

초 록

이 논문에서는 piled raft 에서 raft 의 부등침하를 최소화시키는 말뚝의 최적위치를 결정하기 위한 최적말뚝배치기법을 제안한다. Piled raft 에서 raft 는 Mindlin 판이론에 기초한 2 차원 유한요소로 모델링하고, 지반은 raft 요소에 부착된 스프링으로 모델링한다. 말뚝은 스프링으로 모델링하여 Randolph 와 Wroth 의 근사적 탄성해법을 통해 강성을 구한다. Piled raft 전체 해석은 raft, 지반과 말뚝의 각 강성을 결합하여 수행한다. 2 차원 구조물에서 부등침하가 작아질수록 처짐 곡면은 평면을 이루어 면적이 작아지므로 곡면의 면적을 부등침하의 최소화를 위한 목적함수로 정의한다. 말뚝의 위치를 설계변수로 정하고 말뚝이 raft 를 벗어나지 못하도록 구속조건을 준다. 설계변수에 대해 목적함수를 최적화하는 알고리즘으로 RQP(Recursive Quadratic Programming)를 사용한다. 변위의 민감도는 직접 미분법에 의하여 계산한다.

본 연구에서 결정된 최적말뚝위치에서 불확실성이 큰 지반의 전단강성에 의한 piled raft 의 안전성을 평가하고자 신뢰성해석을 수행한다. 신뢰성해석에 사용되는 한계상태식을 허용 부등침하량과 계산된 최대 부등침하량과의 차이로 정의한다. 확률 유한요소법을 이용하여 지반의 전단강성이 지닌 불확실성이 raft 의 침하량에 미치는 통계적 특성을 계산하고, 이것을 2 차 모멘트방법에 적용하여 신뢰성지수를 얻는다. 부등침하량이 정규분포를 따른다는 가정하에 신뢰성지수로부터 파괴 확률을 정량적으로 구해서 안전성을 평가한다. 하중조건과 기초의 형상을 변화시킨 몇가지 예제에 적용하여 제안된 최적말뚝배치기법으로 결정된 최적말뚝위치가 부등침하량의 감소에 효율적임을 검증한다.

주요어

부등침하, 최적말뚝배치기법, 목적함수, RQP(Recursive Quadratic Programming),
신뢰성해석

목차

초록	i
목차	iii
그림 목차.....	v
표 목차.....	vii
1. 서론.....	1
2. Piled Raft 해석.....	4
2.1 Raft 의 유한요소해석.....	5
2.2 말뚝의 근사적 탄성 해석.....	7
2.2.1 단독말뚝의 해석.....	8
2.2.2 무리말뚝의 해석.....	10
2.3 유한요소 정식화.....	12
3. 최적화(Optimization)	16
4. 구조 신뢰성해석.....	19
4.1 한계상태함수.....	19

4.2 확률 유한요소법의 정식화.....	21
5. 해석 예제.....	25
5.1 최적화 예제.....	26
5.1.1 선하중을 받는 기초.....	26
5.1.2 집중하중을 받는 기초.....	30
5.1.2.1 집중하중을 받는 정사각형기초.....	31
5.1.2.2 집중하중을 받는 사다리꼴기초.....	33
5.1.2.3 집중하중을 받는 원형기초.....	35
5.2. 신뢰성해석 예제.....	37
5.2.1. 선하중을 받는 기초.....	37
5.2.2. 집중하중을 받는 기초.....	38
6. 결론.....	41
참고문헌.....	43
Abstract.....	47
감사의 글.....	49

그림목차

그림 1	Q8 유한요소를 사용한 piled raft 의 모델링.....	4
그림 2	휨모멘트와 전단력에 대한 부호 규약.....	7
그림 3	말뚝 주면부와 선단부의 분리 효과.....	8
그림 4	지반 깊이에 따른 영향 반경과 지반 전단 강성.....	8
그림 5	최적화 전후 raft 의 침하 형상	16
그림 6	신뢰성지수의 확률론적 개념.....	22
그림 7	정사각형기초의 초기 형상과 종단면(A-A' 단면).....	27
그림 8	Raft 와 지반의 접촉효과와 말뚝간 상호작용을 고려 I.....	28
그림 9	Raft 와 지반의 접촉효과를 고려하고 말뚝간 상호작용을 무시 I.....	28
그림 10	Raft 와 지반의 접촉효과와 말뚝간 상호작용을 고려 I.....	28

그림 11 Raft 와 지반의 접촉효과와 말뚝간 상호작용을 무시 I.....	29
그림 12 Raft 와 지반의 접촉효과를 고려하고 말뚝간 상호작용을 고려 II...	31
그림 13 Raft 와 지반의 접촉효과와 말뚝간 상호작용을 무시 II.....	31
그림 14 Raft 와 지반의 접촉효과와 말뚝간 상호작용을 고려 III.....	32
그림 15 사다리꼴기초에서 말뚝 위치와 raft 의 침하 형상 I.....	34
그림 16 사다리꼴기초에서 말뚝 위치와 raft 의 침하 형상 II.....	34
그림 17 원형기초에서 말뚝 위치와 raft 의 침하 형상 I.....	36
그림 18 원형기초에서 말뚝 위치와 raft 의 침하 형상 II.....	36

표 목차

표 1	지반, 말뚝과 raft 의 재원.....	24
표 2	선하중을 받는 정사각형기초에서 최대 부등침하량.....	29
표 3	선하중을 받는 정사각형기초에서 최대 휨모멘트.....	29
표 4	집중하중을 받는 정사각형기초에서 최대 부등침하량.....	32
표 5	집중하중을 받는 정사각형기초에서 최대 휨모멘트.....	32
표 6	사다리꼴기초에서 최대 부등침하량.....	33
표 7	사다리꼴기초에서 최대 휨모멘트.....	33
표 8	원형기초에서 최대 부등침하량.....	35
표 9	원형기초에서 최대 휨모멘트.....	35
표 10	정사각형기초에서 지반 전단강성의 불확실성에 의한 신뢰성지수 I...	37

- 표 11 정사각형기초에서 지반 전단강성의 불확실성에 의한 신뢰성지수 II.. 38
- 표 12 사다리꼴기초에서 지반 전단강성의 불확실성에 의한 신뢰성지수..... 39

1. 서론

Piled raft 에서 raft 는 충분한 지지력을 확보하기 위해서 사용되고 말뚝은 침하량을 허용 범위 한도까지 제한하기 위해 사용된다. 말뚝의 이런 기본적인 목적에도 불구하고 기존의 무리말뚝은 지지력의 관점에서 설계되고, 침하는 부차적인 문제로 다루어져 왔다. 그러나 raft 에 생긴 침하 특히 부등침하는 구조물의 사용성을 저하시키고, 상부 구조물에 휨모멘트를 유발시켜 구조물에 손상을 줄 수 있으므로 부등침하를 제한하는 것은 중요하다.

침하는 말뚝 배치 상태와 상부 하중의 재하 조건에 모두 영향을 받으므로 부등침하를 최소화시키기 위한 최적말뚝위치는 하중조건에 따라 다르다. 기존의 일반적인 설계에서는 하중조건을 고려하지 않고 말뚝을 등간격으로 배치하거나 또는 하중이 전달되는 기둥의 하부에 배치하였다. 최근 적절한 말뚝 배치를 통해 부등침하를 감소시키고자 하는 연구가 수행되고 있다. Randolph 는 raft 의 중앙에 침하가 크게 일어나는 일반적인 하중조건하에서 raft 전체에 등간격으로 말뚝을 배치한 것보다 작은 수의 말뚝들을 raft 의 중앙부에만 말뚝을 설치한 것이 부등침하의 감소에 더 효율적이라고 제안하였다 (Ran94). 기존의 연구들은 이처럼 정확한 해석 기법의 개발을 통해서가 아니라 대부분 경험적인 판단을 통해 말뚝 위치를 변화시키는 정도이다.

이 연구에서는 침하를 발생시키는 다양한 조건에서 부등침하를 최소화시킬 수 있는 최적말뚝배치기법을 제안한다. 최적화를 위하여 piled raft 해석을 하고 raft, 말뚝 그리고 지반에 대하여 각각 다음과 같은 해석 방법을 적용한다. Raft 는 두께가 다른 치수에 비해 상대적으로 얇기 때문에 판으로 이상화하고 Mindlin 판

이론을 적용하여 2 차원 유한요소해석을 한다. 지반은 raft 요소에 부착된 윙클러 스프링으로 모델링한다. 말뚝은 스프링으로 모델링하고 강성은 Randolph 와 Wroth 가 개발한 근사적 탄성 해법으로 구한다 (Ran78; Ran79). Piled raft 에 대한 전체적인 해석은 raft 와 지반의 강성에 말뚝간 상호작용을 고려한 말뚝의 강성을 합하여 구한다. 기존의 설계시에는 말뚝간 상호작용에 의한 말뚝의 거동과 raft 와 지반의 접촉효과에 의한 영향을 확실하게 예측하기 어려우므로 raft 와 지반의 접촉효과를 무시하고 단독 말뚝의 지지력을 합한 것에 효율(군효율: group efficiency)을 곱해서 얻은 지지력을 기준으로 설계를 하여왔다. 이에 말뚝간 상호작용과 지반의 접촉효과를 고려한 것과 무시한 것 각각에 대하여 최적말뚝위치를 결정하고 이 결과로서 raft 와 지반의 접촉효과와 말뚝간 상호작용의 고려 여부가 최적말뚝 위치의 결정에 끼치는 영향을 확인한다.

Raft 와 같은 2 차원 구조물에서는 부등침하가 작을수록 기초의 처짐곡면의 형상이 평면을 이루어 면적이 작아지므로 곡면의 면적을 부등침하의 최소화를 위한 목적함수로 정의한다. 설계변수를 말뚝의 위치로 정하고 말뚝이 raft 에서 벗어나지 않도록 구속조건을 준다. 최적화기법으로 Recursive Quadratic Programming (RQP)을 이용한다. 최적화를 위한 목적함수가 비선형이므로 선형화하여 선형 구속조건을 가지는 비선형 최적화문제를 반복적으로 푸는 방법으로 최적화를 수행한다.

일반적으로 지반 정보는 지반 자체의 다양성과 계측과 시공시 지반 상태의 차이, 계측자의 오차 등으로 불확실성이 크다. 구조물 해석에 사용되는 변수 중 불확실성이 큰 것은 구조물의 안전성에 영향을 주므로 본 연구에서 결정된 최적 말뚝위치에서 불확실성이 큰 지반의 전단강성에 의한 piled raft 의 안전성을 평가하

고자 신뢰성 해석을 수행한다. 신뢰성해석에 사용되는 한계상태식을 허용 부등침하량과 계산된 최대 부등침하량과의 차이로 정의한다. 지반의 전단강성의 불확실성이 raft의 침하량에 미치는 통계적 특성을 양함수(explicit function)로 표현할 수 없으므로 확률 유한요소법을 사용하여 계산하고, 이것을 2차모멘트방법에 적용하여 신뢰성지수를 얻는다. 부등침하량이 정규분포를 따른다는 가정하에 신뢰성지수로부터 파괴확률을 정량적으로 구해서 안전성을 평가한다. 하중조건과 기초의 형상을 변화시킨 몇가지 예제에 적용하여 제안된 최적말뚝배치기법으로 결정된 최적말뚝위치가 부등침하량의 감소에 효율적임을 보여준다.

1. Piled Raft 해석

이 장에서는 piled raft의 해석을 위해서 적용된 이론을 설명한다. 상당히 깊은 심도까지 점성토 지반으로 구성된 지반에 대형 구조물의 기초를 설계할 때, raft 즉 얽은 기초만으로 충분한 지지력이 발휘되거나 과도한 침하가 발생할 수 있다. 이런 경우를 방지하기 위하여 raft에 말뚝 기초를 강결하여 시공하는 데 이러한 기초 시스템을 piled raft라고 한다. 본 연구에서 raft는 2차원 Mindlin 판이론에 기초한 유한요소해석을 통하여 강성을 구하고 말뚝은 Randolph와 Wroth의 근사적 탄성 해법을 이용하여 강성을 구한다. 지반은 raft 요소에 Winkler 스프링이 부착된 것으로 모델링하여 강성을 구성한다. Piled raft 전체 해석은 말뚝, raft와 지반의 각 강성을 결합해서 수행한다.

