임 구조물은 다음과 같은 행렬 형태로 표현될 수 있다.

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\gamma})\mathbf{u}_i = \mathbf{P}_i \quad (3)$$

여기서,  $\mathbf{K}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$ ,  $\mathbf{u}_i$ ,  $\mathbf{P}_i$ 는 각각 강성도 행렬, joint fixity factor, 절점 변위, 등가 절점 하중을 나타낸다.

joint fixity factor는 0과 1 사이의 값을 갖는 무차원량으로 접합부의 강성을 쉽게 표현할 수 있다[Yun01]. 따라서, joint fixity factor를 시스템변수로 선택한다.

미지의 시스템변수는 측정 위치에서의 계산된 변위와 측정된 변위 사이의 최소 자승 오차를 최소화함으로써 구한다.

$$\underset{\boldsymbol{\gamma}}{\text{Minimize}} \Pi_E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nlc} \|\mathbf{u}_i^c(\boldsymbol{\gamma}) - \mathbf{u}_i^m\|^2 \quad \text{subject to } \mathbf{R}(\boldsymbol{\gamma}) \leq 0 \quad (4)$$

여기서,  $\mathbf{u}_i^c$ ,  $\mathbf{u}_i^m$ ,  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\gamma})$ ,  $nlc$ 는 각각 유한요소 모델에 의해 계산된 변위,  $i$ 번째 하중 경우에 대해 측정점에서 측정된 변위, 시스템변수에 대한 구속 벡터, 하중 경우의 개수이다.  $\|\cdot\|$ 은 벡터의 Euclidean norm을 나타낸다.

선형 구속  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\gamma})$ 은 물리적으로 의미를 갖는 시스템변수의 상하한치를 정의하기 위하여 사용된다.

계산된 변위 벡터  $\mathbf{u}_i^c$  는 시스템변수  $\boldsymbol{\gamma}$  의 비선형 implicit function이기 때문에, 식(4)에서 정의된 최소화문제는 구속된 비선형 최적화문제이다.

식(4)에서 정의된 오차함수는 각각의 하중 경우에 대한 계산된 변위와 측정된 변위를 하나의 열에 배열하여 다음과 같이 하나의 벡터 형태로 표현할 수 있다.

$$\text{Minimize}_{\boldsymbol{\gamma}} \pi_E = \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{U}}(\boldsymbol{\gamma}) - \bar{\mathbf{U}}\|^2 \quad \text{subject to } \mathbf{R}(\boldsymbol{\gamma}) \leq 0 \quad (5)$$

여기서,  $\tilde{\mathbf{U}}$ ,  $\bar{\mathbf{U}}$  는 각각 무차원화 시키기 위해 측정변위에 대해 기준화 된 계산된 변위와 측정된 변위이다.

위의 최소화 문제의 해는 앞서 언급했듯이 비선형 최적화문제이므로, 다음과 같은 2차 종속문제로 선형화시켜 반복적으로 구한다.

$$\text{Minimize}_{\Delta\boldsymbol{\gamma}} \left[ \frac{1}{2} \Delta\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{H}_{k-1} \Delta\boldsymbol{\gamma} - \Delta\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{S}_{k-1}^T \mathbf{U}_{k-1}^r \right] \quad \text{subject to } \mathbf{R}(\boldsymbol{\gamma}_{k-1} + \Delta\boldsymbol{\gamma}) \leq 0 \quad (6)$$

여기서, 첨자  $k$  는 반복회수를 나타내고,  $\mathbf{S}_{k-1}$ ,  $\mathbf{H}_{k-1}$  는 각각  $\tilde{\mathbf{U}}_{k-1}$  의 민감도 행렬과 오차함수의 헤시안(Hessian) 행렬을 나타낸다. 변위 잔차  $\mathbf{U}_{k-1}^r$  는  $\mathbf{U}_{k-1}^r = \bar{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{U}}_{k-1}$  과 같이 정의되며,  $\Delta\boldsymbol{\gamma}$  는 현재 반복단계에서의 시스템변수의 증분이다.

식(6)에서의 헤시안 행렬은 변위의 2차 민감도를 계산하는 복잡함을 피하기 위하여 Gauss-Newton 헤시안에 의하여 다음과 같이 근사된다.

$$\mathbf{H}_{k-1} \approx \mathbf{S}_{k-1}^T \mathbf{S}_{k-1} \quad (7)$$

표현을 간단히 하기 위하여 이 이후의 증분 형태의 식 전개에서 모든 변수의 첨자는 생략한다.

식(6)에 대한 1차 필요 최적조건은 다음의 선형방정식으로 주어진다.

$$\mathbf{S}^T \mathbf{S} \Delta \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{S}^T \mathbf{U}^r = 0 \quad (8)$$

여기서,  $\Delta \boldsymbol{\gamma}$  는 식(6)의 2차 종속문제의 해가 된다.

특이치분해에 의하여  $m \times n$  민감도 행렬  $\mathbf{S}$  은 식(9)와 같이  $m \times n$  행렬  $\mathbf{Z}$ ,  $n \times n$  대각행렬  $\boldsymbol{\Omega}$ ,  $n \times n$  행렬  $\mathbf{V}$  의 역치행렬의 곱으로 표현할 수 있다[Gen96].  $m$  은 모든 하중 경우에 대한 측정 자유도의 총 개수이며,  $n$  은 시스템변수의 개수이다.

$$\mathbf{S} = \mathbf{Z} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{V}^T \quad (9)$$

여기서,

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} = \mathbf{I}_n$$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{V}^T = \mathbf{I}_n \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \text{diag}(\omega_j)$$

$\mathbf{I}_n$  은  $n$  차의 항등행렬,  $\text{diag}(\cdot)$  은 대각행렬을 나타낸다.  $\omega_j$  는  $\omega_n = \omega_{\max} \geq \dots \geq \omega_2 \geq \omega_1 = \omega_{\min} \geq 0$  과 같이 내림차순을 가지는  $\mathbf{S}$  의 특이치를 나타낸다. 행렬  $\mathbf{Z}$  의 열은 left singular vector (LSV), 행렬  $\mathbf{V}$  의 열은 right singular vector (RSV)로 불린다.

식(10)에서 정의된 성질을 이용하면 식(8)의 해는 다음과 같이 표현된다.

$$\Delta\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{V}\text{diag}\left(\frac{1}{\omega_j}\right)\mathbf{Z}^T\mathbf{U}^r \quad (11)$$

## 2.3. 시스템 확인기법의 불안정성

### 2.3.1. 해의 불연속성

시스템 확인기법에서, 계측기의 민감도에 의해서 또는 실제 계측 동안 계측장비를 잘못 읽음으로써 발생하는 측정 오차가 존재한다. 오차를 포함하고 있는 측정 변위는 이론적으로 다음과 같이 오차가 없는 변위  $\mathbf{U}^f$  와 오차 벡터  $\mathbf{e}$  로 분해될 수 있다.

$$\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U}^f + \mathbf{e} \quad (12)$$

이러한 변위의 분해는 순수하게 개념적이다.

식(12)를 식(11)에 대입하면 다음과 같다.

$$\Delta\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{V}\text{diag}\left(\frac{1}{\omega_j}\right)\mathbf{Z}^T(\mathbf{U}^f - \tilde{\mathbf{U}}) + \mathbf{V}\text{diag}\left(\frac{1}{\omega_j}\right)\mathbf{Z}^T\mathbf{e} = \Delta\boldsymbol{\gamma}^f + \Delta\boldsymbol{\gamma}^e \quad (13)$$

여기서,  $\Delta\boldsymbol{\gamma}^f$ ,  $\Delta\boldsymbol{\gamma}^e$  는 각각 오차가 없는 변위 잔차와 측정 오차에 기인하는 증분해이다. 측정 오차가 무시할 수 없는 크기이거나 오차 벡터가  $\mathbf{Z}$  와 거의 직교하지 않는다면, 오차가 있는 측정에 대한 증분해는 주로 식(13)의 두 번째 항

에 의해 오차가 없는 해로부터 멀어지게 된다. 특히, 작은 크기의 특이치와 관련된  $\mathbf{Z}^T \mathbf{e}$ 의 성분들은 멀어짐의 정도를 보다 심하게 한다. 최적화 반복 동안 물리적으로 의미 없는 오차들에 의해 증폭된 해의 성분들이 누적됨으로써 해는 물리적인 의미를 잃기 쉽다. 결론적으로, 작은 값의 특이치는 측정 자료의 변화를 증폭시키기 때문에 오차의 작은 변화가 전혀 다른 해를 유발하며, 이는 시스템 확인기법 문제의 불연속성의 특징이기도 하다.

### 2.3.2. 해의 비유일성

구조물의 규모가 커짐에 따라 구조물의 자유도는 증가함에 반해 실제적인 한계로 측정할 수 있는 자료의 수는 한정되어 있으므로 측정자료가 부족하게 된다. 측정자료의 부족은 측정된 응답의 양이 미지의 시스템변수를 제대로 파악하기에 충분하지 않음을 의미한다. 측정치의 개수가 시스템변수의 개수보다 적을 때 측정자료가 부족하게 되지만, 측정자료들이 서로 독립적이지 않다면 측정된 응답의 개수가 시스템변수의 개수보다 많을 때도 측정자료의 부족은 발생한다. 시스템 확인기법 문제에서 측정자료의 부족은 민감도 행렬의 rank-deficiency와 직접적으로 관련되어 있다. 따라서, 측정자료의 부족 정도를 측정할 수 있는 가장 적절한 방법은 민감도행렬의 특이치분해이다. 민감도행렬이 특이치분해되면 rank-deficiency의 존재와 그 정도가 드러난다.

