

공학석사학위논문

크리프와 건조수축을 고려한 콘크리트 사장교의

최적화 기법을 이용한 초기평형상태 해석

Initial Equilibrium States Analysis by Optimization of  
Concrete Cable-stayed Bridges Considering Creep and Shrinkage

2007 년 2 월

서울대학교 대학원

지구환경시스템공학부

정 길 제

## 초 록

케이블은 장력이 도입되기 전에는 강성이 발생하지 않으므로 무응력 상태의 기하형상을 정의할 수 없다. 따라서 교량의 기능성에 의하여 주어진 설계 형상을 만족시키는 케이블의 장력이나 초기 무응력 길이를 결정하는 해석이 필요하며 이러한 해석을 초기평형상태 해석이라고 정의한다. 콘크리트 사장교는 초기평형상태에서의 기하형상이 목표상태를 만족하더라도 시간이 지나면서 콘크리트에 발생하는 시간의존성 거동에 의해 구조물의 기하 형상이 달라진다. 기존의 연구는 구조물의 기하형상을 목표형상과 일치시키는 목표 시점을 설정하고, 목표 시점에서의 기하형상이 목표형상을 만족시키는 케이블의 무응력 길이를 Newton-Raphson 법을 이용하여 찾는 방법이 제안되었다. 목표형상을 이용한 방법은 안정된 수렴성을 보장하고 목표시점에서 목표형상을 정확히 만족시키지만 부재에 과도한 모멘트가 발생할 수 있다. 이 논문에서는 이러한 문제를 해결하기 위해 강사장교에 적용된 뼈대 구조물에 발생하는 휨 모멘트 최소화 방법과 복합적인 초기형상 결정법을 이용하여 콘크리트 사장교의 초기평형상태 해석법을 제안한다.

신형식 교량으로 기대되는 콘크리트 충전 강관 거더를 이용한 사장교 모델에 적용하여 제안된 방법의 적용성과 타당성을 검증하였다. 콘크리트에 발생하는 시간 의존성 거동은 크리프, 건조수축 및 재령 효과를 고려하였고, 강관에 충전된 콘크리트로 인한 합성효과를 고려하였다. 또한 시공단

계에 따른 콘크리트 부재의 시간 의존성 거동의 차이를 고려하였다. 제안된 방법은 최적화 기법을 이용하여 목표시점에서 콘크리트 사장교가 목표형상과 부재에 발생하는 휨 모멘트 최소화를 동시에 만족하도록 할 수 있다.

### 주요어

콘크리트 사장교, 콘크리트 충전 강관, 최적화 기법, 초기평형상태 해석, 민감도 해석

**학번 : 2005-21178**



.....						
3. 1. 2	응력-변형도			관계식		17
.....						
3. 1. 3				평형방정식		22
.....						
3. 2	케이블의	강성		행렬		30
.....						
3. 3	CFT	거더	요소	모델링		37
.....						
3. 4	CFT	거더	교량의	장기	거동	해석법
.....						46
3. 5	시공단계를	고려한	장기	거동	해석	
.....						48
.....						
4.	최적화를 이용한 초기평형상태 해석					62
.....						
4. 1	최적화를	이용한	초기평형상태	해석		63
.....						
4. 2		민감도		해석		68
.....						
4. 2. 1	완성계의	민감도		해석		68
.....						
4. 2. 2	시공단계를	고려한	민감도	해석		72
.....						
5.	해석 예제					75

5.1	완성계	해석	예제	78
.....				
5.2	시공단계	해석	예제	84
.....				
6.	결론			89
.....				
	참고문헌			91
.....				
	부록			92
.....				

## 그림 목 차

그림	2.1	콘크리트의	변형도	
.....				6
그림 2.2	시간에 따른 콘크리트 변형도	.....		7
그림 2.3	크리프의 중첩 법칙	.....		8
그림 3.1	콘크리트 부재의 노드 변위 및 부재력	.....		23
그림 3.2	탄성현수선 케이블에 대한 좌표계	.....		30
그림 3.3	케이블 세그먼트의 자유 물체도	.....		31
그림 3.4	변위가 발생한 탄성 현수선의 두 절점의 상대적 위치	.....		35
그림 3.5	CFT 거더의 단면	.....		39
그림 3.6	CFT 거더의 변형도	.....		40
그림 3.7	시공단계를 고려한 장기거동 해석 과정	.....		61
그림 4.1	사장교에서의 제어절점 및 제어자유도	.....		63
그림 5.1	CFT 거더 교량의 종단면도	.....		75
그림 5.2	52 개의 제어 절점과 제어 자유도	.....		77

그림 5.3 28 개의 제어 절점과 제어 자유도 .....	78
그림 5.4 목표시점에서 목표상태에 따른 케이블 장력 .....	81
그림 5.5 목표시점에서 목표상태에 따른 주탑의 수평 변위 .....	81
그림 5.6 목표시점에서 목표상태에 따른 주탑의 모멘트 .....	82
그림 5.7 목표시점에서 목표상태에 따른 거더의 수직 변위 .....	82
그림 5.8 목표시점에서 목표상태에 따른 거더의 모멘트 .....	83
그림 5.9 시공단계 고려시 목표시점에서 목표상태에 따른 케이블 장력 .....	85
그림 5.10 시공단계 고려시 목표시점에서 목표상태에 따른 거더 수직변위 .....	86
그림 5.11 시공단계 고려시 목표시점에서 목표상태에 따른 주탑 수평변위 .....	86
그림 5.12 시공단계 고려시 목표시점에서 목표상태에 따른 거더 모멘트 .....	87
그림 5.13 시공단계 고려시 목표시점에서 목표상태에 따른 주탑 모멘트 .....	87
그림 5.14 각 목표상태에서 시간에 따른 거더의 모멘트 ( $x = -41m$ )	88

## 표 목 차

표 5.1 CFT 거더 교량의 구조 요소별 주요 제원 .....	76
-------------------------------------	----

## 1. 서론

1950년대 이후 사장교는 일반 교량에 비하여 경제적인 면과 가설과 시공이 편리하다는 점, 그리고 수려한 미관 등의 장점으로 많은 교량에 채택되어 사용되었다. 사장교의 설계 및 시공 기술 발전은 사장교의 대형화 및 장지간화를 이루었으나, 보강형에 과도한 압축력이 재하되는 문제를 발생시켰다. 이에 따라 1970년대 이후 강재에 비하여 무게가 가볍고 경제적이며 압축력에 탁월한 저항성을 갖고 있는 콘크리트를 강재와 결합한 합성형 상부 구조를 도입하여 구조물의 안전성과 가격 경쟁력을 동시에 확보할 수 있었다. 특히 일본의 신간선 철도교(Hokurikude Bridge)에 적용된 이후 최근 활발히 연구 개발되고 있는 콘크리트 충전 강관(concrete filled tubular, CFT) 거더는 사장교의 장지간화에 따른 문제점을 해결해줄 수 있는 보강형으로 기대된다. 이 논문에서는 신형식 교량으로 기대되는 콘크리트 충전 강관 거더를 채용한 사장교에 대한 장기 거동 해석법 및 최적화 기법을 이용한 초기평형상태 해석법을 제안한다.

콘크리트 충전 강관은 말뚝의 용도로 개발되어 압축은 물론이고, 휨 저항 성능도 우수하다. 이러한 장점을 교량에 적용하기 위해 개발된 콘크리트 충전 강관 거더는 기존의 범용성 형강을 사용할 수 있으므로 용접 및 이음과 같은 공정이 생략되어 기존의 판형 거더에 비해 제작 공정이 줄어들고, 공사비를 절감할 수 있다. 또한 콘크리트 충전 강관 거더는 강관이

거푸집 역할을 하게 되므로 기존의 강합성 거더 및 철근 콘크리트 거더에 비해 경제성이 우수하다. 이 같은 경제적 장점 외에도 경량 기포 콘크리트를 사용하므로 콘크리트 거더에 비해 보강형의 자중을 줄일 수 있으며, 강상판 거더에 비해 진동 및 소음에 대한 사용성이 우수하다는 특징이 있다. 그러나 콘크리트 충전 강관 거더를 사장교에 사용하기 위해서는 크리프 및 건조 수축, 재령 효과와 같은 콘크리트 재료의 특성이 케이블 지지 구조물에 미치는 영향에 대해 고려해 줄 필요가 있다. 크리프나 건조수축으로 인하여 케이블 지지 구조물에 외부 하중과 무관한 변위가 발생하면, 케이블의 장력이 변화하므로 전체 구조계의 응력 상태가 바뀐다. 이는 콘크리트 부재에 발생하는 응력에 의해 변하는 크리프 변형의 양상도 달라지게 된다. 그러므로 콘크리트 충전 강관 거더를 채용한 신형식 교량은 콘크리트의 크리프 및 건조수축 변형과 외부 강관 및 케이블 부재 간의 상호 작용을 고려하여 거동을 파악해야 한다.

케이블은 무응력 상태에서의 기하형상이 정의되지 않으므로 사하중이 재하된 상태에서의 교량 형상을 초기평형상태라 정의하며, 이 상태에서의 교량 형상을 구조해석을 위한 기준 형상으로 사용한다. 케이블 부재의 초기 장력이나 무응력 길이에 의해 결정되는 초기평형상태에서의 교량 형상은 목표형상 및 설계 조건을 만족시켜야 한다. 그러나 콘크리트 부재를 사용한 케이블 지지 교량은 초기평형상태에서 주어진 기준 형상을 만족하도록 케이블의 무응력 길이가 결정되었더라도 재료의 특성상 시간이 지남에

따라 기준 형상에서 멀어지게 된다. 콘크리트의 시간의존성 거동이 모두  
발현된 목표시점을 결정하고 주어진 목표시점에서 목표형상을 만족하도록  
Newton-Rapson 법을 이용한 초기평형상태 해석법이 있다[1]. 안정된 수렴성  
이 보장되며 주어진 목표형상을 정확히 만족하지만 목표형상을 구현하기  
위해 과도한 부재력이 발생할 수 있다. 강사장교의 경우 이러한 문제를 해  
결하기 위하여 뼈대 구조물에서 발생하는 휨 모멘트를 최소화하도록 초기  
장력을 결정하는 방법이 제안되었고, 이는 목표형상에서 벗어날 수 있다는  
단점을 보완하기 위해 기하학적 형상과 모멘트 최소화 조건을 동시에 고려  
할 수 있는 복합적인 초기 형상 결정법[2]이 제안되었다.

이 논문에서는 콘크리트를 사용한 사장교에서 크리프 및 건조수축 현  
상이 발생하는 경우, 임의의 시점에서의 구조물 형상이 기하학적 형상과  
모멘트 최소화 조건을 동시에 고려할 수 있는 복합적인 초기 평형상태 해  
석법을 제안한다. 먼저 콘크리트 충전 강관 거더를 채용한 사장교의 장기  
거동 해석을 위해 일반적인 콘크리트 구조물의 크리프, 건조수축, 그리고  
재령 효과를 고려한 강성도 방정식을 유도하였다. 민감도 해석을 위하여  
강성도 방정식에서 콘크리트의 시간의존성 거동 이력을 부재 내력에 대하  
여 나타내었고, 케이블은 탄성 현수선 요소를 사용하였으며 시간 의존적  
거동이 발생하는 콘크리트와 외부의 원형 강관 사이의 상호 작용을 고려한  
CFT 거더 요소를 모델링하였다. 최적화 기법을 이용하여 목표시점에서 목  
표 형상 및 모멘트 최소화 조건을 동시에 만족할 수 있는 초기형상 결정법

을 제안하고, 이 때 필요한 무응력 길이에 대한 변위 민감도 및 부재 내력 민감도를 케이블 지지 구조물의 평형 방정식을 케이블 무응력 길이로 직접 미분하여 구한다[3].

콘크리트 부재의 시간 의존적 거동은 콘크리트의 타설 시기와 양생 이후 경험하는 응력 및 주변 환경에 영향을 받는다. 그러므로 일괄적으로 시공이 어려운 콘크리트 구조물의 특성상, 시공 단계에 따른 효과를 고려해 주어야 한다. 콘크리트의 타설 시점이나 양생 기간, 그리고 케이블의 장력 도입 시점에 따라 달라지는 콘크리트의 시간 의존적 거동을 고려하는 장기 거동 해석법을 제안하고 이를 바탕으로 시공 단계에 따른 초기형상 결정법을 제시한다.

균형 캔틸레버 공법으로 시공되는 총연장 464m, 케이블 개수 52 개의 팬타입 콘크리트 사장교 모델을 통해 검증하였다. 콘크리트 주탑을 사용하였고 보강형은 CFT 거더 요소를 적용하여 CFT 거더를 적용한 신형식 교량의 타당성을 확인하였다. 장기 거동 해석을 통해 콘크리트의 시간 의존적 거동이 CFT 거더 교량에 미치는 영향을 확인하였으며, 주어진 목표시점에서의 목표형상 해석 및 모멘트 최소화 해석, 그리고 복합적인 초기 평형상태 해석을 적용하여 제안된 방법의 적용성과 타당성을 확인하였다.

## 2. 콘크리트의 시간의존적 거동

이 장에서는 크리프 및 건조수축, 재령효과로 인해 발생하는 콘크리트의 시간의존적 거동을 고려하기 위한 해석법을 제시한다. 우선 크리프의 정의와 특징을 통해 크리프 변형도를 수치해석법으로 구하는 방법을 유도한다. 또한 건조수축의 정의와 특징을 통해 건조수축 변형도를 구하는 방법을 유도하고, 재령이 경과함에 따라 강성이 변하는 콘크리트 재령효과를 고려하기 위한 방법을 제시한다.

### 2.1 시간의존적 거동

콘크리트는 구조물의 거동은 탄성 변형인 역학적 변형도(mechanical strain)과 함께 비역학적 변형도(non-mechanical strain)인 크리프, 건조수축 등의 현상이 재령 효과와 함께 발생하면서 장시간에 걸쳐 진행된다. 이를 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\varepsilon^t &= \varepsilon_m^t + \varepsilon_{nm}^t \\ &= \varepsilon_m^t + (\varepsilon_c^t + \varepsilon_{sh}^t + \varepsilon_a^t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

여기서  $\varepsilon^t$ ,  $\varepsilon_m^t$ ,  $\varepsilon_{nm}^t$ ,  $\varepsilon_c^t$ ,  $\varepsilon_{sh}^t$ ,  $\varepsilon_a^t$ 는 각각 시간  $t$ 에서의 콘크리트 전체 변형도, 역학적 변형도, 비역학적 변형도, 크리프 변형도, 건조수축 변형도, 재령 효과로 인한 변형도를 나타낸다. 그러나 콘크리트의 재료 성질이나

양생 조건에 따라 발생하는 비역학적 변형도 중 크리프 변형도는 과거에 작용한 응력 이력에 따라 발생하는 정도가 달라진다. 그러므로 그림 2.1 과 같이 콘크리트에 발생하는 변형은 크게 응력에 따른 변형과 응력과 무관하게 발생하는 변형으로 다시 나눌 수 있다. 탄성 변형과 크리프 변형은 응력에 영향을 받는다. 반면 내부 수분의 증발에 의해 발생하는 건조수축이나 재령에 따라 콘크리트의 탄성 계수가 증가하는 재령 효과로 인한 변형은 응력과 무관하게 발생하는 변형이다.

이 같은 변형들이 시간에 따라 콘크리트의 전체 변형도에 미치는 영향은 그림 2.2 와 같다. 탄성 변형을 제외한 크리프, 건조수축, 재령 효과와 같은 시간의존적 변형은 하중이 재하된 시점에서부터 시간이 지남에 따라 변형이 점차 작아진다. 이에 따라 콘크리트의 전체 변형도는 시간이 지나면서

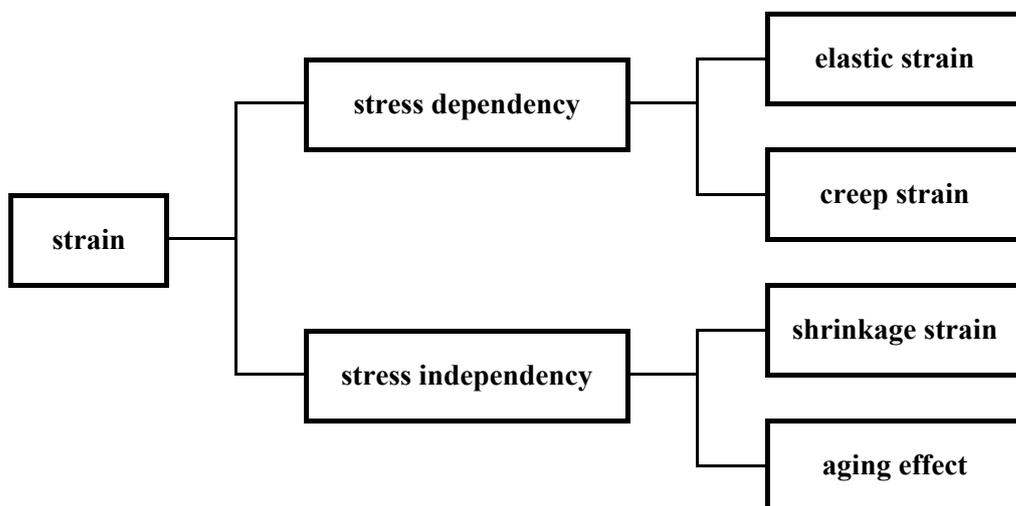


그림 2.1 콘크리트의 변형도

점차 안정화된다.

## 2.2 크리프 변형도

구조물에 외력이 작용하면 변형이 발생하면서 평형 상태를 유지한다. 구조물에 발생한 응력이 항복 강도보다 작을 경우, 외력이 제거되면 구조물은 원래의 상태로 돌아온다. 이러한 변형을 탄성 변형이라 한다. 그러나 콘크리트와 같은 재료는 외력이 작용하면, 시간이 지남에 따라 탄성 변형 외의 추가의 변형이 발생한다. 이처럼 작용하는 외력의 크기와 작용하는 시간에 따라 지속적으로 변형이 발생하는 현상을 크리프라 하며, 이러한 변형을 크리프 변형이라 한다. 또한 외력이 제거되면 감소된 하중으로 인한 탄성 변형이 즉시 발생하여 변형이 줄어든다. 이와 함께 감소한 하중에

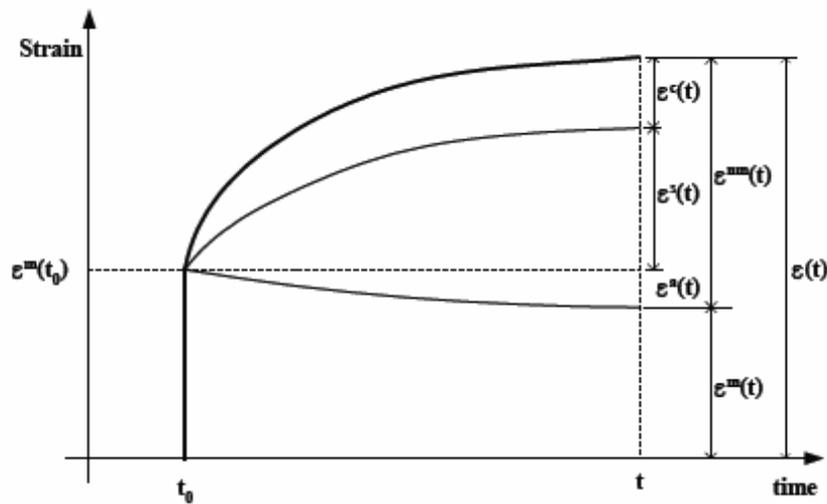


그림 2.2 시간에 따른 콘크리트 변형도

의해 시간이 경과함에 따라 변형이 추가로 줄어들는데 이를 크리프 회복이라 한다.

콘크리트의 크리프 현상은 재하 응력, 물-시멘트 비, 양생 조건, 온도, 수분, 시멘트 종류, 혼화제, 골재 등의 인자에 영향을 받는다. 이와 같은 인자들을 고려하여 시간 경과에 따른 크리프 변형을 정확하게 계산하기는 어렵고 복잡하다. 그러므로 각종 설계기준에서는 크리프와 같은 콘크리트의

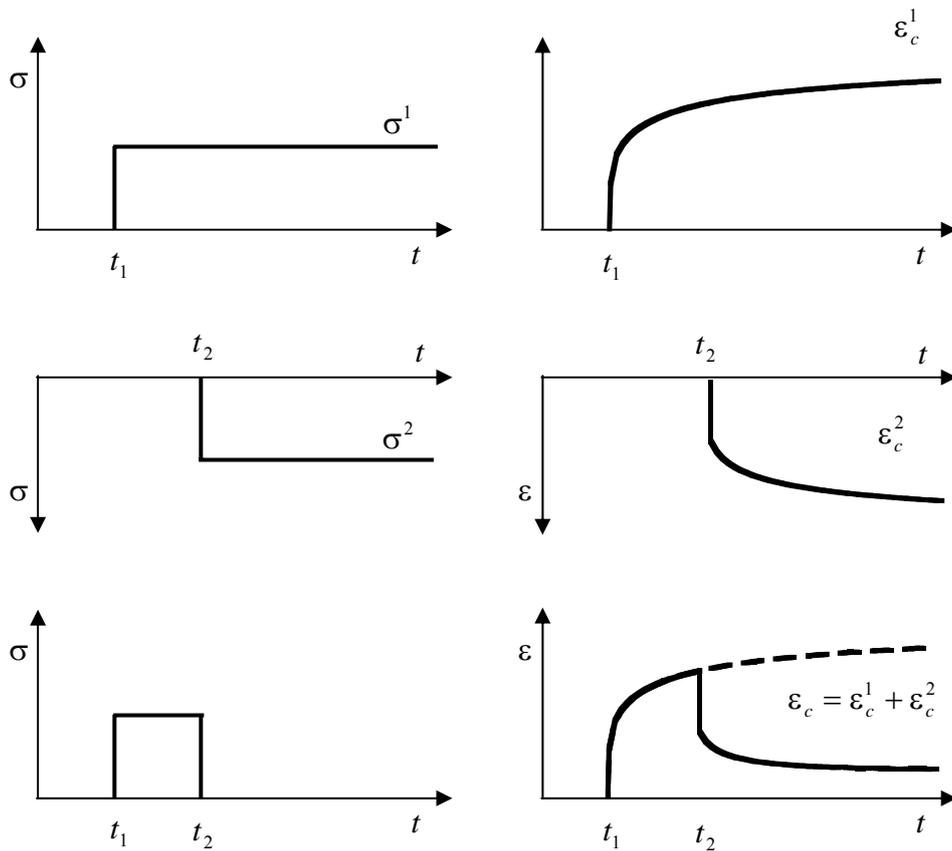


그림 2.3 크리프의 중첩 법칙

시간의존적 변형을 예측할 수 있도록 모델을 제안하고 있다. 대표적인 모델로는 ACI-209(ACI Committee 209, 1992), CEB-FIP MC 78(CEB-FIP Model Code, 1978), CEB-FIP MC 90(CEB-FIP Model Code, 1990) 등이 있다. 국내의 콘크리트 구조설계기준(2000)과 도로교설계기준(2003)은 CEB-FIP MC 90 을 사용하여, 미국의 AASHTO LRFD(2004)는 ACI-209 를 채용하였다. CEB-FIP MC 90 와 ACI-209 에서 제시하는 크리프 예측 모델은 부록 A 에 수록하였다.

McHenry 는 크리프를 지연된 탄성 현상으로 파악하여 특정 시점  $t'$ 에 발생한 응력 증분에 의해 시간  $t$ 에 발생하는 콘크리트의 크리프 변형도는  $t'$ 에서 발생한 응력 증분 이외의 다른 응력 증분의 영향은 받지 않는다는 크리프의 중첩 법칙을 제안하였다[4]. 그러므로 그림 2.3 과 같이 시간  $t_1$ 과 시간  $t_2$  사이에 발생한 응력으로 발생한 크리프 변형도는 양의 응력  $\sigma^1$  과 음의 응력  $\sigma^2$  으로 발생한 크리프 변형도  $\epsilon_c^1$  와  $\epsilon_c^2$  의 합으로 표현된다. 다음은 크리프의 중첩 법칙에 기반하는 중첩 적분식(convolution integral)으로 연속적으로 변화하는 하중 이력을 고려해 줄 수 있는 일반식이다.

$$\epsilon_c^t = \int_0^t C(t, \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2.2)$$

여기서  $\tau$  는 하중 재하 시점이다. 식 (2.2) 에서  $C(t, \tau)$  는 비크리프 계수(specific creep coefficient)로서 단위 응력에 대한 크리프 변형도로 정의되

며, 크리프 계수  $\phi(t, \tau)$  를 하중 재하시의 탄성 계수로 나눈 값과 같다.

$$C(t, \tau) = \frac{\phi(t, \tau)}{E(\tau)} \quad (2.3)$$

CEB-FIP MC 90 과 ACI-209 에서 제시하는 크리프 계수는 부록의 식 (A.7)과 식 (B.2)에 나타내었다. 크리프 변형도를 수치 해석법으로 구하는 과정에서 비크리프 계수를 다음과 같이 Dirichlet 급수 형태로 근사한다[5].

$$C(t, \tau) = \sum_{i=1}^m a_i(\tau)[1 - e^{-\lambda_i(t-\tau)}] \quad (2.4)$$

여기서  $m$ ,  $\lambda_i$ 는 기존의 연구들을 통해 알려진 값을 사용한다.  $a_i(\tau)$ 는 실제 크리프 실험 데이터를 토대로 구하는 것이 가장 정확한 방법이다. 하지만 실험 데이터를 취득하기 어려운 경우는 ACI-209 와 CEB-FIP MC 90 에서 제시하는 비크리프 계수식으로부터 나온 데이터를 토대로 결정한다. 만일 비크리프 계수의 데이터 개수가  $m$ 보다 많을 경우, 최소자승법을 이용하여 최적의  $a_i(\tau)$ 를 구해야 한다. 이에 대한 자세한 내용은 부록 C 에 수록하였다.

식 (2.2)를 이용한 크리프 변형도 계산을 수치해석에 적용하기 위해서는 이산화 과정이 필요하다. 황재웅은 일반화된 중앙값 정리(generalized midpoint rule)을 적용하여 크리프 변형도 증분을 계산하였고[1] 이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_c^{n+1} &= \Delta\varepsilon_c^{t+\Delta t} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) \Delta\sigma^{i+1} + C_{n+\alpha}^{n+1} \Delta\sigma^{n+1}\end{aligned}\quad (2.5)$$

여기서  $t = t^n$  이고  $t + \Delta t = t^{n+1}$  이다. 또한  $\alpha$  는 0 에서 1 사이의 값을 갖는 변수로서,  $i+1$  번째 구간의 시작 시점  $t^i$  와 끝 시점  $t^{i+1}$  사이의 중앙값을 구하는 시점  $t^{i+\alpha}$  는 다음과 같이 정의된다.

$$t^{i+\alpha} = t^i + \alpha\Delta t^{i+1} \quad (2.6)$$

각 구간의 시간 간격과 응력의 증가량을 나타내는  $\Delta t^{i+1}$ ,  $\Delta\sigma^{i+1}$  은 다음과 같다.

$$\Delta t^{i+1} = t^{i+1} - t^i \quad (2.7)$$

$$\Delta\sigma^{i+1} = \sigma(t^{i+1}) - \sigma(t^i) \quad (2.8)$$

하중 재하 시점이  $t^{i+\alpha}$  인 콘크리트의 시점  $t^n$  에서의 비크리프 계수는 다음과 같이 간략화하여 표기한다.

$$C(t^n, t^{i+\alpha}) = C_{i+\alpha}^n \quad (2.9)$$

위와 같은 방법으로 콘크리트에 하중이 재하된 이후 첫번째 구간에서 발생한 크리프 변형도는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\varepsilon_c^1 = \int_0^{\Delta t} C(\Delta t, \tau) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau = C_\alpha^1 (\sigma^1 - \sigma^0) \quad (2.10)$$

### 2.3 건조수축 변형도

콘크리트는 공기 중에서는 수축하고, 수중에서는 팽창(swelling)하는데, 전자를 건조수축(drying shrinkage)이라 한다. 건조수축의 발생 원인은 시멘트 풀이 건조해지면서 유리수가 없어지고, 겔(gel)수가 빠져나가면서 시멘트 겔의 수축에 따른 것으로 알려져 있다. 부피 변화가 구속되는 경우는 건조수축으로 인한 인장 응력이 발생하여 균열을 야기하기도 한다.