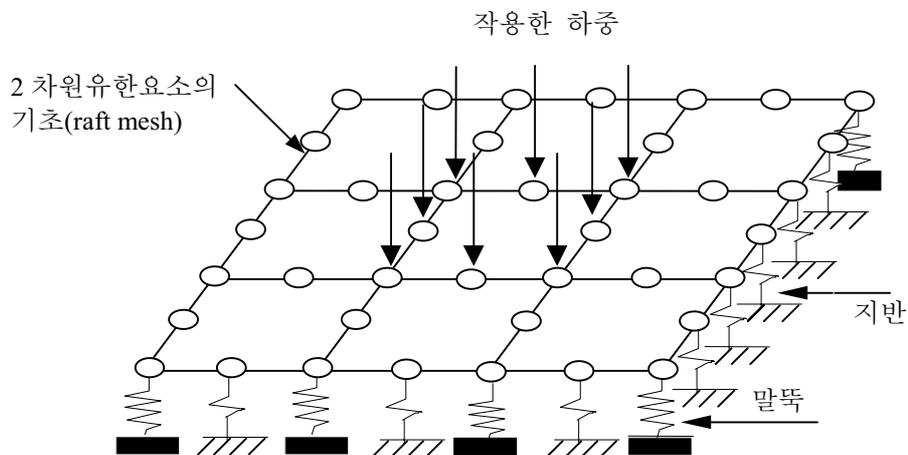


그림 1. Q8 유한요소를 사용한 Piled raft의 모델링

2.1 Raft 의 유한요소해석

Raft 는 두께가 폭과 길이에 비하여 상대적으로 얇기 때문에 판으로 이상화하고 Mindlin 판이론을 적용시켜 2 차원 유한요소해석을 한다. Mindlin 판이론에 기초한 유한요소법에서는 유한요소간의 연속 조건을 이완시킨 C^0 정식화에 기초하였기에 등매개변수 유한요소를 사용하여 다양한 형상의 판을 쉽게 모델링할 수 있는 장점이 있지만 판의 두께가 아주 얇아지게 되면 함수 공간에서의 Locking 현상 때문에 수치적인 불안정성이 발생할 수 있다. 그러나, 현재의 연구 대상인 raft 는 구조물 특성상 판의 두께가 어느 정도 이상을 유지하므로 Mindlin 판이론을 사용한다. 판 해석을 위한 유한요소모델링 시에 Bilinear 요소나 CST 요소를 사용하면, 판의 강성도가 지나치게 크게 평가되므로 LST, Q8, Q9 유한요소만 사용한다.

Mindlin 판에서 고려하는 힘은 휨모멘트 M_x, M_y 비틀림모멘트 M_{xy} 그리고 판에 수직인 전단력 Q_x, Q_y 이며 그림 2 에 나타내었다. 모멘트와 전단력은 각 응력 성분의 적분식으로 다음과 같이 정의된다.

$$M_x = \int \sigma_x z dz \quad , \quad M_y = \int \sigma_y z dz \quad , \quad M_{xy} = \int \tau_{xy} z dz \quad (2-1a)$$

$$Q_x = \alpha \int \tau_{xz} dz \quad , \quad Q_y = \alpha \int \tau_{yz} dz \quad (2-1b)$$

식(2-1a)과 식(2-1b)에서의 적분은 판의 두께에 대하여 수행되며, α 는 단면 형상계수로서 판에서는 1.2 를 사용한다. Mindlin 판에서의 변위 성분은 판의 중립면의 처짐과 중립면의 회전각에 의하여 다음과 같이 나타낸다.

$$u_x = -z\theta_x(x, y) \quad , \quad u_y = -z\theta_y(x, y) \quad , \quad u_z = w(x, y) \quad (2-2)$$

여기서 θ_x, θ_y 및 w 는 각각 판의 x 방향의 회전각, y 방향의 회전각 그리고 z 방

향으로 처짐이며, 판의 두께에 따라서는 변하지 않는 것으로 가정한다.

식(2-2)에서 주어진 변위 성분에 의하여 다음과 같이 변형도 성분을 구할 수 있다.

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = 0 \quad (2-3a)$$

$$\gamma_{xy} = -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right), \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \quad (2-3b)$$

z 방향 응력 성분이 0 이므로 판의 면내 응력성분과 변형도 성분과의 관계는 평면 응력 상태로 가정할 수 있으므로 판에서의 응력-변형도 관계식은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad \text{또는 } \sigma_b = \mathbf{C}_b : \varepsilon_b \quad (2-4a)$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad \text{또는 } \sigma_s = \mathbf{C}_s : \varepsilon_s \quad (2-4b)$$

여기서 아래 첨자_b와_s는 휨과 전단에 의한 영향을 나타낸다.

식(2-3a)와 식(2-3b), 식(2-4a)와 식(2-4b)를 이용하여 판에서 작용하는 휨모멘트와 전단력을 변위 성분에 대하여 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} M_x &= \int \sigma_x z dz = -D(\theta_{x,x} + \nu \theta_{y,y}) \\ M_y &= \int \sigma_y z dz = -D(\theta_{y,y} + \nu \theta_{x,x}) \\ M_{xy} &= \int \tau_{xy} z dz = -\frac{(1-\nu)D}{2}(\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \end{aligned} \quad (2-5a)$$

$$\begin{aligned}
 Q_x &= \alpha \int \tau_{xz} dz = -\alpha Gt(w_{,x} - \theta_x) \\
 Q_y &= \alpha \int \tau_{yz} dz = -\alpha Gt(w_{,y} - \theta_y)
 \end{aligned}
 \tag{2-5b}$$

여기서 아래 첨자 $(\cdot)_{,i}$ 는 좌표계의 i 방향 성분에 대한 미분을 의미한다. G 는 전단강성을 나타내고, E 는 탄성 계수, ν 는 포와송비, t 는 판의 두께,

$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ 는 판의 휨강도를 나타낸다 (Hin77).

2.2 말뚝의 근사적 탄성 해석

본 연구에서는 Randolph 와 Wroth 가 제안한 근사적 탄성해법을 이용하여 말뚝의 강성을 구하고 이때 연직하중을 받는 말뚝의 주면부와 선단부에 대해 각각 하중-침하 관계를 고려하고 지반의 전단강성 G 는 깊이에 따라 선형으로 변화하고 포와송비 ν_s 는 일정한 탄성 지반으로 가정한다 (Ran78).

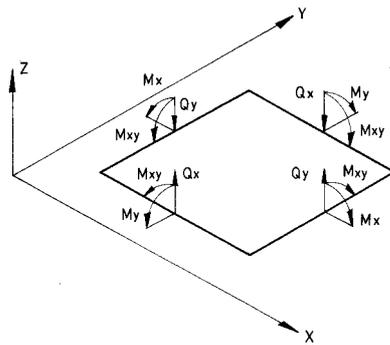


그림 2. 휨모멘트와 전단력에 대한 부호 규약 (+를 나타냄)

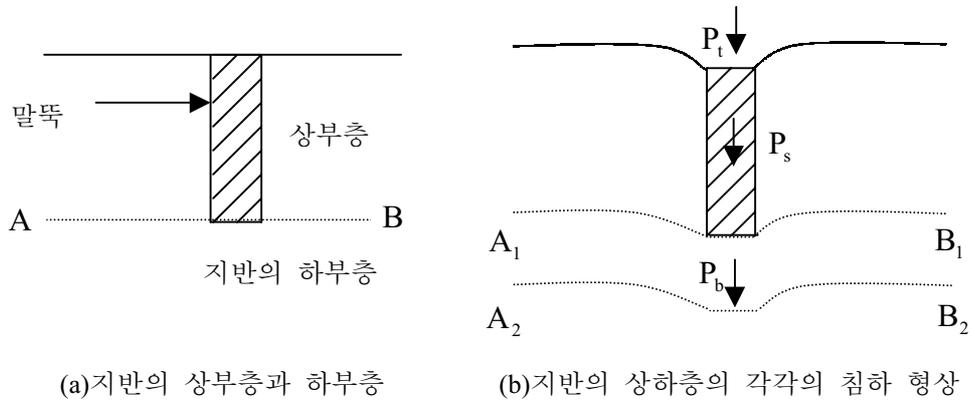


그림 3. 말뚝 주변부와 선단부의 분리 효과

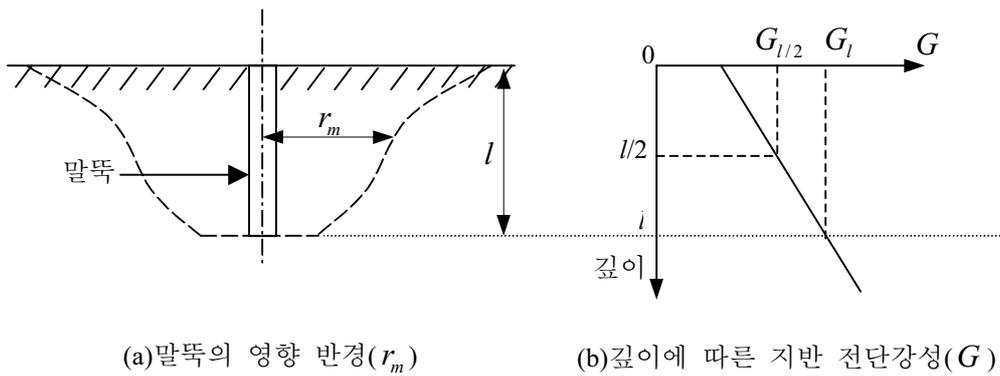


그림 4. 지반 깊이에 따른 영향 반경과 지반 전단강성

2.2.1 단독말뚝의 해석

지반에 의한 말뚝간 상호작용을 무시한 경우에 무리말뚝의 강성은 Randolph 와 Wroth 가 제안한 단독말뚝의 해석방법을 이용한다 (Ran78). 말뚝 주변의 흙은 그림 3 과 같이 말뚝 선단 깊이에 그어진 선 AB 를 경계로 하는 두 층으로 나누어지며, AB 상부의 층은 말뚝 주변에 의해 전달되는 응력에 의해서만 변형하고, AB 하부의 층은 말뚝 선단에 의해 전달되는 응력에 의해서만 변형한다고 가정한다.

실제로는 상부층 지반의 변형이 상부층과 하부층간의 상호작용에 의하여 제한되어 특정 반경에서 무시할 만한 크기로 감소되므로 영향 반경(r_m)을 사용하여 두 층의 적합 조건을 만족시켜서 상호작용을 고려한다. 그림 4 와 같이 r_m 은 지반의 깊이에 따라 변화되지만 깊이에 따른 변화를 무시하고 다음과 같이 사용한다.

$$r_m = 2.5l\rho(1 - \nu_s) \quad (2-6)$$

여기서 l 과 ν_s 는 각각 말뚝의 길이와 지반의 포아송비를 나타내고, $\rho = G_{l/2} / G_l$ 으로 말뚝의 중간 깊이에서 지반의 전단강성과 말뚝 선단에서 지반의 전단강성의 비로 비균질성 지반을 고려하기 위한 것이다. 상층 지반에서는 말뚝 주변(shaft) 주변의 선형 탄성 지반을 동심 실린더의 전단 상태로 가정하여 수직 방향의 평형을 고려하면 말뚝 주변 주변에서 변위를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$w(r) = \frac{\tau_0 r_0}{G} \ln\left(\frac{r_m}{r}\right) \quad , \quad r_0 \leq r \leq r_m \quad (2-7a)$$

$$w(r) = 0, \quad r > r_m \quad (2-7b)$$

여기서 r_0 는 말뚝의 반경을 나타내고 τ_0 는 말뚝 주변에서의 전단 응력을 나타낸다. 말뚝 선단(base)은 하부층 지반 표면에 강성 편치로 작용한다. 말뚝 선단의 변형은 다음의 Boussinesq 해로 정의한다.

$$w_b = \frac{P_b(1 - \nu_s)}{4r_0G} \quad (2-8)$$

말뚝 선단 주변에서 변위는 다음과 같이 주어진다.

$$w_b(r) = \frac{P_b(1 - \nu_s)}{2\pi rG} \quad (2-9)$$

말뚝 주변부와 선단부의 변위에 의해 말뚝 머리의 변위를 유도하여 다음과 같이

말뚝의 강성을 구한다.

$$k_p = G_l r_o \left(\frac{4}{1 - \nu_s} + \frac{\rho 2\pi l \tanh(b)}{r_o b \ln(r_m / r_o)} \right) \left(1 + \frac{4l \tanh(b)}{r_o b (1 - \nu_s) \pi \lambda} \right)^{-1} \quad (2-10)$$

여기서, $\lambda = E_p / G_l$ 으로 말뚝과 지반의 강성비를 나타내는 것으로 E_p 는 말뚝

강성이다. $b = \sqrt{2(l/r_o)^2 / (\ln(r_m / r_o) \times \lambda)}$ 으로 말뚝의 압축성을 나타낸다.