식(10)의 성질들과 선형 대수학에 의하여, rank-deficiency 경우의 해는 다음과 같다[Han98, PaR02].

$$\Delta\boldsymbol{\gamma} = \sum_{j=1}^r \mathbf{v}_j \boldsymbol{\omega}_j^{-1} \mathbf{z}_j^T \mathbf{U}^r + \sum_{j=r+1}^n \eta_j \mathbf{v}_j \quad (14)$$

여기서,  $r$ ,  $\mathbf{v}_j$ ,  $\mathbf{z}_j$ ,  $\eta_j$ 는 각각 민감도 행렬의 rank,  $\mathbf{V}$ 와  $\mathbf{Z}$ 의 열벡터, 임의의 실수를 나타낸다.  $r$ 은 일반적으로 numerical rank로 정의된다[Gen96].

식(14)에서 알 수 있듯이, 계수  $\eta_j$ 의 임의성이 해의 개수를 무한하게 하며, 이는 해의 비유일성을 유발한다.

## 2.4. 수치적 해결책

### 2.4.1. Tikhonov 정규화

정규화는 시스템변수의 a priori 추정치와 a posteriori 해를 혼합하는 과정으로 해석할 수 있다. a priori 추정치는 기저치로 명명되는 손상을 입지 않은 시스템변수의 초기치이고, a posteriori 해는 시스템 확인기법을 통해 계산된 해이다.

Tikhonov 정규화함수는 다음과 같다.

$$\pi^R = \frac{1}{2} \lambda^2 \|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0\|^2 \quad (15)$$

여기서,  $\lambda$ ,  $\boldsymbol{\gamma}_0$ 는 각각 정규화계수와 시스템변수의 a priori 추정치를 나타낸다.

식(5)의 최소화문제에 정규화함수를 더함으로써, 정규화 된 시스템 확인기법 문제는 다음의 형태로 표현된다.

$$\text{Minimize}_{\boldsymbol{\gamma}} \pi = \frac{1}{2} \left\| \tilde{\mathbf{U}}(\boldsymbol{\gamma}) - \bar{\mathbf{U}} \right\|^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 \left\| \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0 \right\|^2 \quad \text{subject to } \mathbf{R}(\boldsymbol{\gamma}) \leq 0 \quad (16)$$

식(16)의 목적함수는 정규화 된 오차함수로 불린다. 정규화계수는 시스템 확인 기법에서 정규화의 정도를 결정한다. 즉, 식(16)의 해에 대한 a priori 추정치의 영향을 결정한다. 정규화계수는 다음 절에서 설명한다.

식(16)의 2차 종속문제의 해는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{Minimize}_{\Delta \boldsymbol{\gamma}} \left[ \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \Delta \boldsymbol{\gamma} - \Delta \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{S}^T \mathbf{U}^r \right] + \lambda^2 \left[ \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\gamma}^T \Delta \boldsymbol{\gamma} - \Delta \boldsymbol{\gamma}^T (\boldsymbol{\gamma}_0 - \boldsymbol{\gamma}) \right] \quad (17)$$

subject to  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\gamma} + \Delta \boldsymbol{\gamma}) \leq 0$

식(17)의 정규화 된 해는 특이치분해에 의하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Delta \boldsymbol{\gamma}^R = \mathbf{V} \text{diag}(1 - \alpha_j) \text{diag} \left( \frac{1}{\omega_j} \right) \mathbf{Z}^T \mathbf{U}^r + \mathbf{V} \text{diag}(\alpha_j) \mathbf{V}^T (\boldsymbol{\gamma}_0 - \boldsymbol{\gamma}) \quad (18)$$

여기서, 가중치는  $\alpha_j = \lambda^2 / (\omega_j^2 + \lambda^2)$  이다. 식(18)을  $\mathbf{V}$  와  $\mathbf{Z}$  의 직교성을 이용하여 정리하면 다음과 같은 식이 유도된다.

$$\mathbf{V}^T \boldsymbol{\gamma}^R = \text{diag}(1 - \alpha_j) \mathbf{V}^T \boldsymbol{\gamma} + \text{diag}(\alpha_j) \mathbf{V}^T \boldsymbol{\gamma}_0 \quad (19)$$

식(19)에서,  $\boldsymbol{\gamma}^R$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  는 각각 현재 반복단계에서의 정규화 된 해와 a posteriori 해를 나타낸다.

정규화계수  $\lambda$ 의 변화에 따라 0과 1 사이에서 변화하는 가중치  $\alpha_j$ 는 정규화된 해에서 a posteriori 해와 a priori 추정치 사이의 상대적인 크기를 조정한다. 정규화계수가 작아짐에 따라 가중치는 0으로 향하며, 정규화계수가 커짐에 따라 가중치는 1로 근접한다. 그러므로, 큰 값의 정규화계수에 대해서는 해는 a priori 추정치로 수렴하며, 작은 값의 정규화계수에 대해서는 a posteriori 해로 수렴한다. 정규화계수가 고정된 경우에는, 작은 특이치에 대하여 가중치는 커진다. 이 사실은 작은 값의 특이치에 대한 해의 성분에는 강한 영향의 a priori 추정치가 포함되어 있음을 말해주며, 역도 마찬가지이다.

a posteriori 해의 증분을 식(13)을 이용하여 오차가 없는 성분과 오차 성분으로 분해하면, 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\mathbf{V}^T \boldsymbol{\gamma}^R = \{\text{diag}(1 - \alpha_j) \mathbf{V}^T \boldsymbol{\gamma}^f + \text{diag}(\alpha_j) \mathbf{V}^T \boldsymbol{\gamma}_0\} + \text{diag}(1 - \alpha_j) \text{diag}\left(\frac{1}{\omega_j}\right) \mathbf{Z}^T \mathbf{e} \quad (20)$$

여기서,  $\boldsymbol{\gamma}^f$ 는 오차가 없는 a posteriori 해를 나타낸다. 모든 특이치에 대해 가중치는 0과 1 사이에 존재하기 때문에, 해에 대한 오차의 영향은 감소된다. 특히, 불연속성을 발생시키고 오차가 없는 해로부터 멀어지게 하는 작은 값의 특이치와 관련된  $\mathbf{Z}^T \mathbf{e}$  성분은 정규화 효과에 의해 대부분 나타나지 못한다. 적절하게 선택된 정규화계수에 대해서 작은 값의 특이치에 대한 가중치가 거의 1이기 때문이다.

## 2.4.2. TSVD

rank-deficiency 문제의 경우, 무한히 많은 해가 존재하므로, 임의의 실수  $\eta_j$  를 유일하게 결정하기 위해 시스템변수에 대한 추가적인 구속조건이 필요하다. 가장 널리 사용되는 구속조건은 다음의 최소화문제와 같이 증분해 벡터의 Euclidean norm의 제곱을 최소화하는 것이다[Han98].

$$\text{Min}_{\Delta\mathbf{y}} \|\Delta\mathbf{y}\|^2 \quad (21)$$

식(14)를 식(21)에 대입하여 정리하면, 식(21)은  $\eta_j$  에 대한 최소화문제로 변환된다. 식(14)의 첫번째 항은 상수이기 때문에, 최소화문제에서 두 번째 항만이 고려된다.

$$\text{Min}_{\eta_k} \left\| \sum_{j=t+1}^n \eta_j \mathbf{v}_j \right\|^2 \quad (22)$$

식(22)에서 numerical rank  $r$  대신 truncation number  $t$ 가 사용된 이유는 TSVD에서 truncation number 이하의 특이치 정보는 절삭되기 때문이다. truncation number는 다음 절에서 설명한다.

식(22)의 해  $\eta_j$ 는  $j = t+1, \dots, n$ 에 대한 모든  $\eta_j$ 를 0으로 함으로써 쉽게 구할 수 있다. 따라서, 식(14)의 임의의 해는 다음 식과 같이 유일하게 결정된다.

$$\Delta\mathbf{y}^{TSVD} = \sum_{j=1}^t \mathbf{v}_j \omega_j^{-1} \mathbf{z}_j^T \mathbf{U}^r \quad (23)$$

### 2.4.3. 일반화된 Tikhonov 정규화

앞서 언급한 TSVD의 해는 구속조건이 없는 문제에서의 해이다. 구속조건이 존재하는 문제는 다음과 같이 정의된다.

$$\underset{\Delta\boldsymbol{\gamma}}{\text{Minimize}} \left[ \frac{1}{2} \Delta\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{S}_k^T \mathbf{S}_k \Delta\boldsymbol{\gamma} + \Delta\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{S}_k^T \mathbf{U}_k^r \right] \quad \text{subject to } \mathbf{R}(\boldsymbol{\gamma}_k + \Delta\boldsymbol{\gamma}) \leq 0 \quad (24)$$

$$\underset{\Delta\boldsymbol{\gamma}}{\text{Minimize}} \|(\boldsymbol{\gamma}_k + \Delta\boldsymbol{\gamma}) - \boldsymbol{\gamma}_0\|^2$$

식(24)는 서로 다른 2개의 목적함수와 부등식형 구속조건을 가지는 최적화문제이다. 이 문제의 최적조건은 Pareto optimality로 결정되며, 최적화이론에 의하면 많은 해를 가지는 문제가 되고, 따라서 풀기 어려운 문제가 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 이 논문에서는 일반화된 Tikhonov 정규화를 제안한다.

