공학박사학위논문

이계삼차모멘트법을 이용한 균열 길이의 분포 추정에 의한 피로 수명의 확률 해석

Probabilistic Analysis of Fatigue Life by Estimation of Distribution of Crack Length using Second-Order Third-Moment Method

2004 년 8 월

서울대학교 대학원

토목공학과

김 기 석

이계삼차모멘트법을 이용한 균열 길이의 분포 추정에 의한 피로 수명의 확률 해석

Probabilistic Analysis of Fatigue Life by Estimation of Distribution of Crack Length using Second-Order Third-Moment Method

지도교수 이 해 성

이 논문을 공학박사 학위논문으로 제출함

2004 년 4 월

서울대학교 대학원

토목공학과

김 기 석

김기석의 공학박사 학위논문을 인준함

2004 년 6 월

위 원 장 ____________________

부위원장 ____________________

위 원 ____________________

위 원 ____________________

위 원 ____________________

초 록

이 논문에서는 혼합모드의 피로 균열 성장 곡선을 추정하기 위하여 반복적인 균열 성장 모델링 기법을 제안하고, 이계삼차모멘트법을 도입하여 균열 성장에 따른 균열 길이와 피로 수명의 확률 분포를 추정한다.

선형탄성균열역학을 적용할 수 있는 최소의 균열 길이를 하한계 균열 길이로 정의하고 미세균열과 거시 균열을 구분한다. 미세 균열에 대해서는 하한계 균열 길이에 대한 일정한 성장률을 가정하여 피로 수명을 근사적으로 산정한다. 거시 균열에 대해서는 균열체를 이중경계요소법으로 수치해석하고 변위 외삽법으로 혼합모드의 응력확대계수를 산정한다. 피로 균열의 성장률과 성장 방향은 각각 Paris-Erdogan 방정식과 최대주응력 기준으로부터 결정한다. 주어진 피로 하중의 재하 회수에 따라 적분형태의 Paris-Erdogan 방정식을 이산화 하여 피로 균열의 성장을 수치모사 한다. 피로 성장에 대한 균열 증분을 포물선으로 모델링하고, 포물선의 양단을 잇는 하나의 직선의 요소로 이산화하여 적분한다. 새로운 균열 선단에서 가정한 포물선의 접선방향과 균열의 성장 방향이 같아지도록 포물선의 곡률을 반복적으로 보정한다.

초기 균열의 길이와 성장률 계수를 확률변수로 하여 균열 길이의 이차 테일러 급수로부터 균열 길이의 평균, 표준편차, 왜도를 산정하고 균열의 확률분포를 삼변수 대수정규분포로 추정한다. 추정된 균열 길이와 파괴인성의 확률분포로부터 주어진 파괴확률에 대한 피로 수명을 평가한다. 제안된 모멘트법에 의하여 피로 수명의 확률분포를 추정하고 피로-강도 곡선의 95% 신뢰한계선을 수치적으로 도출한다. 균열길이의 확률분포는 Monte-Carlo simulation 의 결과와 비교하고, 신뢰도는 일계신뢰도법의 결과와 비교하여 제안된 확률분포 추정법의 타당성과 효율성을 검증한다.

주요어:

피로 균열, 피로 수명, 피로-강도 곡선, 응력확대계수, 이중경계요소법, 이계삼차모멘트법, 파괴 확률

학번: 99415-802

목 차

그림 목차

표 목차

1. 서론

피로는 강구조물의 설계에서 반드시 고려되고 있는 주요한 파괴 원인의 하나로서 항복 응력이나 좌굴 하중, 또는 재료의 파괴인성보다 작은 응력 상태에서도 구조물의 파괴를 유발하게 된다. 1982 년 ASCE 위원회의 보고서에 의하면 전체 강구조물 파괴 원인의 80~90% 가 피로나 균열로 보고되었다 [Sundararajan 1995, Zhao 1996].

반복적인 하중을 받는 구조물은 재료의 미세구조의 결함에서 응력집중 현상으로 균열이 발생하여 초기에는 성장이 매우 느리지만 균열이 성장함에 따라 결국에는 응력 상태가 재료의 파괴인성에 도달한다. 균열의 발생에 대한 피로 수명은 전체 피로수명의 대략 5 % 이내이고 균열의 성장 과정이 대부분의 피로 수명을 차지한다 [Zhao 1996, Socha 2003]. 균열 성장 과정은 그림 1.1 과 같이 미세균열의 초기 성장 과정과 이후의 거시균열의 성장 과정으로 나눌 수 있다. 이때 미세균열과 거시균열의 구분은 균열 크기에 따라 육안 또는 계측 장비로의 계측 가능성을 기준으로 구분하기도 하고, 선형탄