2.2.2 무리말뚝의 해석

무리말뚝에서는 지반에 의한 말뚝간 상호작용을 고려해야 한다. 본 연구에서는 말뚝의 변위는 이웃하는 말뚝의 변위에 의해 증가된다는 변위장 중첩의 원리에 기본을 두고 말뚝 주면부(shaft)와 선단부(base)에서의 변위를 각각 중첩해서 해석한다. Randolph 와 Wroth 가 개발한 근사적 탄성 해법은 다양한 말뚝 반경과 연직 하중을 받는 말뚝에 사용할 수 있고 모든 말뚝의 길이는 동일하다는 가정하에 이루어졌다 (Ran79). n 개의 말뚝 중 j 번째 말뚝의 주면부의 침하량은 다음과 같다.

$$(w_s)_j = \sum_{i=1}^n (w_s)_{ij} = \frac{1}{G} \sum_{i=1}^n (\tau_0)_i (r_0)_i \ln \left(\frac{r_m}{s_{ij}} \right) \quad (2-11)$$

여기서 s_{ij} 는 i 와 j 가 다를 때는 i 와 j 말뚝간 거리를 나타내고 같을 때는 i 말뚝의 반경을 나타낸다. r_m 값은 지반의 상층과 하층의 상호작용을 고려하기 위한 값으로 단독말뚝일 때 보다 영향 영역이 더 커지므로 식(2-6)에서의 단독 말뚝에 대한 r_m 값에 r_g 를 더한 값으로 나타낼 수 있다.

$$r_m = 2.5l\rho(1 - \nu_s) + r_g \quad (2-12)$$

여기서 r_g 는 말뚝들이 형성한 면적에 대해 등가원의 반지름에 해당하는 값이다. n 개의 w_s 값은 식(2-11)에 의해 n 개의 τ_0 값의 관계로 다음과 같은 행렬 방정식을 구성한다.

$$\mathbf{w}_s = \mathbf{F}_s \tau_0 \quad (2-13)$$

말뚝 선단부에서의 침하량도 식(2-11)처럼 구성한다.

$$(w_b)_j = \sum_{i=1}^n (w_b)_{ij} = \frac{(1-\nu_s)}{2\pi G_l} \sum_{i=1}^n \frac{(P_b)_i}{s_{ij}} \quad (2-14)$$

여기서 s_{ij} 는 i 와 j 가 다를 때는 i 와 j 말뚝간 거리를 나타내고 같을 때는 i 말뚝의 반경에다 $2/\pi$ 곱한 것을 나타낸다. \mathbf{P}_b 는 말뚝 선단부에서의 하중을 나타낸다. 이 관계에 의해 선단부 하중과 침하량에 의한 행렬 방정식을 다음과 같이 구성한다.

$$\mathbf{w}_b = \mathbf{F}_b \mathbf{P}_b \quad (2-15)$$

말뚝의 압축성과 지반의 연직 방향의 비균질성을 근사적으로 고려해서 다음과 같이 나타낸다.

$$\mathbf{w}_s = \frac{1}{12} [(7+2\rho)\mathbf{w}_b + (5-2\rho)\mathbf{w}_t] \quad (2-16)$$

$$\mathbf{w}_b = \mathbf{w}_t - \frac{l}{6\pi r_0^2 \lambda G_l} [(5-2\rho)\mathbf{P}_t + (1+2\rho)\mathbf{P}_b] \quad (2-17)$$

식(2-13)에서

$$\mathbf{w}_s = \mathbf{F}_s \tau_0 = a_1 \mathbf{F}_s (\mathbf{P}_t - \mathbf{P}_b) \quad (2-18)$$

여기서 $a_1 = 1/2\pi r_0 l$ 이다.

식(2-16)과 식(2-17)를 정리하면

$$\mathbf{w}_s = b_1 \mathbf{w}_b + b_2 \mathbf{w}_t \quad (2-19)$$

$$\mathbf{w}_b = \mathbf{w}_t + c_1 \mathbf{P}_t + c_2 \mathbf{P}_b \quad (2-20)$$

여기서 $b_1 = (7 + 2\rho)/12$, $b_2 = (5 - 2\rho)/12$ 이며 $c_1 = -l(5 - 2\rho)/(6\pi r_0^2 E_p)$ 이고

$c_2 = -l(1 + 2\rho)/6\pi r_0^2 E_p$ 이다.

식(2-15)와 식(2-18)을 식(2-19)와 식(2-20)에 대입하면 다음과 같다.

$$b_2 \mathbf{w}_t = a_1 \mathbf{F}_s \mathbf{P}_t - (b_1 \mathbf{F}_b + a_1 \mathbf{F}_s) \mathbf{P}_b \quad (2-21)$$

$$\mathbf{w}_t = -c_1 \mathbf{P}_t + (\mathbf{F}_b - c_2 \mathbf{I}) \mathbf{P}_b \quad (2-22)$$

여기서 \mathbf{I} 는 단위 행렬이다. 식(2-21)과 식(2-22)를 연립해서 \mathbf{P}_b 를 소거하여 말뚝 머리에서의 변위 \mathbf{w}_t 와 말뚝 머리에 가해지는 하중 \mathbf{P}_t 의 관계인 말뚝의 강성 행렬 \mathbf{S}_p 를 유도하였다.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_t &= \mathbf{S}_p \mathbf{w}_t \\ \mathbf{S}_p &= [a_1 (b_1 \mathbf{F}_b + a_1 \mathbf{F}_s)^{-1} \mathbf{F}_s - c_1 (\mathbf{F}_b - c_2 \mathbf{I})^{-1}]^{-1} \\ &\quad \times [b_2 (b_1 \mathbf{F}_b + a_1 \mathbf{F}_s)^{-1} + (\mathbf{F}_b - c_2 \mathbf{I})^{-1}] \end{aligned} \quad (2-23)$$

2.3 유한요소 정식화

Mindlin 판의 유한요소 정식화를 위하여 최소일의 원리를 사용한다. 구조물이 평형상태에 있기 위해서 raft와 이를 지지하는 지반과 말뚝의 총포텐셜에너지가 최소로 되어야 한다. 판으로 이상화된 raft의 총포텐셜에너지는 식(2-3a)와 식(2-3b), 식(2-4a)와 식(2-4b)에서 주어진 변형도와 응력을 이용하여 변위 성분에 대하여 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\Pi_r &= \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\varepsilon}_b : \boldsymbol{\sigma}_b + \boldsymbol{\varepsilon}_s : \boldsymbol{\sigma}_s) dV - \int_A w q dA \\
&= \frac{1}{2} \int_A \left[\int (\boldsymbol{\varepsilon}_b : \mathbf{C}_b : \boldsymbol{\varepsilon}_b + \boldsymbol{\varepsilon}_s : \mathbf{C}_s : \boldsymbol{\varepsilon}_s) dz \right] dA - \int_A w q dA \\
&= \frac{1}{2} \int_A (\boldsymbol{\Delta} \cdot \mathbf{L}_b \cdot \mathbf{D}_b \cdot \mathbf{L}_b \cdot \boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\Delta} \cdot \mathbf{L}_s \cdot \mathbf{D}_s \cdot \mathbf{L}_s \cdot \boldsymbol{\Delta}) dA - \int_A w q dA
\end{aligned} \tag{2-24}$$

여기서 사용된 기호의 정의는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{pmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_b = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_s = \frac{Et}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

등매개변수 유한요소를 사용하여 주어진 판의 정의영역과 변위성분을 이산화하면 각 요소내에서의 변위성분을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\Delta}^e \tag{2-25}$$

여기서 \mathbf{N} 은 판의 변위성분에 대한 형상함수이며, $\boldsymbol{\Delta}^e$ 는 각 요소의 절점에서의 변위성분이다. 식(2-25)를 식(2-24)에 대입하여 요소별로 적분을 수행하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Pi_r = \frac{1}{2} \sum_e [\boldsymbol{\Delta}^e \cdot \int_A (\mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b + \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s) dA \cdot \boldsymbol{\Delta}^e] - \sum_e (\boldsymbol{\Delta}^e \cdot \int_A \mathbf{N} q dA) \tag{2-26}$$

여기서 $\mathbf{B}_b = \mathbf{L}_b \mathbf{N}$ 이고 $\mathbf{B}_s = \mathbf{L}_s \mathbf{N}$ 이다.

식(2-26)을 각 절점 변위에 대한 적합 조건에 따라 조합하면 다음과 같다.

$$\Pi_r = \frac{1}{2} \Delta_n \cdot \mathbf{K}_r \cdot \Delta_n - \Delta_n \cdot \mathbf{f} \quad (2-27)$$

여기서, Δ_n 과 \mathbf{f} 는 유한요소모델의 각 절점에서의 절점 변위벡터와 하중벡터이고 \mathbf{K}_r 은 raft 의 강성 행렬이다. Raft 를 지지하는 말뚝의 strain energy 는 말뚝의 강성 행렬과 각 말뚝에서의 변위에 대하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \Delta_p \cdot \mathbf{S}_p \cdot \Delta_p \quad (2-28)$$

여기서, Δ_p 과 \mathbf{S}_p 는 말뚝의 변위성분과 강성 행렬이다. 말뚝의 변위는 변환 행렬을 이용하여 유한요소모델의 절점 변위로 표시할 수 있다.

$$\Delta_n = \mathbf{T} \cdot \Delta_p \quad (2-29a)$$

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_p \quad (2-29b)$$

여기서, \mathbf{T} 는 말뚝의 변위와 강성 행렬을 유한요소모델의 전체 좌표계로 표시하기 위한 변환행렬이다. 식(2-29a)와 식(2-29b)을 식(2-28)에 대입하면 말뚝의 변형에너지를 유한요소모델의 절점 변위로 표시할 수 있다.

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \Delta_n \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{K}_p \cdot \mathbf{T} \cdot \Delta_n \quad (2-30)$$

지반이 raft 를 지지하는 효과는 raft 의 각 유한요소에 전단강성을 무시하는 Winkler 스프링을 적용함으로써 고려한다. Raft 의 단위 면적당 하중 침하량 비인 지반반력계수 즉 스프링 계수(k_{soil})는 Vesic가 제안한 다음과 같은 방법으로 구한다 (Ves61a; Ves61b).

$$k_{soil} = \frac{2G}{B(1-\nu_s)} \quad (2-31)$$

여기서 G 는 지반의 전단강성, B 는 raft의 폭을 나타낸다. 지반에 의한 변형에너지를 raft의 유한요소모델의 절점 변위로 표시하면 다음과 같다.

$$\Pi_{soil} = \frac{1}{2} \Delta_n \cdot \mathbf{K}_{soil} \cdot \Delta_n \quad (2-32)$$

여기서 \mathbf{K}_{soil} 은 지반의 강성 행렬을 나타낸다. 지반과 맞닿으로 지지되는 piled raft의 총포텐셜에너지는 다음과 같다.

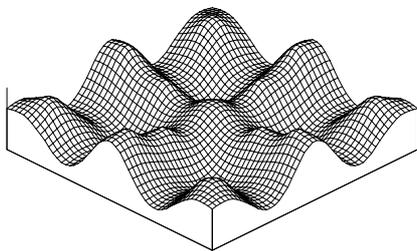
$$\Pi = \frac{1}{2} \Delta_n \cdot \mathbf{K}_r \cdot \Delta_n + \frac{1}{2} \Delta_n \cdot \mathbf{K}_{soil} \cdot \Delta_n + \frac{1}{2} \Delta_n \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{K}_p \cdot \mathbf{T} \cdot \Delta_n - \Delta_n \mathbf{f} \quad (2-33)$$

주어진 기초 구조물이 평형상태를 유지하기 위해선 식(2-33)에서 정의된 총포텐셜에너지가 최소화되어야 한다는 것을 이용하여 다음과 같은 강성행렬식을 유도한다.

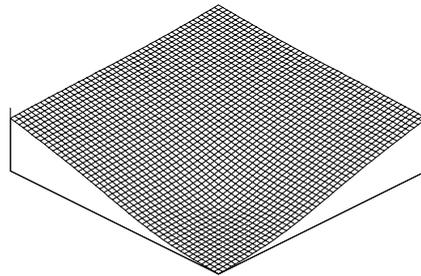
$$(\mathbf{K}_r + \mathbf{K}_{soil} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{K}_p \cdot \mathbf{T}) \Delta_n = \mathbf{f} \quad (2-34)$$

3. 최적화(Optimization)

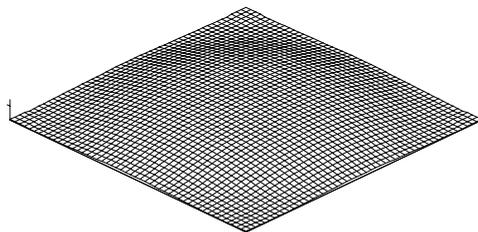
이 장에서는 그림 5(a)와 그림 5(b)같은 부등침하를 가진 piled raft 에서 그림 5(c)의 raft 의 침하 형상처럼 부등침하를 최소화시키는 최적말뚝위치를 결정하는 방법을 제안한다. Raft 와 같은 2 차원 평면 구조물에서는 부등침하가 작아질수록 처짐 곡면의 형상이 평면을 이루어 면적이 작아지므로 목적함수를 곡면의 면적으로 정의한다. 설계변수는 말뚝 위치로 정하고 말뚝 위치가 raft 에서 벗어나지 못하도록 적절한 구속조건을 준다. 목적함수를 최적화하는 설계변수를 구하는 알고리즘으로는 구속조건이 있는 비선형 최적화문제를 푸는데 효과적인 알고리즘인 RQP(Recursive Quadratic Programming)을 사용한다 (Ban93).



(a) 최적화 전 raft 의 침하 형상 I



(b) 최적화 전 raft 의 침하 형상 II



(c) 최적화 후 raft 의 침하 형상

그림 5. 최적화 전후 raft 의 침하 형상

이 논문에서는 부등침하를 최소화시키는 말뚝위치를 기초의 처짐 곡면의 면적을 최소화하여서 결정한다. 처짐 곡면의 면적은 다음과 같다.

$$A = \int_A \sqrt{1 + \|\nabla w\|^2} dA \quad (3-1)$$

여기서 ∇ 는 미분 연산자를 나타내고, $\|\cdot\|$ 는 벡터의 Euclidean norm이다.