임의의 실수  $\eta_j$ 를 유일하게 결정하기 위한 시스템변수에 대한 추가적인 구속조건을 다음과 같이 정의한다.

$$\underset{\Delta\boldsymbol{\gamma}}{\text{Minimize}} \|(\boldsymbol{\gamma}_k + \Delta\boldsymbol{\gamma}) - \boldsymbol{\gamma}_0\|^2 \quad (25)$$

식(25)를 전개하고,  $\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j = 1$  for  $i = j$ ,  $\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j = 0$  for  $i \neq j$  임을 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\underset{\eta_j}{\text{Minimize}} \sum_{j=i+1}^n \eta_j^2 + 2 \left( \sum_{j=i+1}^n \eta_j \mathbf{v}_j \right)^T (\boldsymbol{\gamma}_k - \boldsymbol{\gamma}_0) \quad (26)$$

위의 식을 만족시키는  $\eta_j$ 는 다음과 같다.

$$\eta_j = -\mathbf{v}_j^T (\boldsymbol{\gamma}_k - \boldsymbol{\gamma}_0) \quad (27)$$

위의 결과를 식(14)에 대입하면 다음과 같은 해를 구할 수 있다.

$$\Delta \boldsymbol{\gamma} = \sum_{j=1}^l \mathbf{v}_j \omega_j^{-1} \mathbf{z}_j^T \mathbf{U}_k^r + \sum_{j=l+1}^n \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T (\boldsymbol{\gamma}_0 - \boldsymbol{\gamma}_k) \quad (28)$$

식(28)은 Tikhonov 정규화 최소자승문제의 2차 종속문제의 해와 유사한 형태를 가진다. 이와 같은 유사성으로부터 다음과 같은 정규화계수 행렬을 정의하여 식(24)의 2개의 최적화문제를 하나의 2차 종속문제로 치환한다.

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{V}^T = \text{diag}(\lambda_j) \mathbf{V}^T \quad (29)$$

정규화 된 오차함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\text{Minimize}_{\boldsymbol{\gamma}} \pi = \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{U}}(\boldsymbol{\gamma}) - \bar{\mathbf{U}}\|^2 + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{1})\|^2 \quad (30)$$

정규화 된 해는 다음과 같이 구해진다.

$$\Delta \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{V} \text{diag}(1 - \alpha_j) \text{diag}\left(\frac{1}{\omega_j}\right) \mathbf{Z}^T \mathbf{U}_k^r + \mathbf{V} \text{diag}(\alpha_j) \mathbf{V}^T (\mathbf{1} - \boldsymbol{\gamma}_k) \quad (31)$$

여기서, 각각의 특이치에 대한 가중치는  $\alpha_j = \frac{\lambda_j^2}{\omega_j^2 + \lambda_j^2}$  이다.

다음과 같이 가중치를 정의하면 일반화된 Tikhonov 정규화를 이용하여 TSVD를 구현할 수 있다.

$$\alpha_j = \begin{cases} 0 & (1 \leq j \leq t) \\ 1 & (t+1 \leq j \leq n) \end{cases} \quad (32.a)$$

즉,

$$\begin{aligned} \lambda_j &= 0 & (1 \leq j \leq t) \\ \lambda_j &\gg \max(\omega_j, t+1 \leq j \leq n) & (t+1 \leq j \leq n) \end{aligned} \quad (32.b)$$

#### 2.4.4. $L_1$ -정규화

앞서 언급한 기법들은 시스템변수의  $L_2$ -norm을 사용한다. 그러나, 집합부는 이산적이므로, 조각적으로 연속인 함수에 적합한  $L_2$ -norm보다 Dirac delta function에 적합한 시스템변수의  $L_1$ -norm에 의한 시스템 확인기법을 적용하는 것이 보다 적합하다[Par02].

시스템변수의  $L_1$ -norm은 미분 불가능하므로 Tikhonov 정규화는 사용할 수 없다. 따라서, 오차함수 최적화에 TSVD를 적용한다.

시스템 확인기법 문제의 불안정성은 작은 크기의 특이치에 대한 해의 성분에 의해 발생하므로, 작은 크기의 특이치에 대한 해의 성분들을 절삭함으로써 수 정된 증분해는 다음과 같다.

$$\Delta\boldsymbol{\gamma} = \sum_{j=1}^t \mathbf{v}_j \boldsymbol{\omega}_j^{-1} \mathbf{z}_j^T \mathbf{U}^r + \sum_{j=t+1}^n \eta_j \mathbf{v}_j = \Delta\boldsymbol{\gamma}_t + \mathbf{q} \quad (33)$$

여기서,  $\Delta\boldsymbol{\gamma}_t$ ,  $\mathbf{q}$ 는 다음과 같다.

$$\Delta\boldsymbol{\gamma}_t = \sum_{j=1}^t \mathbf{v}_j \boldsymbol{\omega}_j^{-1} \mathbf{z}_j^T \mathbf{U}^r, \quad \mathbf{q} = \sum_{j=t+1}^n \eta_j \mathbf{v}_j \quad (34)$$

$L_1$ -정규화조건과 구속조건은 결정되지 않은 실수  $\eta_j$ 에 대한 분리된 최적화 문제로서 다음과 같이 정의된다.

$$\underset{\boldsymbol{\gamma}_j}{\text{Minimize}} \|\boldsymbol{\gamma}_{k-1} + \Delta\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0\|_1 \quad \text{subject to} \quad \mathbf{R}(\boldsymbol{\gamma}_{k-1} + \Delta\boldsymbol{\gamma}) \leq 0 \quad (35)$$

위의 최소화 문제는 미지의 벡터  $\mathbf{q}$ 에 대하여 다음과 같이 표현된다.

$$\underset{\mathbf{q}}{\text{Minimize}} \|\mathbf{q} - (\boldsymbol{\gamma}_0 - \boldsymbol{\gamma}_{k-1} - \Delta\boldsymbol{\gamma})\|_1 \quad (36)$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{V}_t^T \mathbf{q} = 0 \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\gamma}_L - \boldsymbol{\gamma}_{k-1} - \Delta\boldsymbol{\gamma}_t \leq \mathbf{q} \leq \boldsymbol{\gamma}_U - \boldsymbol{\gamma}_{k-1} - \Delta\boldsymbol{\gamma}_t$$

여기서,  $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t)$ 이다. 식(36)의 등식 구속조건은  $\mathbf{q}$ 가 절삭된 RSV의 선형조합이어야 한다는 것을 나타낸다. 이 논문에서는 simplex algorithm을 사용하여 식(35)의  $\mathbf{q}$ 에 대한 선형 프로그래밍을 푼다[Moh93].

선형 프로그래밍으로부터 최적의 해  $\mathbf{q}_{\text{opt}}$ 가 구해지면 현재 반복단계의 증분해의 방향이 다음과 같이 정의된다.

$$\Delta\boldsymbol{\gamma}_{\text{opt}} = \Delta\boldsymbol{\gamma}_t + \mathbf{q}_{\text{opt}} \quad (37)$$

수렴을 빠르게 하기 위해, 식(37)에 의해 주어진 방향에 대해 일차원 line search가 행해진다.

$$\text{Minimize}_{\beta} \left\| \tilde{\mathbf{U}}(\boldsymbol{\gamma}_{k-1} + \beta \Delta\boldsymbol{\gamma}_{\text{opt}}) - \bar{\mathbf{U}} \right\|_2^2 \quad (38)$$

$k$  번째 반복단계의 최종 증분해는 식(38)에 의해 결정된 step length  $\beta_{\text{opt}}$ 에 의해 구할 수 있다.

$$\boldsymbol{\gamma}_k = \boldsymbol{\gamma}_{k-1} + \beta_{\text{opt}} \Delta\boldsymbol{\gamma}_{\text{opt}} \quad (39)$$

## 2.5. 정규화계수와 Truncation Number

### 2.5.1. 정규화계수

이 논문에서는 정규화 계수의 결정을 위해 GMS를 사용한다. GMS에서는 a priori 추정치와 a posteriori 해가 같은 효과를 갖게 하는 가장 작은 특이치와 가장 큰 특이치의 기하평균으로써 최적의 정규화 계수를 결정한다[Par01].

$$\lambda_{\text{opt}} = \sqrt{\omega_{\text{max}} \omega_{\text{min}}} \quad (40)$$

여기서,  $\omega_{\text{min}}$ 은 numerical rank 보다 작지 않은 최대의 특이치이다.

$\lambda_{\text{opt}}$  보다 작은 특이치는 가중치가  $\frac{1}{2}$  보다 커지기 때문에 해의 성분은 a priori 추정치에 의해 보다 큰 영향을 받는다.  $\lambda_{\text{opt}}$  보다 작은 특이치의 개수가 많아질수록 a priori 추정치에 의한 영향이 커지므로 정규화 효과는 증가한다.

### 2.5.2. Truncation Number

이 논문에서는  $L_2$ -norm을 사용하는 TSVD에서 truncation number  $t$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$w_1 \geq \dots \geq w_t \geq \lambda_{\text{opt}} \geq w_{t+1} \geq \dots \geq w_n \quad (41)$$

여기서,  $\lambda_{\text{opt}}$ 는 GMS에 의해 결정된 정규화계수이다. 즉, a posteriori 해의 영향을 더 많이 받는 정규화계수보다 큰 특이치에 대한 해의 성분만이 존재하고, a priori 추정치의 영향을 더 많이 받는 작은 크기의 특이치에 대한 해의 성분은 절삭한다.