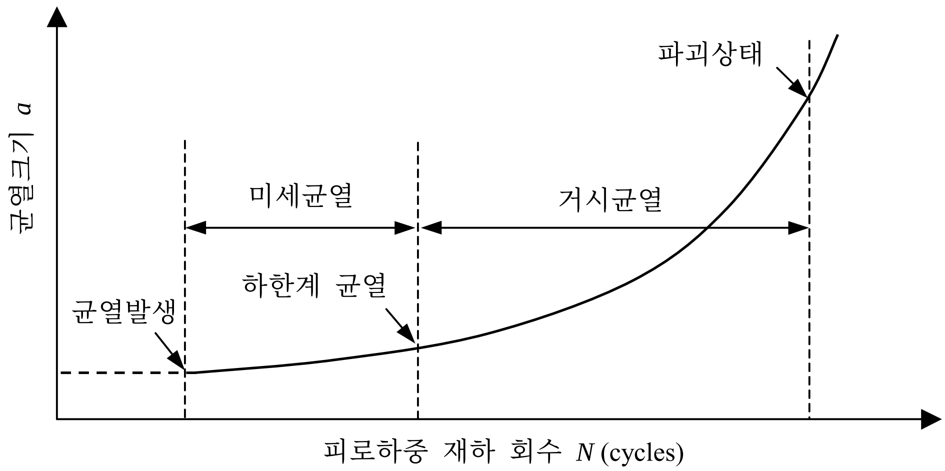


그림 1.1 피로하중 재하에 따른 균열의 성장

성균열역학(Linear Elastic Fracture Mechanics)의 적용 가능성을 기준으로 구분하기도 한다. 이 논문에서는 선형탄성균열역학을 적용할 수 있는 최소 균열 길이를 하한계 균열 길이라고 정의하고 이로부터 미세 균열과 거시 균열을 구분한다. 그림 1.1 에서 미세균열은 균열의 발생에서부터 하한계 균열 길이까지 이고, 거시 균열은 하한계 균열 길이부터 응력 상태가 파괴인성에 도달하는 임계 균열길이까지의 균열을 지칭한다.

선형탄성균열역학에서는 균열 선단의 소성 영역이 응력장의 특이 항(elastic singular term)이 지배적인 영역에 비하여 매우 작다(small-scale yielding)고 가정하고, 균열 선단의 응력 특이성(singularity)을 응력확대계수(Stress Intensity Factor)로 정량화 한다 [Hellan 1984]. 선형탄성균열역학이 적용 가능한 최소의 균열 길이인 하한계 균열길이는 균열 성장에 대한 임계 응력확대계수(threshold)와 피로한계응력(fatigue limit stress)으로부터 산정된다 [Hudak 1981]. 하한계 균열 크기보다 작은 미세 균열에 대한 성장률은 선형탄성균열역학의 한계를 넘어서므로 재료의 미세구조의 특성을 고려하는 미세균열이론(small-crack theory)을 적용하여야 한다 [McDowell 1997, Newman 1999, Taylor 2002].

피로하중을 받은 구조물의 설계나 피로수명의 간략 계산에는 피로시험으로부터 도출된 피로-강도 곡선(S-N curve)이 사용된다. 그런데 같은 조건의 피로 시험이라도 재료의 비균질성이나 미세구조의 결함으로 인하여 구조물의 피로 수명은 확률분포를 갖게 되고 그 분산이 매우 큰 것으로 알려져 있다 [Liao 1996]. 피로 수명에 대한 확률분포를 고려하여 피로-강도 곡선을 수치적으로 도출하고자, 1960 년대 이후 피로 균열 성장을 선형탄성균열역학과 Paris 방정식에 기초하여 해석하려는 연구가 수행되어 왔다 [Kanninen 1985].

확률해석은 결정론적 해석에 기초하여 이루어지기 때문에 피로 균열의 확률 해석을 수행하기 위해서는 피로 성장의 결정론적 해석이 선행되어야 한다. 피로 균열은 혼

합모드의 하중 상태에서 또는 비대칭 기하형상으로 인하여 곡선으로 성장한다. 혼합모드 피로 균열의 수명을 수치적으로 평가하기 위해서는 성장 곡선을 정확히 예측하여야 한다.

이 논문에서는 혼합모드 피로 균열의 성장 곡선을 정확하게 예측하기 위하여 할선법에 기초한 반복적인 성장 곡선 모델링 기법을 제안하고, 이계삼차모멘법을 이용한 피로 수명의 확률 해석법을 제시한다. 논문의 내용은 2 장의 피로 균열 성장 해석과 3 장의 확률 해석으로 구성된다. 2 장에서는 이중경계요소법 (Dual Boundary Element Method) [Portela 1992] 으로 균열체를 수치해석하고, Paris-Erdogan 방정식으로부터 피로 균열의 성장을 수치모사 한다. 3 장의 확률 해석에서는 초기 균열 길이와 성장률 계수를 확률변수로 하여 균열 성장에 따른 균열 길이의 확률분포를 추정하고, 이로부터 주어진 파괴확률에 대한 피로 수명을 산정한다.

피로 균열의 성장 해석

이중경계요소법은 피로 균열 성장 해석에 사용되는 수치해석법의 하나이다. 경계요소법은 경계만을 이산화 하므로 유한요소법이나 Element-Free Galerkin Method [Belytschko 1994] 와 같은 무요소법에 비하여 매우 적은 수의 자유도를 사용한다는 장점이 있다. 그러나 균열면을 포함한 전체 경계를 단일 영역으로 이산화 하면 균열면 상의 동일한 위치의 서로 다른 두 절점에서 동일한 경계적분식이 유도된다. 즉, 경계요소법을 사용하여 균열체를 단일 영역으로 이산화하면 시스템 방정식의 해를 구할 수 없다. 이러한 수치적인 문제로 인하여 균열 면을 따라 가상의 내부 경계면을 도입하여 전체 영역을 내부에 균열을 포함하지 않는 몇 개의 단일 영역으로 나누어 해석하는 분할 영역법 (subregion method)이 사용된다. 분할 영역법은 내부 경계면의 경로에 따라서 수치적으로