회전이 없는 강제운동을 고려하기 위하여 목적 함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\text{Minimize}_{\mathbf{D}} \Pi = \frac{1}{2} \int_A \|\nabla w\|^2 dA \quad \text{subject to } \mathbf{R}(\mathbf{D}) \leq 0 \quad (3-2)$$

여기서, Π 는 목적함수를 나타내고, w 와 \mathbf{D} 는 각각 raft의 처짐 함수와 설계 변수 벡터이고, \mathbf{R} 은 말뚝이 raft를 벗어나지 못하게 하는 구속조건의 벡터로서 판의 형상에 따라 선형이거나 비선형이다. 목적함수를 이산화하면 다음과 같다.

$$\int \|\nabla w\|^2 dA = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{u} \quad (3-3)$$

여기서 $\mathbf{M} = \int \left(\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \right) dA$ 이다. 구속조건이 있는 비선형 최적화문

제는 다음의 2차 종속문제로 선형화 시켜서 반복적으로 풀게 된다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize}_{\mathbf{d}^m} \nabla_D \Pi^{m-1} \cdot \mathbf{d}^m + \frac{1}{2} \mathbf{d}^m \cdot \mathbf{H}^{m-1} \cdot \mathbf{d}^m \\ \text{subject to } \mathbf{R}_a^{m-1} + \nabla_D \mathbf{R}_a^{m-1} \cdot \mathbf{d}^m = 0 \end{aligned} \quad (3-4)$$

여기서, m 은 반복 횟수(iteration count), \mathbf{H}^{m-1} , \mathbf{d}^m , ∇_D 과 \mathbf{R}_a^{m-1} 는 각각 설계변수에 대한 헤시안 행렬(hessian matrix), 방향 벡터(direction vector), 설계변수에 대한 그라디언트 연산자(gradient operator)와 유효 구속조건(active constraints)을 나타낸다. 최적화 과정은 목적함수의 그라디언트와 헤시안 행렬을 이용하여 목적함수를 감

소시키는 설계변수의 탐색 방향을 결정하는 과정과 결정된 탐색방향에 대하여 목적함수를 최소화시키는 line search 과정으로 나누어진다.

유효 구속 조건 집합은 Fletcher 의 active set strategy 에 의해 결정된다 (Lue89). 식(3-4)에서 사용한 Gauss-Newton 근사법에 의한 헤시안 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{H}^{m-1} = \nabla_D(\mathbf{u}^{m-1}) \cdot \mathbf{M} \cdot \nabla_D(\mathbf{u}^{m-1}) \quad (3-5)$$

Quadratic subproblem 인 식(3-3)에 대한 1 차 필요조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{m-1} \cdot \mathbf{d}^m + \lambda^m \cdot \nabla_D \mathbf{R}_a^{m-1} &= -\nabla_D \Pi^{m-1} \\ \nabla_D \mathbf{R}_a^{m-1} \cdot \mathbf{d}^m &= -\mathbf{R}_a^{m-1} \end{aligned} \quad (3-6)$$

여기서 λ^m 은 m 번째 반복 단계에서 라그랑지안 계수벡터이다. 설계변수에 대한 1 차 민감도는 비교적 정식화가 간단하고 정확한 민감도를 계산할 수 있는 직접 미분법을 사용하여 설계변수에 대한 변위의 민감도를 계산한다. 식(2-34)을 설계변수에 대해 직접미분하여 다음과 같이 구한다.

$$\frac{\partial \Delta_n}{\partial \mathbf{D}} = -(\mathbf{K}_r + \mathbf{K}_{soil} + \mathbf{T}^T \mathbf{K}_p \mathbf{T})^{-1} \frac{\partial (\mathbf{T}^T \mathbf{K}_p \mathbf{T})}{\partial \mathbf{D}} \Delta_n \quad (3-7)$$

헤시안 행렬을 근사함으로써 발생하는 느린 수렴성과 불안정성을 해결하기 위한 방법으로 golden section 기법에 기초한 최적화기법인 line search 방법을 사용한다.

$$\underset{\theta}{\text{Minimize}} \Pi(\mathbf{D}^{m-1} + \theta \mathbf{d}^m) \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (3-8)$$

여기서 θ 는 line search 의 step length 를 나타낸다. \mathbf{D}^m 은 m 번째 반복 단계에서 설계변수를 나타내고 \mathbf{d}^m 은 탐색 방향을 나타낸다.

4. 구조 신뢰성해석

Raft의 부등침하를 최소화시키는 최적말뚝위치를 결정하기 위해서는 piled raft에 대한 해석을 해야 한다. Piled raft 해석을 위해 사용되는 변수의 불확실성은 piled raft의 안전성에 영향을 준다. 일반적으로 지반 정보는 지반 자체의 다양성과 계측과 시공시 지반 상태의 차이, 계측자의 오차등으로 불확실성이 크다. 이에 구조물 해석에 사용되는 변수 중 지반의 전단강성을 확률 변수로 취하여 지반 전단강성의 불확실성을 통계적으로 처리하고 이를 구조해석 과정에서 실제적으로 고려하여 구조물의 파괴확률을 정량적으로 구함으로써, 구조물의 안전성을 평가하는 신뢰성해석을 수행한다.

신뢰성해석을 수행하기 위해서는 상태함수를 정의하여야한다. 상태함수는 설계자가 정의하기에 따라 다르지만 이 논문에서는 구조물의 일부분이 본래의 기능을 상실하는 경우를 나타내는 사용성 한계상태를 택하여 최대 부등침하량이 허용 부등침하량을 넘어서는 경우를 한계상태로 정의하고 한계상태함수를 허용 부등침하량과 최대 부등침하량과의 차이로 정의한다. 한계상태함수가 확률변수의 음함수(implicit function)로 주어지는 경우, 구조해석의 마지막 단계에서 신뢰성이론을 적용하던 기존의 방법으로는 신뢰성해석을 할 수 없으므로, 구조해석의 각 단계마다 확률변수들의 분산 특성을 고려할 수 있는 확률 유한요소법을 도입한다. 확률 유한요소법을 평균일계이차모멘트방법에 적용하여 파괴확률을 구한다.

4.1. 한계상태함수

신뢰성이론에 따라 구조물의 파괴확률을 정확히 구하기 위해서는 확률변수들의 결합확률밀도함수를 알아야 하고, 이 함수의 다중 적분을 수행해야 하므로 실용적이지 못하다. 따라서 많은 근사 해법이 개발되었는데, 구조물의 신뢰성해석을 위한 근사 해법 중 간단하면서도 비교적 정확한 파괴확률을 구할 수 있는 2 차모멘트방법을 사용한다. 2 차모멘트방법은 기본적으로 모든 확률변수의 확률분포가 평균과 분산에 의해 모든 통계적인 특성이 결정되는 정규분포라는 가정을 전제로 한다. 이 논문에서는 확률변수의 평균(1 차 모멘트)에서 한계상태함수를 일차항까지 Taylor 전개하여 평균에 대한 확률변수의 2 차모멘트인 분산(또는 표준편차)을 고려하여 신뢰성지수나 파괴확률을 산정하는 평균일계이차모멘트방법(MVFOSM: Mean Value First Order Second Moment method)을 사용한다. 한계상태함수(g)를 허용 부등침하량(Δ_a)과 최대 부등침하량(Δ_u)의 차이로 정의한다.

$$g(x) = \Delta_a - \Delta_u \quad (4-1)$$

여기서 허용 부등침하량은 확정값으로 사용하였으며, $\Delta_u = u_{\max} - u_{\min}$ 이고 u_{\max} , u_{\min} 은 확률변수의 평균값을 취했을 때 변위의 최대값과 최소값을 나타낸다. 한계상태함수의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$E[g] = E[\Delta_a] - E[\Delta_u] = E[\Delta_a] - E[u_{\max} - u_{\min}] \quad (4-2)$$

$$Var[g] = Var[\Delta_a] + Var[\Delta_u] = Var[u_{\max}] + Var[u_{\min}] - 2Cov(u_{\max}, u_{\min}) \quad (4-3)$$

여기서, $Cov(u_{\max}, u_{\min})$ 은 u_{\max} 와 u_{\min} 의 공분산(covariance)이고, Δ_a 는 확정값으로 가정하였기에 분산은 0 이다. 변위의 평균과 분산과 공분산은 다음절에서 다룰 확률 유한요소법에 근거한 평균일계이차모멘트법으로 구한다.

신뢰성지수(β)는 한계상태함수(g)의 표준편차에 대한 평균의 비로 정의된다. 이때 사용된 Δ_u 가 정규분포 확률변수라고 가정하면, 파괴확률(P_f)과 신뢰성지수(β)의 관계는 다음과 같이 표현된다.

$$P_f = P(\Delta_a \leq \Delta_u) = P(g \leq 0) = \Phi(-E(g)/\sqrt{Var(g)}) = \Phi(-\beta) \quad (4-4)$$

$$\beta = \frac{E(g)}{\sqrt{Var(g)}} = \frac{\mu_g}{\sigma_g} \quad (4-5)$$

여기서 $\Phi(\cdot)$ 는 누적 표준 정규분포를 나타내고 확률변수들은 정규분포이다.

대부분의 구조물들은 신뢰성지수가 1에서 4 사이이다. 신뢰성지수가 1일때 파괴확률은 15.9%이고 4일때는 0.00316%이다. 그림 6에 파괴확률과 신뢰성지수의 관계를 나타내었다.

4.2 확률 유한요소법의 정식화

기존의 유한요소알고리즘에 확률 개념을 도입한 확률 유한요소법은 구조응답(변위, 부재력)이 확률변수의 음함수(implicit function)로 주어지는 경우 구조응답의 분산 정도를 파악할 수 있다. 구조물 해석 시 내재되어 있는 불확실성을 확률 변수 벡터 \mathbf{X} 로 나타내면

$$\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n\}^T \quad (4-6)$$

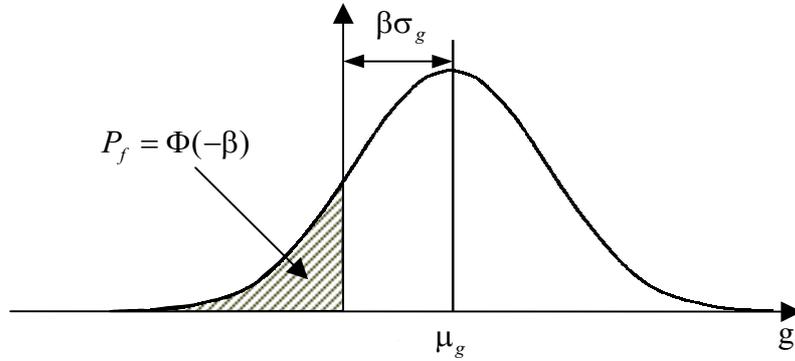


그림 6. 신뢰성지수의 확률론적 개념

일반적으로 구조응답인 변위 u , 혹은 부재력 f 는 확률변수 x 의 함수이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u = u(x) \quad (4-7a)$$

$$f = f(x) \quad (4-7b)$$

여기서 확률변수 x 는 외부 하중, 구조 치수, 재료 성질, 경계 조건, 지반 조건 등 여러 가지가 될 수 있다. 구조응답이 이러한 확률변수의 양함수(explicit function)로서 표현된다면 x 의 분산 정도에 따른 구조응답의 분산 정도를 쉽게 구할 수 있지만 구조물이 복잡해지면 확률변수의 음함수의 형태로 주어지므로 확률 유한 요소법의 적용이 필요하다. 선형 탄성해석을 위한 변위법의 가정하에, 경계 조건을 고려하여 재구성한 구조물의 하중-변위 강성 방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (4-8)$$

여기서, \mathbf{K} 는 강성 행렬을 나타내고, \mathbf{U} 와 \mathbf{P} 는 변위 벡터와 외부 하중 벡터를 나타낸다. 식(4-8)의 각 항은 다음과 같이 확률변수 x 의 함수가 된다.

$$k = k(x) \quad (4-9a)$$

$$p = p(x) \quad (4-9b)$$

\mathbf{U} 를 x 의 평균치에 대하여 1 차항까지 Taylor 전개하면

$$\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial x_i} (x_i - \bar{x}_i) \quad (4-10)$$

여기서 $\bar{\mathbf{A}}$ 는 \mathbf{A} 의 평균값을 의미한다. $\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{U}(\bar{x})}{\partial x}$ 는 x 평균치에서 계산된 \mathbf{U} 의 x 에 관한 편미분값을 의미하며 다음 식으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\mathbf{K}}^{-1} \bar{\mathbf{P}}) \\ &= \frac{\partial \bar{\mathbf{K}}^{-1}}{\partial x} \bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{K}}^{-1} \frac{\partial \bar{\mathbf{P}}}{\partial x} \\ &= -\bar{\mathbf{K}}^{-1} \frac{\partial \bar{\mathbf{K}}}{\partial x} \bar{\mathbf{K}}^{-1} \bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{K}}^{-1} \frac{\partial \bar{\mathbf{P}}}{\partial x} \\ &= -\bar{\mathbf{K}}^{-1} \frac{\partial \bar{\mathbf{K}}}{\partial x} \bar{\mathbf{U}} + \bar{\mathbf{K}}^{-1} \frac{\partial \bar{\mathbf{P}}}{\partial x} \\ &= \bar{\mathbf{K}}^{-1} \bar{\mathbf{\Omega}} \end{aligned} \quad (4-11)$$

여기서 $\bar{\mathbf{\Omega}} = -\frac{\partial \bar{\mathbf{K}}}{\partial x} \bar{\mathbf{U}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{P}}}{\partial x}$ 이고, $E(\bar{\mathbf{K}}^{-1})$ 는 확률변수의 평균치에서 강성 행렬의 역행렬을 의미한다. 따라서 변위 벡터의 분산은 다음과 같이 구해진다.

$$Var[\mathbf{U}] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial x_j} Cov(x_i, x_j) \quad (4-12)$$

식(4-10)으로부터

$$(\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}})(\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}})^T = \bar{\mathbf{K}}^{-1} \bar{\mathbf{\Omega}} (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})^T \bar{\mathbf{\Omega}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-T} \quad (4-13)$$

이므로, 변위벡터의 공분산(covariance) 행렬이 다음과 같이 구해진다.

$$\mathbf{C}_{uu} = \bar{\mathbf{K}}^{-1} \bar{\mathbf{\Omega}} \mathbf{C}_{xx} \bar{\mathbf{\Omega}}^T \bar{\mathbf{K}}^{-T} \quad (4-14)$$

여기서 \mathbf{C}_{uu} 는 변위의 공분산 행렬이고 \mathbf{C}_{xx} 는 확률변수의 공분산 행렬을 나타낸다. \mathbf{C}_{uu} 의 대각 요소들은 각 절점에서의 변위의 분산 정도를 나타내며, 비대각 요소들은 변위간의 상관 관계를 나타낸다 (김지호 91).