콘크리트가 외기중에 노출되었을 때의 재령  $t_s$ 에서부터 시간  $t$ 까지의 콘크리트 건조수축 변형률은 대기의 평균상대 습도, 부재의 크기 등을 고려하여, 국내의 콘크리트 구조설계기준(2000)과 도로교설계기준(2003)은 다음과 같이 제안한다[12],[13].

$$\varepsilon_{sh}^t = \varepsilon_{sho} \beta_s(t - t_s) \quad (2.11)$$

$$\beta_s(t - t_s) = \sqrt{\frac{(t - t_2)}{3.5h^2 + (t - t_s)}}$$

여기서  $\varepsilon_{sho}$  은 건조수축이 발현되는 시점부터 무한대의 시간까지 생기는 개념 건조수축계수이고,  $\beta_s(t - t_s)$  는 시간발현 함수로  $h, t_s$  는 각각 개념 부재치수(cm), 콘크리트가 외기중에 노출되었을 때의 재령(day)을 나타낸다. 이에 대한 자세한 내용은 부록 D에 수록하였다.

$t + \Delta t$  까지의 시간에 대해  $n+1$  등분하면,  $n+1$  번째 구간에서 발생한 건조수축 변형도 증분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\Delta \varepsilon_{sh}^{n+1} &= \varepsilon_{sh}^{t+\Delta t} - \varepsilon_{sh}^t \\ &= \varepsilon_{sho} (\beta_s (t + \Delta t - t_s) - \beta_s (t - t_s)) \\ &= \varepsilon_{sho} \Delta \beta_s^{n+1}\end{aligned}\quad (2.12)$$

또한 건조 시작일로부터  $\Delta t$  만큼 지난 첫번째 시간 구간에서 발생한 건조수축 변형도는 다음과 같이 정의된다.

$$\Delta \varepsilon_{sh}^1 = \varepsilon_{sh}^1 - \varepsilon_{sh}^0 = \varepsilon_{sho} \beta_s (\Delta t) = \varepsilon_{sho} \beta_s^1 \quad (2.13)$$

## 2.4 재령 효과

콘크리트의 강도는 재령이 경과함에 따라 증가하는 경향을 보인다. 특히 초기 재령에서 크며, 시멘트의 종류 및 양생 조건 등에 따라 달라진다. 국내의 콘크리트 구조설계기준(2000)과 도로교설계기준(2003)은 재령에 따른 콘크리트의 탄성 계수를 다음과 같이 제안하고 있다[12],[13].

$$E_{ci} = 2.15 \times 10^5 \sqrt[3]{\frac{f_{cu}}{100}} \quad (2.14)$$

여기서  $E_{ci}$ ,  $f_{cu}$  는 재령 28 일에서 콘크리트의 초기 접선 탄성 계수와 압축 강도이다. 초기 접선 탄성 계수를 이용하여 재령이  $t + \Delta t$  인  $n+1$  번째 구간에서의 초기 접선 탄성 계수  $E^{n+1}$  은 다음의 식으로 구한다.

$$E^{n+1} = \sqrt{\beta_{cc}(t + \Delta t)} E_{ci} = \sqrt{\beta_{cc}^{n+1}} E_{ci} \quad (2.15)$$

여기서  $\beta_{cc}(t + \Delta t)$  는 콘크리트 강도 발현에 대한 재령에 따른 보정계수로  
서 다음과 같다.

$$\beta_{cc}(t) = \exp[\beta_{sc}(1 - \sqrt{\frac{28}{t}})] \quad (2.16)$$

$\beta_{sc}$  는 시멘트 종류에 따라 결정되는 상수이고 이에 대한 자세한 내용은  
부록 A 에 수록하였다.

### 3. CFT 거더를 이용한 사장교의 해석

사장교는 사장 케이블의 장력으로 보강형에 발생하는 휨 모멘트를 효과적으로 제어하며 보강형을 지지하는 교량 형식이다. 그러나 케이블에 의한 보강형의 휨 모멘트 부담량이 증가하면, 이에 비례하여 보강형에 발생하는 압축력도 증가한다. 특히 주탑 부근의 보강형은 전면 사장재( fore cable)와 배면 사장재( back cable)의 장력으로 발생한 압축력이 누적되므로 주의해야 한다. 강재에 비해 압축 저항이 탁월한 CFT 거더를 사장교의 보강형으로 채용하면, 과도한 압축력으로 인한 문제를 해결할 수 있다. 또한 케이블로 인해 보강형에 재하되는 압축력은 강관에 충전된 콘크리트에 프리스트레스를 도입하는 효과도 얻을 수 있다.

그러나 콘크리트 부재는 크리프 및 건조수축과 같은 비역학적 변형에 의해 구조물에 부정적인 영향을 끼칠 수 있다. 특히 크리프 현상은 재료 특성 및 시간과 함께 응력에 영향을 받으므로, 해석이 복잡하고 어렵다. 완공 후 평형을 이루고 있는 케이블 지지 구조물이라도 콘크리트 부재에서 발생하는 크리프 및 건조수축 변형은 케이블의 장력을 변화시킨다. 케이블의 장력이 변화하면 전체 구조물의 응력이 바뀌므로 응력에 영향을 받는 크리프 변형의 양상이 달라지게 된다. 또한 케이블 구조물의 보강형으로 CFT 거더를 사용한다면 강관과 내부 속채움 콘크리트 사이의 상호 작용도 고려해주어야 한다. 그러므로 케이블의 장력과 외부 강관의 콘크리트 구속

효과, 그리고 크리프 변형의 상호 작용을 고려하여 크리프 해석을 수행하여야 한다.

이 장에서는 콘크리트 주탑 및 콘크리트 충전 강관 거더를 보강형으로 채용한 신형식 교량의 시간 의존적 거동 해석을 위한 강성도 방정식을 유도한다. 우선 콘크리트 뼈대 구조물의 시간의존적 거동을 고려하기 위해 시간에 대한 평형 방정식을 유도한다. 또한 케이블 지지 구조물 해석을 위해 탄성 현수선 요소를 이용한 강성도 방정식을 유도한다. 이와 함께 콘크리트 충전 강관 거더의 특징을 이용한 CFT 거더 요소의 모델링 기법을 제안하고 시간 의존적 거동을 고려한 CFT 거더 교량의 강성도 방정식을 유도한다.

### 3.1 콘크리트 뼈대 구조물의 강성 행렬

콘크리트의 크리프 현상과 건조수축은 시간이 지남에 따라 발생하는 시간의존적 변형이다. 그러므로 콘크리트 뼈대 구조물의 시간의존적 거동을 고려하려면 시간에 대한 평형 방정식이 필요하다. 콘크리트 뼈대 구조물 해석은 베르누이(Bernoulli) 들보 가정을 이용하도록 한다.

#### 3.1.1 변형도-변위 관계식

베르누이 들보 가정에 의해 콘크리트 뼈대 구조물의 전체 변형도와 변위 관계식은 다음과 같이 정의된다.

$$\varepsilon^t = \frac{du^t}{dx} - \frac{d^2w^t}{dx^2} y \quad (3.1)$$

여기서  $u^t$  와  $w^t$  은 시간  $t$  에 뼈대 구조물에 발생한 수평변위와 수직 변위이다. 전체 변형도의 증분값을 구하기 위해  $t + \Delta t$  까지의 시간에 대해  $n+1$  등분하면,  $n+1$  번째 구간에서 발생한 변형도 증분은 다음과 같다.

$$\Delta\varepsilon^{n+1} = \frac{d\Delta u^{n+1}}{dx} - \frac{d^2\Delta w^{n+1}}{dx^2} y \quad (3.2)$$

여기서  $\Delta u^{n+1}$  와  $\Delta w^{n+1}$  은  $n+1$  번째 적분 구간의 간격  $\Delta t$  동안 발생한 수평 변위와 수직 변위이다.

### 3.1.2 응력-변형도 관계식

재료의 전체 변형은 외부 하중에 의해 발생하는 탄성 변형과 시간에 따라 발생하는 크리프 변형과 건조수축 변형으로 나뉘므로 구조물에 작용하는 실제 응력은 전체 변형도에서 비역학적 변형도를 제외한 역학적 변형도를 이용하여 구한다. 이를 이용하면 크리프 및 건조수축 변형도, 재령 효과를 고려한  $t + \Delta t$  에서의 응력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma^{t+\Delta t} &= \sigma^t + E^{n+1} \Delta\varepsilon_m^{n+1} \\ &= \sigma^t + E^{n+1} (\Delta\varepsilon^{n+1} - \Delta\varepsilon_{nm}^{n+1}) \\ &= \sigma^t + E^{n+1} (\Delta\varepsilon^{n+1} - \Delta\varepsilon_c^{n+1} - \Delta\varepsilon_{sh}^{n+1}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

여기서  $E^{n+1}$  과  $\Delta\varepsilon^{n+1}$  은 각각  $n+1$  번째 적분 구간까지의 시점  $t+\Delta t$  에서의 콘크리트 탄성 계수와 전체 변형도 증분량이다. 식 (3.3)에서  $t+\Delta t$  까지의 시간에 대해  $n+1$  등분하면 임의의 시점  $t$ 에서부터  $\Delta t$  동안 발생하는 응력 증분량은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\Delta\sigma^{n+1} &= \sigma^{t+\Delta t} - \sigma^t \\ &= E^{n+1}(\Delta\varepsilon^{n+1} - \Delta\varepsilon_c^{n+1} - \Delta\varepsilon_{sh}^{n+1})\end{aligned}\quad (3.4)$$

수식 전개 of 편의를 위해 식 (2.5)에서 구한 시간  $t^{n+1}$ 에서의 크리프 변형도 증분을 간단히 치환하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_c^{n+1} &= \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) \Delta\sigma^{i+1} + C_{n+\alpha}^{n+1} \Delta\sigma^{n+1} \\ &= f_c^{n+1} + C_{n+\alpha}^{n+1} \Delta\sigma^{n+1}\end{aligned}\quad (3.5)$$

여기서  $f_c^{n+1}$  는 하중 재하 시점에서부터 시각  $t$  까지 구해진 각 시간 단계의 응력 증분량에 의해 발생하는 크리프 변형도의 증분값이다.  $f_c^{n+1}$  는  $t+\Delta t$  시점 이전까지의 계산 결과로부터 구할 수 있는 기지수이고,  $\Delta\sigma^{n+1}$  은  $t+\Delta t$  시점에서 구해야 하는 미지수이다. 다만 첫번째 구간에서 발생하는 크리프 증분량  $\Delta\varepsilon_c^1$  은  $f_c^1$  이 정의되지 않으므로  $C_\alpha^1 \Delta\sigma^1$  이 된다.

크리프 변형도의 증분에 관한 식 (3.5), 건조수축 변형도의 증분에 관한 식 (2.12), 탄성 계수에 관한 식 (2.15)를 식 (3.4)에 대입하여 식 (3.6)과 같

이 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma^{n+1} &= E^{n+1}(\Delta\varepsilon^{n+1} - \Delta\varepsilon_c^{n+1} - \Delta\varepsilon_{sh}^{n+1}) \\
&= E^{n+1}(\Delta\varepsilon^{n+1} - \Delta\varepsilon_c^{n+1} - \varepsilon_{sho}\Delta\beta_s^{n+1}) \\
&= E^{n+1}(\Delta\varepsilon^{n+1} - f_c^{n+1} - C_{n+\alpha}^{n+1}\Delta\sigma^{n+1} - \varepsilon_{sho}\Delta\beta_s^{n+1})
\end{aligned} \tag{3.6}$$

위의 식에서 크리프 변형도의 증분에 포함된 응력 증분을 이항시키고 이에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma^{n+1} &= \frac{E^{n+1}}{1 + E^{n+1}C_{n+\alpha}^{n+1}}(\Delta\varepsilon^{n+1} - f_c^{n+1} - \varepsilon_{sho}\Delta\beta_s^{n+1}) \\
&= E_e^{n+1}(\Delta\varepsilon^{n+1} - f_c^{n+1} - \varepsilon_{sho}\Delta\beta_s^{n+1})
\end{aligned} \tag{3.7}$$

여기서  $E_e^{n+1}$  은 유효탄성계수로서  $n+1$  번째 구간에서의 응력 증분량  $\Delta\sigma^{n+1}$  로 인한 크리프 변형도를 비크리프 계수  $C_{n+\alpha}^{n+1}$  를 이용하여 탄성계수의 감소 형태로 나타내는 변수이다. 위와 같은 방법으로 식 (3.5)을 이용하여 콘크리트에 하중이 재하된 시점  $t^0$  부터  $t^1$  사이의 첫번째 시간 단계에서 발생한 응력의 증분은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta\sigma^1 = E^1(\Delta\varepsilon^1 - \Delta\varepsilon_c^1 - \Delta\varepsilon_{sh}^1) \tag{3.8}$$

첫번째 구간에서는  $f_c^1$  이 정의되지 않기 때문에 응력 증분량을 구하기 위해서는 첫번째 시간 단계에서의 크리프 증분량  $\Delta\varepsilon_c^1$  을 위의 식에 대입하여

다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}\Delta\sigma^1 &= \frac{E^1}{1+E^1C_a^1}(\Delta\varepsilon^1 - \varepsilon_{sho}\beta_s^1) \\ &= E_e^1(\Delta\varepsilon^1 - \varepsilon_{sho}\beta_s^1)\end{aligned}\quad (3.9)$$

베르누이 들보 가정을 이용한 뼈대 구조물의 응력은 단면 도심에서 발생한 변위에 의해 정의되고 가정에 의해 단면에 그 분포가 선형적으로 변화하기 때문에 응력을 단면에 대하여 적분한 부재력을 단면 도심에서 발생한 변위를 이용하여 구할 수 있다.  $t$ 에서의 응력과 식 (3.7)에서 구한  $\Delta t$  동안 발생한 응력 증분량을 이용하여 축력과 모멘트를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}N^{n+1} &= \int_A (\sigma^n + \Delta\sigma^{n+1})dA \\ &= N^n + \int_A E_e^{n+1}(\Delta\varepsilon^{n+1} - f_c^{n+1} - \Delta\varepsilon_{sh}^{n+1})dA \\ &= N^n + \int_A E_e^{n+1}\Delta\varepsilon^{n+1}dA - \int_A E_e^{n+1}f_c^{n+1}dA - \int_A E_e^{n+1}\varepsilon_{sho}\Delta\beta_s^{n+1}dA\end{aligned}\quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}M^{n+1} &= -\int_A (\sigma^n + \Delta\sigma^{n+1})ydA \\ &= M^n - \int_A E_e^{n+1}(\Delta\varepsilon^{n+1} - f_c^{n+1} - \Delta\varepsilon_{sh}^{n+1})ydA \\ &= M^n - \int_A E_e^{n+1}\Delta\varepsilon^{n+1}ydA + \int_A E_e^{n+1}f_c^{n+1}ydA + \int_A E_e^{n+1}\varepsilon_{sho}\Delta\beta_s^{n+1}ydA \\ &= M^n - \int_A E_e^{n+1}\Delta\varepsilon^{n+1}ydA + \int_A E_e^{n+1}f_c^{n+1}ydA\end{aligned}\quad (3.11)$$

식 (2.5)에서 구한 크리프 변형도 증분과 식 (3.2)에서 구한 전체 변형도의

증분을 위의 식 (3.10)와 (3.11)에 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
N^{n+1} &= N^n + \int_A E_e^{n+1} \Delta \varepsilon^{n+1} dA - \int_A E_e^{n+1} f_c^{n+1} dA - \int_A E_e^{n+1} \varepsilon_{sho} \Delta \beta_s^{n+1} dA \\
&= N^n + \int_A E_e^{n+1} \left( \frac{d\Delta u^{n+1}}{dx} - \frac{d^2 \Delta w^{n+1}}{dx^2} y \right) dA \\
&\quad - \int_A E_e^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) (\sigma^{i+1} - \sigma^i) dA - E_e^{n+1} A \varepsilon_{sho} \Delta \beta_s^{n+1} \\
&= N^n + \int_A E_e^{n+1} \frac{d\Delta u^{n+1}}{dx} dA - E_e^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) \int_A (\sigma^{i+1} - \sigma^i) dA \\
&\quad - E_e^{n+1} A \varepsilon_{sho} \Delta \beta_s^{n+1} \\
&= N^n + E_e^{n+1} A \frac{d\Delta u^{n+1}}{dx} - E_e^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) (N^{i+1} - N^i) - E_e^{n+1} A \varepsilon_{sh}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
M^{n+1} &= M^n - \int_A E_e^{n+1} \Delta \varepsilon^{n+1} y dA + \int_A E_e^{n+1} f_c^{n+1} y dA \\
&= M^n - \int_A E_e^{n+1} \left( \frac{d\Delta u^{n+1}}{dx} - \frac{d^2 \Delta w^{n+1}}{dx^2} y \right) y dA \\
&\quad + \int_A E_e^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} (C_{n+1}^{i+\alpha} - C_n^{i+\alpha}) (\sigma^{i+1} - \sigma^i) y dA \\
&= M^n + \int_A E_e^{n+1} \frac{d^2 \Delta w^{n+1}}{dx^2} y^2 dA \\
&\quad + E_e^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} (C_{n+1}^{i+\alpha} - C_n^{i+\alpha}) \int_A (\sigma^{i+1} - \sigma^i) y dA \\
&= M^n + E_e^{n+1} I \frac{d^2 \Delta w^{n+1}}{dx^2} - E_e^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} (C_{n+1}^{i+\alpha} - C_n^{i+\alpha}) (M^{i+1} - M^i)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

참고로 식 (3.12)와 (3.13)을 통해 구한 첫번째 시간 구간의 축력과 모멘트 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
N^1 &= E_e^1 A \frac{d\Delta u^1}{dx} - E_e^1 A \varepsilon_{sho} \Delta \beta_s^1 \\
M^1 &= -E_e^1 I \frac{d^2 \Delta w^1}{dx^2}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

식 (3.14)와 같이 탄성 상태에서의 축력  $N^1$  과 모멘트  $M^1$  은 상호 독립적인 힘이기 때문에 각각을 분리하여 구할 수 있다. 그리고 또한 식 (3.12)와 (3.13)과 같이 시각  $t + \Delta t$  에서의 축력  $N^{n+1}$  과 모멘트  $M^{n+1}$  역시 서로 영향을 주지 않고 상호 독립적인 것은 크리프 변형도가 시간의존적인 특성을 가지지만 응력에 선형적으로 비례하기 때문에 가능하다.

### 3.1.3 평형 방정식

$n+1$  번째 적분 구간까지의 시점  $t^{n+1}$  에서의 콘크리트 뼈대 구조물의 평형 방정식은 가상일의 원리에 의해 식 (3.15)과 같고, 이를 유한요소법에 의해 이산화하면 식 (3.16)과 같다.

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}^{n+1} dV = \int_S \delta \mathbf{U}^T \bar{\mathbf{T}} dS \tag{3.15}$$

$$\sum_e \int_{V^e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}^{n+1} dV = \sum_e \int_{S^e} \delta \mathbf{U}_e^T \bar{\mathbf{T}} dS \tag{3.16}$$

여기서  $\sum_e$  는 유한요소법에서 조합연산자(Assembly Operator)를 나타내며,

$\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\delta \mathbf{U}$ ,  $\bar{\mathbf{T}}$  는 각각 콘크리트 뼈대 부재의 가상 변형도, 가상 변위, 콘크리

트 부재에 작용하는 표면력을 나타낸다. 콘크리트 부재에 발생하는 노드에  
서의 변위 및 부재력 방향은 그림 3.1 과 같고, 변위 벡터는  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \mathbf{w}$ , 부재  
력 벡터는  $\mathbf{f}_a^{n+1}$ ,  $\mathbf{f}_b^{n+1}$ 를 이용하여 나타내며 각각은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{u}^T &= [\delta u^L \quad \delta u^R] \\ \delta \mathbf{w}^T &= [\delta w^L \quad \delta w^R \quad \delta \theta^L \quad \delta \theta^R] \\ \mathbf{f}_a^T &= [f_x^L \quad f_x^R] \\ \mathbf{f}_b^T &= [f_y^L \quad f_y^R \quad M^L \quad M^R]\end{aligned}\quad (3.17)$$

식 (3.16)에서 콘크리트 부재의 내적 가상일  $\delta \Pi_{\text{int}}^e$  는 (3.17)의 변위 및 부  
재력 벡터를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\delta \Pi_{\text{int}}^e &= \int_{V^e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}^{n+1} dV \\ &= \delta \mathbf{u}^T \int_{V^e} \mathbf{B}_a^T \boldsymbol{\sigma}^{n+1} dV - \delta \mathbf{w}^T \int_{V^e} \mathbf{B}_b^T \boldsymbol{\sigma}^{n+1} dV = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_a^{n+1} + \delta \mathbf{w}^T \mathbf{f}_b^{n+1}\end{aligned}\quad (3.18)$$

콘크리트 부재의 형상 함수는 Hermitian Shape Function 을 이용하고, 식

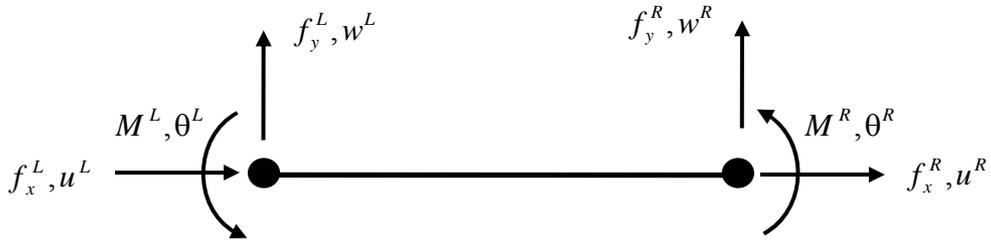


그림 3.1 콘크리트 부재의 노드 변위 및 부재력

(3.18)에서  $\mathbf{B}_a$ ,  $\mathbf{B}_b$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_a^T &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_b^T &= \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3}x - \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3}x + \frac{6}{L^2} & \frac{6}{L^2}x - \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2}x - \frac{2}{L} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.19)$$

식 (3.18)의  $\mathbf{f}_a^{n+1}$ 와  $\mathbf{f}_b^{n+1}$ 를  $t^n$ 과  $t^{n+1}$  사이에 발생한 응력 증분  $\Delta\sigma^{n+1}$ 에 대해 분리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{f}_a^{n+1} = \int_V \mathbf{B}_a^T \sigma^{n+1} dV = \int_V \mathbf{B}_a^T \sigma^n dV + \int_V \mathbf{B}_a^T \Delta\sigma^{n+1} dV \quad (3.20)$$

$$\mathbf{f}_b^{n+1} = -\int_V \mathbf{B}_b^T y \sigma^{n+1} dV = -\int_V \mathbf{B}_b^T y \sigma^n dV - \int_V \mathbf{B}_b^T y \Delta\sigma^{n+1} dV \quad (3.21)$$

응력-변형도 관계식 (3.7)과 변형도-변위 관계식 (3.2)를 식 (3.20)과 식 (3.21)에 대입하면  $\mathbf{f}_a^{n+1}$ 와  $\mathbf{f}_b^{n+1}$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_a^{n+1} &= \int_V \mathbf{B}_a^T \sigma^n dV + \int_V \mathbf{B}_a^T \Delta \sigma^{n+1} dV \\
&= \int_l \mathbf{B}_a^T \int_A \sigma^n dAdx \\
&\quad + \int_V \mathbf{B}_a^T E_e^{n+1} \left( \frac{d\Delta u^{n+1}}{dx} - \frac{d^2 \Delta w^{n+1}}{dx^2} y - f_c^{n+1} - \varepsilon_{sho} \Delta \beta_s^{n+1} \right) dV \\
&= \int_l \mathbf{B}_a^T N^n dx + \int_l \mathbf{B}_a^T E_e^{n+1} A \frac{d\Delta u^{n+1}}{dx} dx - \int_V \mathbf{B}_a^T E_e^{n+1} f_c^{n+1} dV \\
&\quad - \int_V \mathbf{B}_a^T E_e^{n+1} \varepsilon_{sho} \Delta \beta_s^{n+1} dV \\
&= \int_l \mathbf{B}_a^T N^n dx + \int_l \mathbf{B}_a^T E_e^{n+1} \mathbf{A} \mathbf{B}_a^T dx \Delta \mathbf{u}^{n+1} - \int_l \mathbf{B}_a^T \int_A E_e^{n+1} f_c^{n+1} dAdx \\
&\quad - \int_l \mathbf{B}_a^T \int_A E_e^{n+1} \varepsilon_{sho} \Delta \beta_s^{n+1} dAdx
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_b^{n+1} &= - \int_V \mathbf{B}_b^T y \sigma^n dV - \int_V \mathbf{B}_b^T y \Delta \sigma^{n+1} dV \\
&= - \int_l \mathbf{B}_b^T \int_A y \sigma^n dAdx \\
&\quad - \int_V \mathbf{B}_b^T y E_e^{n+1} \left( \frac{d\Delta u^{n+1}}{dx} - \frac{d^2 \Delta w^{n+1}}{dx^2} y - f_c^{n+1} - \varepsilon_{sho} \Delta \beta_s^{n+1} \right) dV \\
&= \int_l \mathbf{B}_b^T M^n dx + \int_l \mathbf{B}_b^T E_e^{n+1} I \frac{d^2 \Delta w^{n+1}}{dx^2} dx + \int_V \mathbf{B}_b^T y E_e^{n+1} f_c^{n+1} dV \\
&\quad + \int_V \mathbf{B}_b^T y E_e^{n+1} \varepsilon_{sho} \Delta \beta_s^{n+1} dV \\
&= \int_l \mathbf{B}_b^T M^n dx + \int_l \mathbf{B}_b^T E_e^{n+1} \mathbf{I} \mathbf{B}_b^T dx \Delta \mathbf{w}^{n+1} + \int_l \mathbf{B}_b^T \int_A y E_e^{n+1} f_c^{n+1} dAdx \\
&\quad + \int_l \mathbf{B}_b^T \int_A y E_e^{n+1} \varepsilon_{sho} \Delta \beta_s^{n+1} dAdx \\
&= \int_l \mathbf{B}_b^T M^n dx + \int_l \mathbf{B}_b^T E_e^{n+1} \mathbf{I} \mathbf{B}_b^T dx \Delta \mathbf{w}^{n+1} + \int_l \mathbf{B}_b^T \int_A y E_e^{n+1} f_c^{n+1} dAdx
\end{aligned} \tag{3.23}$$

여기서  $\Delta \mathbf{u}^{n+1}$  는 절점 수평 변위의 증분값을 나타내는 벡터이며,  $\Delta \mathbf{w}^{n+1}$  는