$L_1$ -norm을 사용하는 TSVD에서 truncation number는 다음과 같은 식을 만족시키는 최소의 값으로 정의한다.

$$\|\tilde{\mathbf{U}}(\gamma) - \bar{\mathbf{U}}\|^2 \geq \|\mathbf{e}\|^2 \quad (42)$$

여기서, 측정오차  $\mathbf{e}$ 의 크기는 알고 있는 것으로 가정한다. 실제로, 측정오차의 크기는 알 수 없으므로 이에 대한 추가적인 연구가 필요하다. 식(42)는 오차함수가 측정오차보다 커야 함을 뜻한다.

$L_1$ -norm을 사용하는 경우는  $L_2$ -norm을 사용하는 경우보다 분해능이 크기 때문에 측정오차의 영향에 의해 잘못된 해를 구할 가능성이 있으므로, 정보의 양이 줄더라도 오차의 영향을 최소화할 필요가 있다. 따라서,  $L_1$ -norm을 사용하는 TSVD의 경우에는 식(42)와 같이 truncation number를 정의한다. 일반적으로 식(42)에 의해 결정된 truncation number는 식(41)에 의한 것보다 작다.

## 2.6. 통계적 손상진단

### 2.6.1. 자료교란기법

측정된 변위는 언제나 오차를 포함하고 있다. 만약, 같은 측정 조건에 대해 충분한 측정 자료가 있다면, 결과에 대한 측정오차의 영향은 측정된 자료들을 평균함으로써 감소될 수 있다. 그러나, 실제적으로 오차를 포함하는 한정된 양의 측정자료만을 얻을 수 있다. 따라서, 시스템변수의 변화가 측정오차에 기인한 것인지, 또는 실제의 손상에 기인한 것인지 결정하기 어렵다.

그러한 결과 해석의 애매함을 피하기 위해 자료교란기법을 사용한다. 자료교란기법에서는, 측정된 변위를 다음과 같이 정의된 작은 크기의 자료로 교란시킴으로써 생성된 자료들로 일련의 시스템 확인기법을 수행한다.

$$(\bar{u}_j)_i^k = (\bar{u}_j)_i (1 + \mathfrak{R}(-1,1) \times \mathfrak{S}_{\max}) \quad (43)$$

여기서,  $(\bar{u}_j)_i^k$ ,  $(\bar{u}_j)_i$ ,  $\mathfrak{R}(-1,1)$ ,  $\mathfrak{S}_{\max}$  는 각각 교란된 변위, 측정변위, 등분포 확률함수로부터 임의추출된 -1과 1 사이의 값을 갖는 실수, 최대의 교란 크기를 나타낸다.  $i$ ,  $j$ ,  $k$  는 각각 하중 경우, 변위 성분, 교란에 대한 지수를 나타낸다. 식(43)에서의 최대의 교란 크기  $\mathfrak{S}_{\max}$  는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathfrak{S}_{\max} = \sqrt{\frac{\|\tilde{\mathbf{U}}(\boldsymbol{\gamma}_s) - \bar{\mathbf{U}}\|^2}{\|\bar{\mathbf{U}}\|^2}} \quad (44)$$

여기서,  $\boldsymbol{\gamma}_s$  는 교란되지 않은 측정 변위에 대한 최소화문제의 해이다.

### 2.6.2. 가설검정

자료교란기법에 의해 구한 시스템변수들이 정규분포를 가지는지 확인하기 위해 Kolmogorov-Smirnov goodness-of-fit test를 시행한다. 이는 가정한 누적분포함수와 경험적으로 관측된 자료들의 누적분포함수를 비교하여 분포의 형태를 지정한 유의수준에 대하여 확인한다.

자료교란기법으로부터 구한 시스템변수들이 정규분포를 갖는 경우, 손상유무를 결정하기 위한 가설검정을 시행할 수 있다. 가설검정은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} H_0 : \gamma &= \gamma_0 \\ H_1 : \gamma &< \gamma_0 \end{aligned} \quad (45)$$

만약, 시스템변수의 평균이 다음과 같이 정의되는 한계값보다 작다면 귀무가설  $H_0$ 를 기각한다. 즉, 손상을 입은 것으로 평가한다.

$$c = \gamma_0 + z_\alpha \sigma \quad (46)$$

여기서,  $\alpha$ 는 유의수준을 나타낸다.  $\sigma$ 는 자료교란기법에 의한 시스템변수들의 표준편차이다.

이상과 같은 가설검정은 손상을 입지 않은 구조물에 대한 측정자료가 존재하지 않더라도 시스템변수의 통계적 분포를 합리적으로 가정할 수 있다는 전제 하에 이루어진다[Inh00].

### 2.6.3. 손상진단

가설검정을 통해 접합부의 손상유무를 판별하는 지표가 되는 손상지수는 다음과 같이 정의된다..

$$I_D = \begin{cases} 0 & \text{if } H_0 \text{ accepted : } (\bar{\gamma} \geq c) \\ 1 & \text{if } H_0 \text{ rejected : } (\bar{\gamma} < c) \end{cases} \quad (47)$$

여기서,  $\bar{\gamma}$  는 시스템변수의 평균을 나타낸다.

접합부가 얼마나 심각하게 손상되었는지 추정할 수 있는 손상도  $S_D$  는 다음과 같이 정의된다.

$$S_D = \frac{\gamma_0 - \bar{\gamma}}{\gamma_0} \times I_D \times 100(\%) \quad (48)$$

### 3. 수치예제

이 장에서는 앞서 언급한 기법들의 타당성을 제시하기 위해 다음 그림과 같은 프레임 구조물에 대한 수치예제를 수행한다.

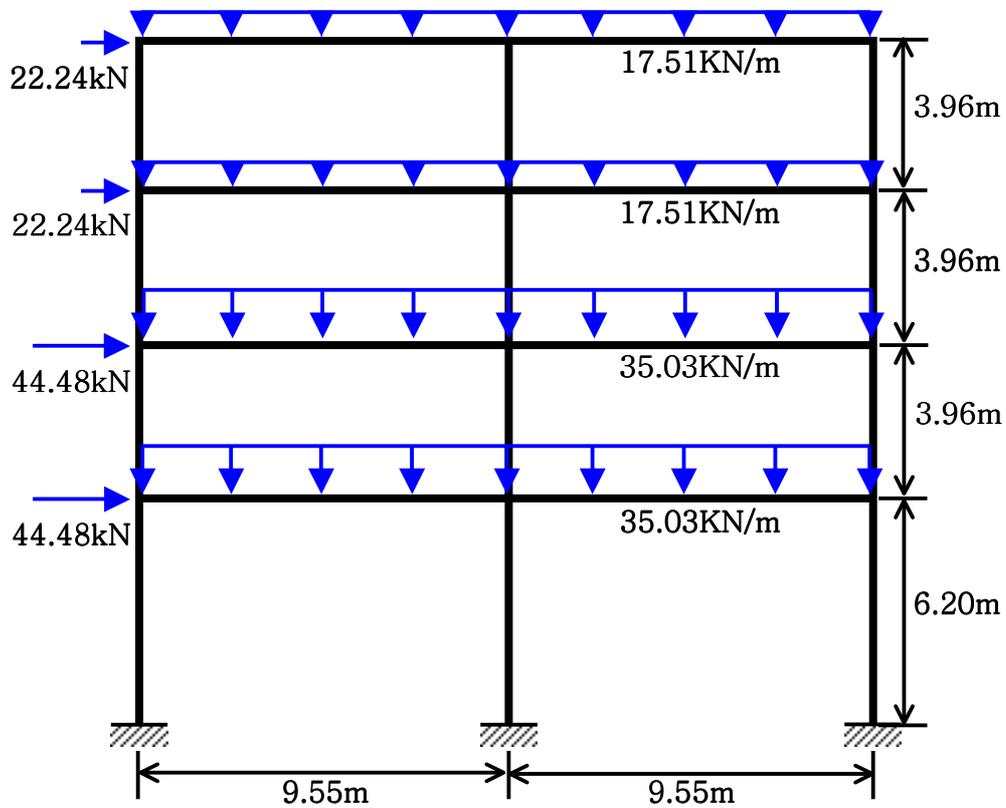


그림 2 4층 프레임 구조물의 기하형상과 하중

모든 부재의 영의계수는  $E = 210 \text{ GPa}$  이며, 각 부재의 제원은 다음 표와 같다.

1,2층 보	W36×300
3,4층 보	W33×241
1,2,3층 기둥	W14×730
4층 기둥	W14×500

표 1 부재 제원

### 3.1. 예제 1 : Rank-Deficiency

보-기둥 접합부(beam-to-column connection)와 기둥 기초(column base)의 joint fixity factor를 시스템변수로 선택한다. 시스템변수와 측정점의 위치는 그림 3과 같다. 시스템변수의 개수는  $n = 19$  이고 측정치의 개수는  $m = 16$  이므로, 모든 측정치가 서로 독립적이라도 rank-deficient 문제가 된다.

4번, 10번 접합부에 각각 50%, 70%의 손상을 가정한다. 시스템변수의 기저치는 손상이 없는 강철의 joint fixity factor  $\gamma_0 = 1$ 로 가정한다. 측정오차는 고려하지 않으며, 자료교란기법에서 교란회수는 30회로 한다.