5. 해석 예제

이 논문에서 제안된 최적말뚝배치기법을 검증하기 위하여 하중조건과 raft의 형상을 변화시킨 예제를 다루었다. 표 1에는 각 예제에 공통적으로 사용되는 재원을 나타내었다. 각 예제를 위한 말뚝의 초기위치는 raft 면적을 말뚝 수로 등분하여 그 면적의 중심으로 정하였다. Raft의 사하중은 기초의 두께가 1m이므로 raft의 자중을 2.0 ton/m²의 등분포하중으로 raft 전체에 재하하여 고려하고 활하중은 연직 방향의 집중하중이나 선하중으로 재하해서 고려했다. Raft는 정사각형, 사다리꼴과 원형형상을 사용했다. 말뚝은 raft를 지지하는 스프링으로 모델링하고 지반은 raft에 부착된 스프링으로 모델링하였다. 각 예제의 말뚝배치를 나타낸 그림에서 속이 빈 원형은 말뚝의 초기위치, 검은 원형은 최적위치, 그리고 네모는 하중 재하위치를 나타낸다. 설계변수인 말뚝 위치의 변화율이 10⁻³이하이면 최적화과정을 종료하고 그때의 설계변수가 부등침하를 최소화시킬 수 있는 말뚝의 최적위치가 된다.

$$\frac{\|\Delta \mathbf{D}\|}{\|\mathbf{D}\|} \leq 10^{-3} \quad (5-1)$$

표 1. 지반, 말뚝과 raft의 재원

지반	말뚝	Raft
Silty Sand 포아송비 : 0.4 전단계수 : 250 ton/m ²	콘크리트 지름 : 0.4m 탄성계수: 2.1 × 10 ⁶ ton/m ² 개수 : 25 개 길이 : 8m	콘크리트 두께 : 1m 탄성계수: 2.1 × 10 ⁶ ton/m ² 포아송비: 0.2 자중 : 2.0 ton/m ³

각 예제에 말뚝의 초기위치와 결정된 최적위치를 나타내고 최적화 전후 변위 형상을 그림으로 나타내었다. 최적화 전후에 하중 재하위치에서 최대 부등침하량과 raft 전체에서 최대 휨모멘트를 표로서 나타내고 최적화 후 값을 최적화 전 값에 대한 백분율로 비교하였다.

5.1 최적화 예제

5.1.1 선하중(Line load)을 받는 기초

Piled raft 는 raft 와 지반의 접촉효과와 말뚝간 상호작용을 고려해야 한다. 그러나 기존 설계에서는 raft 와 지반의 접촉효과와 말뚝간 상호작용의 예측에 대한 불확실성 때문에 말뚝 설계를 단독 말뚝의 지지력을 합하여 적절한 효율(군효율: group efficiency)을 곱해서 전체 지지력을 구하고 raft 와 지반의 접촉효과는 무시하는 보수적인 설계 방법이 적용되고 있다. 따라서 raft 와 지반의 접촉효과를 고려와 무시하는 각각의 경우에 대하여 말뚝간 상호작용을 고려와 무시하는 각각의 경우에 대해 해석하여 최적말뚝위치를 결정하였다. 이에 따라 raft 와 지반의 접촉효과와 말뚝간 상호작용의 고려 여부가 최적말뚝위치 결정에 끼치는 영향을 확인하였다.

한 변이 20m 인 정사각형 raft 로 Q8 등매개 유한요소를 가로, 세로 11 개씩 총 121 개, 절점 408 개로 이산화하였다. 기초의 가장자리에서 5.45m 떨어진 위치에 17.60ton/m 의 선하중이 640ton 재하되고 2ton/m² 의 등분포하중이 raft 전체에 재하되어 총 1440ton 의 하중이 작용되었다.

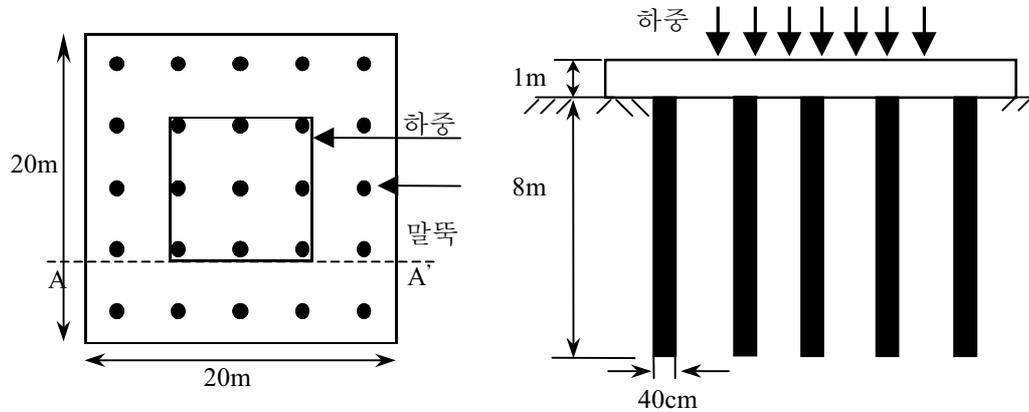
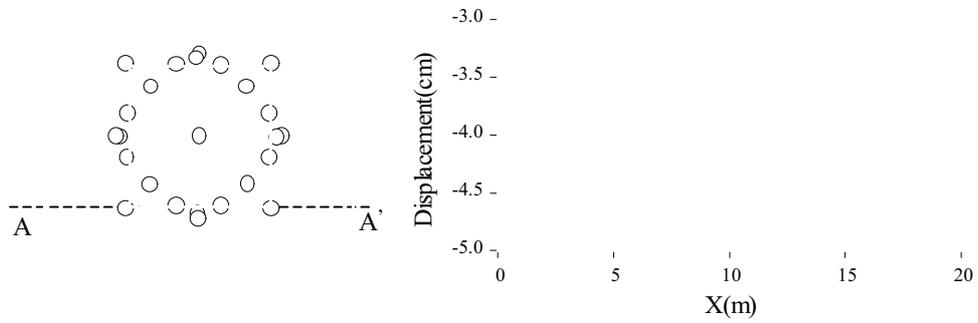


그림 7. 정사각형기초의 초기 형상과 종단면(A-A' 단면)

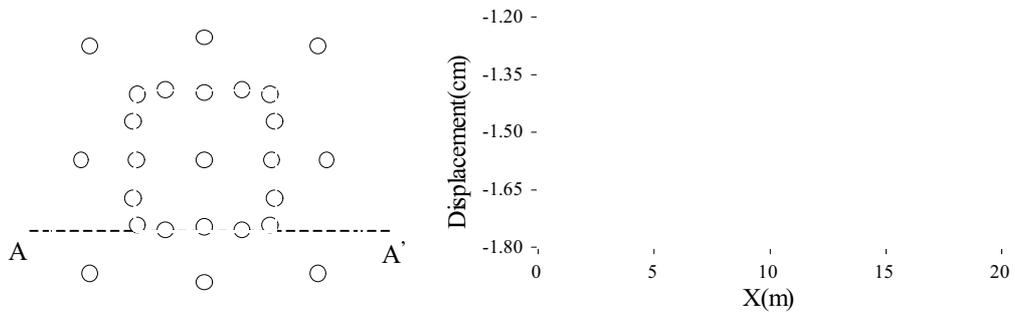
그림 7에는 적용한 예제인 정사각형기초의 형상과 선하중 재하위치에서 종단면을 나타내었다. 그림 8(a)에는 raft와 지반의 접촉효과와 지반에 의한 말뚝간 상호작용을 모두 고려했을 때 raft의 부등침하를 최소화시키는 최적말뚝배치를 나타내었다. Raft에 가해진 하중을 말뚝과 지반이 함께 지지하므로 침하가 많이 일어나는 하중이 재하된 근처에만 말뚝이 위치하였다. 이웃하는 말뚝에 의해 침하가 증가하는 변위장 중첩 때문에 말뚝이 모인 위치에 더 많은 침하가 생기므로 그 침하를 제한하기 위해서 하중이 재하된 위치 바로 밑에 말뚝이 배치되기 보다는 하중이 재하된 선(line)의 중앙부에 모여서 배치되었다. 그림 8(b)에 raft의 침하 형상에서 최적말뚝위치의 부등침하는 감소하나 절대침하는 증가한 것을 보인다. 이 결과로 절대침하를 제한시키는 것이 반드시 부등침하를 제한시키는 것은 아니라는 사실을 알 수 있다. 말뚝간 상호작용을 고려하여 말뚝 강성을 구한 Randolph와 Wroth가 제시한 방법은 말뚝이 겹치는 경우에는 해석할 수 없으므로 말뚝이 겹친 경우에 구한 말뚝의 강성에는 오차가 포함되어 있다. 그러므로 최적화 과정 중 말뚝이 겹쳤을 때 잘못된 해석 결과로 인해 초기 말뚝 배치와 하중 재하위치가



(a) 최적말뚝위치

(b)침하 형상 (A-A' 단면)

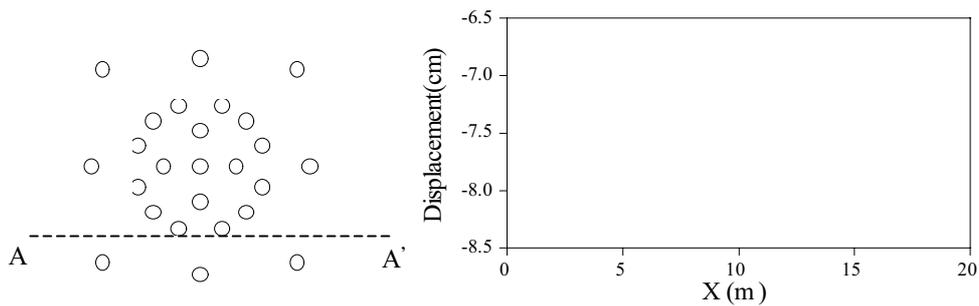
그림 8. Raft 와 지반의 접촉효과와 말뚝간 상호작용을 고려 I



(a)최적말뚝위치

(b)침하 형상 (A-A' 단면)

그림 9. Raft 와 지반의 접촉효과를 고려하고 말뚝간 상호작용을 무시 I



(a) 최적말뚝위치

(b)침하 형상 (A-A' 단면)

그림 10. Raft 와 지반의 접촉효과를 무시하고 말뚝간 상호작용을 고려 I

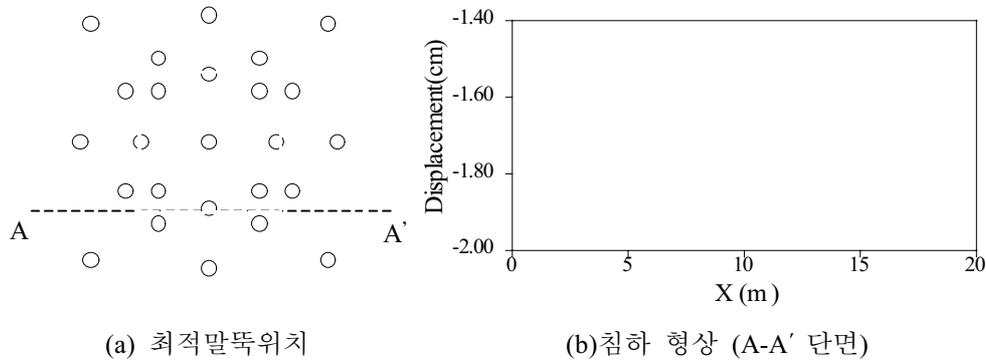


그림 11. Raft 와 지반의 접촉효과와 말뚝간 상호작용을 무시 I

대칭이지만 말뚝의 최적위치에서는 하중 재하된 선의 중앙부에 두개씩 모인 말뚝에서 대칭이 약간 어긋나는 결과를 가져왔다. 그림 9 에는 raft 와 지반의 접촉효과를 고려하고 말뚝간 상호작용을 무시하는 경우에 결정된 최적말뚝위치를 나타내었다. 하중 재하위치 바로 밑에 말뚝이 배치되었다.