수직 변위와 회전각의 증분값을 나타내는 벡터이다. 식 (3.5)에서 정의한  $f_c^{n+1}$  를 이용하면 식 (3.24), (3.25)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_a^{n+1} &= \int_l \mathbf{B}_a^T N^n dx + \int_l \mathbf{B}_a^T E_e^{n+1} \mathbf{A} \mathbf{B}_a dx \Delta \mathbf{u}^{n+1} - \int_l \mathbf{B}_a^T \int_A E_e^{n+1} f_c^{n+1} dA dx \\
&\quad - \int_l \mathbf{B}_a^T \int_A E_e^{n+1} \varepsilon_{sho} \Delta \beta_s^{n+1} dA dx \\
&= \int_l \mathbf{B}_a^T N^n dx + \int_l \mathbf{B}_a^T E_e^{n+1} \mathbf{A} \mathbf{B}_a dx \Delta \mathbf{u}^{n+1} \\
&\quad - \int_l \mathbf{B}_a^T \int_A E_e^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) \Delta \sigma^{i+1} dA dx - \int_l \mathbf{B}_a^T \int_A E_e^{n+1} \varepsilon_{sho} \Delta \beta_s^{n+1} dA dx \quad (3.24) \\
&= \int_l \mathbf{B}_a^T N^n dx + \int_l \mathbf{B}_a^T E_e^{n+1} \mathbf{A} \mathbf{B}_a dx \Delta \mathbf{u}^{n+1} \\
&\quad - \int_l \mathbf{B}_a^T E_e^{n+1} A \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) \int_A (\sigma^{i+1} - \sigma^i) dA dx \\
&\quad - \int_l \mathbf{B}_a^T \int_A E_e^{n+1} \varepsilon_{sho} \Delta \beta_s^{n+1} dA dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_b^{n+1} &= \int_l \mathbf{B}_b^T M^n dx + \int_l \mathbf{B}_b^T E_e^{n+1} \mathbf{I} \mathbf{B}_b dx \Delta \mathbf{w}^{n+1} + \int_l \mathbf{B}_b^T \int_A y E_e^{n+1} f_c^{n+1} dA dx \\
&= \int_l \mathbf{B}_b^T M^n dx + \int_l \mathbf{B}_b^T E_e^{n+1} \mathbf{I} \mathbf{B}_b dx \Delta \mathbf{w}^{n+1} \\
&\quad + \int_l \mathbf{B}_b^T \int_A y E_e^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) \Delta \sigma^{i+1} dA dx \quad (3.25) \\
&= \int_l \mathbf{B}_b^T M^n dx + \int_l \mathbf{B}_b^T E_e^{n+1} \mathbf{I} \mathbf{B}_b dx \Delta \mathbf{w}^{n+1} \\
&\quad + \int_l \mathbf{B}_b^T E_e^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) \int_A (\sigma^{i+1} - \sigma^i) y dA dx
\end{aligned}$$

식 (3.24)와 식 (3.25)에서 응력을 식 (3.10)과 (3.11)과 같이 단면 깊이 방향으로 적분하면 크리프 변형도로 인한 내력을 다음과 같이  $t^n$  까지의 부재

축력 및 부재 모멘트의 증분으로 바꾸어 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_a^{n+1} &= \int_l \mathbf{B}_a^T N^n dx + \int_l \mathbf{B}_a^T E_e^{n+1} A \mathbf{B}_a dx \Delta \mathbf{u}^{n+1} \\
&\quad - \int_l \mathbf{B}_a^T E_e^{n+1} A \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) \int_A (\sigma^{i+1} - \sigma^i) dA dx \\
&\quad - \int_l \mathbf{B}_a^T \int_A E_e^{n+1} \varepsilon_{sho} \Delta \beta_s^{n+1} dA dx \\
&= \int_l \mathbf{B}_a^T N^n dx + \int_l \mathbf{B}_a^T E_e^{n+1} A \mathbf{B}_a dx \Delta \mathbf{u}^{n+1} \\
&\quad - \int_l \mathbf{B}_a^T E_e^{n+1} A \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) (N^{i+1} - N^i) dx \\
&\quad - \int_l \mathbf{B}_a^T E_e^{n+1} A \varepsilon_{sho} \Delta \beta_s^{n+1} dx
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_b^{n+1} &= \int_l \mathbf{B}_b^T M^n dx + \int_l \mathbf{B}_b^T E_e^{n+1} I \mathbf{B}_b dx \Delta \mathbf{w}^{n+1} \\
&\quad + \int_l \mathbf{B}_b^T E_e^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) \int_A (\sigma^{i+1} - \sigma^i) y dA dx \\
&= \int_l \mathbf{B}_b^T M^n dx + \int_l \mathbf{B}_b^T E_e^{n+1} I \mathbf{B}_b dx \Delta \mathbf{w}^{n+1} \\
&\quad - \int_l \mathbf{B}_b^T E_e^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) (M^{i+1} - M^i) dx
\end{aligned} \tag{3.27}$$

식 (3.26), (3.27)을 이용하여 내력 벡터  $\mathbf{f}_e^{n+1}$ 를 구성하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_e^{n+1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{f}_a^{n+1} \\ \mathbf{f}_b^{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \int_l \mathbf{B}_a^T E_e^{n+1} A \mathbf{B}_a dx \Delta \mathbf{u}^{n+1} \\ \int_l \mathbf{B}_b^T E_e^{n+1} I \mathbf{B}_b dx \Delta \mathbf{w}^{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_l \mathbf{B}_a^T N^n dx \\ \int_l \mathbf{B}_b^T M^n dx \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \int_l \mathbf{B}_a^T E_e^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) (N^{i+1} - N^i) dx + \int_l \mathbf{B}_a^T E_e^{n+1} \varepsilon_{sho} \Delta \beta_s^{n+1} dx \\ \int_l \mathbf{B}_b^T E_e^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) (M^{i+1} - M^i) dx \end{pmatrix} \quad (3.28) \\
&= \mathbf{k}_e^{n+1} \Delta \mathbf{U}_e^{n+1} + \bar{\mathbf{f}}_e^n
\end{aligned}$$

여기서  $\mathbf{k}_e^{n+1}$  과  $\Delta \mathbf{U}_e^{n+1}$  은 각각 콘크리트 부재의 강성도 행렬,  $n+1$  구간에서 발생한 콘크리트 부재의 변위 증분량 벡터이다. 또한  $\bar{\mathbf{f}}_e^n$  는  $t^{n+1}$  직전 시점인  $t^n$  에서의 재단력과  $\Delta t$  동안 발생한 크리프, 건조수축에 의한 부재 내력 벡터이다. 식 (3.28)에서  $\bar{\mathbf{f}}_e^n$  의 요소 길이 방향 적분은 2 점 가우스 적분법(2 point Gauss quadrature)을 사용한다.

식 (3.28)에서 사용한 콘크리트 부재 변위 벡터는 식 (3.29)과 같고, 식 (3.28)과 (3.29)를 식 (3.18)에 대입하여 구한 콘크리트 부재의 내적 가상일은 다음의 식 (3.30)과 같다.

$$\mathbf{U}_e^{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ \mathbf{w}^{n+1} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

$$\delta \Pi_{\text{int}}^e = \delta \mathbf{U}_e^{n+1} (\mathbf{k}_e^{n+1} \Delta \mathbf{U}_e^{n+1} + \bar{\mathbf{f}}_e^n) \quad (3.30)$$

부재 좌표계와 전체 구조물 좌표계 간의 좌표변환행렬  $\mathbf{R}^e$  을 이용하여 부재 좌표계에 대해 구해진 식 (3.30)의 콘크리트 부재의 내적 가상일을 식 (3.16)에 대입하여 구한 콘크리트 뼈대 구조물의 평형 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sum_e \mathbf{R}^{eT} (\mathbf{k}_e^{n+1} \Delta \mathbf{U}_e^{n+1} + \bar{\mathbf{f}}_e^n) &= \sum_e \int_{S^e} \bar{\mathbf{T}} dS = \mathbf{P}^{n+1} \\ \sum_e \mathbf{R}^{eT} \mathbf{k}_e^{n+1} \mathbf{R}^e \Delta \mathbf{U}^{n+1} + \sum_e \mathbf{R}^{eT} \bar{\mathbf{f}}_e^n &= \mathbf{P}^{n+1} \end{aligned} \quad (3.31)$$

$\mathbf{P}^{n+1}$  와  $\Delta \mathbf{U}^{n+1}$  는 구조물 전체 좌표계에 대한  $t + \Delta t$  시점에 작용하는 외부 하중과  $t$  부터  $t + \Delta t$  까지의 구간에서 발생한 변위의 증분량이다. 식 (3.31) 을 뼈대 구조물의 강성도 행렬  $\mathbf{K}_F^{n+1}$  을 이용하여 다시 쓰면 다음과 같은 시간에 따른 콘크리트 구조물의 강성도 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_F^{n+1} \Delta \mathbf{U}^{n+1} &= \mathbf{P}^{n+1} - \sum_e \mathbf{R}^{eT} \bar{\mathbf{f}}_e^n = \mathbf{P}^{n+1} - \bar{\mathbf{P}}^{n+1} \\ \mathbf{K}_F^{n+1} &= \sum_e \mathbf{R}^{eT} \mathbf{k}_e^{n+1} \mathbf{R}^e \end{aligned} \quad (3.32)$$

여기서  $\bar{\mathbf{P}}^{n+1}$  은 콘크리트 부재에서  $t$  까지의 내력과  $\Delta t$  동안 발생한 시간 의존적 거동에 대한 부재 좌표계의 내력  $\bar{\mathbf{f}}_e^n$  을 적합조건에 따라 전체 좌표계를 기준으로 조합한 행렬이다. 임의의 시간  $t + \Delta t$  에서의 구조물 변위는 직전 구간까지 구해진 변위  $\mathbf{U}^t$  에 식 (3.32)에서 구한  $\Delta \mathbf{U}^{n+1}$  를 더하여 얻

을 수 있다.

### 3.2 케이블의 강성 행렬

그림 3.2 는 무응력 길이가  $L_0$  인 케이블 요소  $e$  의 좌표계를 보이고 있다. 무응력 상태에서의 라그랑지 좌표  $s$  에 의하여 표시된 케이블의 한 질 점은 케이블이 변형한 후에는 카테시안 좌표계에서  $\mathbf{x}^e$  에 위치하게 된다.  $p(s)$  는 원점으로부터 라그랑지 좌표  $s$  까지의 변형 후 케이블의 길이를 의미하며 다음과 같이 정의된다.

$$p(s) = \int_0^s (x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t))^{0.5} dt \quad (3.33)$$

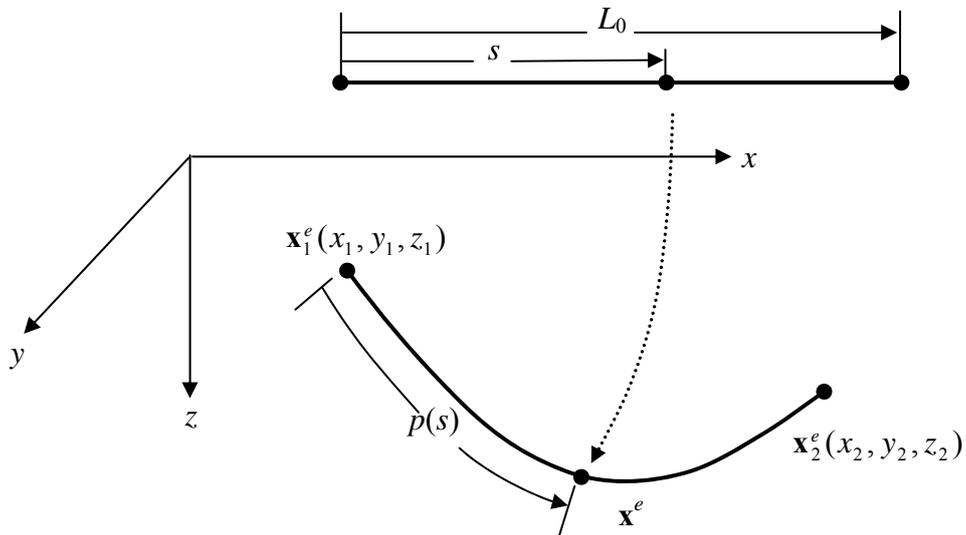


그림 3.2 탄성현수선 케이블에 대한 좌표계

식 (3.33)을  $s$ 에 대하여 미분하여 정리하면 다음과 같다.

$$1 = \left( \left( \frac{dx}{dp} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dp} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dp} \right)^2 \right)^{0.5} \quad (3.34)$$

그림 3.3 은 케이블의 자중만 작용하고 있을 경우 케이블의 1 번 절점에서 임의의 점  $\mathbf{x}^e$  까지의 자유 물체도를 보이고 있다. 케이블에는 인장력만 작용하게 되므로 평형방정식은 케이블의 인장력에 대하여 다음과 같이 표시된다.

$$T \frac{dx}{dp} + F_x^1 = 0, \quad T \frac{dy}{dp} + F_y^1 = 0, \quad T \frac{dz}{dp} + F_z^1 + ws = 0 \quad (3.35)$$

여기서  $T$  는 점  $p(s)$ 에서의 장력이고  $F_x^1, F_y^1, F_z^1$  는 각각 1 번 절점에서 각 좌표 방향으로 작용하는 제단력이며  $w$  는 변형전 케이블의 단위길이

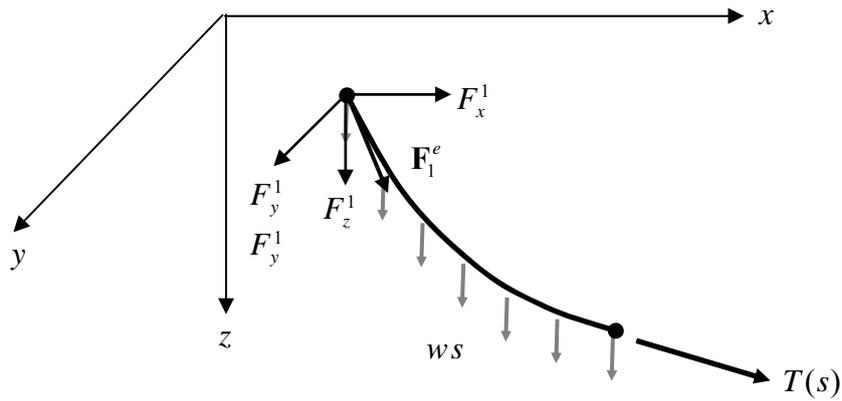


그림 3.3 케이블 세그먼트의 자유 물체도

당 중량이다. 식 (3.35)의 케이블 평형방정식은 라그랑지 좌표  $s$  에 대하여 chain rule 을 적용하면 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$T \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dp} + F_x^1 = 0, \quad T \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dp} + F_y^1 = 0, \quad T \frac{dz}{ds} \frac{ds}{dp} + F_z^1 + ws = 0 \quad (3.36)$$

케이블이 소변형 거동을 할 경우 케이블의 변형도는 다음과 같이 정의된다.

$$\varepsilon = \frac{dp^2 - ds^2}{2ds^2} \cong \frac{dp - ds}{ds} = \frac{dp}{ds} - 1 \quad (3.37)$$

Hooke 의 법칙으로부터 케이블의 인장력을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$T = EA\varepsilon \quad (3.38)$$

여기서  $E$  는 영계수 (Young's Modulus) 이고  $A$  는 변형 전의 케이블 단면적이다. 식 (3.37)를 식 (3.38)에 대입하여  $p$  와  $s$  의 관계를 구할 수 있다.

$$\frac{dp}{ds} = \frac{T}{EA} + 1 \quad (3.39)$$

자중만을 받는 케이블의 거동은 식 (3.34), 식 (3.36) 및 식 (3.39)의 5 개의 지배방정식으로 정의되며 미지수는  $x, y, z, p, T$  이다. 케이블의 지배방정식을 적분하여  $p, T$  를 소거하고  $x, y, z$  를 독립변수  $s$  로 표현하면 케이블의 형상을 구할 수 있다. 케이블의 지배방정식으로부터 직각 좌표계  $x, y, z$

와 변형 전의 라그랑지 좌표  $s$ 의 대응관계를 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= -F_x^1 \left( \frac{1}{EA} + \frac{1}{T} \right) \\ \frac{dy}{ds} &= -F_y^1 \left( \frac{1}{EA} + \frac{1}{T} \right) \\ \frac{dz}{ds} &= -(F_z^1 + ws) \left( \frac{1}{EA} + \frac{1}{T} \right)\end{aligned}\tag{3.40}$$

식(3.40)에서 케이블 양단의 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}x &= x_1, y = y_1, z = z_1 \quad \text{at } s = 0 \\ x &= x_2, y = y_2, z = z_2 \quad \text{at } s = L_0^e\end{aligned}\tag{3.41}$$

식 (3.34)와 식 (3.35)로부터 케이블의 장력을 1 번 절점의 재단력과 케이블의 자중에 대하여 표시할 수 있다.

$$T = ((F_x^1)^2 + (F_y^1)^2 + (F_z^1 + ws)^2)^{0.5}\tag{3.42}$$

식(3.42)를 식(3.40)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 관계식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= -F_x^1 \left( \frac{1}{EA} + \frac{1}{((F_x^1)^2 + (F_y^1)^2 + (F_z^1 + ws)^2)^{0.5}} \right) \\ \frac{dy}{ds} &= -F_y^1 \left( \frac{1}{EA} + \frac{1}{((F_x^1)^2 + (F_y^1)^2 + (F_z^1 + ws)^2)^{0.5}} \right) \\ \frac{dz}{ds} &= -(F_z^1 + ws) \left( \frac{1}{EA} + \frac{1}{((F_x^1)^2 + (F_y^1)^2 + (F_z^1 + ws)^2)^{0.5}} \right)\end{aligned}\tag{3.43}$$

식 (3.43)을  $s$  에 대하여 적분하고,  $s = 0$  에서의 경계 조건을 이용하면 자중 이 재하된 케이블의 처짐 곡선을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 x(s) &= x_1 - F_x^1 \frac{s}{EA} - \frac{F_x^1}{w} \left( \sinh^{-1} \frac{F_z^1 + ws}{H} - \sinh^{-1} \frac{F_z^1}{H} \right) \\
 y(s) &= y_1 - F_y^1 \frac{s}{EA} - \frac{F_y^1}{w} \left( \sinh^{-1} \frac{F_z^1 + ws}{H} - \sinh^{-1} \frac{F_z^1}{H} \right) \\
 z(s) &= z_1 - \frac{w}{2EA} s^2 - F_z^1 \frac{1}{EA} s - \frac{1}{w} \left( \sqrt{H^2 + (F_z^1 + ws)^2} - \sqrt{H^2 + (F_z^1)^2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

여기서  $H = \sqrt{(F_x^1)^2 + (F_y^1)^2}$  이다. 식(3.41)에  $s = L_0^e$  에서 경계조건을 적용 하면 다음과 같은 탄성현수선 케이블의 적합 조건식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 x_2 - x_1 = \phi_x &= -\frac{F_x^1}{EA} L_0^e - \frac{F_x^1}{w} \left\{ \sinh^{-1} \left( \frac{F_z^1 + wL_0^e}{H} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{F_z^1}{H} \right) \right\} \\
 y_2 - y_1 = \phi_y &= -\frac{F_y^1}{EA} L_0^e - \frac{F_y^1}{w} \left\{ \sinh^{-1} \left( \frac{F_z^1 + wL_0^e}{H} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{F_z^1}{H} \right) \right\} \\
 z_2 - z_1 = \phi_z &= -\frac{F_z^1}{EA} L_0^e - \frac{w(L_0^e)^2}{2EA} - \frac{1}{w} \left\{ \sqrt{H^2 + (F_z^1 + wL_0^e)^2} - \sqrt{H^2 + (F_z^1)^2} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

식 (3.45)의 케이블의 적합조건식은 다음과 같이 매트릭스 형태로 표시할 수 있다.

$$\mathbf{B} \mathbf{x}^e = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{F}_1^e, L_0^e) \tag{3.46}$$

여기서  $\mathbf{x}^e = (\mathbf{x}_1^e, \mathbf{x}_2^e)^T = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)^T$  이며  $\mathbf{B}$  는 다음과 같이 정의된

다.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

그림 3.4 에 보인 어떤 케이블 요소  $e$  의 평형상태에서의 양단 절점 위치가 기지의 기준 위치  $\mathbf{x}_0^e$  에서 절점 1 과 절점 2 에서 발생한 변위  $\mathbf{u}_1^e$ ,  $\mathbf{u}_2^e$  에 의하여 결정되었다면 식 (3.46)은 다음과 같이 표시된다.

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}_0^e + \mathbf{u}^e) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{F}_1^e, L_0^e) \quad (3.48)$$

케이블 요소  $e$  의 외적 평형 조건은 다음과 같다.

$$\mathbf{F}_2^e = -\mathbf{F}_1^e - \mathbf{w}L_0^e \quad (3.49)$$

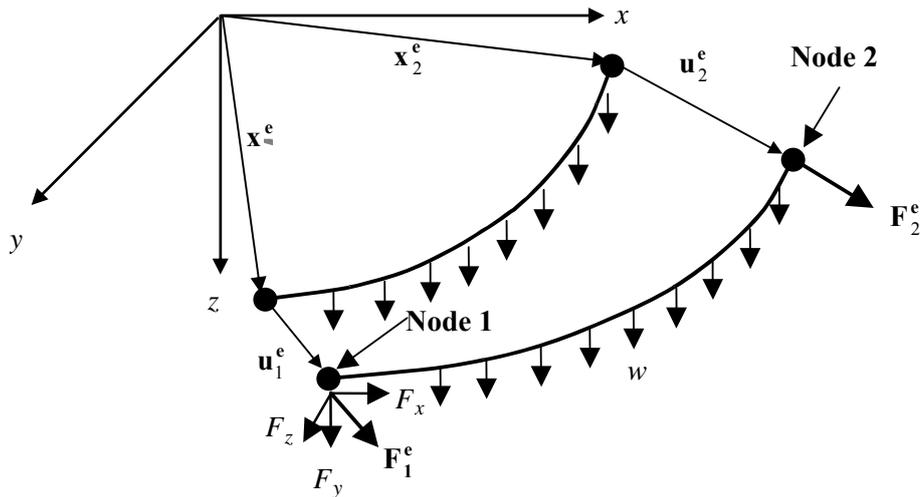


그림 3.4 변위가 발생한 탄성 현수선의 두 절점의 상대적 위치

여기서  $\mathbf{w} = (0, 0, w)^T$  이다. 변위법에 기초한 일반적인 유한요소해석법을 적용하기 위하여 케이블 요소 양단의 절점력을 절점 변위에 대하여 표시하여야 한다. 그러나 식 (3.48)은 비선형 방정식이므로 증분형 관계식을 사용하여야 한다. 식 (3.48)과 식 (3.49)의 증분식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}^e &= \Delta\boldsymbol{\phi}(\mathbf{F}_1^e, L_0^e) \\ \Delta\mathbf{F}_2^e &= -\Delta\mathbf{F}_1^e \end{aligned} \quad (3.50)$$

식 (3.45)를 Taylor 전개하여 1 차 항까지 만 포함시키면 다음과 같다.

$$\Delta\boldsymbol{\phi}(\mathbf{F}_1^e, L_0^e) = \begin{pmatrix} \Delta\phi_x^e \\ \Delta\phi_y^e \\ \Delta\phi_z^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_x^e}{\partial F_x} \Delta F_x + \frac{\partial\phi_x^e}{\partial F_y} \Delta F_y + \frac{\partial\phi_x^e}{\partial F_z} \Delta F_z \\ \frac{\partial\phi_y^e}{\partial F_x} \Delta F_x + \frac{\partial\phi_y^e}{\partial F_y} \Delta F_y + \frac{\partial\phi_y^e}{\partial F_z} \Delta F_z \\ \frac{\partial\phi_z^e}{\partial F_x} \Delta F_x + \frac{\partial\phi_z^e}{\partial F_y} \Delta F_y + \frac{\partial\phi_z^e}{\partial F_z} \Delta F_z \end{pmatrix} = \frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial \mathbf{F}_1^e} \Delta\mathbf{F}_1^e \quad (3.51)$$

식 (3.51)에 대한 자세한 표현식은 부록 E 에 기술되어 있다. 식 (3.51)을 식 (3.50)에 대입하여 절점력의 증분에 대하여 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{F}_1^e &= \left(\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial \mathbf{F}_1^e}\right)^{-1} \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}^e = \left(\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial \mathbf{F}_1^e}\right)^{-1} (-\Delta\mathbf{u}_1^e + \Delta\mathbf{u}_2^e) = \mathbf{k}_c (-\Delta\mathbf{u}_1^e + \Delta\mathbf{u}_2^e) \\ \Delta\mathbf{F}_2^e &= -\Delta\mathbf{F}_1^e = \mathbf{k}_c (\Delta\mathbf{u}_1^e - \Delta\mathbf{u}_2^e) \end{aligned} \quad (3.52)$$

식 (3.52)를 한 개의 행렬식으로 표시하면 최종적인 증분형 케이블 요소 강성도 행렬식을 할 수 있다.

$$\Delta \mathbf{F}_c^e = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{F}_1^e \\ \Delta \mathbf{F}_2^e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_c & \mathbf{k}_c \\ \mathbf{k}_c & -\mathbf{k}_c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_1^e \\ \Delta \mathbf{u}_2^e \end{pmatrix} = \mathbf{K}_c^e \Delta \mathbf{u}^e \quad (3.53)$$

### 3.3 CFT 거더 요소 모델링

콘크리트 충전 강관 구조는 강관과 콘크리트의 단점을 상호 보완하는 합성 효과로 인해 이중 재료의 산술적인 강도의 합보다 큰 내구성을 갖는다. 특히 강관 내의 콘크리트는 강관의 국부 좌굴을 억제하는 효과를 일으키며, 콘크리트는 강관에 의해 3 축 응력 상태에 있게 되므로 압축내력이 상승한다는 사실이 기존의 연구를 통해 알려져 있다. 그러나 이러한 연구는 콘크리트 충전 강관이 활발히 사용된 기둥 부재에 관해 이루어졌기 때문에 축방향 압축력에 대한 거동 특성이라 할 수 있다. 콘크리트 충전 강관을 교량의 거더에 적용한 경우의 거동 특성에 대해서는 최근에 와서야 연구가 진행되었기 때문에 해석 모델이 명확하게 정립되어 있지 않은 실정이다. 그러므로 몇 가지 가정을 통해 간단하면서도 안전측에 가까운 형태로 CFT 거더 요소를 모델링하고자 한다.

CFT 거더는 원형 강관에 콘크리트를 채워 양생시킨 합성 구조의 한 가지 형태이다. 그러므로 강재와 콘크리트의 부착이 부재의 성능에 큰 영향을 끼친다. 서로 다른 재료가 단일 재료로 구성된 것과 같이 일체 거동을 하는 경우를 부착이 완벽하게 이루어졌다고 하여 완전 합성이라 한다. 완전 합성의 경우, 강재와 콘크리트가 만나는 경계면에서 두 재료의 변형도가 동일하기 때문에 합성 단면에서 변형도는 직선 분포로 존재한다. 이

와 달리 경계면에서 미끄러짐이 발생하여 서로 다른 재료가 일체 거동을 하지 않는 경우를 불완전 합성이라 한다. 그러므로 경계면에서 서로 다른 재료의 변형도는 일치하지 않으며, 두 재료 간의 불완전한 합성력으로 인해 부재의 강도를 산정하는 것도 복잡하며 불확실하다. 그러므로 일반적인 구조 설계에서는 전단 연결재를 사용하여 강재와 콘크리트가 완전 합성 거동을 하도록 하고 있으며 이는 CFT 거더에서도 마찬가지다. 이에 따라 본 연구에서도 강관과 내부에 채워진 콘크리트가 완전 합성 거동을 한다는 가정 하에 CFT 요소를 모델링 하였다.