다른 해를 줄 뿐만 아니라, 유한요소법과 마찬가지로 균열 성장에 따라 요소망을 재구성해야 하는 단점이 있다. Hong 등 [Hong 1988] 은 한쪽 균열 면상의 절점에서는 변위 경계적분식을, 마주보는 경계면상의 절점에는 표면력(traction) 경계적분식을 적용하여 시스템 방정식의 특이성(singularity) 문제를 해결하였다. 그러나 표면력 경계적분식은 균열 선단과 꺾이는 점에서 적분 불능으로 알려져 있다. Crouch 는 표면력에 대한 hypersingular integral 의 적분불능문제에 대하여 변위불연속법(displacement discontinuity method)을 제시하였다 [Dong 2001]. Portela 등 [Portela 1992]은 이차불연속경계요소(quadratic discontinuous element)를 사용하여 적분 가능성 문제를 피하였고, 이것은 이중경계요소법이 널리 사용되는 계기가 되었다. 균열 선단에서의 응력 특이성을 정확히 모사하기 위하여 균열 선단에서 요소망을 조밀하게 구성하거나 특이요소 (singular element)를 사용하여 모델링한다. Kebir 등 [Kebir 1999] 은 이차 불연속 특이 요소를 개발하여 균열 선단의 응력의 특이성을 모사하였다. 이 논문에서는 Portela 등의 이차불연속경계요소로 균열면을 이산하고, 균열 선단 요소는 Kebir 등의 특이요소를 사용하여 이중경계요소법에 대한 최신의 연구를 반영하였다.

피로 균열의 성장 방향과 성장률(growth rate)은 균열 선단의 응력 상태로부터 결정된다. 따라서 균열 성장 곡선을 예측하여 피로 수명을 평가하기 위해서는 균열 선단에서 응력확대계수를 정확히 산정하는 것이 매우 중요하다. 응력확대계수는 에너지 방출률(Energy Release Rate) 또는 J-integral 로부터 얻을 수 있다. 에너지 방출률은 가상균열진전법(virtual crack extension method) [Haber 1985] 으로 산정할 수 있고, 균열면을 포함한 전체 외부 경계면을 적분영역으로 하는 J-integral 과 같다 [Herrmann 1981]. 혼합모드의 응력상태에서는 변위 외삽법(Displacement Extrapolation Method) [Kebir 1999], J_k-integral 법 [Reimers 1991], Kitagawa 의 모드 분리법 [Portela 1992], mutual integral 법[Yau 1980, Chen

1977] 등의 모드 분리법으로 일차 모드와 이차 모드의 응력확대계수를 분리하여 산정한다. 혼합모드의 피로 균열 성장 문제에서 균열의 증분을 직선으로 이산화 하면 균열 선단이 조금씩 꺾이게 된다. Mutual integral 법과 Kitagawa 의 모드 분리법은 균열 선단의 해석 해를 직접적으로 이용하거나 변위장과 응력장이 대칭모드와 비대칭 모드로 분리되는 성질을 이용하므로 이들 모드 분리법에서는 적분영역을 균열 선단의 직선 영역으로 한정하여야 한다. 만약 꺾인 균열 선단이 매우 작고 적분 영역이 꺾인 균열 선단을 둘러싼 좁은 영역으로 제한되면, 수치 적분의 정도가 떨어지게 된다. J_k-integral 법은 적분영역을 넓혀서 꺾인 점을 포함하는 적분경로를 설정할 수 있는 장점이 있다. 그러나 이중경계요소법으로 균열체를 해석하는 경우에는 J-integral 에 기초한 에너지법을 적용하여 응력확대계수를 산정할 수 없다. 균열면을 불연속 경계요소로 이산화하기 때문에 요소와 요소 사이에서 변위장의 불연속이 발생하고 에너지밀도가 정의되지 않는다. 따라서 이 논문에서는 변위 외삽법을 이용하여 혼합모드의 응력확대계수를 산정한다.

균열의 성장방향을 결정하는 기준으로는 최대주응력 기준(maximum principal stress criterion), 최대에너지방출률 기준(maximum strain energy release rate criterion), 최소변형에너지밀도 기준(minimum strain energy density failure criterion) 등이 제안되었다 [Qian 1996, Gdoutos 1990]. 주어진 피로하중에 대한 균열의 증분은 Paris-Erdogan 방정식, Forman 방정식, 수정된 Forman 방정식 등의 성장률 관계식으로부터 산정한다. 이 논문에서는 성장 접선 방향은 최대주응력 기준으로부터 결정하고, 주어진 피로하중에 대한 균열 증분량은 Paris-Erdogan 방정식으로부터 산정한다.

혼합모드의 피로 균열 성장에 대한 대부분의 수치해석은 증분법에 기초하여 균열 선단에서 산정한 균열 증분을 성장 접선 방향으로 성장시킨다 [Kebir 1999, Reimers 1991, Miranda 2003]. 이산화된 균열 증분을 접선 방향으로 성장시키면 균열이 성장하면서 실

제 성장 곡선에서 벗어나게 된다. 또한 균열 선단에서의 성장률의 초기치를 이용하여 균열의 증분을 산정하기 때문에 피로 수명이 크게 평가 된다. 이러한 접선법에 기초한 피로 성장 해석법에서는 반복적인 보정을 수행하지 않기 때문에 균열 증분을 충분히 작게 제한하여야 한다. Mogilevskaya [Mogilevskaya 1997]는 성장 후의 새로운 접선방향으로부터 균열 성장 곡선을 원호로 모델링 하였다. 그러나 그의 연구에서는 방향을 반복적으로 보정해주지는 않았다. Portela 등 [Portela 1993] 은 균열의 증분을 일정하다고 가정하고, 균열의 성장 방향을 새로운 균열 선단에서 산정한 접선방향으로부터 반복적으로 보정하는 방법을 제안하였다. 그러나 그들의 연구에서는 피로 성장에 따른 균열 증분의 변화가 고려되지 않았다. 피로 균열은 균열이 성장할수록 성장 속도가 빨라지고 이에 따라 주어진 피로 하중에 대하여 균열 증분도 점진적으로 커지게 된다. 따라서 주어진 피로하중에 대하여 성장 방향과 균열 증분을 동시에 반복적으로 보정하여야 성장 곡선을 정확히 모사할 수 있다. 이 논문에서는 기존의 접선법에 기초한 균열 성장 해석의 문제점을 극복하고자 할선법에 기초한 반복적인 균열 성장 모델링 기법을 제안한다. 균열의 성장 곡선을 포물선으로 가정하고, 새로운 균열 선단에서의 응력상태로부터 균열 증분의 방향과 크기를 반복적으로 보정한다. 이때 새로운 균열 선단에서 수치해석으로부터 얻어진 균열 성장 방향이 가정한 포물선의 접선 방향과 일치하도록 포물선의 곡률과 균열의 성장 방향을 반복적으로 보정한다. 균열 증분에 대해서는 주어진 피로 하중에 대하여 Paris-Erdogan 방정식을 사다리꼴 공식으로 수치 적분하여 산정한다.