물리적으로 의미 있는 joint fixity factor의 범위는  $0 \leq \gamma \leq 1$ 이지만, 식(2)에서 주어진 강성도행렬의 positive-definiteness를 해치지 않는 범위 내에서 2차 종속문

제의 line search가 자유롭게 이루어질 수 있도록, 부등식형 구속조건으로 작용하는 시스템변수의 상하한치는  $0 \leq \gamma < 2$ 로 정의한다.

문제를 반복적으로 풀 때, 수렴조건은  $\|\Delta\gamma\|/\|\gamma_k\| \leq 10^{-3}$ 로 정의한다.

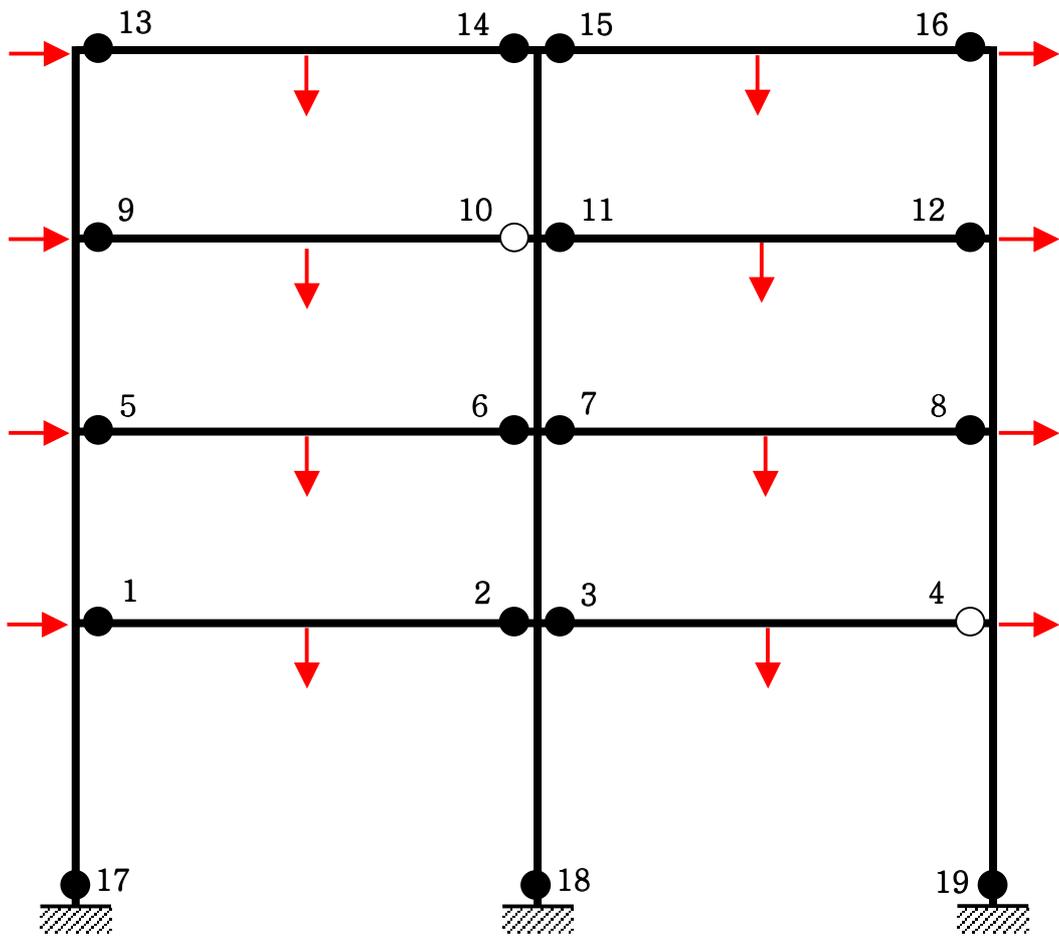


그림 3 시스템변수와 측정점의 위치

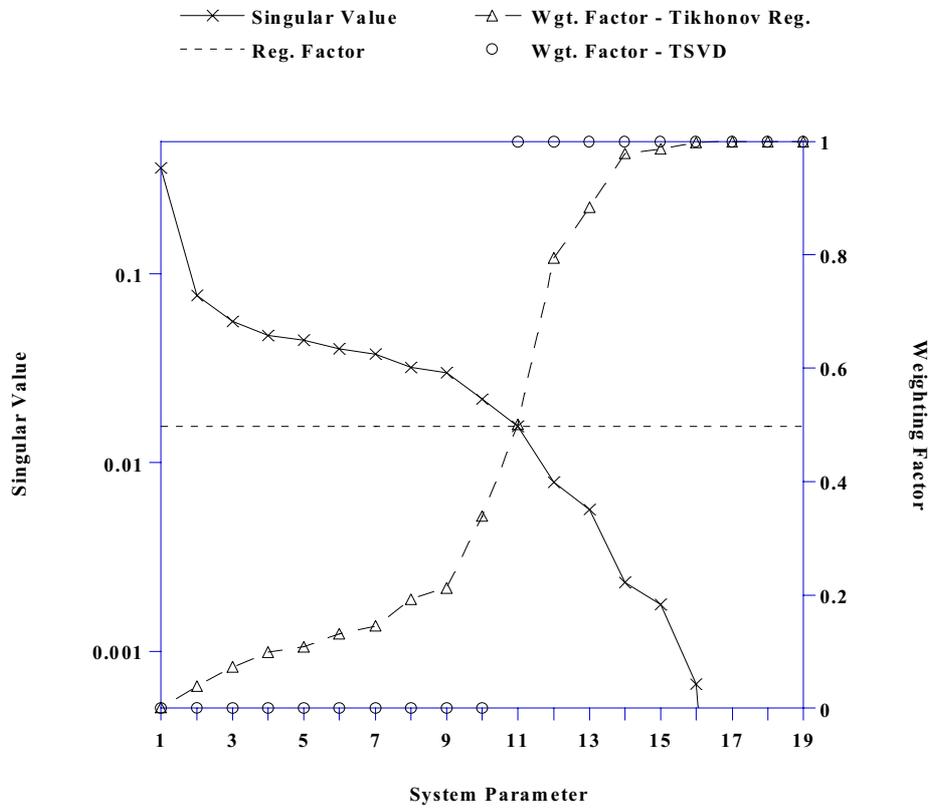


그림 4 특이치, 정규화계수, 가중치 (예제 1)

그림 4는 특이치의 분포, GMS에 의해 결정된 정규화계수, Tikhonov 정규화, 일반화된 Tikhonov 정규화를 통해 구현한 TSVD에 의한 가중치를 나타내고 있다. numerical rank 이상의 값을 갖는 특이치의 개수는 측정치의 개수와 같은  $r = 16$  이다. 모든 측정치가 서로 독립적임을 특이치분해를 통해 확인할 수 있다. 특이치에 따라 GMS에 의해 정규화계수가 결정되고, 결정된 정규화계수에 의해

Tikhonov 정규화가 이루어진다. TSVD에서 truncation number는 식(41)에 의해  $t=10$  으로 결정된다.

작은 값의 특이치는 해의 진동을 유발하여 의미 없는 해가 발생하게 한다. 이러한 작은 값의 특이치의 영향은 Tikhonov 정규화에서 큰 값의 가중치에 의해 억제된다. 특이치의 크기가 작아짐에 따라 Tikhonov 정규화에서의 가중치는 커진다. 이와 달리, TSVD에서의 가중치는 truncation number를 기준으로 0과 1만이 존재한다. 즉, truncation number 이상의 큰 값의 특이치에 대한 해의 성분은 완전하게 존재하고, 그 이하의 작은 값의 특이치에 대한 해의 성분은 완전하게 절삭된다.

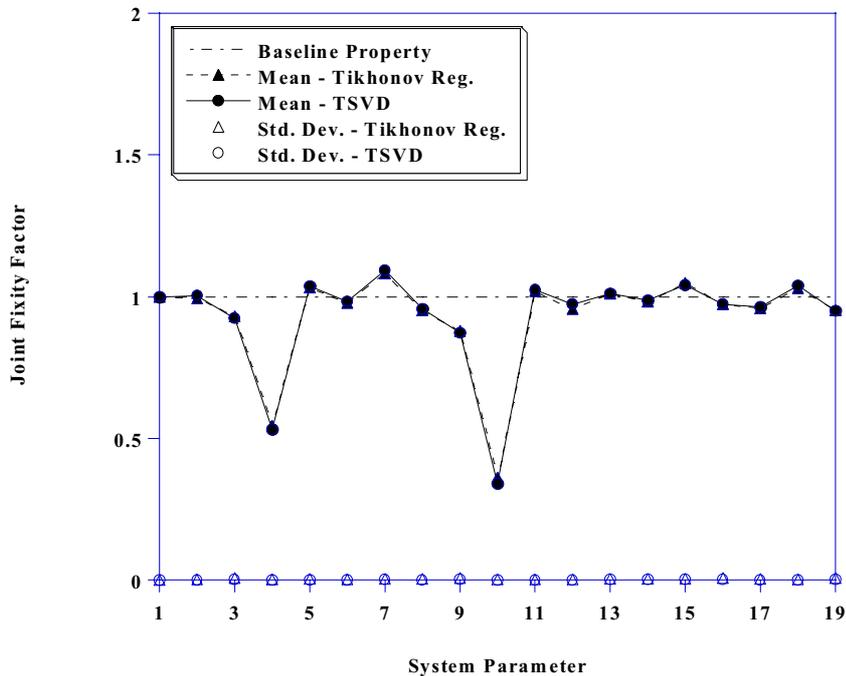


그림 5 해의 평균과 표준편차 (예제 1)

자료교란기법을 통해 여러 개의 해를 구할 수 있고 그 분포를 알 수 있다.