CFT 거더는 강관에 콘크리트를 채울 때 인장력을 저항하기 위한 철근이나 추가의 압축력을 도입하기 위한 텐던을 설치하지 않으므로 CFT 요소에서 콘크리트에 설치된 철근 및 프리스트레스 텐던에 의한 효과는 고려하지 않는다. 강관에 채워지는 콘크리트는 자중 감소를 위해 경량 모르터를 많이 사용하나 본 연구에서는 속 채움 콘크리트로 경량 모르터나 고강도 콘크리트가 아닌 일반 콘크리트를 사용한 CFT 거더에 대한 해석을 수행하였다.

또한 CFT 거더는 압축력 뿐만 아니라 모멘트를 저항하기 때문에 콘크리트에 인장력이 작용할 수도 있다. 일반적으로 콘크리트의 인장 강도는 설계에서 무시하는 것이 원칙이지만, 압축강도의 약 10~15% 정도의 인장 강도를 나타내는 것으로 알려져 있으므로 본 연구에서는 이를 반영한다. 특히 사장교의 경우, 보강형에 발생하는 축방향 압축력이 크게 발생하므로

휨 모멘트가 발생하여도 실제 콘크리트가 받는 인장 응력은 압축 응력에 비해 크지 않다. 또한 CFT 부재에서는 강관에 의해 내부의 콘크리트가 밀폐된 상태에서 양생되기 때문에 건조수축 발생량이 미미하다. 그러므로 건조수축으로 인한 인장 강도의 손실도 발생하지 않으므로 작은 양의 인장력에는 저항할 수 있으며 인장 크리프도 인장 응력에 선형으로 발생한다고 가정한다.

압축력과 휨 모멘트를 동시에 받고 있는 CFT 거더의 단면과 변형도를 도시하면 그림 3.5, 그림 3.6 과 같다. 여기서  $D_i$ ,  $D_o$  는 강관의 내부와 외부의 지름이며,  $\epsilon_{ci}$ ,  $\epsilon_{ti}$  와  $\epsilon_{co}$ ,  $\epsilon_{to}$  는 각각 강관 내부와 외부에서 압축 응력과 인장 응력으로 발생하는 변형도이다. 또한  $c$  는 도심에서 중립축까지의 거리를 나타낸다.

그림 3.5 를 바탕으로 각 재료의 면적과 단면 2 차 모멘트를 구하면 다

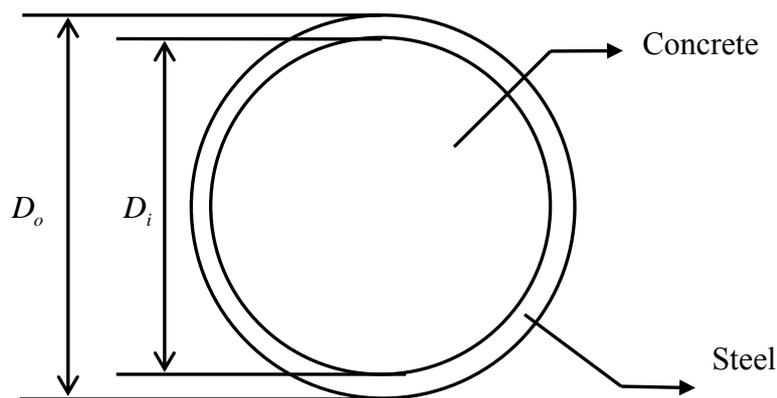


그림 3.5 CFT 거더의 단면

음과 같다.

$$A_{conc} = \frac{\pi D_i^2}{4}, \quad A_{steel} = \pi D_a t \quad (3.54)$$

$$I_{conc} = \frac{\pi D_i^4}{64}, \quad I_{steel} = \frac{\pi D_a^3 t}{8} \quad (3.55)$$

여기서  $D_a$  와  $t$  는 다음과 같다.

$$D_a = \frac{D_o + D_i}{2} \quad (3.56)$$

$$t = \frac{D_o - D_i}{2} \quad (3.57)$$

임의의 시간  $t^n$  과  $t^{n+1}$  사이에서  $\Delta t$  동안 외력에 의한 변형도의 증분  $\Delta \epsilon_m^{n+1}$  과 시간 의존적 거동에 의한 변형도의 증분  $\Delta \epsilon_{mm}^{n+1}$  가 발생하였을 때,

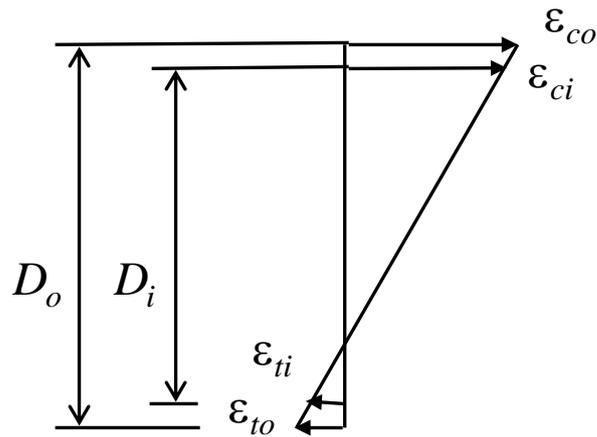


그림 3.6 CFT 거더의 변형도

강재와 콘크리트의 완전 합성 거동에 의해 CFT 거더 요소에 발생하는 변형도의 증분이  $\Delta\varepsilon_{CFT}^{n+1}$  로 일치하는 개념을 그림 3.6 에 도시하였다. 외력은 CFT 거더 요소에 작용하므로 이로 인한 변형도의 증분은  $\Delta\varepsilon_m^{n+1}$  으로 합성 단면에서 선형으로 분포한다. 그러나 크리프 및 건조수축과 같은 시간 의존적 거동에 의한 변형도의 증분  $\Delta\varepsilon_{mm}^{n+1}$  은 콘크리트에만 발생하는 변형이므로 강재와 콘크리트가 완전 비합성 상태라면 콘크리트 단면에만 분포하게 된다. 그러나 CFT 거더 요소는 완전 합성 거동을 한다고 가정하였으므로 콘크리트에 발생하는 변형도는 외부 강관에 의해 구속된다.

콘크리트가 받는 구속력은 외력 및 시간 의존적 거동에 의해 콘크리트에서 발생해야 하는 변형도 증분  $\Delta\varepsilon_m^{n+1}$ ,  $\Delta\varepsilon_{mm}^{n+1}$  와 CFT 거더 요소의 합성 거동에 의해 콘크리트에 실제로 발생하는 변형도 증분  $\Delta\varepsilon_{CFT}^{n+1}$  를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$A_{conc} = \frac{\pi D_i^2}{4}, \quad A_{steel} = \pi D_a t \quad (3.54)$$

$$I_{conc} = \frac{\pi D_i^4}{64}, \quad I_{steel} = \frac{\pi D_a^3 t}{8} \quad (3.55)$$

반대로 콘크리트 주변의 강관은 콘크리트에 발생하는 시간 의존적 거동에 의한 변형도로 인해 경계면에서 콘크리트에 가한 구속력에 대한 등가의 변형이 발생한다. 그러므로 강관이 받는 추가의 응력은 외력에 의한 변형도

의 증분  $\Delta\varepsilon_m^{n+1}$  과 완전 합성에 의한 응력 재분배로 발생하는  $\Delta\varepsilon_{CFT}^{n+1}$  을 이용하여 다음과 같이 구한다.

$$\Delta\sigma_{steel}^{n+1} = E_{steel} (\Delta\varepsilon_m^{n+1} + \Delta\varepsilon_{CFT}^{n+1}) \quad (3.59)$$

일반적으로 강관은 시간에 따른 탄성계수의 변화가 없는 것으로 취급하기 때문에 강관의 탄성계수  $E_{steel}$  는 콘크리트와 달리 시간에 대한 함수가 아닌 상수로 처리하였다. 외력으로 인한 변형도 증분  $\Delta\varepsilon_m^{n+1}$  이 없다면, 콘크리트와 강관에 발생하는 응력 증분의 합은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{conc}^{n+1} + \Delta\sigma_{steel}^{n+1} &= E_{steel} \Delta\varepsilon_{CFT}^{n+1} + E_{conc}^{n+1} (\Delta\varepsilon_{CFT}^{n+1} - \Delta\varepsilon_{nm}^{n+1}) \\ &= (E_{steel} + E_{conc}^{n+1}) \Delta\varepsilon_{CFT}^{n+1} - E_{conc}^{n+1} \Delta\varepsilon_{nm}^{n+1} \end{aligned} \quad (3.60)$$

$t^n$  과  $t^{n+1}$  사이에서 외력의 변화가 없으므로 이 구간에서 발생한 응력의 합은 0 이 되어야 한다. 그러므로 다음의 식이 성립한다.

$$E_{conc}^{n+1} \Delta\varepsilon_{nm}^{n+1} = (E_{steel} + E_{conc}^{n+1}) \Delta\varepsilon_{CFT}^{n+1} \quad (3.61)$$

결국 콘크리트에서 발생한 시간 의존적 거동이 CFT 거더의 강재와 콘크리트의 탄성계수 비율로 재분배되는 것을 알 수 있다.

CFT 거더 요소를 모델링하기 위해 그림 3.5 와 같이 동일한 도심 상에 강관 요소와 강관 내부의 콘크리트 요소가 분리되어 있는 것으로 생각한다. 식 (3.27)을 참고하면 강관 요소와 강관 내부의 콘크리트 요소의 강성도 행

렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{k}_{e,steel} = \begin{pmatrix} \int_l \mathbf{B}_a^T E_{steel} A_{steel} \mathbf{B}_a dx \\ \int_l \mathbf{B}_b^T E_{steel} I_{steel} \mathbf{B}_b dx \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

$$\mathbf{k}_{e,conc}^{n+1} = \begin{pmatrix} \int_l \mathbf{B}_a^T E_e^{n+1} A_{conc} \mathbf{B}_a dx \\ \int_l \mathbf{B}_b^T E_e^{n+1} I_{conc} \mathbf{B}_b dx \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

여기서  $\mathbf{k}_{e,steel}$  와  $\mathbf{k}_{e,conc}^{n+1}$  은 시각  $t^{n+1}$  에서의 강관 요소와 강관 내부의 콘크리트 요소의 강성도 행렬이다. 참고로 강관의 요소 강성도 행렬은 시간에 따른 변화가 없으므로 모든 시간 구간에 대해 동일하게  $\mathbf{k}_{e,steel}$  와 같이 표현하였다. 또한 강관은 콘크리트와 달리 크리프 현상이 발생하지 않으므로 식 (3.7)에서 사용한 유효탄성계수를 사용하지 않고, 강재의 탄성계수  $E_{steel}$  를 사용하였다. CFT 거더를 구성하는 두 요소는 동일한 도심 상에 있으므로  $\mathbf{k}_{e,steel}$  와  $\mathbf{k}_{e,conc}^{n+1}$  는 동일한 좌표변환행렬을 통해 전체 좌표계에 대한 뼈대 구조물의 강성도 행렬  $\mathbf{K}_F^{n+1}$  를 구성하게 된다. 이렇게 구성된  $\mathbf{K}_F^{n+1}$  를 식 (3.32)에 적용하면 변위의 증분량  $\Delta \mathbf{U}^{n+1}$  를 구할 수 있다.

다음 시간 단계에서 강관 내부의 콘크리트에서 발생하는 크리프 변형도를 계산하기 위해서는  $n+1$  번째 시간 단계에서 콘크리트의 부재 축력과 부재 모멘트 값을 구해야 한다. 식 (3.12)와 식 (3.13)을 사용하면 강관 내

부의 콘크리트에 작용하는 축력과 모멘트를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$N_{conc}^{n+1} = N_{conc}^n + E_e^{n+1} A_{conc} \frac{d\Delta u^{n+1}}{dx} - E_e^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) (N_{conc}^{i+1} - N_{conc}^i) - E_e^{n+1} A_{conc} \varepsilon_{sho} \Delta \beta_s^{n+1} \quad (3.64)$$

$$M_{conc}^{n+1} = M_{conc}^n + E_e^{n+1} I_{conc} \frac{d^2 \Delta w^{n+1}}{dx^2} - E_e^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) (M_{conc}^{i+1} - M_{conc}^i) \quad (3.65)$$

CFT 거더는 콘크리트가 강관에 의해 외부로의 수분 증발이 억제되는 밀폐된 상태에서 양생이 이루어지므로 건조수축 변형도가 거의 없다고 알려져 있다. 이러한 조건을 적용하면 식 (3.64)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$N_{conc}^{n+1} = N_{conc}^n + E_e^{n+1} A_{conc} \frac{d\Delta u^{n+1}}{dx} - E_e^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) (N_{conc}^{i+1} - N_{conc}^i) \quad (3.66)$$

위의 식(3.65), (3.66)을 매 시간 단계에서 구하여 식 (3.7)에 대입하면  $n+1$  번째 시간 구간에서 강관 내부의 콘크리트 크리프 변형에 의해 발생하는 내력을 구할 수 있다. 콘크리트의 양생이 완료된 시점  $t^1$ 부터  $n+1$  번째 시간 구간 직전 시점인  $t^n$  까지 강관 내부의 콘크리트가 받는 응력에 의한 크리프 변형과  $t^n$ 에서의 재단력을  $\bar{\mathbf{f}}_{conc}^n$ 로 나타내면 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{f}}_{conc}^n = \left( \begin{array}{l} \int_l \mathbf{B}_a^T N_{conc}^n dx - \int_l \mathbf{B}_a^T E_e^{n+1} A_{conc} \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) (N_{conc}^{i+1} - N_{conc}^i) dx \\ + \int_l \mathbf{B}_b^T M_{conc}^n dx - \int_l \mathbf{B}_b^T E_e^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) (M_{conc}^{i+1} - M_{conc}^i) dx \end{array} \right) \quad (3.67)$$

콘크리트와 달리 시간의존적 거동이 발생하지 않는 강관의 재단력  $\bar{\mathbf{f}}_{steel}^n$  는 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{f}}_{steel}^n = \left( \begin{array}{l} \int_l \mathbf{B}_a^T N_{conc}^n dx \\ \int_l \mathbf{B}_b^T M_{conc}^n dx \end{array} \right) \quad (3.68)$$

CFT 거더의 강관과 속채움 콘크리트의  $\bar{\mathbf{f}}_{steel}^n$  와  $\bar{\mathbf{f}}_{conc}^n$  를 식 (3.32)에 대입하면,  $n+1$  번째 시간 구간에서 강관 내부 콘크리트의 시간의존적 변형에 의한 CFT 거더의 변위 증분량을 구할 수 있다.

강재와 달리 콘크리트는 압축 강도에 비해 인장 강도가 크게 약하다. 그러므로 허용 인장 강도 이상의 인장 응력이 콘크리트에 가해지면 균열이 발생한다. 그러므로 강관 내부의 콘크리트가 받는 응력에 대한 검토 과정이 필요하다.  $\Delta \mathbf{U}^{n+1}$ 로부터 결정되는 CFT 거더 요소의 수평 변위의 증분량  $\Delta u^{n+1}$  과 수직 변위의 증분량  $\Delta w^{n+1}$  은 CFT 거더에서 발생한 변형도  $\Delta \varepsilon_m^{n+1} + \Delta \varepsilon_{CFT}^{n+1}$  와 다음의 관계가 성립한다.

$$\Delta\varepsilon_m^{n+1} + \Delta\varepsilon_{CFT}^{n+1} = \frac{d\Delta u^{n+1}}{dx} - \frac{d^2\Delta w^{n+1}}{dx^2} y \quad (3.69)$$

식 (3.69)를 식 (3.58)에 대입하면 콘크리트가 받는 응력의 증분을 구할 수 있다. 이로부터 구한 인장 응력이 콘크리트의 허용 인장 응력보다 크다면 강관의 두께를 조절하는 등의 단면을 조절하여야 한다. 필요한 경우 강재의 응력 검토 역시 콘크리트와 같은 방법으로 식 (3.69)를 식 (3.59)에 대입하여 허용 응력과 비교한다.

### 3.4 CFT 거더 교량의 장기 거동 해석법

콘크리트 구조물의 평형방정식인 식 (3.32)를 이용하여 콘크리트 주탑에 CFT 거더를 보강형으로 사용한 케이블 지지 구조물의 평형 방정식을 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_F^{n+1} \Delta \mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{F}_{ca}(\mathbf{L}_0, \mathbf{x}^{n+1}) = \mathbf{P}^{n+1} - \bar{\mathbf{P}}^{n+1} \quad (3.70)$$

여기서  $\mathbf{K}_F^{n+1}$  는 콘크리트 요소의  $\mathbf{k}_e^{n+1}$  와 CFT 거더 요소의 강성도 행렬  $\mathbf{k}_{e,steel}$  및  $\mathbf{k}_{e,conc}^{n+1}$  으로 구성되는 시간에 따른 뼈대 요소의 강성도 행렬이다.

$$\mathbf{K}_F^{n+1} = \sum_e (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{k}_e^{n+1} \mathbf{R}^e + \sum_e (\mathbf{R}^e)^T (\mathbf{k}_{e,steel} + \mathbf{k}_{e,conc}^{n+1}) \mathbf{R}^e \quad (3.71)$$

또한 식 (3.70)의  $\mathbf{F}_{ca}(\mathbf{L}_0, \mathbf{x}^{t+\Delta t})$  는 케이블의 무응력 길이  $\mathbf{L}_0$  와  $t + \Delta t$  시점

에서의 케이블 양단 좌표  $\mathbf{x}^{t+\Delta t}$  에 의해 결정되는 케이블 부재의 장력이다. 마지막으로 식 (3.70)에서 콘크리트 요소의  $\bar{\mathbf{f}}^n$  과 CFT 거더 요소의  $\bar{\mathbf{f}}_{steel}^n$  및  $\bar{\mathbf{f}}_{conc}^n$  으로 구성되는  $\bar{\mathbf{P}}^{n+1}$  는 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{P}}^{n+1} = \sum_e (\mathbf{R}^e)^T \bar{\mathbf{f}}^n + \sum_e (\mathbf{R}^e)^T (\bar{\mathbf{f}}_{conc}^n + \bar{\mathbf{f}}_{steel}^n) \quad (3.72)$$

식 (3.70)을  $t + \Delta t$  에서의 케이블 양단 좌표 변화량  $\Delta \mathbf{x}^{t+\Delta t}$  에 대해 분리하여 정리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_F^{n+1} \Delta \mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{F}_{ca}(\mathbf{L}_0, \mathbf{x}^n) + \frac{\partial \mathbf{F}_{ca}}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{P}^{n+1} - \bar{\mathbf{P}}^{n+1} \quad (3.73)$$

여기서  $\frac{\partial \mathbf{F}_{ca}}{\partial \mathbf{x}}$  는 케이블의 양단 좌표가  $\Delta \mathbf{x}^{n+1}$  만큼 변화하였을 때의 케이블 부재의 강성이다. 식 (3.48)과 식 (3.50)에 나타난 케이블 양단 좌표와 뼈대 구조물 절점 변위 간의 관계를 이용하여 위의 식을 구조물 전체 좌표계에 서의 변위로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_F^{n+1} \Delta \mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{F}_{ca}(\mathbf{L}_0, \mathbf{U}^n) + \frac{\partial \mathbf{F}_{ca}}{\partial \mathbf{U}} \Delta \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{P}^{n+1} - \bar{\mathbf{P}}^{n+1} \quad (3.74)$$

위의 식을  $\Delta t$  동안 발생한 변위의 증분  $\Delta \mathbf{U}^{n+1}$  에 대해 정리하고, 케이블 요소의 강성도 행렬을 도입하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(\mathbf{K}_F^{n+1} + \mathbf{K}_{ca})\Delta\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{F}_{ca}(\mathbf{L}_0, \mathbf{U}^n) = \mathbf{P}^{n+1} - \bar{\mathbf{P}}^{n+1} \quad (3.75)$$

$t^n$ 에서의 케이블 요소의 부재력  $\mathbf{F}_{ca}(\mathbf{L}_0, \mathbf{U}^n)$ 을 우변으로 보내면 다음과 같다.

$$(\mathbf{K}_F^{n+1} + \mathbf{K}_{ca})\Delta\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{P}^{n+1} - \bar{\mathbf{P}}^{n+1} - \mathbf{F}_{ca}(\mathbf{L}_0, \mathbf{U}^n) \quad (3.76)$$

여기서 우변은  $t^{n+1}$ 에서의 구조물 전체 외력과  $t^n$ 에서의 뼈대 요소의 저항력과 콘크리트 요소에서 발생하는 시간의존적 거동으로 인한 외력, 케이블 요소의 저항력으로 이루어져 있다. 결국  $\Delta t$  동안 증가한 구조물 전체 외력 증분과 시간의존적 거동으로 인한 하중으로 볼 수 있다.

위의 식은 케이블의 강성도 행렬이 포함되어 있으므로 비선형 방정식이다. 그러므로  $k$ 번째 반복계산으로 구한 변위 증분  $(\Delta\mathbf{U}^{n+1})^k$ 을 이용하여  $k+1$ 번째 반복계산에서의 케이블 강성도 행렬  $\mathbf{K}_{ca}^{k+1}$ 을 갱신하고, 이를 이용하여 변위 증분  $(\Delta\mathbf{U}^{n+1})^{k+1}$ 을 계산한다.  $\mathbf{U}^{n+1}$ 이 일정한 값으로 수렴할 때까지 반복 계산한다.

### 3.5 시공단계를 고려한 장기 거동 해석

사장교는 케이블의 긴장, 추가 부재 가설 등의 시공 과정으로 인해 구조계의 응력 상태가 수시로 바뀐다. 특히 특정 시공 단계에서 추가의 케이블을 설치하여 장력을 도입하면 이로 인해 구조계가 바뀌게 되어 기존에

설치되어 있던 케이블의 장력이 모두 바뀌므로 일찍 가설된 부재의 응력 변화가 심하다. 콘크리트의 시간의존적 거동은 콘크리트의 타설 시기에 크게 좌우되므로, 콘크리트 재료를 사용한 구조물의 장기 거동을 파악하기 위해서는 시공 단계별로 달라지는 부재의 재령을 고려해주어야 한다. 또한 콘크리트에 작용하는 응력도 시공 단계에 따라 달라지므로 크리프 현상을 파악할 때는 시공 단계에 따른 응력 이력을 고려해주어야 한다.

사장교의 가설 방법에는 가벤투 이용 방법, ILM(Incremental Launching Method)공법과 같은 압출식 공법, FCM(Free Cantilever Method)과 같은 캔틸레버 공법 등이 있다. 이 중, 캔틸레버 공법은 가장 보편적으로 사용되는 공법으로서 일방향 캔틸레버 공법(1-Direction Free Cantilever Method)과 균형 캔틸레버 공법(Balanced Cantilever Method)으로 다시 나뉜다. 일방향 캔틸레버 공법은 측경간을 먼저 시공한 후, 주탑부에서부터 캔틸레버 공법으로 중앙 경간을 가설한다. 반면, 균형 캔틸레버 공법은 주탑부에서 측경간과 중앙경간 양 방향으로 동시에 하나씩 세그먼트를 가설하는 방식이다.

실제 사장교의 시공 단계는 주탑 및 보강형의 재료 종류와 함께 가설 장비 및 현장 여건 등을 종합적으로 고려하여 결정되므로 정형화시키기가 어렵다. 본 연구에서는 콘크리트 사장교 및 강합성형 사장교의 설계에서 일반적으로 고려되는 시공 단계에 대해서 논의하기로 한다.

현장 타설 콘크리트 사장교를 캔틸레버 공법으로 가설하면, 각각의 세그먼트별로 타설 시점 및 외기에 노출되는 시점, 그리고 하중 재하 시점

등이 달라진다. 그러므로 이러한 조건을 각각의 부재별로 고려하여 구조해석을 수행하여야 한다. 하중 재하 시점과 외기에 노출되는 시점에 따른  $k$  번째 부재의 크리프 변형도 및 건조수축 변형도는 다음과 같다.

$$\varepsilon_c^t = \int_{t_k}^t C(t-t_k, \tau-t_k) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3.77)$$

$$\varepsilon_{sh}^t = \varepsilon_{sho} \beta_s(t-t_k) \quad (3.78)$$

여기서  $t_k$  는 이동식 작업차(form traveler) 내지는 거푸집에  $k$  번째 부재를 구성하는 콘크리트가 타설되는 시점이고,  $\tau$  는 이동식 작업차나 거푸집이 제거되면서  $k$  번째 부재에 자중이 재하되어 구조 부재로 작용하는 시점이다. 그러므로  $k$  번째 부재의 콘크리트는 타설 이후  $\tau-t_k$  만큼 지난 시점에서 양생이 끝나며, 이 때부터 타설 이후 현재까지 경과한 시간  $t-t_k$  동안 크리프 변형이 발생한다. 또한 건조수축 변형도 함수  $\beta_s(t-t_k)$  도 콘크리트가 타설된 후 현재까지 외기에 노출된 시간  $t-t_k$  에 의해 결정된다. 같은 방식으로 식 (2.17)을 이용하여  $k$  번째 부재의 콘크리트 탄성계수를 구하면, 콘크리트가 타설 이후 강도 발현에 기여한 현재까지의 시간  $t-t_k$  를 이용하여 다음과 같이 결정된다.

$$E^n = \sqrt{\beta_{cc}(t-t_k)} E_{ci} \quad (3.79)$$

위의 식 (3.77), (3.78)을 식 (2.5)과 식 (2.12)에 대입하여  $k$  번째 부재의 크리프 변형도와 건조수축 변형도의 증분량을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\Delta \varepsilon_c^{n+1} &= \Delta \varepsilon_c^{t+\Delta t} \\
&= \int_{t_k}^t (C(t+\Delta t-t_k, \tau-t_k) - C(t-t_k, \tau-t_k)) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \\
&\quad + \int_t^{t+\Delta t} C(t+\Delta t-t_k, \tau-t_k) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \\
&\approx \sum_{i=m}^{n-1} (C(t^{n+1-m}, t^{i-m+\alpha}) - C(t^{n-m}, t^{i-m+\alpha})) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=t^{i+\alpha}} \Delta t^{i+1} \\
&\quad + C(t^{n+1-m}, t^{n-m+\alpha}) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=t^{n+\alpha}} \Delta t \\
&= \sum_{i=m}^{n-1} (C_{i-m+\alpha}^{n+1-m} - C_{i-m+\alpha}^{n-m}) \Delta \sigma^{i+1} + C_{n-m+\alpha}^{n+1-m} \Delta \sigma^{n+1}
\end{aligned} \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \varepsilon_{sh}^{n+1} &= \varepsilon_{sh}^{t+\Delta t} - \varepsilon_{sh}^t \\
&= \varepsilon_{sho} (\beta_s (t+\Delta t-t_k) - \beta_s (t-t_k))
\end{aligned} \tag{3.81}$$

여기서  $t^n$  과  $t^m$  은 각각 현재 시점  $t$ 와  $k$  번째 콘크리트가 타설된 시점  $t_k$  를 나타내며,  $k$  번째 콘크리트가 타설된 이후 현재까지 지난 시간  $t^n - t^m$  은  $t^{n-m}$  으로 표현하였다. 또한 현재 시점에서 발생하는 응력 증분량은 전체 구조계의 계산이 시작되는 시점을 기준으로 표현하였으므로  $t^{n+1}$  에서 작용한다는 의미로  $\Delta \sigma^{n+1}$  으로 표기하였다. 그러나 비크리프 계수는  $k$  번째 부재의 타설 시점  $t_k$  을 기준으로 타설 이후 경과한 시간에 대한 함수이므로,  $t+\Delta t-t_k$  만큼 지난 시점  $t^{n+1-m}$  에서의 함수값을 적용한다는 의미로

$C_{n-m+\alpha}^{n+1-m}$  와 같이 표현하였다.