하한계 균열보다 작은 미세 균열에 대해서는 임계 응력확대계수(Threshold)에 대한 일정한 성장률을 가정하여 피로 수명을 근사적으로 정량화 한다. 거시적인 균열에 대해서는 이중경계요소법으로 균열 성장을 수치 모사하여 피로 수명을 산정한다. 하한계 균열 길이보다 큰 거시 균열의 초기 성장 과정에서는 응력확대계수의 기하형상함수의

변화가 매우 작기 때문에 무한 균열판의 해석 해를 이용할 수 있다. 따라서 거시균열의 초기 성장 단계에서는 무한 균열판을 가정하여 성장해석을 수행하고 나머지 성장 과정은 이중경계요소법으로 수치해석을 수행 한다.

2 장의 피로 균열의 성장 해석에서는 네 가지 수치 예제를 통하여 제안된 피로 균열 성장 모델링 기법을 검증한다. 첫번째 예제는 꺾인 균열 선단에서 변위 외삽법으로 산정한 응력확대계수를 무한 균열판의 응력확대계수와 비교한다. 두 번째 예제에서는 인장을 받는 일차모드의 하중상태에서 미세 균열의 피로수명을 포함한 전체 피로수명을 산정하여 설계치와 비교한다. 세 번째 예제에서는 전단을 받는 혼합모드 균열판에서 초기 균열 방향각의 변화에 따른 성장 경로와 피로 수명을 추정한다. 마지막으로 네 번째 예제에서는 접선법과 제안된 할선법을 이용한 반복적인 균열 성장 해석을 비교하여 제안된 방법의 타당성을 검증한다.

피로 균열의 확률 해석

피로 균열의 성장률(da/dN)과 피로수명의 확률분포를 실험적으로 밝히려는 여러 연구가 있었다. 피로 균열의 성장에 영향을 주는 확률 인자로는 피로하중의 이력, 초기 균열의 기하형상, 재료의 물성치, 성장률 계수(C, m), 시편의 두께 등이 있다. Shen 등[Shen 2001]은 Ti-6A1-4V 합금에 대한 피로 실험으로부터 성장률이 대수정규분포를 이루고, 두 개의 성장률 계수가 각각 대수정규분포와 정규분포에 가까운 분포를 갖는다는 것을 보여주었다. Kim 등[Kim 2000]은 7075-T6 알루미늄 합금의 성장률이 대수정규분포의 확률분포를 갖고 그 분산의 정도가 시험체의 두께에 반비례함을 밝혔다. Zhao 등[Zhao 2000]은 용접된 16Mn 강판의 피로 실험 결과로부터 피로 수명이 대수정규분포 또는 극한 최대치 분포로 추정될 수 있음을 보여 주었다. Liao 등 [Liao 1996]에 의하

면 균열의 발생과 미세 균열의 성장에 대한 피로 수명은 대수정규분포의 확률분포를 이룬다.

확률 해석법은 구조물 응답의 통계적인 분포를 추정하려는 확률분포 추정법과 파괴확률 또는 구조물의 안전도를 평가하는 신뢰도법이 있다. Monte-Carlo simulation 은 파괴확률뿐만 아니라 응답의 확률분포를 추정할 수 있는 방법이다. 그러나 추출자료의 개수가 충분히 커야 정확한 결과를 얻을 수 있기 때문에 매우 많은 자료의 추출이 필수적이다. 확률분포를 추정하는데 있어서 Latin Hypercube Sampling 을 이용하면 Crude Monte-Carlo simulation 에 비하여 비교적 적은 추출 자료로부터 확률분포를 추정할 수 있다 [Mckay 1979, Sundararajan 1995]. 파괴확률 산정에는 중요도 추출법(Importance Sampling Method)을 이용하여 추출자료의 개수를 줄일 수 있다. 중요도 추출법으로 파괴확률을 정확하게 산정하기 위해서는 중요도 함수(Importance Sampling Function)의 선택이 중요한데, 이를 위해서는 파괴확률과 파괴에 대한 최빈점(Most Probable Failure Point)을 미리 파악하고 있어야 하는 어려움이 있다 [Sundararajan 1995, 양영순 2002].