Tikhonov 정규화, TSVD에 의한 해의 평균과 표준편차는 **그림 5**와 같다.

두 방법 모두 4, 10번 접합부의 손상을 분명하게 탐지해내고 있다. 거의 같은 결과를 나타내고 있는데, 이는 측정오차가 없기 때문에 두 방법의 정규화효과의 차이가 드러나지 않기 때문이다. 3, 9번 접합부에 약간의 손상이 추정되고 있는데, 이는 같은 부재 내에 존재하는 접합부의 강성 또한 약화된 것으로 평가되기 때문이다. 식(2)의 강성도행렬을 살펴보면 분명하게 그 이유를 파악할 수 있다. 연속적인 함수에 적합한  $L_2$ -norm을 사용하기 때문에 이산적인 접합부의 손상을 추정하는데 분해능이 떨어지기 때문이기도 하다.

결과적으로, Tikhonov 정규화, TSVD 모두 측정오차가 없는 경우 rank-deficiency를 극복하고 손상을 탐지해내고 있음을 확인할 수 있다.

### 3.2. 예제 2 : 측정오차

앞 절에서 제시된 rank-deficiency를 가지고 있는 문제에 측정오차를 고려한 예제를 수행한다. 4, 10번 접합부에 50%의 손상을 입은 것으로 가정하며, 다른 조건은 모두 같다. 측정오차는 5%로 한다.

Kolmogorov-Smirnov goodness-of-fit test에서 한계값은 유의수준  $\alpha = 0.01$ 에 해당하는  $D_{cr} = 0.272$ 로 하고, 가설검정의 유의수준 또한  $\alpha = 0.01$ 로 한다.

$L_1$ -norm에 기초한 방법의 경우에는  $\|\Delta\tilde{\mathbf{U}}\|/\|\tilde{\mathbf{U}}_k\| \leq 10^{-3}$  와 같이 수렴조건을 정의하는 것이 보다 나은 결과를 도출함을 많은 경우의 연구를 통하여 확인하였고, 따라서 위와 같은 수렴조건을 적용한다.

$L_1$ -norm을 사용하는 TSVD에서 truncation number를 결정하기 위해 오차함수와 측정오차의 norm의 제곱  $\|\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{y}) - \bar{\mathbf{U}}\|^2, \|\mathbf{e}\|^2$  을 도시하면 다음과 같다.

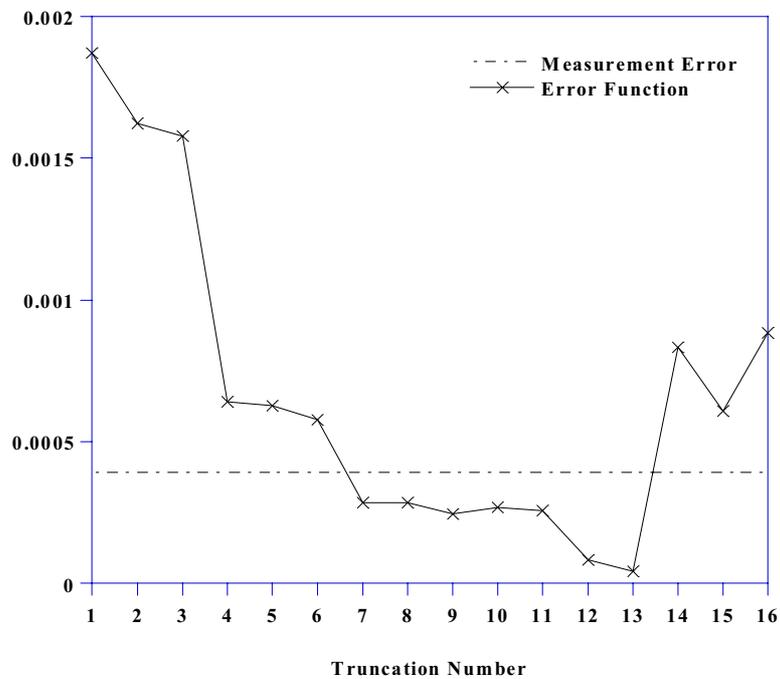


그림 6 오차함수와 측정오차 (예제 2)

7 이하의 truncation number에 대해서는 측정오차가 오차함수보다 더욱 커지므로 해가 오차의 영향으로 인해 실제의 값에서 벗어나기 쉽게 된다. 따라서,  $L_1$ -norm을 사용하는 TSVD에서 truncation number는  $t = 6$ 으로 결정한다. 14 이상의 truncation number에 대하여 오차함수가 측정오차보다 커지는 것은, 해가 실제의 값에서 크게 벗어나  $\|\tilde{\mathbf{U}}(\boldsymbol{\gamma}) - \bar{\mathbf{U}}\|^2$ 의 값이 커졌기 때문이다.

Tikhonov 정규화, TSVD,  $L_1$ -정규화에 의한 시스템변수들의 평균과 표준편차는 그림 7과 같다.

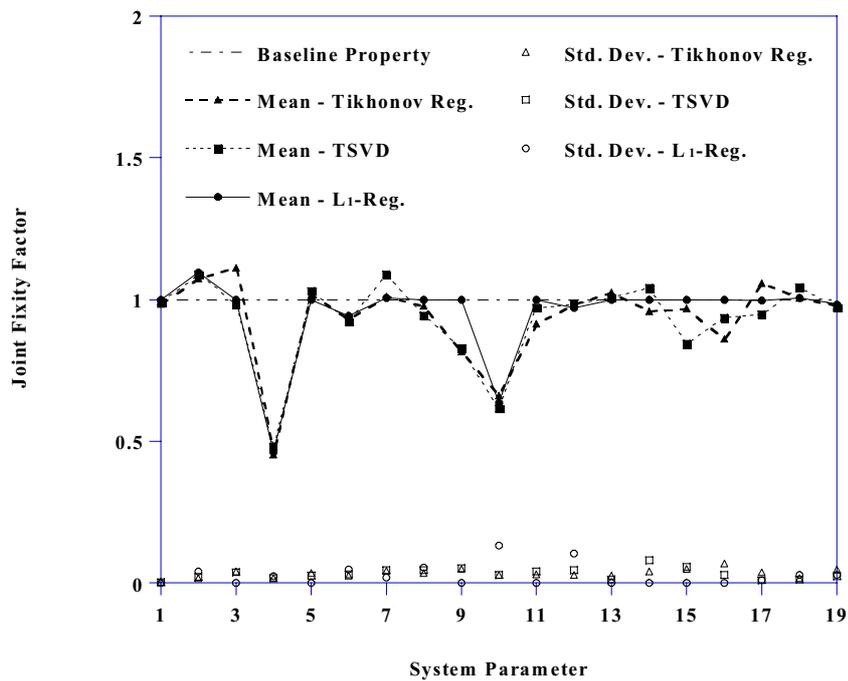


그림 7 시스템변수의 평균과 표준편차 (예제 2)

rank-deficiency와 측정오차가 모두 존재하더라도 4, 10번 접합부의 손상이 추정되고 있음을 확인할 수 있다.  $L_2$ -norm을 사용하는 Tikhonov 정규화, TSVD의 경우, 15, 16번 접합부의 강성이 저하되어 평가되는 등 측정오차의 영향으로 측정오차가 없는 예제의 결과보다 실제의 값으로부터 좀 더 벗어나고 있지만,  $L_1$ -norm을 사용하는 TSVD는 측정오차에 의한 벗어남이 거의 없이 정확하게 손상을 추정하고 있다.  $L_1$ -정규화에서는 3, 9번 접합부의 강성 또한 감소되어 나타나지 않는다.

자료교란기법을 통한 시스템변수의 통계적 자료를 이용하여 손상진단을 한다. 시스템변수들이 정규분포를 가지는지 확인하기 위해 Kolmogorov-Smirnov goodness-of-fit test를 시행한다.  $L_2$ -norm을 사용하는 Tikhonov 정규화, TSVD의 경우 모든 시스템변수들이 정규분포를 가짐을 확인하였다.  $L_1$ -norm을 사용하는 TSVD의 경우, 일부의 시스템변수들은 a priori 추정치의 영향이 매우 강하게 작용하기 때문에 편차를 보이지 않아 분포를 가지지 않는다. 따라서, 정규분포를 가지는 시스템변수에 대해서만 가설검정을 수행한다.

자료교란기법을 통한 시스템변수의 분포가 정규분포임을 확인한 후, 가설검정을 통해 손상유무를 판단한다. 손상으로 판정된 접합부의 손상도는 그림 8과 같다.