식 (3.80)에서  $k$  번째 부재의 콘크리트 타설시점 부터 현재까지의 기간  $t-t_k$  동안 부재가 경험한 응력 이력이 현재 계산 구간  $t^n$  과  $t^{n+1}$  사이에서 발생하는 크리프 변형도의 증분량에 기여하는 변형도를  $f_c^{t-t_k}$  로 치환하면 다음과 같다.

$$\Delta \varepsilon_c^{n+1} = f_c^{t-t_k} + C_{n+\alpha-k}^{n-k+1} \Delta \sigma^{n+1} \quad (3.82)$$

식 (3.79), (3.81), (3.82)으로부터 구한  $k$  번째 부재에서의 탄성 계수와 건조수축 및 크리프 변형도의 증분을 식 (3.27)에 대입하여  $n+1$  번째 계산 단계의 시점  $t^{n+1}$  에서의 내력  $\mathbf{f}_k^{n+1}$  을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{f}_k^{n+1} = \mathbf{k}_k^{n+1} \Delta \mathbf{U}_k^{n+1} + \bar{\mathbf{f}}_k^n \quad (3.83)$$

여기서  $k$  번째 부재의 내력 벡터  $\bar{\mathbf{f}}_k^n$  은 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{f}}_k^n = \left( \begin{array}{c} \int \mathbf{B}_a^T N^n dx \\ \int_l \mathbf{B}_b^T M^n dx \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \int_l \mathbf{B}_a^T E_k^{n+1} \sum_{i=m}^{n-1} (C_{i-m+\alpha}^{n+1-m} - C_{i-m+\alpha}^{n-m}) (N^{i+1} - N^i) dx + \int_l \mathbf{B}_a^T E_k^{n+1} \varepsilon_{sho} \Delta \beta_s^{n+1} dx \\ \int_l \mathbf{B}_b^T E_k^{n+1} \sum_{i=m}^{n-1} (C_{i-m+\alpha}^{n+1-m} - C_{i-m+\alpha}^{n-m}) (M^{i+1} - M^i) dx \end{array} \right) \quad (3.84)$$

여기서  $E^{n+1}$  과  $\Delta \epsilon_{sh}^{n+1}$  은 전체 구조계를 기준으로 한 시점  $t^{n+1}$  에서  $k$  번째 부재에서 발현되는 탄성 계수와 건조수축 변형도의 증분으로써,  $k$  번째 부재의 타설 시점부터 계산된 식 (3.79)과 (3.81)로부터 구한 값을 사용한다. 같은 방법으로  $k$  번째 부재가 건조 수축 현상이 발생하지 않는 CFT 거더의 강관 속에 타설된 콘크리트인 경우에는 내력 벡터  $\bar{\mathbf{f}}_{k,conc}^n$  은 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{f}}_{k,conc}^n = \left( \begin{array}{l} \int \mathbf{B}_a^T N_{conc}^n dx \\ \int_l \mathbf{B}_b^T M_{conc}^n dx \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} \int_l \mathbf{B}_a^T E_k^{n+1} \sum_{i=m}^{n-1} (C_{i-m+\alpha}^{n+1-m} - C_{i-m+\alpha}^{n-m}) (N_{conc}^{i+1} - N_{conc}^i) dx \\ \int_l \mathbf{B}_b^T E_k^{n+1} \sum_{i=m}^{n-1} (C_{i-m+\alpha}^{n+1-m} - C_{i-m+\alpha}^{n-m}) (M_{conc}^{i+1} - M_{conc}^i) dx \end{array} \right) \quad (3.85)$$

가상일의 원리와 좌표변환행렬을 이용하여  $k$  번째 부재가 양생이 완료된 후, 구조 부재로작용하는 임의의 시점  $t^{n+1}$  에서의 케이블 구조물에 대한 강성도 방정식은 다음과 같다.

$$\sum_{e=1}^{k(t)} \left\{ (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{k}_e^{n+1} \mathbf{R}^e + \mathbf{K}_c^e \right\} \Delta \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{P}^{n+1} - \sum_{e=1}^{k(t)} \left\{ (\mathbf{R}^e)^T \bar{\mathbf{f}}_e^n + \mathbf{F}_{ca}^e(\mathbf{L}_0, \mathbf{U}^n) \right\} \quad (3.86)$$

식 (3.86)에서  $k(t)$  와  $l(t)$  는 임의의 시각  $t$  에서 구조 부재로 작용하는 뼈대 부재의 개수와 케이블 부재의 개수를 나타낸다. 현재까지 가설된  $k(t)$  개의 뼈대 부재와  $l(t)$  개의 케이블 부재가 모두 구조 부재로 작용하며, 각

부재의 자중만 외부 하중으로 작용하는 시점을  $t_1$  이라하면 위의 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sum_{e=1}^{k(t_1)} \left\{ (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{k}_e^{t_1} \mathbf{R}^e + \mathbf{K}_c^e \right\} \Delta \mathbf{U}^{t_1} = \mathbf{P}^{t_1} - \sum_{e=1}^{k(t_1)} \left\{ (\mathbf{R}^e)^T \bar{\mathbf{f}}_e^{t_1-1} + \mathbf{F}_{ca}^e(\mathbf{L}_0, \mathbf{U}^{t_1-1}) \right\} \quad (3.87)$$

여기서  $k(t_1)$  과  $l(t_1)$  은  $t_1$  에서 구조 부재로 작용하는 뼈대 부재와 케이블 부재의 개수이며,  $\bar{\mathbf{f}}_e^{t_1-1}$  와  $\mathbf{U}^{t_1-1}$  은 바로 직전 계산 단계에서 구해진 뼈대 부재의 내력과 케이블 부재의 양단 좌표값이다.

CFT 거더를 보강형으로 사용하는 사장교는 여러가지 여건에 따라 원형 강관에 프리캐스트 방식으로 미리 콘크리트를 타설한 후, 거더를 인양하여 가설하는 시공 방법이 있을 수 있으며, 현장 타설 콘크리트와 같이 기존 세그먼트에 접합된 강관에 콘크리트를 타설하여 양생시킬 수도 있다. 전자의 경우는 프리캐스트 방식으로 제작된 CFT 거더가 기존 세그먼트에 접합되는 시점부터 구조 부재로 작용한다. 그러나 현장 타설 형태로 제작되는 CFT 거더는 콘크리트가 타설되어 양생이 완료될 때까지는 구조 부재로서의 작용은 하지 못하며, 오로지 하중으로서만 작용한다. 그러므로 구조 부재로 작용하는 뼈대 부재 및 케이블 부재의 개수는  $t_1$  과 동일하며, 양생 중인 CFT 거더의 자중만 외부 하중에 추가된다. 새로운 CFT 강관에 콘크리트가 타설되는 시점을  $t_2$  라 하며, 이렇게 타설되어 양생이 시작된 CFT 거더를  $k+1$  번째 뼈대 부재라 하면 다음과 같은 강성도 행렬식이 유도된

다.

$$\sum_{e=1}^{k(t_1)} \{(\mathbf{R}^e)^T \mathbf{k}_e^{t_2} \mathbf{R}^e + \mathbf{K}_c^e\} \Delta \mathbf{U}^{t_2} = \mathbf{P}^{t_1} - \sum_{e=1}^{k(t_1)} \{(\mathbf{R}^e)^T \bar{\mathbf{f}}_e^{t_1-1} + \mathbf{F}_{ca}^e(\mathbf{L}_0, \mathbf{U}^{t_1-1})\} \quad (3.88)$$

여기서  $\mathbf{P}_{k+1}$  는  $k+1$  번째 부재의 자중으로서, 기존의 세그먼트 끝단에 집중 하중 형태로 기존의 외부하중  $\mathbf{P}^{t_1}$  에 추가된다.  $k+1$  번째 부재는 양생이 완료되기 전까지는 구조 부재로 작용하지 않으므로,  $t_2$  에서의 구조물의 전체 강성도 행렬은  $t_1$  과 동일한  $k(t_1)$  부재까지만 조합한다. 다만 각 부재의 요소 강성도 행렬은 콘크리트의 탄성 계수가 변하였으므로  $\mathbf{k}_e^{t_2}$  를 사용한다. 같은 방식으로 뼈대 부재와 케이블 부재의 내력도  $k(t_1)$  부재까지만 고려 하며 뼈대 요소의 내력과 케이블 요소의 끝단 좌표는 직전 계산 단계인  $t_2-1$  에서의 값  $\bar{\mathbf{f}}_e^{t_2-1}$  와  $\mathbf{U}^{t_2-1}$  을 사용한다. 콘크리트가 타설되는 시점  $t_2$  에 대한 강성도 방정식도 식 (3.89)와 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$\sum_{e=1}^{k(t_2)} \{(\mathbf{R}^e)^T \mathbf{k}_e^{t_2} \mathbf{R}^e + \mathbf{K}_c^e\} \Delta \mathbf{U}^{t_2} = \mathbf{P}^{t_2} - \sum_{e=1}^{k(t_2)} \{(\mathbf{R}^e)^T \bar{\mathbf{f}}_e^{t_2-1} + \mathbf{F}_{ca}^e(\mathbf{L}_0, \mathbf{U}^{t_2-1})\} \quad (3.89)$$

그러므로 위의 식에서  $k(t_2)$ ,  $l(t_2)$  그리고  $\mathbf{P}^{t_2}$  는  $t_1$  에서의 강성도 방정식 과 다음의 관계를 갖는다.

$$\begin{aligned}
k(t_2) &= k(t_1) \\
l(t_2) &= l(t_1) \\
\mathbf{P}^{t_2} &= \mathbf{P}^{t_1} + \mathbf{P}_{k+1}
\end{aligned} \tag{3.90}$$

강합성 사장교의 경우, 강형 인양 후 1 차 긴장을 한다. 그러나 본 연구 보고서에서 제시하는 방법은 한 번의 케이블 긴장으로 목표 형상을 만족시키고자 하는 것이 목적이므로 케이블의 1 차 긴장은 하지 않는 것으로 가정한다. 그러므로 새로운 원형 강관이 기존의 세그먼트에 접합되고 곧바로 속채움 콘크리트가 타설되는 것으로 간주하여 원형 강관과 속채움 콘크리트의 자중을 동시에 재하하며, 양생이 진행되는 동안에는 이동식 작업차나 거푸집을 사용하여 새로 가설된  $k+1$  번째 보강형을 지지하여 자중으로 인한 변형이 발생하지 않는다고 가정한다.

콘크리트가 타설된 이후, 양생이 완료될 때까지 전체 구조물은 콘크리트의 시간 의존적 특성에 의한 변형이 발생한다.  $k+1$  번째 보강형이 양생되는 기간 중 임의의 시점  $t_3$ 에서의 강성도 방정식을 구성하면 다음과 같다.

$$\sum_{e=1}^{k(t_1)} \left\{ (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{k}_e^{t_3} \mathbf{R}^e + \mathbf{K}_c^e \right\} \Delta \mathbf{U}^{t_3} = \mathbf{P}^{t_2} - \sum_{e=1}^{k(t_1)} \left\{ (\mathbf{R}^e)^T \bar{\mathbf{f}}_e^{t_3-1} + \mathbf{F}_{ca}^e(\mathbf{L}_0, \mathbf{U}^{t_3-1}) \right\} \tag{3.91}$$

위의 식에서 구조 부재로 작용하는 뼈대 부재 및 케이블 부재는  $t_1, t_2$  시점과 동일하며, 외부하중은  $t_2$ 에서의 하중과 같다. 다만  $\bar{\mathbf{f}}_e^{t_3-1}$ 은 과거의 응

력 이력 및 시간 경과에 따라 결정되는 값이며,  $\mathbf{U}^{t_3-1}$ 는 외부 하중이 변하지 않더라도  $\bar{\mathbf{f}}_e^{t_3-1}$ 가 변함에 따라 발생하는 케이블 양단의 변위이다. 그러므로 콘크리트가 타설된  $t_2$ 부터 양생이 완료될 때까지 외부하중이 바뀌지 않더라도, 콘크리트에 발생하는 시간 의존적 변형에 의해  $\bar{\mathbf{f}}_e^{t_3-1}$ 과  $\mathbf{U}^{t_3-1}$ 은  $t_2$ 에서의  $\bar{\mathbf{f}}_e^{t_2-1}$  및  $\mathbf{U}^{t_2-1}$ 과 달라지므로 변위의 증분량  $\Delta\mathbf{U}^{t_3}$ 이 발생하게 된다. 콘크리트가 양생되는 과정에서 임의의 시점  $t_3$ 에 대한 강성도 방정식은 식(3.87), (3.89)과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$\left( \sum_{e=1}^{k(t_3)} (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{k}_e^{t_3} \mathbf{R}^e + \sum_{e=1}^{l(t_3)} \mathbf{K}_c^e \right) \Delta\mathbf{U}^{t_3} = \mathbf{P}^{t_3} - \sum_{e=1}^{k(t_3)} (\mathbf{R}^e)^T \bar{\mathbf{f}}_e^{t_3-1} - \sum_{e=1}^{l(t_3)} \mathbf{F}_{ca}^e(\mathbf{L}_0, \mathbf{U}^{t_3-1}) \quad (3.92)$$

그러므로 위의 식에서  $k(t_3)$ ,  $l(t_3)$  그리고  $\mathbf{P}^{t_3}$ 는  $t_2$ 에서의 강성도 방정식과 다음의 관계를 갖는다.

$$\begin{aligned} k(t_3) &= k(t_2) \\ l(t_3) &= l(t_2) \\ \mathbf{P}^{t_3} &= \mathbf{P}^{t_2} \end{aligned} \quad (3.93)$$

양생이 완료되면 새로운 케이블이 정착되고, 이동식 작업차나 거푸집이 다음 세그먼트 가설을 위해 이동하게 된다. 그러므로  $k+1$ 번째 보강형이 구조 부재로 작용하면서 자중이 집중하중 형태에서 분포하중으로 바뀌게 된다. 이 시점을  $t_4$ 라 하면 다음과 같은 강성도 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{e=1}^{k(t_1)} (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{k}_e^{t_4} \mathbf{R}^e + (\mathbf{R}^{k+1})^T \mathbf{k}_{k+1}^{t_4} \mathbf{R}^{k+1} + \sum_{e=1}^{l(t_1)} (\mathbf{K}_c^e + \mathbf{K}_c^{l+1}) \Delta \mathbf{U}^{t_4} \right) \\
&= \mathbf{P}^{t_2} - \mathbf{P}_{k+1} + \tilde{\mathbf{P}}_{k+1} \\
& - \left( \sum_{e=1}^{k(t_1)} (\mathbf{R}^e)^T \bar{\mathbf{f}}_e^{t_4-1} + (\mathbf{R}^{k+1})^T \bar{\mathbf{f}}_{k+1}^{t_4-1} \right) - \left( \sum_{e=1}^{l(t_1)} \mathbf{F}_{ca}^e(\mathbf{L}_0, \mathbf{U}^{t_4-1}) + \mathbf{F}_{ca}^{l+1}(\mathbf{L}_0, \mathbf{U}^{t_4-1}) \right)
\end{aligned} \tag{3.94}$$

여기서  $\mathbf{k}_{k+1}^{t_4}$  과  $\mathbf{K}_c^{l+1}$  은 양생이 완료된  $k+1$  번째 보강형과 장력이 도입된  $l+1$  번째 케이블이 구조 부재로 작용하기 때문에 추가된 해당 부재의 요소 강성도 행렬과 케이블 강성도 행렬이다. 또한  $\tilde{\mathbf{P}}_{k+1}$  은  $k+1$  번째 부재의 분포하중을 나타내는 값이다. 그러므로 구조물 전체에 작용하는 외부하중은  $t_2$  에서의 하중 값  $\mathbf{P}^{t_2}$  에서  $k+1$  번째 부재의 집중하중  $\mathbf{P}_{k+1}$  을 제거하고, 분포하중  $\tilde{\mathbf{P}}_{k+1}$  을 재하한 값이다.

$k+1$  번째 부재가 콘크리트 주탑과 같이 콘크리트만으로 구성된 경우, 이동식 작업차 내지는 거푸집이 제거되기 전까지 콘크리트 내부 응력이 발생하지 않는다고 가정하였으므로 식 (3.94)에서 직전 계산 단계  $t_4-1$  에서의 재단력  $\bar{\mathbf{f}}_{k+1}^{t_4-1}$  은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{f}}_{k+1}^{t_4-1} &= \begin{pmatrix} \int_l \mathbf{B}_a^T N^{t_4-1} dx \\ -\int_l \mathbf{B}_b^T M^{t_4-1} dx \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} -\int_l \mathbf{B}_a^T E_{k+1}^{t_4} A \sum_{i=0}^{t_4-2} (C_{i+\alpha}^{t_4} - C_{i+\alpha}^{t_4-1})(N^{i+1} - N^i) dx - \int_l \mathbf{B}_a^T E_{k+1}^{t_4} A \Delta \varepsilon_{sh}^{t_4} dx \\ \int_l \mathbf{B}_b^T E_{k+1}^{t_4} \sum_{i=0}^{t_4-2} (C_{i+\alpha}^{t_4} - C_{i+\alpha}^{t_4-1})(M^{i+1} - M^i) dx \end{pmatrix} \quad (3.95) \\
&= \begin{pmatrix} -\int_l \mathbf{B}_a^T E_{k+1}^{t_4} A \Delta \varepsilon_{sh}^{t_4} dx \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

여기서 비크리프 계수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
C_{i+\alpha}^{t_4} &= C(t^4, t^{i+\alpha}) \\
C_{i+\alpha}^{t_4-1} &= C(t^4 - 1, t^{i+\alpha})
\end{aligned} \quad (3.96)$$

만일  $k+1$  번째 부재가 CFT 거더 내부의 콘크리트의 경우, 건조수축을 무시한다고 가정하였으므로 재단력  $\bar{\mathbf{f}}_{k+1}^{t_4-1}$  는 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{f}}_{k+1}^{t_4-1} = \mathbf{0} \quad (3.97)$$

또한 식 (3.94)에서  $k+1$  번째 부재에 정착된  $l+1$  번째 케이블이 긴장되는 시점인  $t_4$  이전에는 케이블의 장력이 발생하지 않으므로  $t_4-1$  에서  $l+1$  번째 케이블의 장력은 다음과 같다.

$$\mathbf{F}_{ca}^{l+1}(\mathbf{L}_0, \mathbf{U}^{t_4-1}) = \mathbf{0} \quad (3.98)$$

콘크리트의 양생이 완료되어 추가된 뼈대 구조가 구조 부재로 작용하며, 케이블이 추가되어 장력이 도입되는 임의의 시점  $t_4$ 에 대한 강성도 방정식은 앞의 식(3.87), (3.89), 그리고 (5.92)과 같은 형태로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{e=1}^{k(t_4)} \{(\mathbf{R}^e)^T \mathbf{k}_e^{t_4} \mathbf{R}^e + \mathbf{K}_c^e\} \Delta \mathbf{U}^{t_4} = \mathbf{P}^{t_4} - \sum_{e=1}^{k(t_4)} \{(\mathbf{R}^e)^T \bar{\mathbf{f}}_e^{t_4-1} + \mathbf{F}_{ca}^e(\mathbf{L}_0, \mathbf{U}^{t_4-1})\} \quad (3.99)$$

여기서  $k(t_4)$ ,  $l(t_4)$ 는 다음과 같이 기존의 부재 개수에서 각각 하나의 부재가 추가된 것으로 표현된다.

$$\begin{aligned} k(t_4) &= k(t_3) + 1 \\ l(t_4) &= l(t_3) + 1 \end{aligned} \quad (3.100)$$

그리고 외부하중인  $\mathbf{P}^{t_4}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{t_4} &= \mathbf{P}^{t_2} - \mathbf{P}_{k+1} + \tilde{\mathbf{P}}_{k+1} \\ &= \mathbf{P}^{t_1} + \tilde{\mathbf{P}}_{k+1} \end{aligned} \quad (3.101)$$

식 (3.99)는 구조 부재가 증가하였을 뿐, 앞의 식 (3.87)과 동일한 형태이다. 그러므로 새로운 부재를 추가할 때마다 식 (3.87)부터 식 (3.99)까지의 과정을 반복하여 시공 단계 해석을 수행한다.

시공 단계 해석에서 또한 중요하게 생각해야 할 부분이 폐합 해석이다. 하지만 폐합 방법에 따라 해석법이 결정되어 일반화하는 것은 어려움이 있

다. 현장 타설 콘크리트 사장교의 경우 폐합 지점에 추가의 부재를 설치하는 것으로 쉽게 폐합을 할 수 있기 때문에, 시공 중 폐합 과정은 추가 부재를 설치하는 것으로 모델링한다.

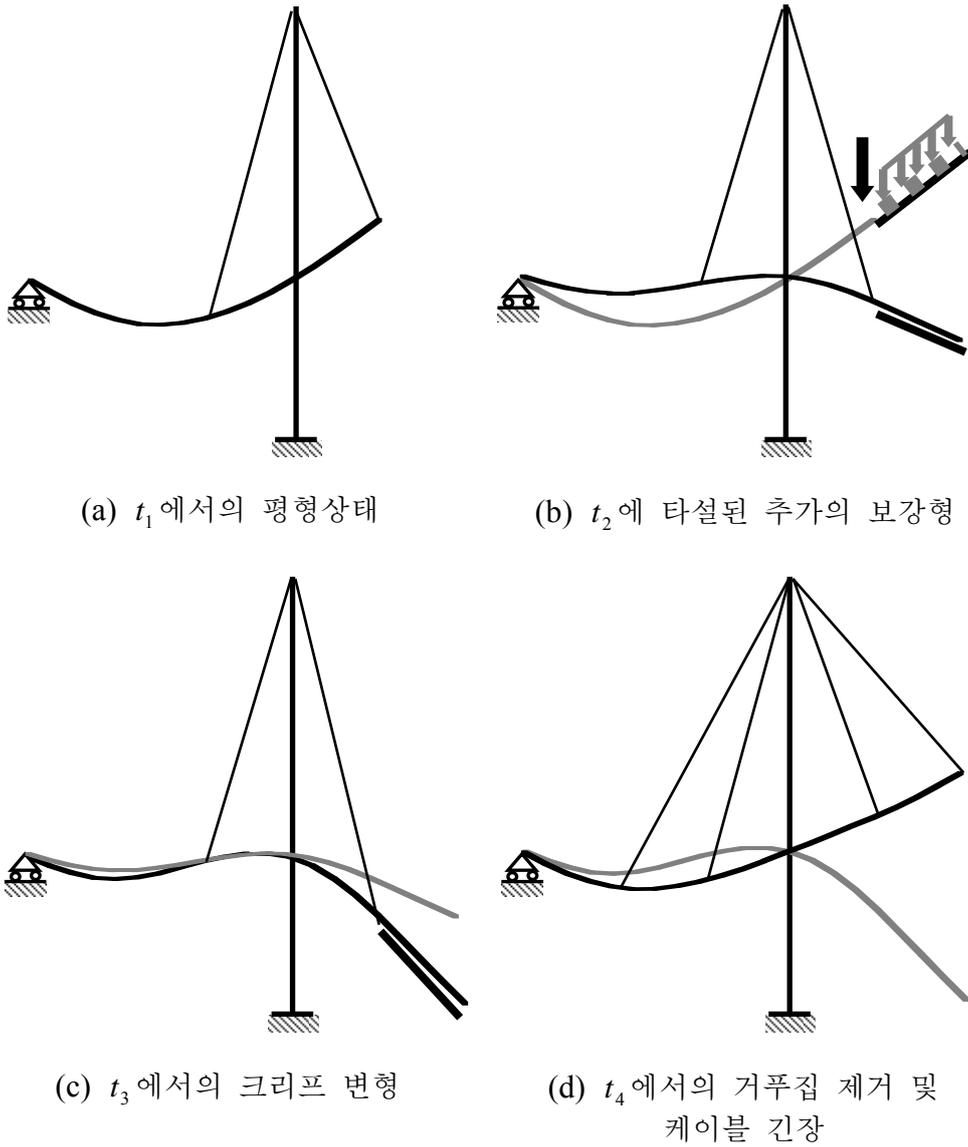


그림 3.7 시공단계를 고려한 장기거동 해석 과정

#### 4. 최적화를 이용한 초기평형상태 해석

대부분의 뼈대 구조물은 무응력 상태에서도 강성을 가지기 때문에 변형 전의 기하형상으로부터 부재의 초기 길이가 결정된다. 그러나 케이블은 장력이 도입되기 전에는 강성이 발생하지 않기 때문에 무응력 상태의 기하형상을 정의할 수 없다. 따라서 케이블 지지 구조물에서는 주어진 설계 조건을 만족시키는 케이블의 장력이나 초기 길이를 결정하는 해석이 필요하며, 이러한 해석을 초기평형상태 해석이라고 정의한다. 콘크리트 재료가 사용된 사장교는 시간의존적 변형에 의해 완공 직후의 초기평형상태가 시간이 지남에 따라 변화하게 된다. 그러므로 초기평형상태가 목표형상이나 설계중단곡선과 같은 설계조건을 만족시키는 상태로 완공되었더라도 시간이 지나면서 재령효과가 발생하고, 크리프 및 건조수축 변형이 발생하여 구조물이 사용되는 시점에서는 구조물의 형상이 목표상태에서 벗어나게 된다. 그러므로 콘크리트 재료가 사용된 사장교의 초기평형상태 해석에서는 목표상태를 만족시키는 목표시점을 설정하여야 한다. 목표시점은 콘크리트의 시간의존적 거동이 안정화되어 구조물에 큰 영향을 미치지 못하는 시점이 바람직하다. 이 장에서는 콘크리트 사장교의 목표상태를 목표시점에서의 목표형상과 뼈대 구조물에 발생하는 모멘트 최소화로 정의하고, 이를 동시에 만족시키기 위하여 최적화 기법을 이용한 초기평형상태 해석법을 제시한다. 또한 초기평형상태 해석을 위한 CFT 거더 교량의 민감도 해석을 수행한다.

#### 4.1 최적화를 이용한 초기평형상태 해석

초기평형상태 해석에는 구조물의 변위 뿐 아니라 케이블 부재의 초기 무응력 길이가 미지수로 포함되어 있으므로 평형방정식 외에 케이블 개수 만큼 추가의 조건이 필요하다. 필요한 추가의 조건으로는 사하중 상태에서 교량이 만족시켜야 하는 설계상의 목표상태를 이용할 수 있으며, 사하중 하에서의 목표형상(Target Configuration under Dead Loads; TCUD)이 가장 많이 사용되고 있다. 그림 4.1 에서 보인 바와 같이 사장교의 경우 목표형상은 일반적으로 사장 케이블이 거더에 정착되는 곳에서의 사하중 상태에서 수직 좌표와 주탑의 정점부에서의 수평 좌표에 의하여 정의된다. 목표형상을 정의하는 절점을 제어절점으로, 평형상태에서의 위치가 주어진 제어절점에서의 자유도를 제어자유도로 지칭한다. 팬 타입 사장교와 같이 최외측 백스테이 케이블이 정착되는 지점 변위는 이미 지점 조건으로서 정의되었기 때문에 추가의 조건으로 사용할 수 없다. 이런 경우에는 사하중 상태에서 주탑 정점부의 수평 위치를 제어자유도로 사용할 수 있으며, 일반적

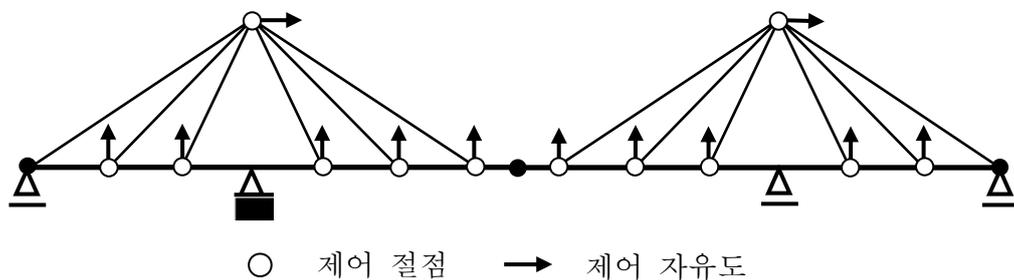


그림 4.1 사장교에서의 제어절점 및 제어자유도

으로 사하중 상태에서 주탑 정점부의 수평 변위가 발생하지 않아야 한다는 조건을 사용한다.