피로 균열의 파괴확률 산정에는 일계신뢰도법(First-Order Reliability Method)이 널리 사용되어 왔다. 일계신뢰도법은 확률 변수들이 정규분포를 갖는다고 가정하여 Hasofer-Lind 의 신뢰도 지수(reliability index)를 산정한다. Jiao 등 [Jiao 1992]은 Miner 의 법칙과 피로-강도 곡선을 이용하여 용접된 offshore 구조물의 피로 및 균열에 대한 설계 기준을 제시하였다. Tryon 등 [Tryon 1996]은 일계신뢰도법에 기초하여 가스터빈 엔진의 피로 수명 모델을 개발하였다. Besterfield 등 [Besterfield 1991]과 Lua 등 [Lua 1993]은 각각 유한요소법과 경계요소법을 이용하여 균열체를 해석하고 일계신뢰도법으로 파괴확률을 산정하였다. 비대칭 확률분포에 대해서는 Tichý [Tichý 1994]가 3 차 모멘트까지 고려하는 일계삼차모멘트 신뢰도법(First-Order Third-Moment Reliability Method)을 제안하였다. 일

계신뢰도법의 최적화 과정에서는 한계 상태식에 대한 일차 미분이 사용된다. 한계상태식이 *J*-integral 로 정의되는 경우에는 *J*-integral 에 대한 shape sensitivity [Chen 2001]가 제안되었다. 한계상태식이 균열길이 또는 피로 수명으로 정의 되는 경우에는 응력확대계수의 일차 민감도를 산정하여야 한다. Lua 등[Lua 1993]은 응답면 기법(response surface method)으로 응력확대계수의 일차 민감도를 산정하였다.

일계신뢰도법은 파괴확률을 비교적 정확하게 추정할 수 있지만, 응답의 확률분포에 대한 정보를 주지는 못한다. 파괴확률보다는 통계적 특성치로서 응답의 모멘트를 추정하려는 연구들이 있다. 확률유한요소법(Probabilistic Finite Element Method)은 섭동법(perturbation)을 이용하여 근사적으로 응답의 통계치를 추정한다. 일계이차모멘트법(First-Order Second-Moment Method) 또는 이계삼차모멘트법(Second-Order Third-Moment Method)은 응답의 테일러 급수를 이용하여 확률변수의 분포로부터 응답의 평균, 분산 등의 모멘트를 산정하고 이로부터 응답의 분포를 추정하는 방법이다. 피로 균열 성장은 확률 변수들이 정규분포와 같은 대칭 분포일지라도 응답의 비선형성으로 인하여 성장 후의 균열 분포는 비대칭 분포를 이룬다. 비대칭 분포를 갖는 응답의 확률분포를 추정하기 위해서는 평균과 표준편차를 포함하여 왜도까지 고려하여야 한다. Lindsay 등[Lindsay 1996]은 3 변수 Weibull 분포를 이용하여 비대칭 확률분포를 갖는 응답함수의 평균, 표준편차, 왜도를 추정하였다. Hong 등[Hong 1999]은 성장 후 균열 분포에 대해 이계삼차모멘트법을 이용하여 피로 균열의 파괴확률을 근사적으로 산정하였다. 이차 테일러 급수를 사용하여 성장 후의 균열의 평균, 분산, 왜도를 근사하였다. 그러나 Hong 등은 무한 균열판에 대한 해석 해를 사용하였기 때문에 유한판에서 균열 성장에 따른 기하형상의 변화가 고려되지 않았다. 이 논문에서는 확률 해석을 위한 균열 성장 해석에서 이중경계요소법으로 유한 균열체의 피로 성장을 수치 모사하기 때문에 균열 성장

에 따른 기하 형상의 변화를 고려한다.

3 장의 확률 해석에서는 균열의 초기 길이, 성장률 계수, 파괴인성을 확률변수로 고려하여 이계삼차모멘트법으로 균열 길이의 확률분포를 추정한다. 확률 해석은 증분법에 기초한 균열 성장 해석 과정과 응력확대계수의 민감도로부터 균열 길이의 확률모멘트를 추정하는 과정으로 이루어 진다. 피로하중 재하에 따른 균열 성장 과정에서 이전 단계의 균열 길이의 확률분포로부터 다음 성장 단계의 균열 길이의 평균, 표준편차, 왜도 등의 통계치를 이계삼차모멘트법으로 근사 한다. 각각의 하중 단계에서 산정한 3 차까지의 모멘트로부터 균열 길이에 대한 확률분포를 삼변수 대수정규분포로 추정한다. 테일러 급수에 사용되는 일차 민감도는 Paris 방정식으로부터 직접적으로 산정하고, 이차 민감도는 유한차분법으로 산정한다. 제안된 이계삼차모멘트법을 이용하여 미세균열과 거시균열을 포함한 전체 피로 수명의 확률분포를 추정한다. 하한계 균열 길이와 성장률 계수를 확률변수로 하여 95% 신뢰 하한계 피로-강도 곡선을 수치적으로 산정한다.

신뢰도 평가는 파괴에 대한 임계 균열길이 (critical crack length)와 추정된 균열 길이의 확률분포로부터 직접적으로 산정한다. 일계신뢰도법은 주어진 공용피로수명에 대하여 성장 전의 초기 균열에 대한 확률분포에서 파괴에 대한 최빈점을 최적화 기법으로 산정하여 파괴확률을 산정한다. 따라서 공용피로수명의 변화에 따른 파괴확률을 산정하기 위해서는 여러 번의 최적화 과정이 필요하다. 제안된 모멘트법에서는 균열 성장에 따른 각각의 피로 하중 재하 단계에서 균열 길이의 확률분포로부터 파괴확률을 직접적으로 산정하므로 한번의 균열 성장 해석만으로도 파괴확률의 변화 추이를 근사적으로 산정할 수 있다.