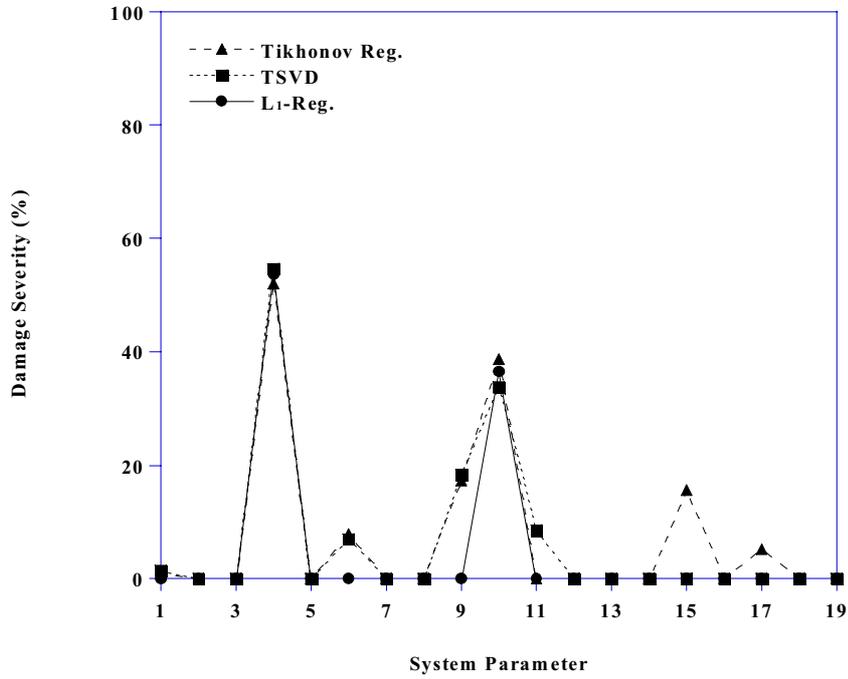


그림 8 손상도 (예제 2)

Tikhonov 정규화의 경우, 손상을 입은 4, 10번 접합부의 손상여부와 손상도를 올바르게 추정하고 있으나, 15번 접합부를 비롯한 몇 개의 손상을 입지 않은 접합부를 손상을 입은 것으로 잘못 추정하고 있다. 또한, 10번 접합부와 같은 부재에 존재하는 9번 접합부도 비교적 큰 손상을 입은 것으로 잘못 추정하고 있다. rank-deficiency와 측정오차의 영향으로 인해 해가 실제의 값에서 벗어난 결과라고 할 수 있다.

TSVD를 통한 결과는 Tikhonov의 경우보다 조금 더 나은 결과를 보이고 있기는 하지만, 앞서 언급한  $L_2$ -norm에 기초한 방법의 한계를 보이고 있다.

$L_1$ -norm에 기초한 TSVD의 경우에는 정확하게 4, 10번 접합부의 강성만이 각각 54%, 36% 감소된 것으로 추정됨을 확인할 수 있다.

결과적으로, 세 방법 모두 rank-deficiency와 측정오차가 존재하더라도 손상을 탐지해내고 있음을 알 수 있다. 특히,  $L_1$ -norm에 기초한 TSVD는 가장 좋은 결과를 보여주고 있다.

### 3.3. 예제 3 : 모델링오차

그림 9와 같이 접합부가 아닌 점선으로 표시된 부재에 50%의 손상을 가정하여 모델링오차를 고려한 예제를 수행한다. 다른 모든 조건은 앞 절의 예제와 같다. 즉, rank-deficiency, 측정오차, 모델링오차가 모두 존재하는 예제이다.

$L_1$ -norm에 기초한 TSVD에서 truncation number는 식(42)에 의해  $t = 4$ 이다.

그림 10은 시스템변수의 평균과 표준편차를 나타낸다.  $L_2$ -norm을 사용하는 Tikhonov 정규화와 TSVD의 경우, 손상된 부재에 존재하는 3, 4번 접합부의 강성이 저하되어 추정되며, 이를 통해 부재의 손상을 추정할 수 있다.  $L_1$ -norm에 기초한 TSVD의 경우, 손상진단이 제대로 이루어지지 못하고 있다. 특히, 3, 4, 12번 시스템변수의 표준편차가 특히 크게 나타나고 있다.

30회의 자료교란 중 23회째의 결과는 그림 11과 같다.

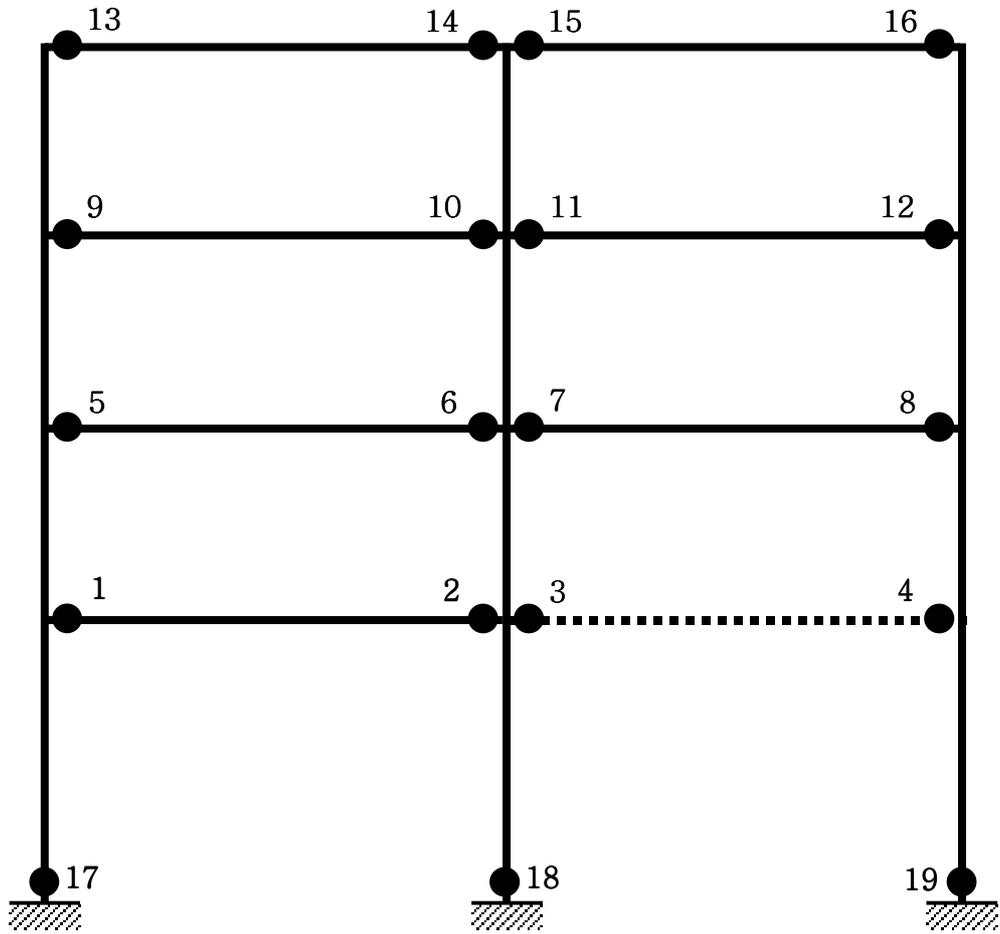


그림 9 시스템변수와 손상부재의 위치 (예제 3)

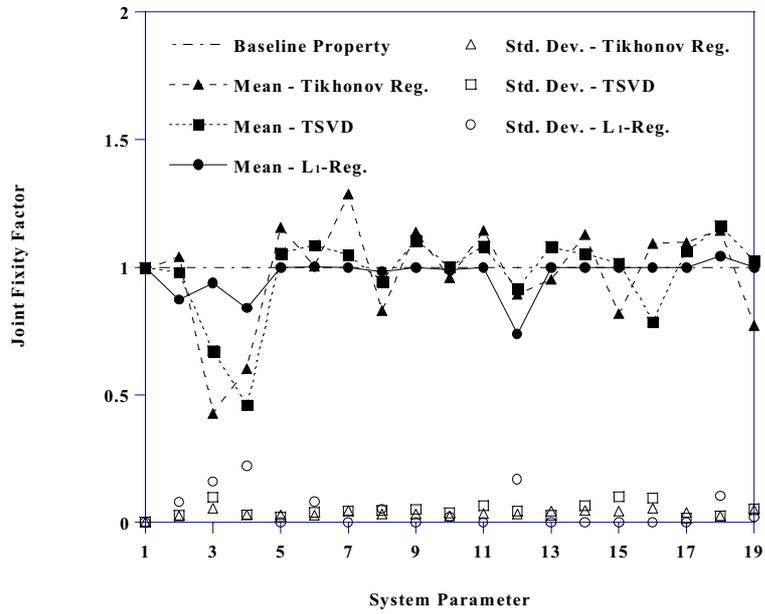


그림 10 시스템변수의 평균과 표준편차 (예제 3)

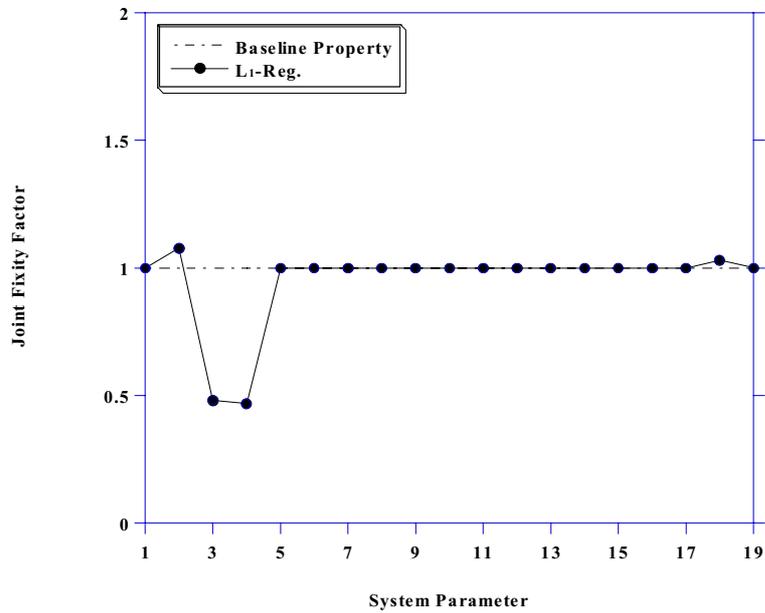


그림 11  $L_1$ -정규화에 의한 해 (예제 3)

위의 그림과 같이, 정확하게 손상된 부재에 존재하는 3, 4번 접합부의 강성만이 저하되어 추정되었다.  $L_1$ -정규화는  $L_2$ -정규화보다 분해능이 뛰어나지만, 그 결과 측정오차에 의해 전혀 다른 해를 도출할 수 있음을 보여주고 있다. 그러므로,  $L_1$ -정규화에서는 측정오차의 수준에 따라 적절한 truncation number를 결정하는 것이 매우 중요하다.