콘크리트를 이용한 케이블 지지 구조물은 시간이 지남에 따라 크리프, 건조수축 그리고 재령효과 등으로 인해 구조물에 추가적인 변위가 발생하므로 목표형상 뿐만 아니라 목표시점을 정하여야 한다. 목표시점까지 콘크리트 구조물에서 발생한 변위가 목표형상과 일치해야 한다는 조건을 다음과 같이 최적화 문제에 대하여 정의할 수 있다.

$$\text{Min}_{T_i} \Pi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{ncons} (\bar{u}_j(\mathbf{T}, \bar{t}) - u_j)^2 \quad (4.1)$$

여기서  $u_j$ 는 무응력 상태의 뼈대구조물에 대한 목표형상에서  $j$  번째 제어자유도의 변위이고,  $ncons$ 는 제어자유도의 개수,  $\bar{u}_j$ 는 사장교의 평형방정식 (3.76)에 의해 결정되는  $j$  번째 제어자유도의 변위이다. 식 (4.1)에서 정의된 최적화 문제를 풀기 위하여는 반드시 사장 케이블의 개수와 동일한 제어자유도가 정의되어야 하며, 만일 제어자유도의 수가 케이블 부재 개수보다 적으면 식 (4.1)에서 정의된 목적함수의 헤시안 행렬이 특이 행렬이 되기 때문에 유일한 해를 결정할 수 없다. 사장 케이블 부재의 개수와 같이 수의 제어자유가 정의되었다면, 최적화 문제 (4.1)를 풀기 위한 1 차 필요조건은 케이블 부재의 개수와 같은 독립적인 방정식으로 표시되므로 사장교의 평형방정식 (3.76)을 풀기 위한 추가의 조건식으로 사용할 수 있다.

사장교의 목표상태를 반드시 기하학적 조건으로 정의할 필요는 없으며 여러가지 공학적인 조건을 이용하여 정의할 수 있다. 이러한 공학적 조건 중에서 사장교를 구성하고 있는 뼈대 구조물의 거동에 중요한 영향을 미치는 교량의 종단 평면내의 휨 모멘트가 목표시점에서 최소화되는 상태를 목표상태로 정의할 수 있으며, 이러한 목표상태는 다음과 같은 최적화 문제로 정의할 수 있다.

$$\text{Min}_{T_i} \Pi = \frac{1}{2} \int_{L_F} (M(\mathbf{T}, \bar{t}))^2 dL_F \quad (4.2)$$

식 (4.2)에서  $L_F$  는 뼈대 구조물의 재축방향 길이이고, 목적함수의 피적분 함수는 뼈대구조물에서 발생하는 휨 모멘트이다. 뼈대구조물에 발생하는 휨 모멘트는 각 케이블 부재의 무응력 길이에 의해 결정되므로 최적화문제 (4.2)의 1 차 필요조건은 케이블 부재의 개수와 동일한 독립적인 방정식으로 표시되므로 사장교의 평형방정식 (3.76)을 풀기 위한 추가의 조건식으로 사용할 수 있다.

사장교의 초기평형상태 해석을 위하여 목표형상에 대한 최적화문제 (4.1)를 사용하는 경우에는 목표형상을 정확히 구현할 수 있지만 뼈대구조물에 발생하는 부재력을 고려할 수 없고 사장 케이블의 개수와 동일 수의 제어자유도가 정의되어야 하는 단점이 있는 반면 모멘트 최소화 조건인 식 (4.2)를 사용할 경우에는 목표형상을 고려할 수 없는 단점이 있다. 목표시

점에서 사장교의 목표형상과 모멘트 최소화를 동시에 고려할 수 있는 최적화 문제를 다음과 같이 정의한다.

$$\text{Min}_{T_i} \Pi = \frac{(1-\alpha)}{2} \frac{1}{\hat{u}^2} \sum_{j=1}^{ncons} (\bar{u}_j(\mathbf{T}, \bar{t}) - u_j(\mathbf{T}, \bar{t}))^2 + \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\hat{M}^2} \int_{L_F} (M(\mathbf{T}, \bar{t}))^2 dL_F \quad (4.3)$$

여기서  $\alpha$ 는 가중치로서 0 과 1 사이의 값을 가지면,  $\hat{u}$  및  $\hat{M}$ 는 서로 다른 물리량에 의하여 정의되는 목적함수의 각 항을 무차원화하고 해석 변수  $\alpha$ 가 목적함수에 미치는 영향이 0 과 1 사이에서 균등히 분포할 수 있도록 하기 위하여 사용하는 표준화 계수로서 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \hat{u}^2 &= \sum_{j=1}^{ncons} ((\bar{u}_j)_{op} - u_j)^2 \\ \hat{M}^2 &= \int_{L_F} (M_{op})^2 dL_F \end{aligned} \quad (4.4)$$

$(\bar{u}_j)_{op}$ 와  $(M)_{op}$ 는 각각 모멘트 최소화에 의한 초기평형상태 해석인 최적화 문제 식 (4.2)을 풀어 결정된  $j$  번째 제어자유도의 변위와 휨 모멘트이다. 최적화 문제 식 (4.3)을 정의하기 위하여는 모멘트 최소화 문제의 해가 필요하며, 식 (4.3)을 정의하기 위하여는 모멘트 최소화 문제인 식 (4.2)의 해를 먼저 구하여야 한다. 최적화 문제 (4.3)에서 첫번째 적분항은 목표형상을 이용한 초기평형상태 해석법의 목적함수와 동일하며, 두번째 적분항은 모멘트를 최소화하는 초기평형상태 해석법의 목적함수와 동일하다.  $\alpha$  값이 0인 경우 목표형상 해석,  $\alpha$  값이 1이면 모멘트 최소화 해석으로 지칭하고,

$0 < \alpha < 1$ 인 경우를 복합초기평형상태 해석으로 정의한다.

식 (4.3)은 비선형 방정식이 되므로 이 식을 풀기 위하여 다음과 같이 2 차 최적화 문제를 유도할 수 있다[6].

$$\text{Min}[\frac{1}{2} \Delta \mathbf{L}_0^T \mathbf{H}_k \Delta \mathbf{L}_0 + \Delta \mathbf{L}_0^T \mathbf{G}_k] \quad (4.5)$$

식 (4.5)에서  $\mathbf{G}_k$  는 목적함수의 Gradient vector 이고  $\mathbf{H}_k$  는 목적함수의 Hessian matrix 로서 다음의 식 (4.6)과 같다.  $\mathbf{G}_k, \mathbf{H}_k$  를 구성하기 위한 민감도 식은 4.2 절의 민감도 해석에서 다루도록 하겠다.

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_k &= \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{L}_0^k} \\ &= \frac{(1-\alpha)}{\hat{u}^2} \sum_{j=1}^{ncons} (\bar{u}_j(\mathbf{T}, \bar{t}) - u_j) \frac{\partial \bar{u}_j(\mathbf{T}, \bar{t})}{\partial \mathbf{L}_0^k} + \frac{\alpha}{\hat{M}^2} \int_{L_F} M(\mathbf{T}, \bar{t}) \frac{\partial M(\mathbf{T}, \bar{t})}{\partial \mathbf{L}_0^k} dL_F \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_k &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{L}_0^k \partial \mathbf{L}_0^k} \\ &\cong \frac{(1-\alpha)}{\hat{u}^2} \sum_{j=1}^{ncons} \frac{\partial \bar{u}_j(\mathbf{T}, \bar{t})}{\partial \mathbf{L}_0^k} \frac{\partial \bar{u}_j(\mathbf{T}, \bar{t})}{\partial \mathbf{L}_0^k} + \frac{\alpha}{\hat{M}^2} \int_{L_F} \frac{\partial M(\mathbf{T}, \bar{t})}{\partial \mathbf{L}_0^k} \frac{\partial M(\mathbf{T}, \bar{t})}{\partial \mathbf{L}_0^k} dL_F \end{aligned}$$

식 (4.5)의 2 차 최적화 문제에 대하여 1 차 필요조건은 목적함수를 케이블 길이에 대하여 미분하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{H}_k \Delta \mathbf{L}_0 + \mathbf{G}_k = 0 \quad (4.7)$$

식 (4.7)의 1 차 필요조건을 풀면 정의한 목표상태를 구하기 위한 케이블 무응력 길이의 증분값을 구할 수 있다.

$$\Delta \mathbf{L}_0 = -\mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{G}_k \quad (4.8)$$

## 4.2 민감도 해석

### 4.2.1 완성계의 민감도 해석

식 (4.6)에서의 케이블 무응력 길이에 대한 변위 민감도와 모멘트 민감도는 케이블 지지 구조물의 평형 방정식을 케이블의 무응력 길이  $\mathbf{L}_0$ 에 대해 직접 미분하여 구할 수 있다[3]. 식 (3.76)을  $\mathbf{L}_0$ 에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_F^{n+1} \frac{\partial \Delta \mathbf{U}^{n+1}}{\partial \mathbf{L}_0} + \frac{\partial \mathbf{F}_{ca}(\mathbf{L}_0, \mathbf{x}^{n+1})}{\partial \mathbf{L}_0} = 0 - \frac{\partial \bar{\mathbf{P}}^{n+1}}{\partial \mathbf{L}_0} \quad (4.9)$$

여기서 외부하중은 케이블의 무응력 길이와는 무관하기 때문에 이에 대한 미분항은 0 이된다. 또한 뼈대 요소의 재단력에 대한 미분항은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{P}}^{n+1}}{\partial \mathbf{L}_0} = \sum_e (\mathbf{R}^e)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^n}{\partial \mathbf{L}_0} + \sum_e (\mathbf{R}^e)^T \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_{conc}^n}{\partial \mathbf{L}_0} + \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_{steel}^n}{\partial \mathbf{L}_0} \right) \quad (4.10)$$

여기서 시간의존적 거동이 발생하는 구조 부재에서 크리프 변형만 케이블의 무응력 길이에 따라 변화하며, 건조수축과 같은 변형은 케이블의 무응

력 길이라는 무관하므로 이에 대한 민감도는 0 이 된다. 따라서 식 (3.27)을 참고할 때, 시간의존적 거동이 발생하는 구조 부재의 시간에 따른 내력 민감도는 다음과 같다.

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^n}{\partial \mathbf{L}_0} = \left( \begin{array}{l} \int_l \mathbf{B}_a \frac{\partial N^n}{\partial \mathbf{L}_0} dx - \int_l \mathbf{B}_a E_e^{n+1} A \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) \left( \frac{\partial N^{i+1}}{\partial \mathbf{L}_0} - \frac{\partial N^i}{\partial \mathbf{L}_0} \right) dx \\ \int_l \mathbf{B}_b \frac{\partial M^n}{\partial \mathbf{L}_0} dx - \int_l \mathbf{B}_b E_e^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) \left( \frac{\partial M^{i+1}}{\partial \mathbf{L}_0} - \frac{\partial M^i}{\partial \mathbf{L}_0} \right) dx \end{array} \right) \quad (4.11)$$

또한 식(3.67), (3.68)을 참고하여 CFT 거더 부재에서 콘크리트와 강관 요소의 내력 민감도를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_{conc}^n}{\partial \mathbf{L}_0} = \left( \begin{array}{l} \int_l \mathbf{B}_a \frac{\partial N_{conc}^n}{\partial \mathbf{L}_0} dx \\ \int_l \mathbf{B}_b \frac{\partial M_{conc}^n}{\partial \mathbf{L}_0} dx \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} \int_l \mathbf{B}_a E_e^{n+1} A_{conc} \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) \left( \frac{\partial N_{conc}^{i+1}}{\partial \mathbf{L}_0} - \frac{\partial N_{conc}^i}{\partial \mathbf{L}_0} \right) dx \\ \int_l \mathbf{B}_b E_e^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) \left( \frac{\partial M_{conc}^{i+1}}{\partial \mathbf{L}_0} - \frac{\partial M_{conc}^i}{\partial \mathbf{L}_0} \right) dx \end{array} \right) \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_{steel}^n}{\partial \mathbf{L}_0} = \left( \begin{array}{l} \int_l \mathbf{B}_a \frac{\partial N_{conc}^n}{\partial \mathbf{L}_0} dx \\ \int_l \mathbf{B}_b \frac{\partial M_{conc}^n}{\partial \mathbf{L}_0} dx \end{array} \right) \quad (4.13)$$

식 (4.9)를 변위 민감도에 대해 정리하기 위하여 케이블 무응력 길이에 대한 장력의 민감도를 유도한다. 식 (3.46)을 케이블의 무응력 길이에 대하여

미분하여 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial L_0^e} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^e}{\partial L_0^e} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \frac{\partial \mathbf{F}_1^e}{\partial L_0^e} \quad (4.14)$$

식 (4.14)를 장력의 초기 길이에 대한 민감도에 대하여 표시하고, 케이블 부재의 외적 평형방정식인 식 (3.49)를 케이블의 무응력장 길이에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}_1^e}{\partial L_0^e} &= - \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \right)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^e}{\partial L_0^e} + \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \right)^{-1} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial L_0^e} = \mathbf{k}_g^e + \mathbf{k}_c^e \left( \frac{\partial \mathbf{u}_2^e}{\partial L_0^e} - \frac{\partial \mathbf{u}_1^e}{\partial L_0^e} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{F}_2^e}{\partial L_0^e} &= \frac{\partial (-\mathbf{F}_1^e - \mathbf{w}L_0^e)}{\partial L_0^e} = -(\mathbf{k}_g^e + \mathbf{w}) - \mathbf{k}_c^e \left( \frac{\partial \mathbf{u}_2^e}{\partial L_0^e} - \frac{\partial \mathbf{u}_1^e}{\partial L_0^e} \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

여기서  $\mathbf{k}_g^e$ 는 케이블의 기하 강성도 행렬이다[7]. 식 (4.15)를 다음과 같은 단일 행렬식으로 표시할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{ca}(\mathbf{L}_0, \mathbf{x}^{n+1})}{\partial \mathbf{L}_0} = \mathbf{K}_c^{n+1} \frac{\partial \mathbf{U}^{n+1}}{\partial \mathbf{L}_0} + \mathbf{K}_g^{n+1} \quad (4.16)$$

위의 식을 이용하면 식 (4.9)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{K}_F^{n+1} \frac{\partial \Delta \mathbf{U}^{n+1}}{\partial \mathbf{L}_0} + \mathbf{K}_c^{n+1} \frac{\partial \mathbf{U}^{n+1}}{\partial \mathbf{L}_0} + \mathbf{K}_g^{n+1} = - \frac{\partial \bar{\mathbf{P}}^{n+1}}{\partial \mathbf{L}_0} \quad (4.17)$$

위의 식에서  $t^n$ 까지의 변위 민감도와  $\Delta t$  동안의 변위 민감도 증분량에 관

한 항으로 분리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_F^{n+1} \frac{\partial \Delta \mathbf{U}^{n+1}}{\partial \mathbf{L}_0} + \mathbf{K}_c^{n+1} \frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial \mathbf{L}_0} + \mathbf{K}_c^{n+1} \frac{\partial \Delta \mathbf{U}^{n+1}}{\partial \mathbf{L}_0} + \mathbf{K}_g^{n+1} = - \frac{\partial \bar{\mathbf{P}}^{n+1}}{\partial \mathbf{L}_0} \quad (4.18)$$

변위 민감도의 증분량은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$(\mathbf{K}_F^{n+1} + \mathbf{K}_c^{n+1}) \frac{\partial \Delta \mathbf{U}^{n+1}}{\partial \mathbf{L}_0} = - \frac{\partial \bar{\mathbf{P}}^{n+1}}{\partial \mathbf{L}_0} - \mathbf{K}_c^{n+1} \frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial \mathbf{L}_0} - \mathbf{K}_g^{n+1} \quad (4.19)$$

위의 식에서 구해지는 변위 증분량의 민감도는 수직 변위 증분량의 민감도와 수평 변위 증분량의 민감도로 구성되어 있다. 그러므로  $t^{n+1}$ 에서의 수직 및 수평 변위 증분량의 민감도를 이용하면  $t^{n+1}$ 에서의 모멘트와 축력의 민감도를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial M^{n+1}}{\partial \mathbf{L}_0} &= \frac{\partial M^n}{\partial \mathbf{L}_0} - E_e^{n+1} I \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial \Delta \mathbf{w}^{n+1}}{\partial \mathbf{L}_0} \right) \\ &\quad - E_e^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) \left( \frac{\partial M^{i+1}}{\partial \mathbf{L}_0} - \frac{\partial M^i}{\partial \mathbf{L}_0} \right) \\ \frac{\partial N^{n+1}}{\partial \mathbf{L}_0} &= \frac{\partial N^n}{\partial \mathbf{L}_0} + E_e^{n+1} A \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \Delta \mathbf{u}^{n+1}}{\partial \mathbf{L}_0} \right) \\ &\quad - E_e^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} (C_{i+\alpha}^{n+1} - C_{i+\alpha}^n) \left( \frac{\partial N^{i+1}}{\partial \mathbf{L}_0} - \frac{\partial N^i}{\partial \mathbf{L}_0} \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

위에서 구한 모멘트와 축력의 민감도를 이용하면 식 (4.10)을 이용하여 다음 시간 단계의 민감도 계산에 사용되는 재단력의 민감도를 구성할 수 있

다. 이와 같은 방법으로 목표 시점  $\bar{t}$  까지 시간 단계를 증가시키면서 변위 증분의 민감도와 모멘트 및 축력의 민감도를 축차적으로 계산하면, 목표 시점에서의 변위 민감도를 구할 수 있다.

#### 4.2.2 시공단계를 고려한 민감도 해석

목표 형상 해석을 위해서는 케이블의 무응력 길이에 대한 목표 시점에서의 변위 민감도를 구해야한다. 식 (4.19)를 정리하면 변위 민감도의 증분량은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{U}^{n+1}}{\partial \mathbf{L}_0} = -(\mathbf{K}_F^{n+1} + \mathbf{K}_c^{n+1})^{-1} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{P}}^{n+1}}{\partial \mathbf{L}_0} + \mathbf{K}_c^{n+1} \frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial \mathbf{L}_0} + \mathbf{K}_g^{n+1} \right) \quad (4.21)$$

즉, 외부 하중이나 건조 수축과 같이 케이블의 무응력 길이와 무관한 효과는 변위 민감도에 영향을 주지 않는다. 그러므로 시공 과정에서 보강형의 인양이나 콘크리트의 타설과 같이 하중이 증가하는 단계에서는 이를 특별히 변위 민감도에 반영할 필요는 없다. 다만, 외부 하중이나 건조 수축으로 인한 변위가 케이블의 강성도 행렬  $\mathbf{K}_c^{n+1}$ 에 영향을 미치므로 시공 단계 해석을 통해 얻은  $\mathbf{K}_c^{n+1}$  값을 사용해야 한다.

새로 추가된 뼈대 부재가 양생이 완료되어 구조 부재로 작용하는 시점에서는 재단력이 발생하므로 이에 대한 민감도를 고려해주어야 한다.  $k+1$  번째 뼈대 부재가 추가되는 시점을  $t_4$  라 하면, 식 (4.21)은 다음과 같이 쓸

수 있다.

$$\frac{\partial \Delta U^{t_4}}{\partial \mathbf{L}_0} = -(\mathbf{K}_F^{t_4} + \mathbf{K}_c^{t_4})^{-1} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{P}}^{t_4}}{\partial \mathbf{L}_0} + \mathbf{K}_c^{t_4} \frac{\partial \mathbf{U}^{t_4-1}}{\partial \mathbf{L}_0} + \mathbf{K}_g^{t_4} \right) \quad (4.22)$$

여기서 뼈대 요소의 재단력 민감도와 케이블 부재의 강성도 행렬은 다음과 같이 추가된부재까지 조합된 값을 사용한다.

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{P}}^{t_4}}{\partial \mathbf{L}_0} = \sum_{e=1}^{k(t_4)} (\mathbf{R}^e)^T \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^{t_4-1}}{\partial \mathbf{L}_0} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{K}_c^{t_4} = \sum_{e=1}^{l(t_4)} \mathbf{K}_c^e \quad (4.24)$$

식 (4.23)과 (4.24)에서  $k(t_4)$ ,  $l(t_4)$ 는 식 (3.100)과 동일하다.

$$\begin{aligned} k(t_4) &= k(t_3) + 1 = k + 1 \\ l(t_4) &= l(t_3) + 1 = l + 1 \end{aligned} \quad (4.25)$$

이처럼 목표 형상 해석에서는 콘크리트가 타설되는 시점이나 양생 기간에 관계없이 새로이 가설된 부재가 구조 부재로 작용하는 시점만이 고려의 대상이 된다. 추가된 뼈대 부재가 구조 부재로 작용하는 순간부터 부재의 재단력에 대한 기존 케이블들의 민감도가 발생한다. 또한 케이블 부재에 장력이 도입되는 시점부터 추가된 케이블이 변위 민감도에 영향을 주게 된다.

건조 수축과 달리 크리프 현상은 콘크리트 부재의 재단력에 영향을 받으므로 재단력의 민감도를 구할 때도 이를 고려해준다. 그러므로  $k+1$ 번째

빠대 부재가  $t_4$ 에서 추가되면 이 때부터 크리프가 발생하므로 다음의 식을 통해 이를 재단력의 민감도 계산에 반영한다.

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_{k+1}^{t_4^{-1}}}{\partial \mathbf{L}_0} = \left( \begin{array}{l} \int_l \mathbf{B}_a \frac{\partial N^{t_4^{-1}}}{\partial \mathbf{L}_0} dx \\ - \int_l \mathbf{B}_b \frac{\partial M^{t_4^{-1}}}{\partial \mathbf{L}_0} dx + \end{array} \right) \quad (4.26)$$

$$+ \left( \begin{array}{l} - \int_l \mathbf{B}_a E_{k+1}^{t_4} A \sum_{i=0}^{t_4-2} (C_{i+\alpha}^{t_4} - C_{i+\alpha}^{t_4-1}) \left( \frac{\partial N^{i+1}}{\partial \mathbf{L}_0} - \frac{\partial N^i}{\partial \mathbf{L}_0} \right) dx - 0 \\ \int_l \mathbf{B}_b E_{k+1}^{t_4} \sum_{i=0}^{t_4-2} (C_{i+\alpha}^{t_4} - C_{i+\alpha}^{t_4-1}) \left( \frac{\partial M^{i+1}}{\partial \mathbf{L}_0} - \frac{\partial M^i}{\partial \mathbf{L}_0} \right) dx \end{array} \right)$$

이와 같은 과정을 통해 시공 단계에 따른 민감도 해석을 수행하여 목표 시점에서의 민감도 값을 구할 수 있다.

## 5. 해석 예제

이 연구에서 제안한 초기평형상태 해석법을 CFT 거더 교량에 적용한다. 목표시점에서 목표형상뿐만 아니라 뼈대 구조물에 발생하는 모멘트를 최소화하기 위하여 최적화 기법을 이용한 초기평형상태 해석법을 적용한다. 초기평형상태 해석법은 완성계 해석은 물론 시공단계를 고려한 시공단계 해석에 적용한다. 이를 통하여 제안된 방법의 적용 가능성과 타당성을 검증하였다.

해석 예제는 캔틸레버 공법으로 시공되고 중앙 경간과 측 경간 길이가 각각 330m 와 117m 인 5 경간 연속 사장교이다. 주탑 높이는 90m 이고, 케이블은 모두 52 개가 사용되었다. 콘크리트 주탑을 사용하였고 보강형은

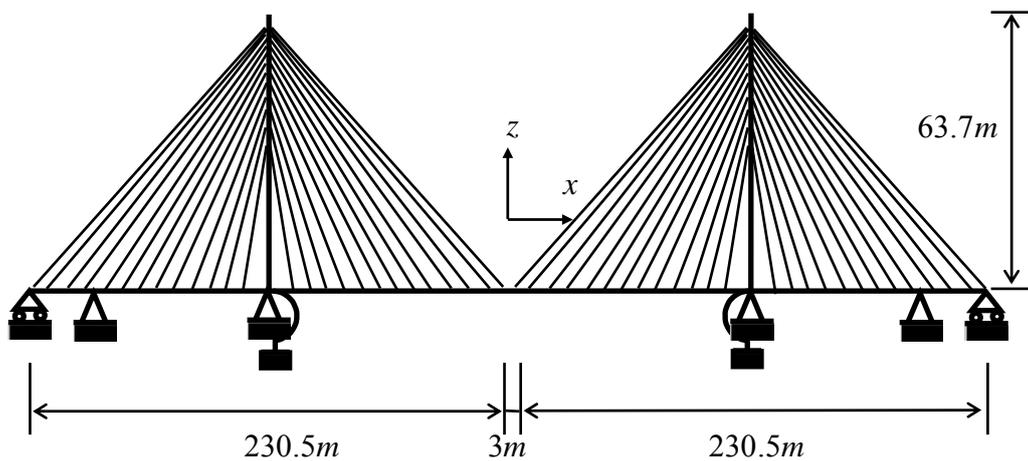


그림 5.1 CFT 거더 교량의 종단면도

표 5.1 CFT 거더 교량의 구조 요소별 주요 제원

부재	$E$ or $E_{ci}$ ( $tonf / m^2$ )	$A$ ( $m^2$ )	$I_y$ ( $m^4$ )	$I_z$ ( $m^4$ )	$w$ ( $tonf / m$ )
슬래브 (콘크리트)	$3.34 \times 10^6$	6.00	0.125	288	2.5
CFT 거더 (콘크리트)	$3.23 \times 10^6$	3.31	0.218	0.218	2.5
CFT 거더 (강관)	$2.04 \times 10^7$	0.23	0.0303	0.0303	7.85
주탑 (0 ~ 30m)	$3.34 \times 10^6$	10.52	10.37	30.31	2.5
주탑 (30 ~ 63.7m)	$3.34 \times 10^6$	10.37	10.52	31.87	2.5
케이블 (9 ~ 17 번)	$2.0 \times 10^7$	$6.9 \times 10^{-3}$	-	-	0.054
케이블 (4 ~ 8, 18 ~ 20 번)	$2.0 \times 10^7$	$8.1 \times 10^{-3}$	-	-	0.064
케이블 (3, 21 ~ 23 번)	$2.0 \times 10^7$	$9.3 \times 10^{-3}$	-	-	0.073
케이블 (1 ~ 2 번)	$2.0 \times 10^7$	$14.7 \times 10^{-3}$	-	-	0.115
케이블 (24 ~ 26 번)	$2.0 \times 10^7$	$11.1 \times 10^{-3}$	-	-	0.087

CFT 거더 요소를 적용하여 CFT 거더를 적용한 신형식 교량의 타당성을 확인하였다. 그림 5.1 은 CFT 거더 교량의 종단면도이고 자세한 제원은 표 5.1 에 주어져 있다.

52 개의 케이블은 그림 5.1 의 왼쪽부터 오른쪽까지 순서대로 1 번부터 52 번까지 케이블 번호를 부여한다. 크리프 변형도를 계산하기 위한 수치적 분석에서  $\alpha = 0.5$ ,  $\Delta t = 1$  day 를 사용하였다. 완성계 해석은 30 일에 구조물이 완공되고, 콘크리트의 장기 거동이 모두 발현되기에 충분한 약 3 년 뒤

인 1000 일을 목표시점으로 하였다. 시공 단계 해석은 균형 캔틸레버 공법으로 시공되었다. 330 일과 750 일에 주탑과 거더가 완공되고, 760 일에 폐합이 이루어지며 목표시점은 1500 일로 정하였다.