피로 균열의 확률 해석에서는 인장응력을 받는 일차모드의 피로 균열 성장에 대한 세가지 수치 예제를 통하여 제안된 모멘트법을 검증한다. 첫번째 예제에서는 초기

균열의 길이가 확률 변수인 경우, 성장률 계수가 확률 변수인 경우, 그리고 초기 균열 길이와 성장률 계수가 모두 확률 변수인 경우의 세가지 경우에 대하여 확률해석을 수행한다. 균열 길이의 확률분포 추정은 Monte-Carlo simulation 의 결과와 비교하여 제안된 모멘트법의 타당성과 효율성을 검증한다. 두 번째 예제는 초기 균열 길이와 성장률 계수의 확률분포에 따른 피로 수명의 확률분포를 추정하고 이로부터 피로-강도 곡선의 95% 신뢰한계선을 도출하여 설계치와 비교한다. 세번째 예제에서는 주어진 파괴확률에 대한 피로 수명을 산정하고 일계신뢰도법의 결과와 비교하여 제안된 확률해석법의 타당성을 검증한다.

2. 피로 균열의 성장 해석

선형탄성균열역학을 이용한 피로해석에서는 성장 경로를 따라가며 성장률을 적분하여 피로수명을 산정한다. 혼합모드의 피로하중을 받거나 비대칭 기하형상을 갖는 균열체의 피로수명을 해석적으로 산정하기 위해서는 균열의 성장 경로를 정확히 추정하는 과정이 선행되어야 한다. 피로 균열의 성장 방향과 성장률은 응력확대계수로 정량화 된 균열 선단의 응력상태로부터 결정된다. 이 장에서는 균열체의 수치 해석법으로서 이중경계요소법(Dual Boundary Element Method)을 도입한다. 균열체의 구조해석 결과로부터 변위 외삽법(Displacement Extrapolation Method)을 이용하여 균열 선단에서의 응력확대계수를 산정한다. 혼합모드의 피로 균열의 성장을 할선법에 기초한 반복적인 피로 균열 성장 모델링 기법을 제안한다.

2.1 이중경계요소법

수치 해석법으로서의 경계요소법은 경계만을 이산화하기 때문에 유한요소나 Element-Free Galerkin Method 의 무요소법에 비하여 매우 적은 자유도를 사용한다는 장점이 있다. 이러한 장점에도 불구하고 피로 균열 문제에서는 유한요소법의 경우와 마찬가지로 균열 진전에 따라 요소망(mesh)을 재구성해야 하는 불편함이 있을 뿐만 아니라, 균열이 있는 구조물을 단일 영역으로 이산화 하여 해석할 수 없다는 수치적인 문제가 있었다. Portela 등[Portela 1992]이 제안한 이중경계요소법은 균열체를 단일영역으로 모델링이 가능할 뿐만 아니라, 균열 성장을 균열 선단에 추가의 요소를 배치하여 모델링하기 때문에 요소망 재구성 문제를 단순화 시켰다.

경계요소법에서 사용하는 변위 경계적분식은 기하학적인 손상이 없는 선형탄성체에 단위 집중하중이 작용할 때의 변위와 표면력의 기본해(Kelvin's solution) [Banerjee 1994, Becker 1992]에 기초하여 얻는다. 그림 2.1 은 균열체를 단일 영역으로 이산화 했을 경우의 단위하중이 균열면 상의 절점 y^{+} 또는 y^{-}에 위치할 경우 발생하는 문제를 보이고 있다. 변위와 표면력의 기본해는 단위집중하중이 작용하는 위치(source point)가 같으면 동일한 값을 갖기 때문에, 그림 2.1 와 같이 마주보는 균열면 상의 절점에서는 단위집중하중이 작용하는 위치가 같고 또한 적분식이 같은 경로를 따라 적분 되므로 두개의 동일한 방정식이 유도된다. 따라서 균열체를 단일영역으로 모델링하고 변위 경계적분식을 적용하면 수치적인 문제가 발생하게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위한 방법으로 분할 영역법 (subregion method) [Banerjee 1994, Becker 1992] 이 사용되어 왔다.

분할 영역법에서는 균열을 따라 가상의 내부 경계면을 만들어 전체 영역을 균열을 포함하지 않는 몇 개의 단일 영역으로 분할한다. 그리고 내부 경계면에서 변위장의 유

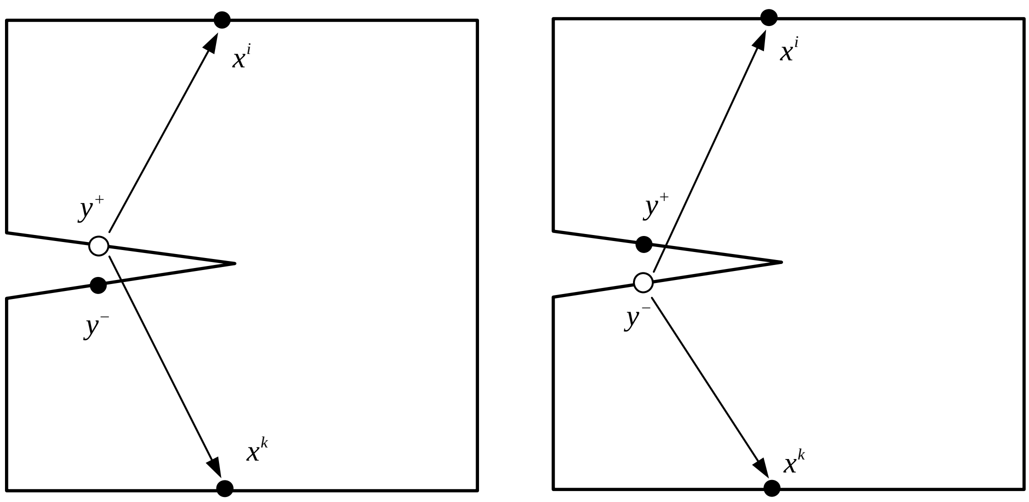


그림 2.1 균열체의 단일 영역 모델링

일성과 표면력의 평형을 고려하여 변위 경계적분식을 적용한다. 그러나 일반적인 형상의 균열에 대해 가상의 내부 경계면을 결정하는데 어려움이 있다. 즉 내부 경계면을 유일하게 결정할 수 없기 때문에 내부 경계면이 달라지면 수치해석 결과도 조금씩 달라질 수 있다.