## 4. 결론

이 논문에서는 시스템 확인기법을 이용하여 프레임 구조물의 접합부 손상을 진단할 수 있는 방법을 제시하였다. 기존의 손상진단은 모델링의 단순함 때문에 부재 손상 모델을 사용하였으나, 실제 구조물에서 접합부가 보다 손상을 입기 쉬우므로 좀 더 현실적인 접합부 손상 모델을 사용하였다. 접합부 강성 저하를 평가하기 위해 반강절 접합부 모델을 이용하였다. 시스템 확인기법은 측정오차, 측정자료의 부족으로 인해 불안정성을 지니게 되는데 그러한 불안정성을 극복하기 위한 수치적 해결책을 제시하였다. 특히, TSVD는 구속조건이 있는 비선형 최적화문제를 해결하는데 어려움이 있으므로, 이 논문에서 제안된 일반화된 Tikhonov 정규화를 통해 TSVD를 구현하였다. 그리고, 기존의  $L_2$ -norm에 기초한 정규화기법들의 단점을 극복하기 위해, 이산적으로 존재하는 접합부 손상추정에 적합한  $L_1$ -norm에 기초한 TSVD를 제시하였다. 또한, TSVD를 적용하는데 있어 가장 중요한 최적의 truncation number를 결정하기 위한 방법을 제안하였다.

제시된 방법을 예제를 통하여 검증하였다. 첫번째 예제는 rank-deficiency를 갖는 문제로,  $L_2$ -norm에 기초한 정규화기법들을 통해 손상 위치와 손상도를 정확하게 추정하였다. 두 번째 예제는 rank-deficiency와 측정오차를 모두 갖는 문제로,  $L_2$ -norm에 기초한 정규화기법들을 통해 손상을 추정할 수 있었지

만 측정오차로 인해  $L_2$ -norm에 기초한 정규화기법의 한계로 해가 정해에서 조금씩 벗어나는 결과를 가져왔다.  $L_1$ -norm에 기초한 정규화기법을 통해  $L_2$ -norm에 기초한 정규화기법의 한계를 극복하고 정확하게 손상을 추정할 수 있음을 보였다. 세 번째 예제는 rank-deficiency, 측정오차, 그리고 모델링오차를 모두 갖는 문제로, 이를 통해 TSVD에서 오차 수준을 고려한 최적의 truncation number 결정방법이 매우 중요한 사항임을 제시하였다.

## 참고문헌

Yun01.

C.B.Yun, J.H.Yi, E.Y.Bahng. "Joint damage assessment of framed structures using a neural networks technique." *Engineering Structures* 2001; **23**:425-435.

Nak98.

M.Nakashima, K.Inoue, M.Tada. "Classification of damage to steel buildings observed in the 1995 Hyogoken-Nanbu earthquake." *Engineering Structures* 1998; **20**(4-6):271-281.

Wei98.

Wei-Ming Chi, Sherif El-Tawil, Gregory G.Deierlein, John F.Abel. "Inelastic analyses of a 17-story steel framed building damaged during Northridge." *Engineering Structures* 1998; **20**(4-6):481-495.

Dhi90.

B.S.Dhillon, S.Abdel-Majid. "Interactive analysis and design of flexibly connected frames." *Computers & Structures* 1990; **36**(2):189-202.

Ho91.

W.M.G.Ho, S.L.Chan. "Semibifurcation and bifurcation analysis of flexibly connected steel frames." *Journal of Structural Engineering ASCE* 1991; **117**(8):2299-2319.

Par01.

H.W.Park, S.B.Shin, H.S.Lee. "Determination of an optimal regularization factor in system identification with Tikhonov regularization for linear elastic continua." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2001; **51**:1211-1230.

Moh93.

Mohammad-Reza Banan, Keith D.Hjelmstad. *Identification of structural systems from measured response*. Department of Civil Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois 1993.

Gen96.

Gene H.Golub, Charles F.Van Loan. *Matrix Computations* (3<sup>rd</sup> ed.). The Johns Hopkins University Press: London, 1996.

Han01.

P.C.Hansen. *Rank-deficient and Discrete Ill-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion*. SIAM:Philadelphia, 1998. *Engineering* 2001; **51**:1211-1230.

Par02.

Hyun Woo Park, Hae Sung Lee. “ $L_1$ -Regularization scheme for the damage detection of framed structures.”

Inh00.

Inho Yeo, Soobong shin, Hae Sung Lee, Sung-Pil Chang. “Statistical damage assessment of framed structures from static responses.” *Journal of Engineering Mechanics ASCE* 2000; **126**(4):414-421.

Lee99.

H.S.Lee, Y.H.Kim, C.J.Park, H.W.Park. “A new spatial regularization scheme for the identification of geometric shapes of inclusions in finite bodies.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1999; **46**(7):973-992.

Lee00.

H.S.Lee, Y.H.Kim, C.J.Park, H.W.Park. “Identification of geometric shapes and material properties of inclusions in two dimensional finite bodies by boundary parameterization.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2000; **181**(1-3):1-20.

## ABSTRACT

This paper presents a damage assessment technique for the connection of framed structure using a system identification. Because connections are more susceptible to damage than the other parts of structure in a steel structure, not element but connection damage model is used, which is more realistic. The concept of semi-rigid connection is utilized to represent the reduction of connection's rotational stiffness due to damage. System identification using static responses of structure has discontinuity and non-uniqueness of solution caused by measurement error and sparseness of measurement data, respectively, which make the solution unstable. Particularly, structure is so large that it is difficult to avoid the sparseness. This paper focuses on rank-deficiency. Tikhonov regularization technique and TSVD have been widely used to overcome instabilities of system identification. Generalized Tikhonov regularization is proposed to solve difficulties in using TSVD.  $L_1$ -regularization is also suggested to overcome the limit of  $L_2$ -regularization. Statistical damage assessment is used for more reliable estimation. Numerical examples verify the validity of this paper.

### **Keyword**

system identification, semi-rigid connection, rank-deficiency, Tikhonov regularization, TSVD, generalized Tikhonov regularization,  $L_1$ -regularization, statistical damage assessment

## 감사의 글

이 논문이 나오기까지 저에게 끝없는 조언과 꾸지람을 주신 이해성 선생님께 먼저 감사 드립니다. 많은 가르침을 주신 장승필 교수님, 오병환 교수님, 고희무 교수님, 김재관 교수님께도 깊이 감사 드립니다.

부족함 많은 저에게 언제나 많은 깨달음을 주었던 현우형에게 감사 드립니다. 형이 없었다면 부족하나마 이 논문 또한 없을 겁니다. 연구실의 만형으로 여러 어려운 일들을 묵묵히 맡아주시고 때때로 학문적인 자극도 잊지 않았던 용한이형, 연구실 살림을 도맡아 하시며 제게 다양한 분야에 대한 지식을 전수해주셨던 기석이형, 마음만은 언제나 자상하게 후배들을 생각해주셨던 주성이형에게도 감사 드립니다. 지난 2년 동안, 모든 것을 같이 했던 나의 동기들, 병규, 양광이, 정진이에게도 고맙다는 말을 전합니다. 부족한 선배이기에 언제나 도움이 되지 못해 미안했던 영곤이형, 만우, 남규, 정희에게도 고마움을 전합니다.

삶에 지칠 때면 언제든지 함께 술친구가 되어주고 나의 어려움을 이해해주었던 윤기, 재현, 한조를 비롯한 나의 오랜 친구들에게 진심으로 고맙다는 말을 전하고 싶습니다.

이 논문으로 인해 가장 많은 희생을 감수해야 했던, 그럼에도 불구하고 언제나 내 곁에서 나를 지켜준 현임이에게 깊은 사랑과 고마움을 전합니다.

힘이 되어주지 못하는 무심한 형임에도 항상 자부심을 느끼게 해 주었던 속 깊은 동생 규현이에게도 고맙다는 말을 전하며, 다른 모든 가족들에게도 감사드립니다.

마지막으로, 언제나 깊은 믿음의 눈길로 저를 지켜 봐주신 부모님께 진심으로 감사 드리며 이 논문을 바칩니다.