해석 예제는 식 (4.3)에서  $\alpha$  값이 0 인 목표형상 해석과  $\alpha$  값이 1 인 모멘트 최소화 해석을 비교하였으며, 복합 초기평형상태 해석은  $\alpha = 0.5$  를 사용하고 사용하고 제어자유도가 52 개인 경우와 28 인 경우의 해석 결과를 비교하였다. 목표형상은 주탑 상단의 수평 변위와 거더의 케이블 정착 지점 수직 방향 변위가 0 이 되는 형상으로 설정하였다. 제어 절점은 그림 5.2 와 같이 지점부를 제외한 거더의 정착구와 양쪽 주탑의 정점부이며, 제어 자유도는 거더는 수직 방향이고 주탑은 수평 방향으로 설정하였다. 제어 절점은 왼쪽 주탑 정점부를 1 번, 오른쪽 주탑 정점부를 2 번, 나머지 제어 절점을 왼쪽부터 오른쪽 순으로 3 번부터 52 번까지 번호를 부여하였다. 28 개의 제어 자유도를 사용하는 경우는 주탑에서의 제어 자유도는 동일하

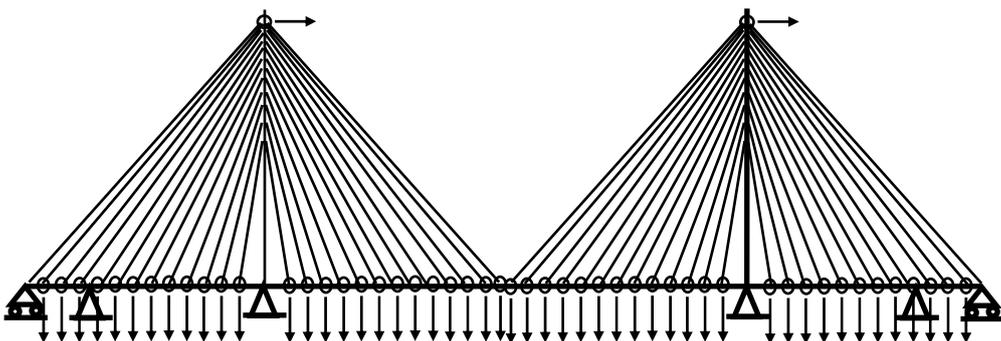


그림 5.2 52 개의 제어 절점과 제어 자유도

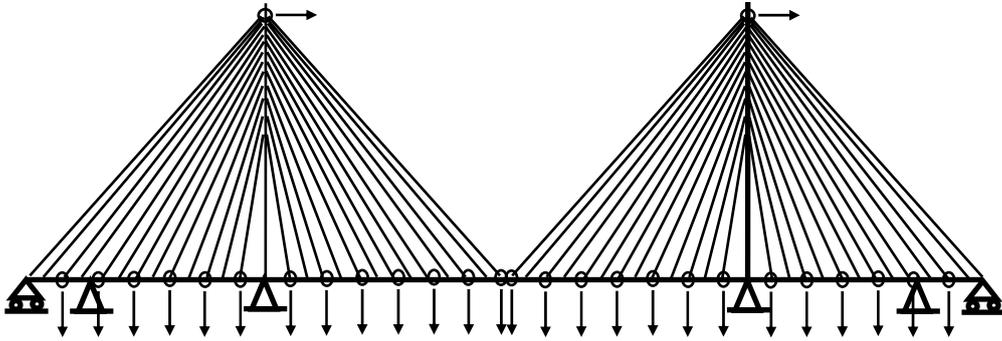


그림 5.3 28 개의 제어 절점과 제어 자유도

고, 거더의 제어 자유도는 반으로 줄었다. 28 개의 제어 자유도를 사용하는 경우 제어 절점과 제어 자유도는 그림 5.3 과 같다.

최적화기법을 이용한 초기평형상태 해석에서 사용한 수렴조건은 다음과 같다.

$$\frac{\|\Delta \mathbf{T}_0^k\|}{\|\mathbf{T}_0^k\|} \leq 10^{-3} \quad (5.1)$$

여기서  $\mathbf{T}_0^k, \Delta \mathbf{T}_0^k$  는 각각 현재의 반복계산 단계에서 계산된 케이블 장력과 케이블 장력의 변화량이다.

## 5.1 완성계 해석

목표시점에서 각 케이블에서 발생하는 케이블의 장력을 그림 5.4 에 보이고 있다. 중앙 경간에 설치되는 케이블에서는 각 목표상태에 대하여 거의 동일한 장력이 계산되었으며, 측경간에 설치되는 케이블의 장력은 목표

형상 해석에서 다르게 계산되었다.

그림 5.5 와 그림 5.7 은 각각 목표시점에서 목표상태에 따른 주탑의 변위와 거더의 변위를 보이고 있다. 그림 5.5 에서 목표형상 해석에서는 주탑 상부에서 정의된 제어자유도에서 변위가 발생하지 않으나 모멘트 최소화 경우에는 기하학적 구속이 없기 때문에 주탑 상부에서 변위가 발생하였다. 52 개의 제어자유도를 사용하는 복합 초기평형상태 해석에서 발생한 주탑의 변위가 28 개의 제어자유도를 사용한 경우에 비하여 목표형상해석에 더 근접하여 있다. 그림 5.7 에서도 목표형상 해석은 각 제어자유도에서 변위가 발생하지 않으나 모멘트 최소화의 경우에는 변위가 발생하고 있다. 복합 초기평형상태 해석의 경우 제어 자유도가 정의되기 때문에 모멘트 최소화 비하여 목표형상을 잘 맞추고 있으며, 역시 52 개의 제어자유도를 사용한 경우 목표형상에 더욱 가까운 모습을 보여주고 있다. 그림 5.5 와 그림 5.7 에서 복합 초기평형상태해석의 경우 주탑의 변위가 목표형상 해석과 모멘트 최소화에 의한 주탑의 변위 사이에서 발생하여 제안된 방법의 타당성을 보이고 있다.

목표시점에서 각 목표상태에 따른 주탑에 발생한 모멘트를 그림 5.6 에 도시하였다. 모멘트 최소화 해석을 통하여 목표형상 해석에서 발생한 주탑의 모멘트를 감소시킬 수 있음을 볼 수 있다. 그림 5.5 에서 목표형상 해석을 통한 주탑의 변위가 거더의 목표형상을 맞추기 위해 주탑의 가운데가 휘어져 있는 것을 볼 수 있고, 이는 주탑의 모멘트를 크게 발생시키고 있

다. 모멘트 최소화 해석을 통하여 주탑에 모멘트가 거의 발생하지 않도록 할 수 있고, 복합 초기평형상태 해석에서도 모든 제어자유도를 사용하고도 주탑에 발생한 모멘트를 충분히 감소시키고 있다. 그림 5.16 에서 모멘트 최소화 해석의 경우 주탑에 발생하는 모멘트가 거의 없음에도 주탑에 변위가 발생하는 것은 완공 시점에서 주탑에 발생한 모멘트가 콘크리트의 시간 의존성 거동으로 인하여 응력 재분배가 일어나고 이 과정으로 통해 초기에 발생한 주탑의 모멘트가 감소한 것이다. 그림 5.19 는 목표시점에서 각 목표상태에 따른 CFT 합성 거더에 발생하는 모멘트를 도시하였다. 모멘트 최소화 해석에 계산된 거더 모멘트 norm 은 목표형상 해석에 비하여 5% 정도 감소하였다. 거더는 자중에 의해 발생하는 모멘트이지만, 주탑은 주탑에 걸리는 케이블 장력에 의해 발생하는 모멘트이므로 초기평형상태 해석을 통하여 주탑에 걸리는 모멘트를 더욱 효율적으로 감소시킬 수 있다.

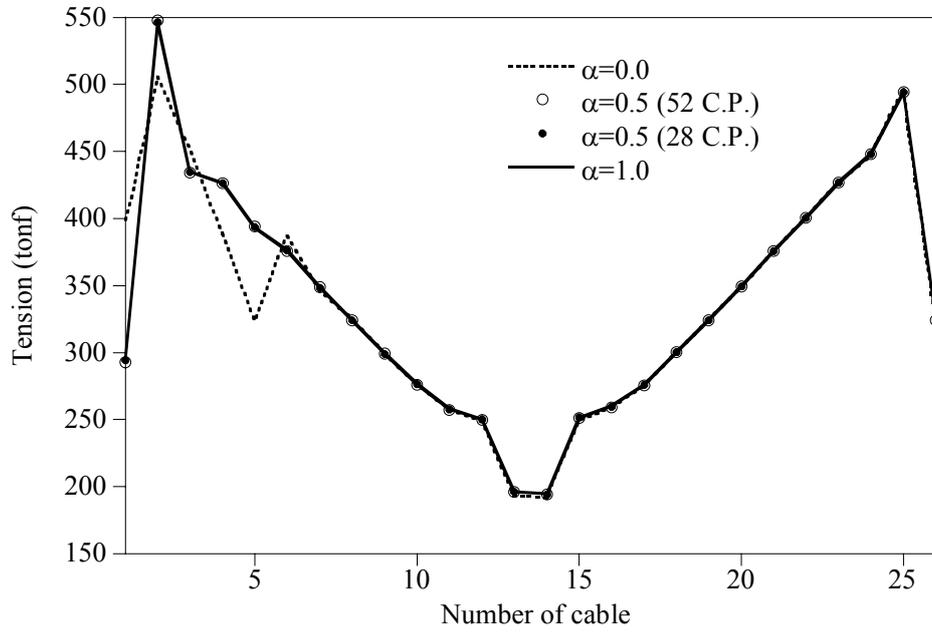


그림 5.4 목표시점에서 목표상태에 따른 케이블 장력

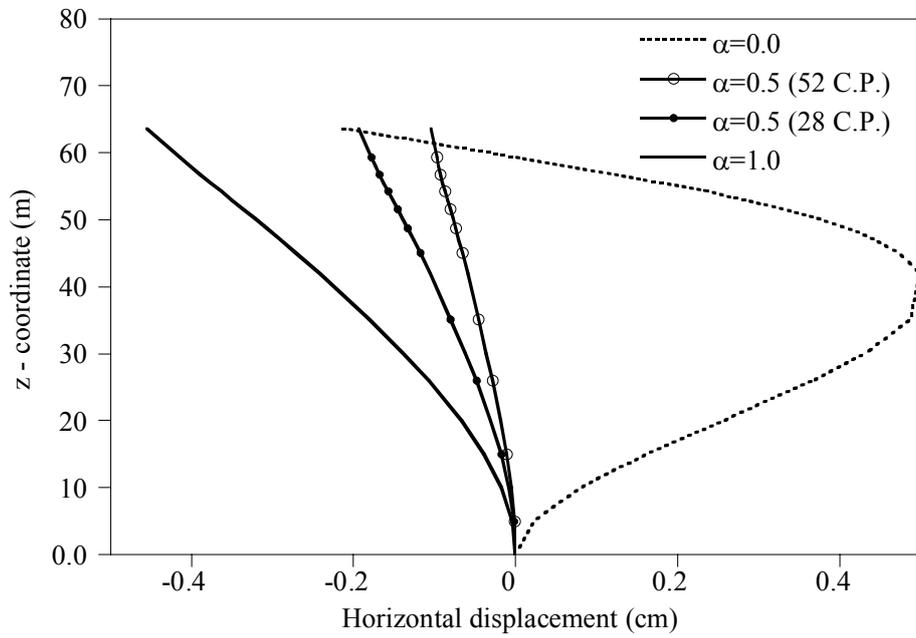


그림 5.5 목표시점에서 목표상태에 따른 주탑의 수평 변위

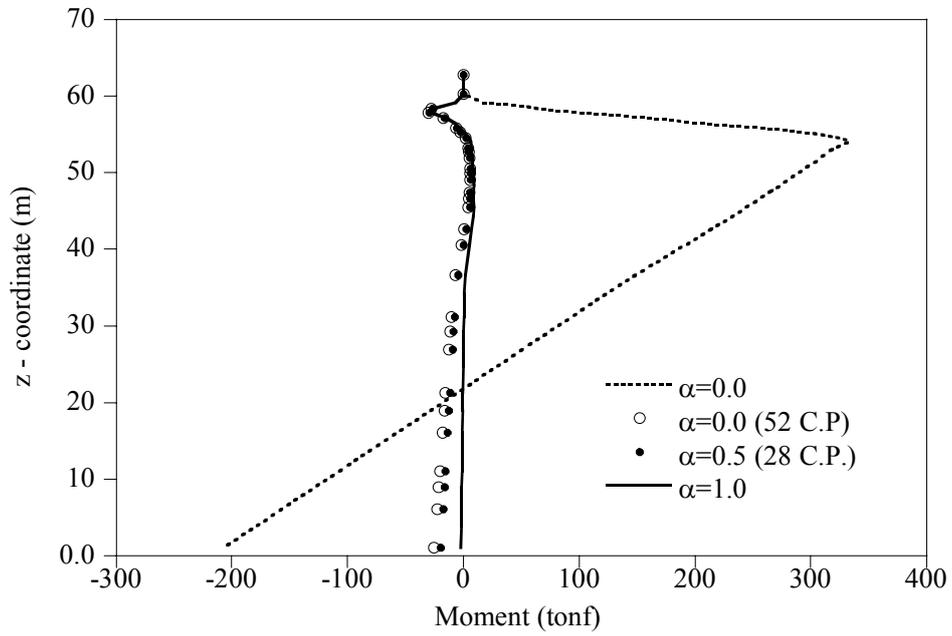


그림 5.6 목표시점에서 목표상태에 따른 주탑의 모멘트

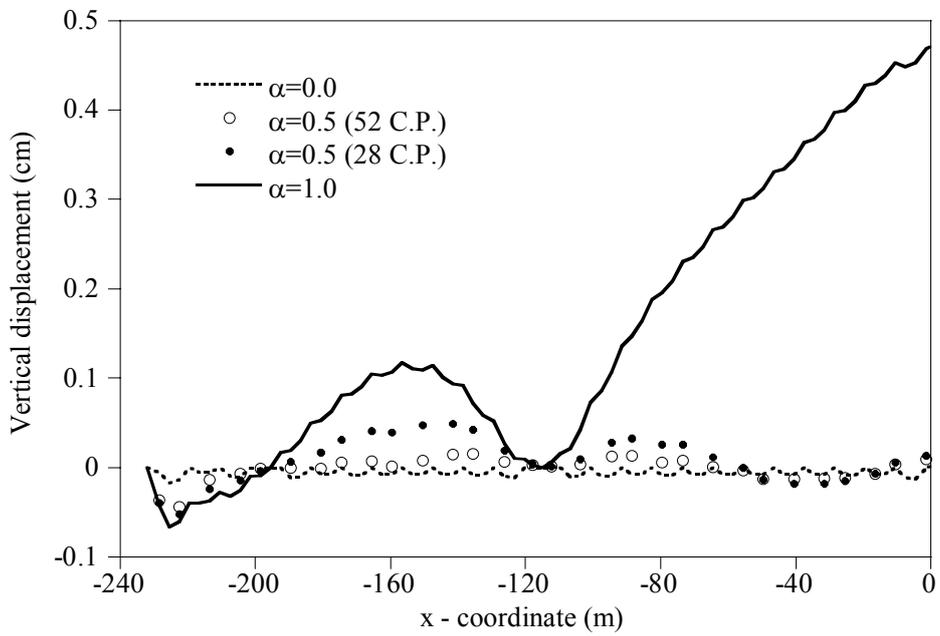


그림 5.7 목표시점에서 목표상태에 따른 거더의 수직 변위

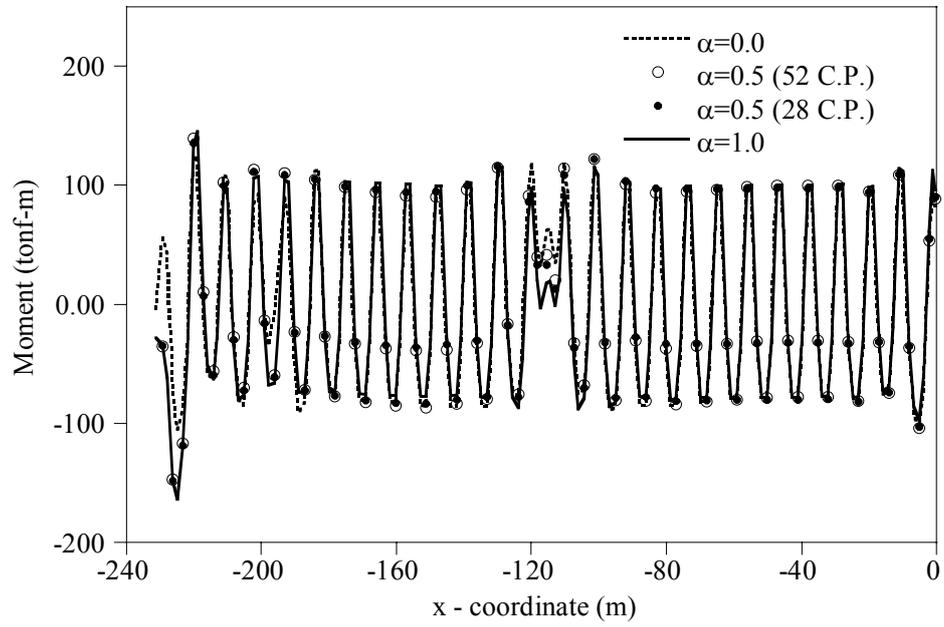


그림 5.8 목표시점에서 목표상태에 따른 거더의 모멘트

## 5.2 시공단계 해석

그림 5.9 는 시공단계를 고려했을 때 목표시점에서 목표상태에 따른 케이블의 장력을 나타낸 것이다. 역시 중앙 경간에 설치된 케이블은 각 목표상태에 대하여 거의 동일한 장력이 계산되었으며, 측경간에 설치된 케이블의 장력은 모멘트 최소화 해석을 통하여 집중된 케이블의 장력을 분산할 수 있었다.

그림 5.10 은 목표시점에서 목표상태에 따른 거더의 수직 변위를 나타낸 것이다. 모멘트 최소화 해석은 중앙 경간 가운데에서 오른쪽 주탑에 설치된 거더와 만나는 폐합점, 측경간에 설치된 지점과 만나는  $x = -195.5m$ 에서의 폐합점에서 변위가 발생하였다. 이는 모멘트 최소화 해석에서는 목표형상을 고려하지 않기 때문이다. 목표형상과 모멘트 최소화를 동시에 만족시키는 복합 초기평형상태 해석은 폐합점에서 변위가 발생하고 있으나 모멘트 최소화 해석에 비하여 목표형상에 가까운 값을 보이고 있다. 그림 5.11 은 목표시점에서 목표상태에 따른 주탑의 수평 변위를 나타낸 것이다. 목표형상 해석에 비하여 모멘트 최소화를 고려한 해석 결과는 제어절점에서 변위를 맞추고 있지 못하나 목표형상 해석과 같이 제어 절점을 맞추기 위해 주탑이 심하게 휘어져 있지는 않다.

그림 5.12 와 그림 5.13 은 목표시점에서 목표상태에 따른 거더와 주탑에 발생하는 모멘트를 나타낸 것이다. 모멘트 최소화 및 복합 초기평형상태 해석을 통하여 주탑과 거더에 발생한 모멘트를 감소시키고 있다. 모멘

트 최소화 해석을 통하여 계산된 모멘트 norm 은 목표형상 해석에 비하여 거더는 17%정도, 주탑은 90%를 감소하였다.

그림 5.14 는 21 번 케이블과 22 번 케이블 사이 세그먼트 중앙부에서 발생하는 CFT 합성 단면의 모멘트를 시간에 대해 나타낸 그래프이다. 그래프에서 목표형상 해석과 모멘트 최소화 해석의 차이가 뚜렷히 보이지 않기 때문에 복합 초기평형상태 해석은 그래프에 나타내지 않았다. 모멘트 최소화 해석을 통하여 시간에 따라 CFT 합성 단면에 발생한 모멘트는 목표형상 해석으로 인해 발생하는 모멘트가 최소화 되는 방향으로 이동한 모습을 보이고 있다.