그림 10 와 그림 11 에는 raft 와 지반의 접촉효과를 무시한 상태에서 말뚝간 상호작용을 고려와 무시한 각각의 경우에 대해서 결정된 최적말뚝위치와 최적화 전후 raft 의 A-A' 단면에서 침하 형상을 나타내었다. Raft 와 지반의 접촉효과를 고려한 경우에 비해 말뚝이 raft 전체에 분포하였다. 그림 10(a)는 raft 에 가해지는 하중을 말뚝이 모두 지지해야 하므로 침하가 많이 생기는 선하중 주위와 raft 의 중앙에 말뚝이 모이고 말뚝의 모임으로 인한 변위장 중첩으로 더 많은 침하가 생겨 그 침하를 막고자 더 많은 말뚝이 중앙에 배치된 것을 보이고 그림 10(b)는 최적말뚝위치에서 부등침하는 감소하였으나 절대침하는 증가한 것을 보인다. 그림 11 은 raft 와 지반의 접촉효과와 말뚝간 상호작용을 모두 무시한 경우에는 말뚝이 raft 전체에 골고루 배치되고 하중이 재하된 위치 바로 밑에 배치되었음을 보인다.

표 2. 선하중을 받는 정사각형기초에서 최대 부등침하량 (단위:mm)

말뚝간 상호작용	지반	최적화 전	최적화 후	비교(%)
무시	접촉	3.570	0.030	0.8
	미접촉	3.666	0.050	1.4
고려	접촉	6.182	0.075	1.2
	미접촉	8.344	0.217	2.6

표 3. 선하중을 받는 정사각형기초에서 최대 휨모멘트 (단위: ton-m/m)

말뚝간 상호작용	지반	최적화 전	최적화 후	비교(%)
무시	접촉	22.25	5.74	26
	미접촉	23.25	7.24	31
고려	접촉	34.72	4.13	12
	미접촉	47.73	18.11	38

표 2 에는 말뚝의 초기위치와 최적위치에서 A-A' 단면의 최대 부등침하량을 나타내었고 표 3 에는 raft 전체 단면에서 최대 휨모멘트를 나타내었다. 최적말뚝위치에서 최대 부등침하량은 초기위치에서보다 2%내외의 값으로 감소하였고 최대 휨모멘트는 초기위치에서보다 30%내외의 값으로 감소하였다.

이 결과를 통해서 raft 와 지반의 접촉효과를 고려한 경우는 무시한 경우보다 하중 주위에 말뚝이 배치되고, 말뚝간 상호작용을 고려한 경우는 무시한 경우보다 변위장 중첩 효과로 침하량이 크다는 것과 말뚝간 상호작용을 무시한 경우에는 하중 재하위치 바로 밑이 최적말뚝위치이고 고려한 경우는 하중 재하위치 주위에 모여서 배치되는 것이 최적말뚝위치임을 알 수 있다.

5.1.2 집중하중을 받는 기초

4 개의 대칭인 집중하중을 받는 정사각형, 사다리꼴과 원형기초와 하나의 편심된 집중하중을 받는 정사각형기초에 적용하였다. 2ton/m^2 의 등분포하중이 raft 전체에 재하되었다.

5.1.2.1 집중하중을 받는 정사각형기초

정사각형기초에 160ton 인 집중하중 4 개가 대칭인 위치에서 재하되어 총 1440ton 의 하중이 재하되는 경우에 대해서, 그림 12 에는 raft 와 지반의 접촉효과와 말뚝간 상호작용을 모두 고려할 때 결정된 최적말뚝위치를 나타내었다. Raft 와 지반의

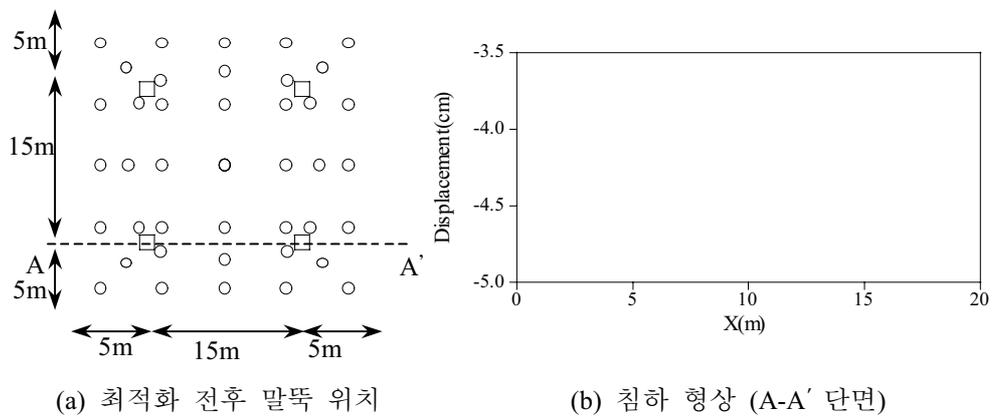


그림 12. Raft 와 지반의 접촉효과와 말뚝간 상호작용을 고려 II

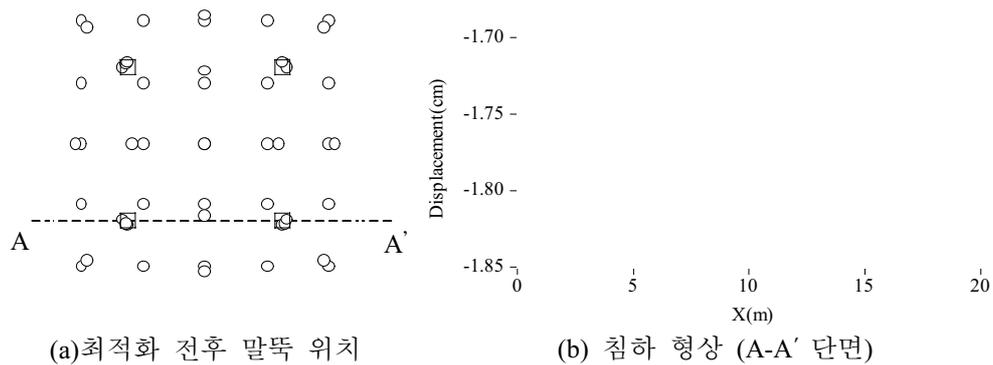


그림 13. Raft 와 지반의 접촉효과와 말뚝간 상호 작용을 무시 II

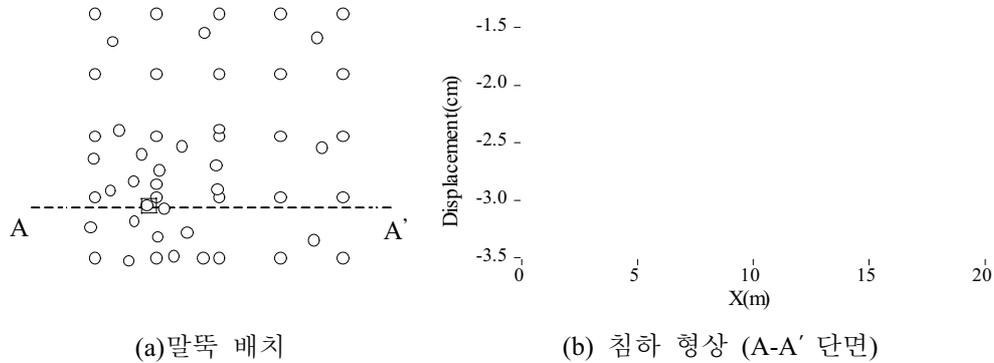


그림 14. Raft 와 지반의 접촉효과와 말뚝간 상호 작용을 고려 III

접촉효과의 고려는 지반이 raft 를 지지하는 역할을 말뚝과 함께 수행하므로 말뚝이 좀더 하중 주위로 배치되어 집중하중에 의한 침하 증가를 제한하였고 말뚝간 상호작용의 고려는 변위장 중첩 효과로 하중 주위에 모였다. 그림 13 에는 raft 의 지반 접촉효과와 말뚝간 상호작용을 모두 무시한 경우에 결정된 최적배치를 나타내었다. 최적말뚝위치는 하중 재하된 위치 바로 밑에 3 개씩 배치되었다. 그림 14 에는 160ton 인 1 개의 집중하중이 (5.45,5.45)위치에 재하된 경우 raft 와 지반의 접촉효과와 말뚝간 상호작용을 모두 고려한 경우에 결정된 최적말뚝위치를 나타내었다. 편중된 위치에 하나의 집중하중을 재하한 경우에도 지반의 접촉효과와 말뚝간 상호작용의 고려로 최적말뚝위치는 하중 주위에 말뚝이 모이고 지반의 지지 역할 분담으로 raft 안쪽으로 결정되었다. 정사각형 기초의 대각선 위에 집중하중을 재하했으나 최적화과정 중 집중하중 주위로 말뚝이 겹치면서 배치되려는 경향이 커져 말뚝의 겹침으로 해석이 잘못되는 경우가 많아지므로 최적말뚝배치에서 정사각형기초의 대각선을 기준으로 대칭의 어긋남이 크게 발생하였다..

표 4. 집중하중을 받는 정사각형기초에서 최대 부등침하량 (단위:mm)

집중하중	말뚝간 상호작용	지반	최적화 전	최적화 후	비교(%)
4 개	고려	접촉	3.314	0.249	7.5
	무시	미접촉	1.006	0.146	14.5
1 개	고려	접촉	9.601	1.508	15.7

표 5. 집중하중을 받는 정사각형기초에서 최대 휨모멘트 (단위: ton-m/m)

집중하중	말뚝간 상호작용	지반	최적화 전	최적화 후	비교(%)
4 개	고려	접촉	38.50	16.66	43
	무시	미접촉	30.02	8.87	30
1 개	고려	접촉	39.05	29.33	75

표 4 에 A-A' 단면에서 최적화 전후의 최대 부등침하량을 나타내었고, 표 5 에는 최적화 전후 raft 전체에서 최대 휨모멘트를 나타내었다. 최적말뚝위치에서 지반의 접촉효과를 무시한 경우가 지반과 함께 raft 를 지지하는 경우보다 말뚝 배치에 의한 침하량 변화에 영향을 크게 주므로 부등침하량의 감소효과가 큼을 비교를 통하여 알수있다.

5.1.2.2. 집중하중을 받는 사다리꼴기초

윗변 15m 이고 아랫변은 25m 으로 Q8 등매개 유한요소로 가로, 세로 10 개씩 총 100 개의 요소와 341 개의 절점으로 이산화하였다. 그림 15(a)에는 raft 와 지반의 접촉효과와 말뚝간 상호작용을 모두 고려한 경우 최적말뚝배치를 나타내었다. 지반의 raft 지지효과로 raft 안쪽에 위치하였고, 말뚝간 상호작용의 고려로 하중 주위에 말뚝이 모였다. 그림 15(b)에서 최적말뚝위치에서 부등침하는 감소했으나 절대침하는 변위장 중첩에 의해 증가한 것을 알수있다. 그림 16 에는 raft 와 지반의 접촉효과와 말뚝간 상호작용을 무시한 경우 최적말뚝위치를 나타내었다. 재하된 하중 바로 밑에 말뚝 2 개씩 모여서 배치되었다.

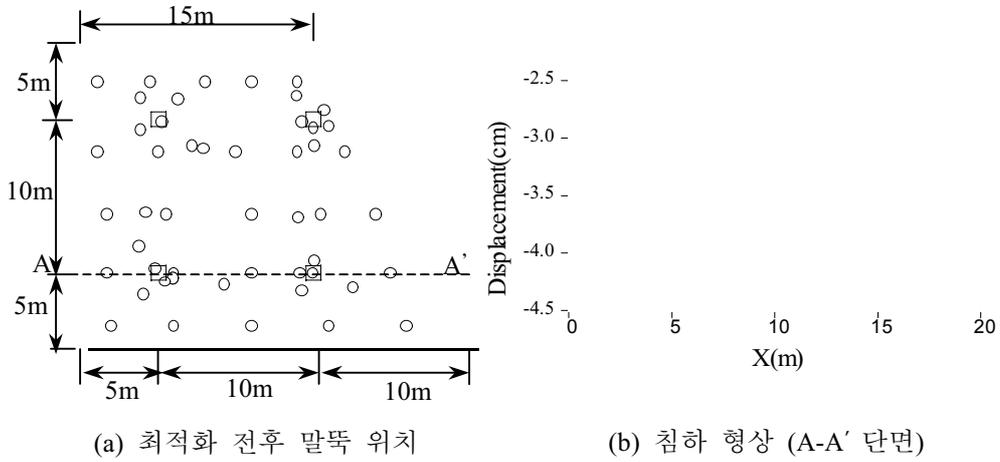


그림 15. 사다리꼴기초에서 말뚝위치와 raft 의 침하 형상 I

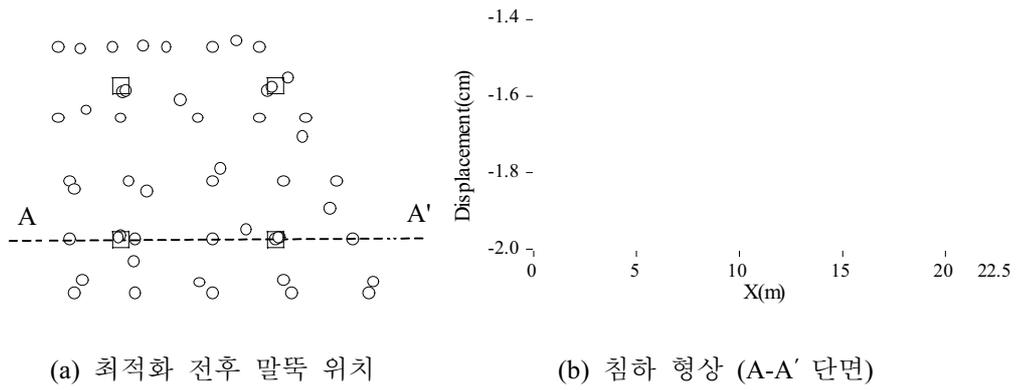


그림 16. 사다리꼴기초에서 말뚝위치와 raft 의 침하 형상 II

표 6. 사다리꼴기초에서 최대 부등침하량 (단위:mm)

말뚝간 상호작용	지반	최적화 전	최적화 후	비교(%)
고려	접촉	7.033	0.497	7.1
무시	미접촉	3.626	0.207	5.8

표 7. 사다리꼴기초에서 최대 휨모멘트 (단위: ton-m/m)

말뚝간 상호작용	지반	최적화 전	최적화 후	비교(%)
고려	접촉	39.0	15.2	39
무시	미접촉	31.9	10.5	33

표 6 에는 사다리꼴기초에서 A-A' 단면 중 최대 부등침하량을 나타내고 표 7 에는 raft 전체에서 최대 휨모멘트를 나타내었다. 정사각형기초의 경우처럼 최적말뚝위치에서 최대 부등침하량과 최대 휨모멘트의 감소가 크게 나타났다. 기초의 형상이 사다리꼴인 경우에도 제안한 최적말뚝배치기법이 최적말뚝위치를 결정함을 보여준다.