이중경계요소법은 균열을 내부에 포함하거나 경계에 균열을 포함하고 있는 일반적인 균열문제에 있어서 전체 영역을 단일 영역으로 모델링하는 균열 해석법으로 제안되었다. 마주보는 균열면에서 서로 다른 경계적분식을 사용함으로써 균열면 상의 같은 위치의 절점에서 동일한 방정식이 유도되는 문제를 피할 수 있다. 즉, 한쪽 균열면에서는 변위에 대한 경계적분식을, 마주보는 균열면에서는 표면력에 대한 경계적분식을 적용한다. 그러나 표면력에 대한 경계적분식은 적분 가능성에 대한 수학적인 문제를 포함하고 있다. 즉, 경계가 꺾이는 점에서는 적분 불능으로 알려져 있다. Portela 등 [Portela 1992]은 적분가능성에 대한 문제를 피하기 위해 균열면을 이차의 불연속 요소로 모델링 하였다. 일반적으로 단위집중하중이 작용하는 위치에서의 표면력의 적분은 수치적으로 계산하기 보다는 강체운동조건(rigid body motion)을 적용시켜 산정한다. 그러나 균열 면 상의 절점에서는 1 개의 단위집중하중에 대해 같은 위치의 표면력 적분이 2 개가 되므로 강체운동조건을 적용할 수 없다. 따라서 이중경계요소법의 경우 균열을 포함하는 절점에서는 직접 적분법을 사용하여 적분을 수행하게 된다.

2.1.1 경계적분식

그림 2.2 는 유한체의 형상과 경계조건을 보여주고 있다. 유한체의 외부 경계면은 다음과 같이 변위가 주어진 경계면 Γ_u 와 표면력이 주어진 경계면 Γ_t 으로 구성되어 있다.

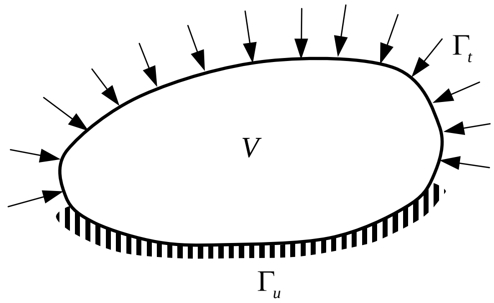


그림 2.2 유한체에 대한 문제 정의

$$u_i(x) = \hat{u}_i(x) \text{ on } \Gamma_u \tag{2.1}$$

$$t_i(x) = \hat{t}_i(x) \text{ on } \Gamma_t \tag{2.2}$$

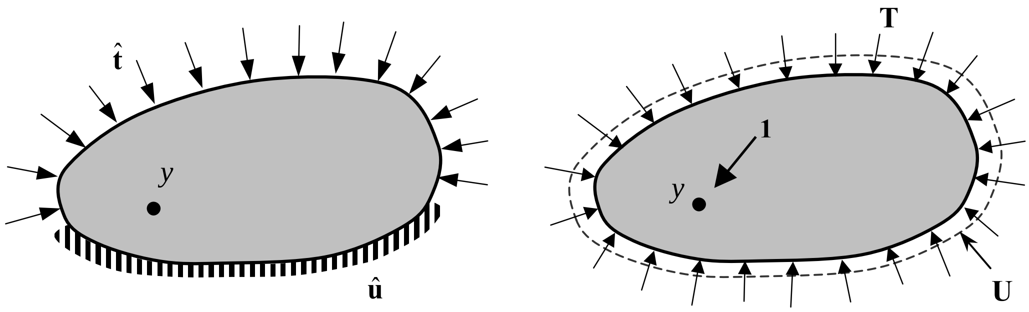
단위집중하중을 받는 3 차원 탄성체 문제에서 Navier 방정식으로부터 Kelvin 의 해를 얻는다 [Banerjee 1994, Becker 1992]. 2 차원 평면 변형 문제의 Kelvin 의 해는 다음과 같다.

$$U_{ij}(y,x) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}\left(\frac{r_i r_j}{r^2} - (3-4\nu)\delta_{ij}\ln r\right) \tag{2.3}$$

$$T_{ij}(y,x) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)}\frac{1}{r^2}\left\{(1-2\nu)(n_i r_j - n_j r_i) + \{(1-2\nu)\delta_{ij} + 2\frac{r_i r_j}{r^2}\}r_l n_l\right\} \tag{2.4}$$

여기서 U_{ij}와 T_{ij}는 각각 y에 작용하는 j방향의 단위 집중하중에 의해 임의의 점 x에서 발생하는 i방향의 변위와 표면력이다. r은 단위 집중하중이 작용하는 점과 무한체 내부의 임의의 점 사이의 거리이고 $r_k = x_k - y_k$이다. n 과 δ_{ij}는 각각 무한체 내부의 임의의 점에서의 외향 단위 법선벡터와 kronecker delta 이다. μ 와 ν는 전단탄성계수와 포아송비이다.

식 (2.3)과 (2.4)를 평면 응력 문제에 적용할 때에는 유효 물성치 (effective material



(a) 실제 문제의 유한체　　　　　　　　(b) Kelvin 문제의 유한체

그림 2.3 상반의 정리를 위한 실제 문제와 Kelvin 문제

property) 를 사용한다. 평면 응력 상태에 대한 유효 물성치는 다음과 같다.