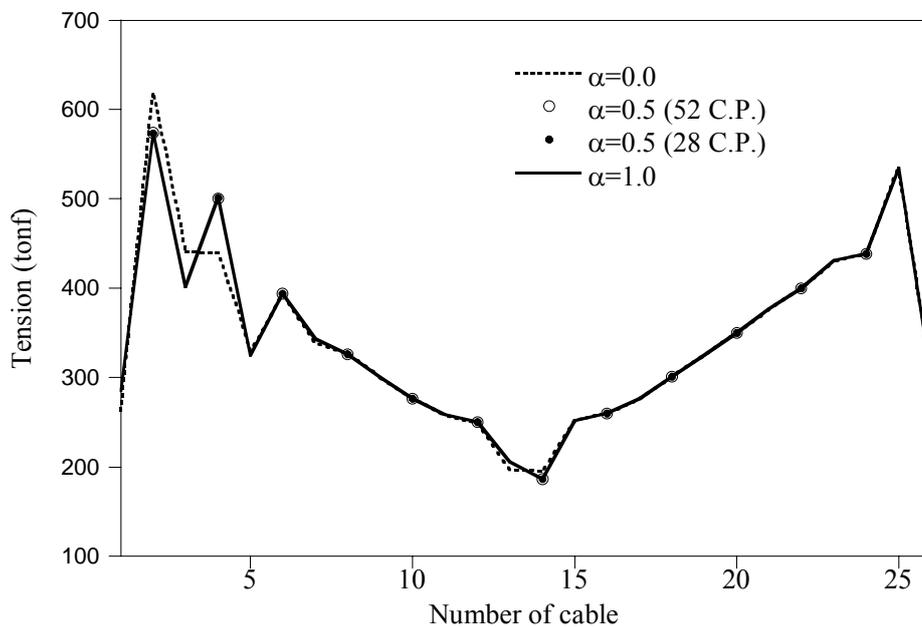


그림 5.9 시공단계 고려시 목표시점에서 목표상태에 따른 케이블 장력

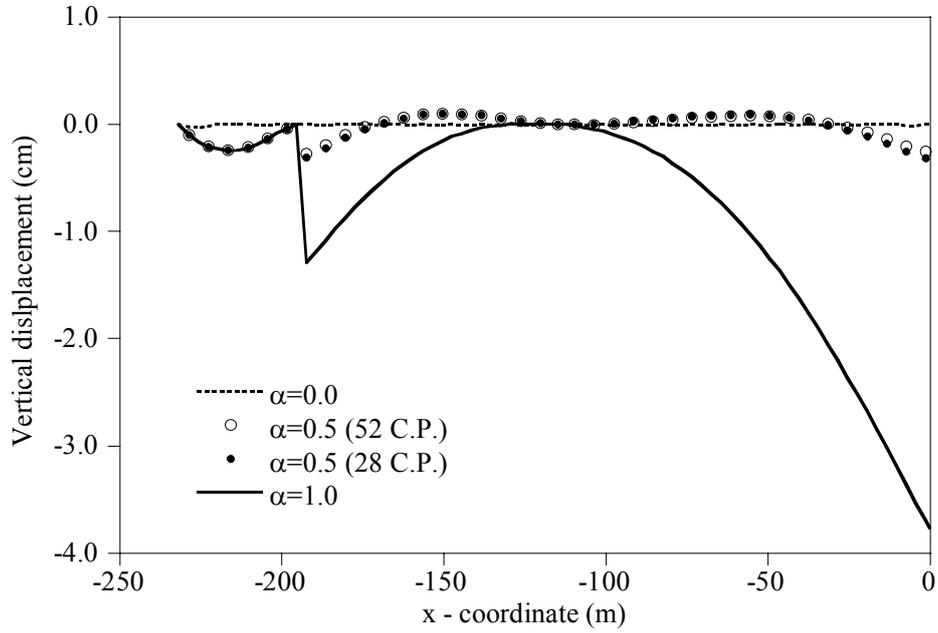


그림 5.10 시공단계 고려시 목표시점에서 목표상태에 따른 거더 수직변위

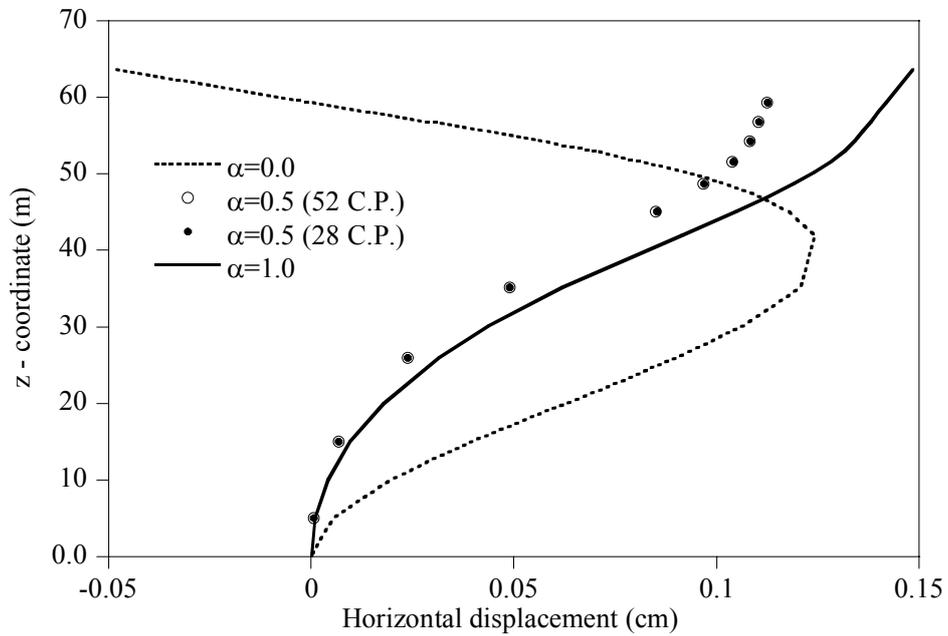


그림 5.11 시공단계 고려시 목표시점에서 목표상태에 따른 주탑 수평변위

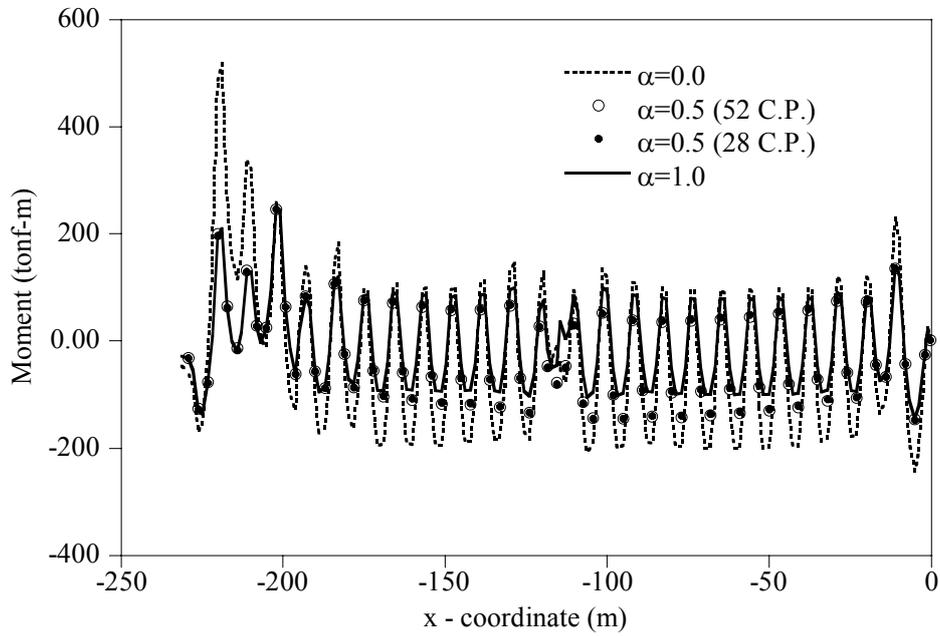


그림 5.12 시공단계 고려시 목표시점에서 목표상태에 따른 거더 모멘트

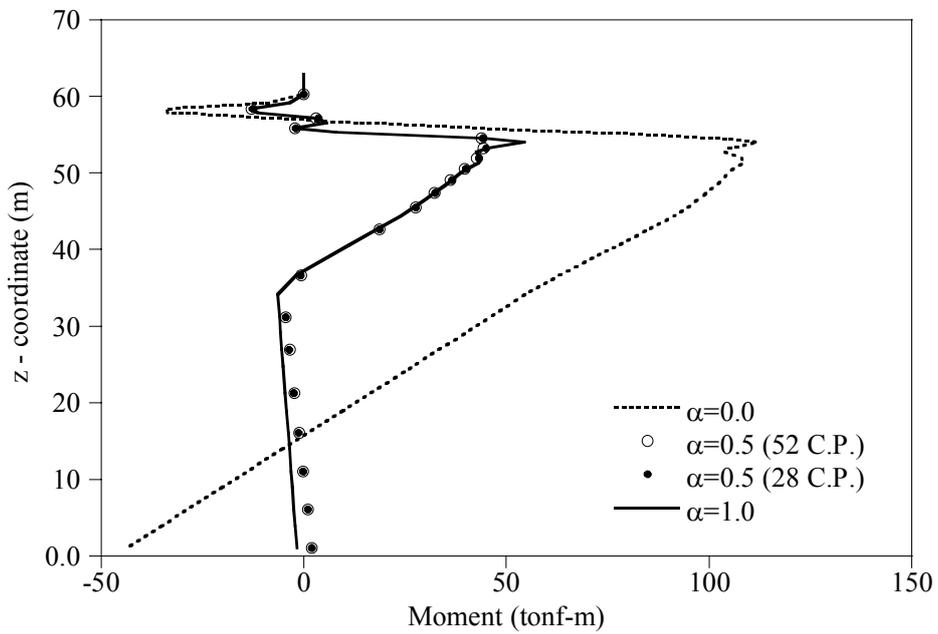


그림 5.13 시공단계 고려시 목표시점에서 목표상태에 따른 주탑 모멘트

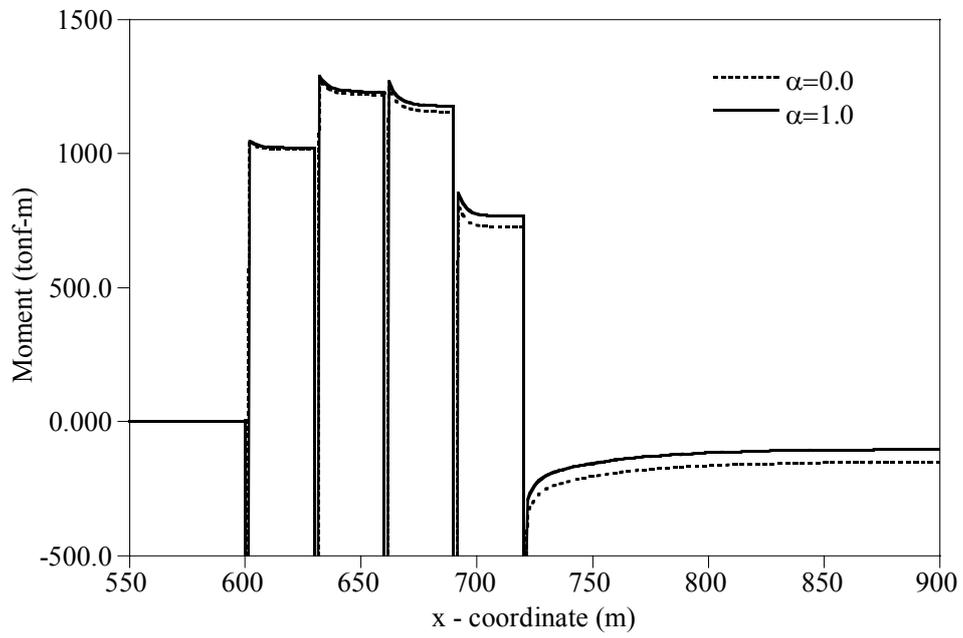


그림 5.14 각 목표상태에서 시간에 따른 거더의 모멘트 ( $x = -41m$ )

## 6. 결론

콘크리트 사장교는 콘크리트 재료의 특성 상 시간이 지남에 따라 구조물에 발생하는 변위가 달라지게 된다. 기존의 목표형상 해석법은 목표시점에서 콘크리트 사장교의 목표형상을 만족할 수 있으나 일부 케이블에 과도한 장력이 발생할 수 있다. 이를 해결하기 위해 강사장교에 적용된 복합적인 초기 평형상태 해석법을 콘크리트 사장교에 적용하여 목표시점에서 뼈대 구조물에 발생하는 모멘트를 최소화 하고, 목표형상 및 모멘트 최소화를 동시에 만족할 수 있도록 최적화 기법을 이용한 초기 평형상태 해석법을 제안하였다. 최적화 정도는 설계자 및 시공자의 요구에 맞추어 조정이 가능하다.

크리프 및 건조수축, 그리고 재령효과로 인해 콘크리트에 발생하는 시간의존성 거동을 고려하였다. 케이블은 탄성 현수선 요소를 사용하였고, CFT 거더의 콘크리트와 강재의 합성효과를 모델링하였다. 이를 바탕으로 콘크리트 충전 강관 거더를 사용한 사장교의 강성도 행렬식을 유도하였다. 그리고 최적화 기법을 이용하여 목표 시점에서의 콘크리트 사장교 기하 형상이 목표형상은 물론 뼈대 구조물에 발생하는 휨 모멘트의 최소화를 동시에 만족하는 초기평형상태 해석법을 제시하였다. 목표 시점에서의 변위 및 모멘트 민감도는 사장교의 평형방정식을 직접 미분하여 구한 식을 이용하여, 시간에 따라 축차적으로 계산하였다. 마지막으로 콘크리트 구조물의 변

형은 시공 과정에 따른 타설시점의 변화와 부재에 발생하는 응력 변화의 영향을 받으므로 시공단계를 고려한 초기평형상태 해석법을 제시하였다.

이 연구에서 제안된 방법으로 콘크리트가 사용된 사장교의 장기 거동 해석 및 시공 단계 해석은 물론 목표시점에서 주어진 목표상태를 만족하도록 하는 초기평형상태 해석을 수행할 수 있다.

## 참고문헌

- [1] 황재웅. (2006). 시공단계와 크리프 현상을 고려한 콘크리트 사장교의 목표형상 해석법, 공학석사학위논문, 서울대학교
- [2] 김창현, 이해성. (2005). 최적화 기법을 이용한 사장교의 초기평형상태 해석, 토목학회논문집, Vol. 25, No.6A, pp. 1071-1084.
- [3] 이민권, 이해성. (2006). 대칭형 강 사장교의 폐합해석과 시공오차 예측, 토목학회논문집, Vol. 25, No.6A, pp. 1071-1084.
- [4] McHenry, D. (1943). "A new aspect of creep in concrete and its application to design", Proc. ASTM, 43, pp. 1069-1084
- [5] M. A. Ketchum and A. C. Scordelis. (1986). "Redistribution of stresses in segmentally erected prestressed concrete bridges", Report no. UCB/SESM-86/07, University of California, Berkeley, CA.
- [6] Hyun Woo Park, Soobong Shin, Hae Sung Lee. (2001). "Determination of an optimal regularization factor in system identification with Tikhonov regularization for linear elastic continua", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 51, No. 10, pp. 1211-1230.
- [7] Kim, K.S and Lee, H.S. (2001). "Analysis of target configurations under dead loads for cable-supported bridges", *Journal of computers and Structures*, Vol. 79, Issue 29-30, pp. 2681-2692
- [8] 김제춘. (1993). 사장교의 초기평형상태 및 시공형상 결정, 공학박사학위논문, 서울대학교.

- [9] 김영진. (2005). 종방향 및 연직방향 시공단계를 갖는 프리스트레스트 콘크리트 박스거더 교량의 휨거동에 관한 연구, 공학박사학위논문, 서울대학교.
- [10] 백낙승. (2006). 고강도 콘크리트의 자기건조수축 특성평가와 온도 및 수축응력에 관한 연구, 공학석사학위논문, 서울대학교.
- [11] ACI Committee 209. (1992). “Prediction of Creep Shrinkage and Temperature Effects in Concrete Structures”, 209R-82, ACI Manual of Concrete Practice, Part 1, ACI Publ.
- [12] 건설교통부 (2000), 콘크리트구조설계기준·해설, 한국콘크리트학회
- [13] 건설교통부 (2003), 도로교설계기준, 대한토목학회

## 부록

### A. CEB-FIP MC 90 의 크리프 예측 모델

CEB-FIP MC 90 모델은 하중 재하 시점의 작용 응력  $f_c(t')$  에 대한 탄성 변형률과 크리프 변형률의 합으로 전체 변형률을 다음과 같이 산정한다.

$$\varepsilon_{c\sigma}(t, t') = f_c(t') \left[ \frac{1}{E_{ci}(t')} + \frac{\phi(t, t')}{E_{ci}} \right] \quad (\text{A.1})$$

크리프 변형도 계산에 사용되는 초기 접선 탄성 계수  $E_{ci}$  는 다음과 같다.

$$E_{ci} = 2.15 \times 10^5 \sqrt[3]{f_{cu} / 100} \quad (\text{A.2})$$

여기서 콘크리트의 발현 강도 내지는 재령 시점에서의 압축 강도  $f_{cu}$  는 28 일 재령인 경우, 설계기준강도  $f_{ck}$  를 이용하여 다음과 같이 구한다.

$$f_{28} = f_{cu}(28) = f_{ck} + 80 \quad (\text{A.3})$$

만일 재령이 28 일이 아닐 경우, 다음 식을 이용하여 구한다.

$$f_{cu}(t) = \beta_{cc}(t) f_{28} \quad (\text{A.4})$$

여기서,  $\beta_{cc}(t)$  는 재령에 따른 수정계수로서 시멘트 종류에 따라 결정되는

상수  $\beta_{sc}$  를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\beta_{cc}(t) = \exp[\beta_{sc}(1 - \sqrt{\frac{28}{t}})] \quad (A.5)$$

$$\beta_{sc} = \begin{cases} 0.20 & : 3 \text{ 종 시멘트} \\ 0.25 & : 1 \text{ 종, 5 종 시멘트} \\ 0.38 & : 2 \text{ 종 시멘트} \end{cases}$$

초기 접선 탄성 계수  $E_{ci}$  를 이용하면, 식 (A.1)의 재령에 따른 탄성 계수  $E_{ci}(t')$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E_{ci}(t) = \sqrt{\beta_{cc}(t)} \times E_{ci} \quad (A.6)$$

식 (A.1)의 크리프 계수  $\phi(t, t')$  은 다음과 같이 구한다.

$$\phi(t, t') = \phi_0 \left[ \frac{t - t'}{\beta_H + (t - t')} \right]^{0.3} \quad (A.7)$$

여기서,  $\phi_0$ ,  $\beta_H$  는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \phi_{RH} \beta(f_{cu}) \beta(t') \\ &= \left( 1 + \frac{1 - 0.01RH}{0.214 \sqrt[3]{h}} \right) \times \frac{53}{\sqrt{f_{cu}}} \times \frac{1}{0.1 + (t')^{0.2}} \end{aligned} \quad (A.8)$$

$$\beta_H = 15 \left[ 1 + (0.012RH)^{18} \right] h + 250 \leq 1,500 \text{ (일)} \quad (A.9)$$

식 (A.9)에서  $h$  는 개념부재치수로서 부재의 단면적  $A_c$  와 단면적의 둘레  
중에서 수분이 외기로 확산되는 둘레 길이  $u$  로 표현되며, 이는 다음과 같  
다.

$$h = \frac{2A_c}{u} \quad (\text{A.10})$$

## B. ACI-209 의 크리프 예측 모델

ACI-209 모델에서는 콘크리트의 탄성 처짐  $\delta_e$  에 크리프 계수  $\phi(t, \tau)$  를 곱하여 크리프 변형을 산정한다. 그러므로 크리프에 의한 처짐을 포함한 전체 처짐  $\delta_{total}$  은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\delta_{total} = [1 + \phi(t, \tau)] \times \delta_e \quad (B.1)$$

크리프 계수는 하중 재하 시점  $\tau$  과 크리프를 관찰하는 시점  $t$  의 함수로서 다음과 같이 정해진다.

$$\phi(t, \tau) = \frac{(t - \tau)^{0.6}}{10 + (t - \tau)^{0.6}} \phi_{\infty} \quad (B.2)$$

여기서  $\phi_{\infty}$  는 극한 크리프 계수로서 표준상태(재하시의 재령이 습윤양생이면 7 일, 증기 양생이면 1~3 일이고 습도가 40%, 부재의 평균 두께가 6 in. 이하, 슬럼프가 4 in.)의 경우 2.35 의 값을 갖는다. 콘크리트의 상태가 이와 다를 경우, 다음의 식을 이용하여 보정한 극한 크리프 계수를 사용한다

$$\phi_{\infty} = 2.35 K_{\tau}^c K_H^c K_T^c K_S^c K_F^c K_A^c \quad (B.3)$$

여기서  $K_{\tau}^c$  는 재하시의 재령 보정계수,  $K_H^c$  는 습도 보정계수,  $K_T^c$  는 부재의 평균 두께 보정계수,  $K_S^c$  는 슬럼프 보정계수,  $K_F^c$  는 잔골재율 보정계수,

$K_A^c$ 는 공기량 보정계수이며, 콘크리트의 상태에 따라 다음과 같이 보정하여 사용한다.

$$\begin{aligned} K_\tau^c &= 1.25\tau^{-0.118} : \text{습윤양생} \\ K_\tau^c &= 1.13\tau^{-0.094} : \text{증기양생} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$K_H^c = 1.27 - 0.0067H : H \geq 40\% \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} K_T^c &= 1.14 - 0.023T : \tau \leq 365\text{일} \\ K_T^c &= 1.10 - 0.017T : \tau > 365\text{일} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$K_S^c = 0.82 + 0.67S \quad (\text{B.7})$$

$$K_F^c = 0.88 + 0.0024F \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} K_A^c &= 1.0 && : A \leq 6\% \\ K_A^c &= 0.46 + 0.09A && : A > 6\% \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

여기서  $\tau$ 는 하중 재하시의 재령(일),  $H$ 는 습도(%),  $T$ 는 부재의 평균두께 ( $T = 4V/S$ ,  $V$ : 체적,  $S$ : 표면적, in.),  $S$ 는 슬럼프(in.),  $F$ 는 잔골재율(%),  $A$ 는 공기량(%)이다.

### C. 비크리프 계수의 근사계산

크리프 변형도를 수치 해석법으로 구하는 과정에서 비크리프 계수를 적절하게 근사할 필요가 있다. 비크리프 계수를 근사하는 다양한 방법이 있으나, 본 연구에서는 다음과 같은 Dirichlet 급수 형태로 근사하는 방법을 사용한다.

$$C(t, \tau) = \sum_{i=1}^m a_i(\tau) [1 - e^{-\lambda_i(t-\tau)}] \quad (C.1)$$

여기서  $a_i(\tau)$  는 재료변수로서 하중 재하 시점  $\tau$  에 따라 비크리프 계수의 초기 형상에 영향을 준다. 많은 학자들의 연구에 의하면  $m=4$  일 때, 실제 크리프 거동을 잘 나타낸다고 알려져 있다. 또한  $\lambda_i$  는  $i$  번째항의 지연시간  $t_r \times 10^{i-1}$  의 역수로서 ACI-209 에서는  $t_r = 5$  로 제시한다.

$$\lambda_i = \frac{1}{t_r \times 10^{i-1}} = \frac{1}{5 \times 10^{i-1}} \quad (C.2)$$

$a_i(\tau)$  는 실제 크리프 실험 데이터를 토대로 구하는 것이 가장 정확한 방법이나, 실험 데이터를 취득하기 어려운 경우는 ACI-209 와 CEB-FIP MC 90 에서 제시하는 비크리프 계수식으로부터 나온 데이터를 토대로 결정한다. 각 설계 기준에서 제시하는 비크리프 계수식은 다음과 같다.

$$C(t, \tau) = \frac{\phi(t, \tau)}{E_c(\tau)} \quad (C.3)$$

$$C(t, \tau) = \frac{\phi(t, \tau)}{E_c(28)} \quad (C.4)$$

여기서 ACI-209 는 하중 재하 시점  $\tau$ 에서의 접선 탄성계수를 이용하지만, CEB-FIP MC 90 은 28 일 접선 탄성계수를 이용한다는 것이 다르다.

이 같은 방법을 이용하여 구한 비크리프 계수의 데이터 개수가  $m$  보다 많을 경우, 최소자승법을 이용하여 최적의  $a_i(\tau)$  를 구해야 한다. 임의의 재령일  $\tau$ 에 대해 다양한 시간  $t$ 에 대한  $n$  개의 비크리프 계수 데이터를 취득하였다면, 식 (C.1)에 대입하여 다음과 같은  $n$  개의 연립방정식을 얻는다.

$$c_j = \sum_{i=1}^m a_i (1 - e^{-\frac{t_j - \tau}{5 \times 10^{i-1}}}) \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (C.5)$$

식 (C.5)를 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{C} = \mathbf{BA} \quad (C.6)$$

여기서  $\mathbf{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$  이고,  $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$  이다.  $\mathbf{B}$  는 다음과 같다.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 - e^{-\frac{t_1 - \tau}{5}} & 1 - e^{-\frac{t_1 - \tau}{50}} & 1 - e^{-\frac{t_1 - \tau}{500}} & 1 - e^{-\frac{t_1 - \tau}{5000}} \\ 1 - e^{-\frac{t_2 - \tau}{5}} & 1 - e^{-\frac{t_2 - \tau}{50}} & 1 - e^{-\frac{t_2 - \tau}{500}} & 1 - e^{-\frac{t_2 - \tau}{5000}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 - e^{-\frac{t_n - \tau}{5}} & 1 - e^{-\frac{t_n - \tau}{50}} & 1 - e^{-\frac{t_n - \tau}{500}} & 1 - e^{-\frac{t_n - \tau}{5000}} \end{bmatrix} \quad (\text{C.7})$$

비크리프 계수의 데이터 개수  $n$ 가 재료 변수  $a_i(\tau)$ 의 개수  $m$ 보다 많기 때문에 식 (C.6)을 만족시키는 정해를 구하기는 어렵다. 다만 비크리프 계수 데이터를 가장 잘 근사하는  $a_i(\tau)$ 를 찾기 위해 오차를 다음과 같이 설정한다.

$$\{e\} = \mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{A} \quad (\text{C.8})$$

식 (C.8)의 양변을 제곱하여 오차 제곱의 합을 표현하면 다음과 같다.

$$\{e\}^T \{e\} = (\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{A})^T (\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{A}) \quad (\text{C.9})$$

식 (C.9)의 미분값을 0으로 만드는  $\mathbf{A}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\mathbf{A} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \quad (\text{C.10})$$

이와 같은 방법으로 각각의  $\tau$ 에 대해 오차 제곱의 합을 최소로 하는  $\mathbf{A}$ 를 구한다.

#### D. 콘크리트 구조설계기준의 건조수축 모델

콘크리트의 건조수축 변형도는 대기의 평균상대습도, 부재의 크기 등을 고려하여 다다음의 식에 따라 구할 수 있다.

$$\varepsilon_{sh}(t, t_s) = \varepsilon_{sho} \beta_s(t - t_s) \quad (D.1)$$

여기서  $\varepsilon_{sho}$  은 건조수축이 발현되는 시점부터 무한대의 시간까지 생기는 개념 건조수축계수이고,  $\beta_s(t - t_s)$  는 시간발현 함수로  $h, t_s$  는 각각 개념 부재치수(cm), 콘크리트가 외기중에 노출되었을 때의 재령(day)을 나타낸다.  $h$  는 식 (3.10)을 이용하여 결정한다.

개념 건조수축 계수  $\varepsilon_{sho}$  는 다음 식 (D.2)에서 (D.5)까지에 의해 계산하여야 한다.

$$\varepsilon_{sho} = \varepsilon_s(f_{cu}) \beta_{RH} \quad (D.2)$$

$$\varepsilon_s(f_{cu}) = [160 + 10\beta_{sc}(9 - f_{cu}/100)] \times 10^{-6} \quad (D.3)$$

$$\beta_{sc} = \begin{cases} 4 : 2\text{종 시멘트} \\ 5 : 1\text{종, 5종 시멘트} \\ 6 : 3\text{종 시멘트} \end{cases} \quad (D.4)$$

$$\beta_{RH} = \begin{cases} -1.55[1 - (RH/100)^3] & (40\% \leq RH < 99\%) \\ 0.25 & (RH \geq 99\%) \end{cases} \quad (D.5)$$

여기서  $f_{cu}$  는 재령에 따른 콘크리트 압축강도로 식 (A.4)를 이용하여 구할 수 있다. 식 (D.5)에서  $RH$  는 외기의 상대습도(%)를 나타낸다.

건조 기간에 따른 건조수축 변형률 함수인  $\beta_s(t-t_s)$  는 다음과 같다.

$$\beta_s(t-t_s) = \sqrt{\frac{(t-t_s)}{3.5h^2 + (t-t_s)}} \quad (D.6)$$

### E. 탄성현수선 케이블 요소의연성도 행렬

식 (3.51)의 자세한 식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi_x^e}{\partial F_x} = -\frac{L_0^e}{EA} - \frac{1}{w} \ln \left( \frac{F_z + wL_0^e + T_2}{F_z + T_1} \right) - \frac{F_x^2}{w} \left\{ \frac{1}{T_2(F_z + wL_0^e + T_2)} - \frac{1}{T_1(F_z + T_1)} \right\}$$

$$\frac{\partial \phi_x^e}{\partial F_y} = -\frac{F_x F_y}{w} \left\{ \frac{1}{T_2(F_z + wL_0^e + T_2)} - \frac{1}{T_1(F_z + T_1)} \right\}$$

$$\frac{\partial \phi_x^e}{\partial F_z} = -\frac{F_x}{w} \left\{ \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right\}$$

$$\frac{\partial \phi_y^e}{\partial F_x} = -\frac{F_x F_y}{w} \left\{ \frac{1}{T_2(F_z + wL_0^e + T_2)} - \frac{1}{T_1(F_z + T_1)} \right\}$$

$$\frac{\partial \phi_y^e}{\partial F_y} = -\frac{L_0^e}{EA} - \frac{1}{w} \ln \left( \frac{F_z + wL_0^e + T_2}{F_z + T_1} \right) - \frac{F_y^2}{w} \left\{ \frac{1}{T_2(F_z + wL_0^e + T_2)} - \frac{1}{T_1(F_z + T_1)} \right\}$$

$$\frac{\partial \phi_y^e}{\partial F_z} = -\frac{F_y}{w} \left\{ \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right\}$$

$$\frac{\partial \phi_z^e}{\partial F_x} = -\frac{F_x}{w} \left\{ \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right\}$$

$$\frac{\partial \phi_z^e}{\partial F_y} = -\frac{F_y}{w} \left\{ \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right\}$$

$$\frac{\partial \phi_z^e}{\partial F_z} = -\frac{L_0^e}{EA} - \frac{1}{w} \left\{ \frac{F_z + wL_0^e}{T_2} - \frac{F_z}{T_1} \right\}$$

$$\frac{\partial \phi_x^e}{\partial L_0^e} = -F_x \left( \frac{1}{EA} + \frac{1}{T_2} \right)$$

$$\frac{\partial \phi_y^e}{\partial L_0^e} = -F_y \left( \frac{1}{EA} + \frac{1}{T_2} \right)$$

$$\frac{\partial \phi_z^e}{\partial L_0^e} = -(F_z + wL_0^e) \left( \frac{1}{EA} + \frac{1}{T_2} \right)$$

여기서  $T_1 = \|\mathbf{F}_1^e\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$  이고

$T_2 = \|\mathbf{F}_2^e\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + (F_z + wL_0^e)^2}$  이다.

## **ABSTRACT**

Since the lateral stiffness of a cable is developed from applied tensions, no unique undeformed configuration of a cable structure is defined in the stress-free state. Therefore, either the unstrained length of cable must be calculated from the given configuration. Determining either unstrained length or tension that satisfies the target configuration is defined as an initial equilibrium state analysis. Overtime, the geometry configuration of a concrete cable-stayed bridge is changed by the time-dependent behavior although it satisfied the target configuration at the initial equilibrium state. The established method analyzed initial equilibrium state of concrete cable-stayed bridge based on Newton-Raphson method for obtaining the undeformed length of cables, which assimilate deformed shape of a structure to target configuration at the specified target time when the time-dependent behavior will be ended. Although the previous analysis guarantees convergence and satisfies exactly the target configuration at target time, that method has a problem of developing excessive bending moment of a frame structure. For overcoming the demerit, this paper presents an initial equilibrium analysis of concrete cable-stayed bridges by applying the suggested methods of steel cable-stayed bridges which is minimizing bending moment of the frame structures and hybrid TCUD analysis.

A new type of concrete cable-stayed bridge using concrete filled tubular girder is performed to demonstrate the validity and the effectiveness of the proposed analysis method. This thesis is considering the time-dependent behavior of concrete such as

creep, shrinkage phenomenon and aging effects, effects of steel-concrete composite beam and casting delay by the construction stage. The proposed method is capable of considering the geometirc shape as well as the bending moment of a concrete cable-stayed bridge at the target time in the initial equilibrium analysis.

**Key Word**

Concrete cable-stayed bridge, Concrete filled tubular, Optimization, Initial equilibrium state, Sensitivity Analysis

**Strudent Number: 2005-21178**

## 감사의 글

부족하지만 많은 분들의 도움으로 논문을 완성할 수 있었습니다. 먼저 항상 끝없는 열정과 꾸지람으로 지도해주신 이해성 선생님께 감사드립니다. 앞으로 더욱 많이 배워서 좋은 논문 쓰도록 하겠습니다. 그리고 많은 가르침을 주신 장승필 교수님, 고현무 교수님, 김재관 교수님께도 심심한 감사를 드립니다.

연구실의 든든한 큰형님들이신 김용한 부장님, 박현우 박사님, 김기석 박사님께 감사드립니다. 여러모로 도와주고 신경써주신 주성이형, 승근이형, 연철이형, 그리고 언제나 친절히 설명해준 재웅이형에게 감사드립니다. 항상 도움만 받는 종헌이형, 호진이형, 윤화형, 앞으로 고생할 상훈이형, 오랫동안 연구실 생활 같이 할 근원이와 승한이, 그리고 아직은 어색한 영진이형과 종서형을 비롯한 구조해석 연구실 선후배님들께 감사의 말을 전합니다.

학부생활을 즐겁게 보내게 해준 레포츠 형님들과 언제나 짝있는 지환시 동기들에게 고맙다는 말을 전합니다. 룸메이트 석이형을 비롯해 운동장에서 뛰어준 축구부 선후배님들께 감사드립니다.

늘 변함없는 용찬이와 석찬이를 비롯한 반 친구들과 심심해 하는 나와 놀아준 유라에게 고맙다는 말을 전합니다.

잘 챙겨주지 못해 미안한 동생 영내와 멀리 있다는 핑계로 무심한 불

효자 아들을 언제나 믿어주시는 사랑하는 부모님께 진심으로 감사드립니다.