5.1.2.3. 집중하중을 받는 원형기초

하나의 크기가 160ton 인 집중하중 4 개가 대칭인 위치로 재하되고 2ton/m^2 등분포 하중이 raft 전체에 재하되는 원형기초에 대하여 적용하였다. 직경이 20m 인 원형기초로 반경 방향으로 8 개, 원주 방향으로 12 개인 총 96 개의 요소와 절점 361 개로 이산화하였다. 가장 안쪽의 12 개의 요소는 LST 요소로 나머지 요소는 Q8 등매개 유한요소이다. 원형 기초의 중앙에 배치한 말뚝은 고정시키고 나머지 24 개의 말뚝의 위치를 설계변수로 정하였다.

그림 17 에는 raft 와 지반의 접촉효과와 말뚝간 상호작용을 모두 고려한 경우 최적말뚝배치를 나타내었다. 최적화과정 중 말뚝의 겹침으로 인한 해석의 잘못으로 최적말뚝위치에서 말뚝의 대칭이 어긋났다. 그림 18 에는 raft 와 지반의 접촉효과와 말뚝간 상호작용을 무시한 경우 최적말뚝위치와 raft 의 침하 형상을 나타내었다. 하중 재하위치에 말뚝이 2 개씩 모여 배치되어 부등침하량의 감소를 시켰다. 표 8 에는 raft 의 A-A' 단면에서 최적화 전후의 최대 부등침하량을 비교하였고, 표 9 에는 최적화 전후 raft 전체에서 최대 휨모멘트를 비교하였다.

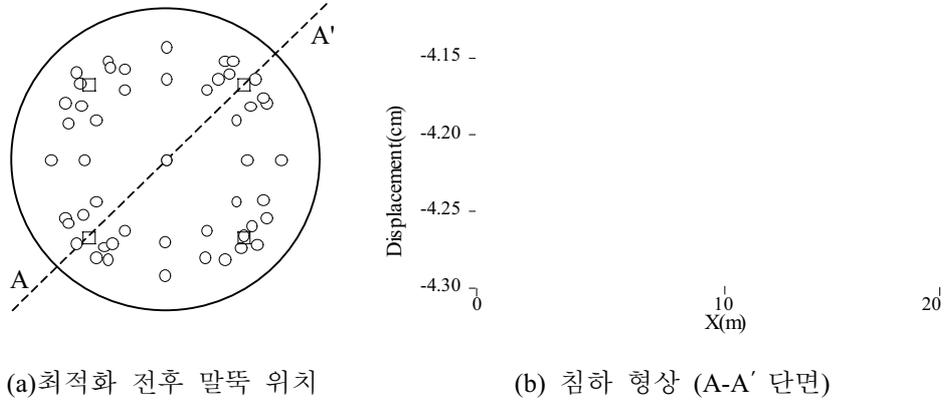


그림 17. 원형기초에서 말뚝 위치와 침하 형상 I

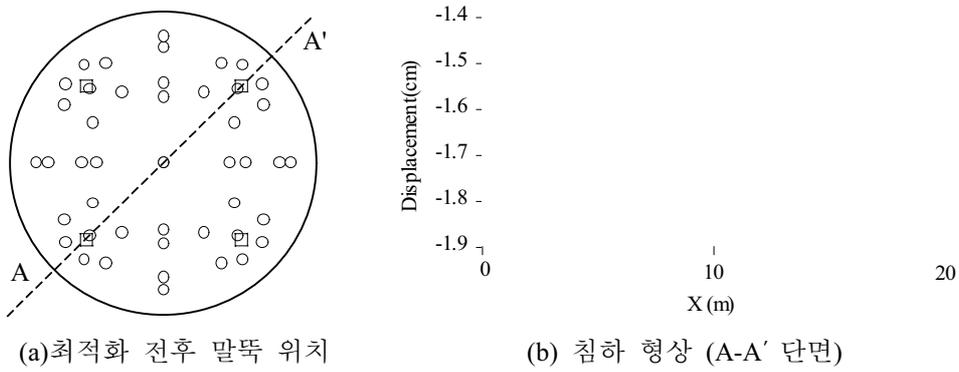


그림 18. 원형기초에서 말뚝 위치와 침하 형상 II

표 8. 원형기초에서 최대 부등침하량 (단위:mm)

말뚝간 상호 작용	지반	최적화 전	최적화 후	비교(%)
고려	접촉	1.154	0.406	35
무시	미접촉	3.573	0.241	7

표 9. 원형기초에서 최대 휨모멘트 (단위: ton-m/m)

말뚝간 상호 작용	지반	최적화 전	최적화 후	비교(%)
고려	접촉	21.233	15.109	71
무시	미접촉	25.417	6.664	26

5.2. 신뢰성해석 예제

5.1 절의 최적화 예제에서 결정한 말뚝의 초기위치와 최적위치에서 신뢰성해석을 하였다. 말뚝간 상호작용을 고려하는 경우에 결정한 말뚝의 최적위치에서 말뚝이 겹친 경우에는 말뚝이 겹치지 않게 위치를 조정하여 신뢰성해석을 하였다. 신뢰성해석을 하기 위해서는 한계상태식을 정의하여야한다. 한계상태식은 구조물의 일부분이 본래의 기능을 상실하는 경우를 나타내는 사용성 한계 상태로 보고 허용 부등침하량에서 최대 부등침하량의 차이로 정의하였다. 한계 허용 부등침하량은 Bjirrum 이 침하에 예민한 기계 기초의 작업 곤란 한계로서 제안한 $L/750$ 보다 좀더 엄격한 기준인 $L/1800$ 으로 사용하였다 (Bje63). L 은 침하가 큰 기초의 중앙면에서 작은 가장자리면까지의 거리로서 10m 이다. 확률변수의 평균에 대한 표준 편차의 비인 분산계수(C.O.V.)는 사용된 확률변수의 불확실성을 나타내는 단위로 이 절에서 적용한 예제들에서는 지반의 전단강성을 확률변수로 정하고 지반의 전단강성의 평균의 C.O.V.를 10%에서 100%로 변화시키면서 파괴확률을 검토하였다. Raft 하부의 지반은 raft 전체에 균질하다는 가정하에 하나의 확률변수로 나타내었다. 확률 유한요소법에 의한 신뢰성해석을 수행하여 신뢰성지수를 구했다. 신뢰성이론은 2 차모멘트방법을 사용하였고 한계상태식에서 사용한 최대 부등침하량이 정규분포한다는 가정하에 신뢰성지수로부터 파괴확률을 구했다.

5.2.1. 선하중을 받는 기초

5.1.1. 절의 최적화 예제에서 결정한 말뚝의 최적위치와 초기위치에서 신뢰성해석을 수행하였다. 표 10 에는 신뢰성해석으로 얻은 신뢰성지수이다. 말뚝의 초기위치

에서 신뢰성지수는 말뚝간 상호작용을 무시하면 지반의 전단강성의 분산 계수가 100%일때 raft와 지반의 접촉효과를 고려한 경우나 무시한 경우 모두 2.5 이상으로 파괴확률이 0.6%이하이고 말뚝간 상호 작용을 고려하면 raft와 지반의 접촉효과를 고려한 경우나 무시한 경우 모두 음수가 나와서 파괴확률이 50% 이상이었다. 말뚝의 최적위치에서 raft와 지반의 접촉효과를 고려한 경우에는 4.4 이상의 값이 나오고 raft와 지반의 접촉효과를 무시한 경우에는 신뢰성지수가 8 이상으로 파괴확률이 10^{-14} 이하가 되어 지반의 전단강성의 불확실성에 의해 최대 부등침하량이 허용 부등침하량을 초과할 확률은 거의 없다고 볼 수 있다.

5.2.2. 집중하중을 받는 기초

5.1.2.절의 최적화 예제에서 결정된 말뚝의 최적위치와 초기위치에서 신뢰성해석을 하였다. 표 11에는 정사각형기초에 대해 신뢰성해석을 수행하여 얻은 신뢰성지수이다. 집중하중이 하나인 경우 말뚝의 초기위치에서 신뢰성지수는 모두 음수가

표 10. 정사각형기초에서 지반의 전단강성의 불확실성에 의한 신뢰성지수 I

C.O.V. of G (%)	초기위치		최적위치			
	말뚝간 상호작용 무시		상호작용 무시		상호작용 고려	
	지반 접촉	미접촉	지반 접촉	미접촉	지반접촉	미접촉
10	26.2	25.0	88.3	8208	43.6	434.1
20	13.1	12.5	44.1	4104	21.8	217.0
30	8.7	8.3	29.4	2736	14.5	144.7
40	6.5	6.2	22.1	2052	10.9	108.5
50	5.2	5.0	17.7	1642	8.7	86.8
60	4.4	4.2	14.7	1368	7.3	72.3
70	3.7	3.6	12.6	1173	6.2	62.0
80	3.3	3.1	11.0	1026	5.4	54.3
90	2.9	2.8	9.8	9120	4.8	48.2
100	2.6	2.5	8.8	8208	4.4	43.4

나오므로 파괴확률이 50%이상이나 최적위치에서는 지반의 전단강성의 분산계수가 100%일때도 신뢰성지수가 0.9 로 piled raft 가 지반의 전단강성의 불확실성으로 인해 최대 부등침하량이 허용 부등침하량을 초과할 확률은 최대 16%정도 내재되어 있음을 알 수 있다.

표 12 에는 사다리꼴기초에 대하여 신뢰성해석을 수행하여 얻은 신뢰성지수를 나타낸다. Raft 와 지반의 접촉효과와 말뚝의 상호작용이 고려된 경우는 말뚝의 초기위치에서 신뢰성지수가 모두 음수로 나와서 파괴확률이 50%이상이고 최적위치에서는 지반의 전단강성의 분산계수가 100%일때도 신뢰성지수는 10 이상으로 파괴가능성은 거의 없다고 볼 수 있다. 원형기초의 경우는 말뚝 초기위치와 최적위치에서 지반의 전단강성의 분산계수가 100%일때도 raft 와 지반의 접촉효과와 말뚝간 상호작용의 고려 여부에 상관없이 신뢰성지수는 8 이상이므로 적용한 예제에서 파괴 가능성은 거의 없다고 볼 수 있다. 위 예제를 통하여 말뚝의 초기위치에서보다 최적말뚝위치에서 신뢰성지수가 크므로 부등침하량의 측면에서는 좀더 안전하다고 할 수 있다.

표 11. 정사각형기초에서 지반의 전단강성의 불확실성에 의한 신뢰성지수 II

C.O.V. of G (%)	집중하중 1 개 접촉/고려 (최적위치)	집중 하중 4 개			
		접촉/고려		미접촉/무시	
		초기위치	최적위치	초기위치	최적위치
10	9.2	79.6	91.2	407.7	20297.5
20	4.6	39.8	45.6	204.8	10148.7
30	3.1	26.5	30.4	136.6	6465.8
40	2.3	19.9	22.8	102.4	5074.4
50	1.8	15.9	18.2	81.9	4059.5
60	1.5	13.3	15.2	68.3	3382.9
70	1.3	11.4	13.0	58.5	2899.6
80	1.1	9.9	11.4	51.2	2537.2
90	1.0	8.8	10.1	45.5	2255.3
100	0.9	8.0	9.1	41.0	2029.8

표 12. 사다리꼴기초에서 지반의 전단강성의 불확실성에 의한 신뢰성지수

C.O.V. of G (%)	접촉/고려	미접촉/무시	
	최적위치	초기위치	최적위치
10	231.7	9.7	818.4
20	115.8	4.8	409.2
30	77.2	3.2	272.8
40	57.9	2.4	204.6
50	46.3	1.9	163.7
60	38.6	1.6	136.4
70	33.1	1.4	116.9
80	29.0	1.2	102.3
90	25.7	1.1	90.9
100	23.2	1.0	81.8

6. 결 론

이 논문에서는 piled raft 에서 raft 의 부등침하를 최소화시키는 말뚝의 최적위치를 결정하는 최적말뚝배치기법을 제안하였다. 본 연구에서 raft 는 Mindlin 판이론에 기초한 2 차원 유한요소로 모델링하였고 지반은 raft 에 부착된 Winkler 스프링으로 모델링하였다. 그리고 말뚝은 스프링으로 모델링하여 강성을 Randolph 의 근사적 탄성해법을 통해 구했다. Piled raft 전체 해석은 말뚝과 지반 스프링을 raft 유한요소에 적용하여 각 강성을 결합해서 수행하였다.

Raft 와 같은 2 차원 평면 구조물에서는 부등침하가 작아 질수록 처짐 곡면의 형상이 평면을 이루어 면적이 작아지므로 곡면의 면적을 목적함수로 정의하였다. 말뚝의 위치를 설계변수로 정하고 말뚝이 raft 를 벗어나지 못하도록 구속조건을 주었다. 설계변수에 대해 목적함수를 최적화하는 알고리즘으로는 RQP(Recursive Quadratic Programming)를 사용하였다.

불확실성이 큰 지반의 전단강성에 의해 영향을 받는 piled raft 의 안전성을 평가하기 위해 신뢰성해석을 수행하였다. 신뢰성해석을 수행하기 위해 필요한 한계상태함수를 정의하기 위해서 이 논문에서는 계산된 최대 부등침하량이 허용 부등침하량을 넘어서는 경우를 한계상태로 정의하고 한계상태함수를 허용 부등침하량과 최대 부등침하량의 차이로 정의하였다. 신뢰성해석에 사용되는 한계상태식을 허용 부등침하량과 계산된 최대 부등침하량의 차이로 정의하였다. 불확실성이 큰 지반의 전단강성이 raft 의 침하량에 미치는 통계적 특성을 확률 유한요소법을 사용하여 계산하고, 이것을 평균일계이차모멘트방법에 적용하여 신뢰성지수를 구하

였다. 최대 부등침하량이 정규분포를 따른다는 가정하에 신뢰성지수로부터 파괴 확률을 정량적으로 구해서 안전성을 평가하였다. 제안된 최적말뚝배치기법으로 결정된 최적말뚝위치에 의해 부등침하를 감소시켜서 구조물의 사용성을 증진시키고, 부등침하에 의해서 상부 구조물에 유발되는 휨모멘트를 줄여서 구조물 손상을 줄일 수 있다. 하중조건과 기초의 형상을 변화시킨 몇가지 예제에 적용하여 제안된 최적말뚝배치기법으로 결정된 최적말뚝위치가 부등침하량의 감소에 효율적임을 검증하였다.

참고문헌

김용한 97.

김용한(1997), “영역 변수화에 의한 유한체 내부 영역의 기하학적 형상과 물성치 결정을 위한 역해석”, 석사학위논문, 서울 대학교.

김지호 91.

김지호(1991), “확률 유한요소법에 의한 구조 신뢰성 해석,” 박사학위논문, 서울대학교.

박천중 98.

박천중(1998), “경계면 변수화 기법 및 정규화 기법에 의한 유한체 내부 영역의 기하학적 형상과 물성치 결정을 위한 역해석,” 석사학위논문, 서울대학교.

박현우 97.

박현우(1997), “2 차원 고체에서 소성 물성치를 결정하기 위한 역해석,” 석사학위논문, 서울대학교.

이종구 98.

이종구(1998), “모형 시험을 통한 Piled raft 의 지지 거동 분석,” 석사학위논문, 서울대학교.

Ang75.

Ang, Alfredo H-S and Tang, Wilson H. (1975), “Probability Concepts in Engineering Planning and Design,” *John Wiley & Sons, Inc.*

Bae81.

Baecher, Gregory B. & Ingra, Thomas S. (1981), “Stochastic FEM in Settlement Predictions,” *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, April 1981, pp.451-454.

Ban93.

Banan, M.R. and Hjelmstad, K.D. (1993), "Identification of Structural Systems from Measured Response," *Civil Engineering Studies, Structural Research Series No.579* pp.7-36,pp.140-151.

Bje63.

Bjerrum, L. (1963),"Discussion to European Conference on Soil Mech," *Found. Eng.(Wiesbaden)*, Vol II.

Bow96.

Bowles, Joseph E. (1996), "Foundation Analysis and Design, " *5th edition, McGraw-Hill*

Bur77.

Burland, J.B., Broms, B.B. and de Mello, V.F.B. (1977), "Behavior of foundations and structures," *Proc. 9th Int. Conf. On Soil Mech. And Found. Eng., Toykyo: Vol. 2:* pp.495-546.

Cla93.

Clancy, P. and Randolph, Mark F. (1993), "An approximate analysis procedure for piled raft foundations," *Int. J. Num. & Anal. Methods in Geomechanics*, 17(12), pp849-869.

Cla96.

Clancy, P. and Randolph, Mark F.(1996),"Simple design tools for piled raft foundations," *Geotechnique 46, No.2*,pp.313-328.

Coo89.

Cook, Robert D., Malkus, David S. and Plesha, Michael E. (1989), "Concepts And Applications Of Finite Element Analysis," *3th edition, John Wiley & Sons* .

Fle71.

Fletcher, R.(1971), "A general quadratic programming algorithm," *Journal of Institute of Mathematics and its Applications.7* , pp.76-91,

Hin77.

Hinton ,E. and Owen,D.R.J. (1977), "Finite Element Programming ," *Academic Press*.

Hor97.

Horikoshi, K. and Randolph, Mark F. (1997), "Optimum design of piled raft foundations," *Proc. Int. Conf. On Soil Mech. And Found. Eng., Vol.2*, pp.1073-1076.

Kul96.

Kulhawy, Fred H. F. ASCE and Kok Kwang Phoon (1996), "Engineering Judgment in the Evolution from Deterministic to Reliability-Based Foundation Design," *Uncertainty in the Geologic Environment (from Theory to Practice) : Proceeding of Uncertainty '96: ASCE Journal of Geotechnical Engineering Geotechnical Special Publication No. 58*, pp.28-47.

Lue89.

Luenberger, D.G. (1989), "In Linear and Nonlinear Programming," *Addison-Wesley Publishing Co.*

Pou74.

Poulos, H.G. and Davis, E.H. (1974), "Elastic solutions for soil and rock mechanics," *John Wiley and Sons.*

Pou80.

Poulos, H.G. and Davis, E. H. (1980), "Pile foundation analysis and design," *John Wiley and Sons.*

Pou94.

Poulos, H.G. (1994), "An Approximate Numerical Analysis of Pile_Raft Interaction," *International Journal for Numerical And Analytical Methods in Geomechanics, Vol.18*, pp.73-92.

Pou97.

Poulos, H.G., Small, J.C., Ta, L.D., Sinha, J. & Chen, L. (1997), "Comparison of some methods for analysis of piled rafts", *Proc. 14th Int. Conf. On Soil Mech. And Found. Eng., Vol.2.*

Ran75.

Randolph, Mark F. and Wroth, C. Peter (1975), "An analysis of the vertical deformation of pile groups," *Geotechnique 29, No.4*, pp.423-439.

Ran78.

Randolph, Mark F. and Wroth, C. Peter (1978), "Analysis of Deformation of Vertically Loaded Piles," *Journal of the geotechnical Engineering Division*, December, pp.1465-1488.

Ran79.

Randolph, Mark F. & Wroth, C.P. (1979), "An analysis of the vertical deformation of pile groups," *Geotechnique*, No. 4, pp.424-439.

Ran94.

Randolph, Mark F. (1994), "Design Methods for pile Groups and piled rafts," *CSMFE*, pp.61-82.

Ran96.

Randolph, Mark F. (1996), "Simple Design Approaches For Piled Foundations," Proc. International Symposium on Pile Foundations (말뚝기초 국제 학술발표회 논문집), 1996.1.19, pp.79-108.

Ves61a.

Vesic, A. S. (1961a), "Bending of Beams Resting on Isotropic Elastic Solid," *Jour. Eng. Mech. Division, ASCE, Vol. 87, EM2, April 1961*, pp. 35-53.

Ves61b.

Vesic, A. S. (1961b), "Beams on Elastic Subgrade and the Winkler's Hypothesis," *5th ISCMFE, Vol.1*, pp.845-850.

Zie89.

Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. (1989), "The Finite Element Method," *McGraw-Hill Book Co., Vol.2*.

ABSTRACT

Optimal Pile Placement for Minimizing Differential Settlements in Piled Raft Foundations

This paper presents an optimal pile placement scheme to determine the optimal location of the pile support beneath the raft which minimizes the differential settlements of the raft. The raft is subdivided into two-dimensional 'thick' plate finite elements based on the Mindlin plate theory. The raft-soil contact is lumped into an equivalent soil 'spring' at each node. The piles are modeled as springs supporting the plates based on the approximate elastic analysis method proposed by Randolph and Wroth. The piled raft combines the individual 'stiffnesses' of the pile group, the raft and the soil.

The more the differential settlements decrease, the more the area of the deflected raft decreases. An object function is defined as area of the deflected raft. Design variables are defined as pile locations and constraints are imposed to prevent the piles from escaping out of the raft. RQP(Recursive Quadratic Programming) is adopted to minimize the nonlinear object function with regard to the design variables. The sensitivity of the displacement with regard to the design variables is obtained by the direct differentiation method.

At the optimal pile location is determined by the proposed method, reliability analysis is performed to estimate the safety of the piled raft subjected to uncertainty in the shear modulus of soil. The limit state equation used in the reliability analysis is defined as the difference between the allowable differential settlement and the maximum differential settlement. Statistical properties of the raft settlements is calculated by means of stochastic finite element methods and the reliability index is obtained by the first-order second-moment method. Differential settlements are assumed to follow normal distribution and the safety of the piled raft is estimated through the probability of failure, which can be calculated from the reliability index by using tables of standardized normal variates. The proposed method which determines the optimal location of the piles is demonstrated an efficient method for minimizing differential settlements through several examples.

Key Word

Differential settlements, Optimal pile placement, Object function, RQP, Reliability analysis

감사의 글

감사하다는 말만으로는 너무 부족하다는 생각이 들게 많은 것을 꼼꼼히 알려주시고 조언을 해주신 이 해성 교수님께 감사를 드립니다. 음치인 나에게 기타를 가르쳐주려고 애썼는데 미안하게도 성과는 없었던 기타 연주 실력에 실망하는 선배에게 훌륭한 기타 연주자가 되지는 못했지만 그들의 연주를 즐길 줄 알고 더 잘 기타를 치고자 노력하는 마음을 가지게 되었으니 당신의 노력은 헛되지 않았음을 알리고 싶었던 그 마음이 이해성 교수님에게도 듭니다.

논문을 쓰는 동안 많은 조언을 해주신 정 충기 교수님과 대학원에서 많은 것을 알려주셨던 김재관 교수님께 감사를 드립니다.

논문의 내용 중 토질 부분에서 참고 문헌을 찾는 것부터 시작해서 많은 도움을 주었던 지반연구실의 박사과정 이수형님과 논문의 최적화 부분에서 많은 조언을 해주었고 대학원 생활면에서도 큰 힘이 되어 주었던 같은 연구실의 박 현우에게도 감사를 드립니다. 신뢰성해석에 대한 조언을 해주었던 조선해양공학과 박사과정 이재욱님과 석사과정 이정훈님에게 감사를 드립니다.

작년 여름 북한산에서 산행 경험이 거의 없는 제가 험한 산행 코스를 비를 맞으면서도 무사히 마칠 수 있었던 것은 같이 간 연구실 동료들의 도움이 있었기에 가능했던 것처럼 지금 이 논문이 나오기까지는 지금은 졸업했지만 늘 마음을 써주었던 김용한, 박천중, 이문성, 양윤석의 도움과 함께 생활하면서 힘이 되어주었던 김기석, 김종승, 강주성, 김종명, 김문구의 도움이 있었기에 가능했기에 그들 모두에게 감사를 드립니다.

부족한 제게 늘 격려를 해주셨던 홍익 대학교 윤순중 교수님과 강인규선배님께 감사를 드리고 대학원 입학 후 든든한 후원자같이 마음을 써주신 김종희 선배님, 김용길선배님과 윤종윤선배님께 감사를 드립니다. 친구로서 큰 힘이 되어주었던 배지혜, 이민영, 박지영과 구은숙에게 고마운 마음과 결혼한 사람의 친정같이 대학원생활에서 많은 도움을 준 박진용, 정운, 김태병, 강동욱, 송혜금에게 감사함을 드립니다.

날 돌아 볼 수 있는 기회와 격려를 해주신 박현순 선생님과 나의 영원한 안식처이고 후원자인 가족들에게 감사를 드립니다.