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{\nu}{1+\nu} \quad , \quad \mu_{\text{eff}} = \mu \tag{2.5}$$

Kelvin 의 해와 실제 문제 사이의 상반의 정리를 이용하여 경계적분식을 유도한다. 그림 2.3 에는 평형상태에 있는 두 개의 시스템이 주어져 있다. (a)에는 실제 문제의 유한체가 주어져 있으며 (b)에는 Kelvin 문제의 유한체가 주어져 있다. Kelvin 문제에서 단위 집중하중이 y 에 작용하고 있고 이때의 경계면에서의 변위와 표면력은 식 (2.3)과 (2.4)로 주어진다. 실제 문제에서 체적력이 없을 때 그림 2.3 의 (a)와 (b)에 대한 상반의 정리를 이용하여 실제 문제의 변위를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_i(y) = \int_\Gamma U_{ij}(y,x) t_j(x) d\Gamma(x) - \int_\Gamma T_{ij}(y,x) u_j(x) d\Gamma(x) \tag{2.6}$$

실제 문제에서의 응력은 식 (2.6)을 공간좌표 y 에 대해 미분하고 이를 Hooke 의 법칙에 적용하면 다음과 같다.

$$\sigma_{ij}(y) = \int_\Gamma U^\sigma_{ijk}(y,x) t_k(x) d\Gamma(x) - \int_\Gamma T^\sigma_{ijk}(y,x) u_k(x) d\Gamma(x) \tag{2.7}$$

여기서, $T^\sigma_{ijk}(y,x)$과 $U^\sigma_{ijk}(y,x)$는 각각 $T_{ij}(y,x)$과 $U_{ij}(y,x)$의 y에 대해 미분의 선형 조합으로부터 다음과 같이 유도 된다.

$$U^\sigma_{ijk} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)}\frac{1}{r}\left\{(1-2\nu)(\delta_{ik}\frac{r_j}{r} + \delta_{jk}\frac{r_i}{r} - \delta_{ij}\frac{r_k}{r}) + 2\frac{r_i r_j r_k}{r^3}\right\} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} T^\sigma_{ijk} = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)}\frac{1}{r^2}\Bigg\{ & 2\frac{\partial r}{\partial n}\cdot\{(1-2\nu)\delta_{ij}\frac{r_k}{r} + \nu(\delta_{ik}\frac{r_j}{r} + \delta_{jk}\frac{r_i}{r}) - 4\frac{r_i r_j r_k}{r^3}\} \\ & + 2\nu(n_i\frac{r_j r_k}{r^2} + n_j\frac{r_i r_k}{r^2}) + (1-2\nu)(2n_k\frac{r_i r_j}{r^2} + n_j\delta_{ik} + n_i\delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k\delta_{ij}\Bigg\} \end{aligned} \tag{2.9}$$

2.1.2 이중경계요소법의 정식화

식 (2.6)와 (2.7)에서 내부의 점 y가 경계면상의 한 점 x에 가까워지면 Kelvin의 기본해는 수학적 특이성(singularity)을 보여준다. 즉 두 점 사이의 거리 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$가 영에 가까워지면, 2차원 문제에서 U_{ij}는 약한 $\ln(1/r)$ 특이성을, T_{ij}와 U^σ_{ijk}는 $1/r$ 특이성을, 그리고 T^σ_{ijk}는 $1/r^2$ 특이성을 보여준다. 이 절에서는 평면 변형 문제를 중심으로 수학적 특이성을 포함하는 경계적분식의 적분 조건을 제시하고 변위와 표면력에 대한 경계적분식을 유도한다.

그림 2.4와 같이 전체 영역을 y를 중심으로 반지름이 ε인 반원과 나머지 영역으로 나누었다. 이때 반원의 경계를 Γ^*_ε로 표시하고 나머지 영역의 경계를 $(\Gamma - \Gamma_\varepsilon)$로 표시하였다. ε이 영에 가까워지면 식 (2.6)은 다음과 같다.

$$u_i(y) + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_\varepsilon^*} T_{ij}(y,x) u_j(x) d\Gamma(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_\varepsilon^*} U_{ij}(y,x) t_j(x) d\Gamma(x) \tag{2.10}$$

식 (2.10)에서 $\ln(1/r)$ 특이성을 보이는 우변의 적분식은 수치적분 (special Gauss quadrature)으로 적분 가능하다. $1/r$ 특이성을 가지는 좌변의 적분식을 1차의 테일러 급수로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_\varepsilon^*} T_{ij}(y,x) u_j(x) d\Gamma(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^*} T_{ij}(y,x)[u_j(x) - u_j(y)] d\Gamma(x) \\ &+ u_j(y) \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^*} T_{ij}(y,x) d\Gamma(x) \\ &+ \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} T_{ij}(y,x) u_j(x) d\Gamma(x)\end{aligned} \tag{2.11}$$

식 (2.11)에서 우변의 첫번째 적분항이 적분가능하기 위해서는 변위장이 Hölder-continuity 조건 [Aliabadi 1993] 을 만족해야 한다. 즉 변위가 다음과 같은 부등식을 만족하는 상수 λ와 γ가 존재하면 식 (2.11)의 첫번째 적분항은 적분가능하고 극한 과정에서 사라지게 된다.

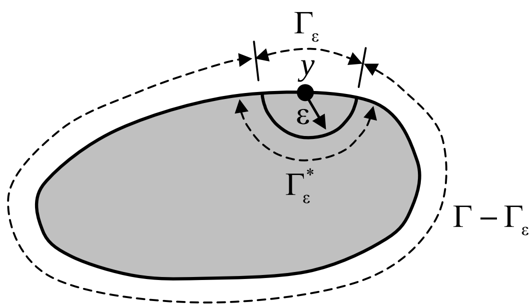


그림 2.4 경계에 위치한 특이점에서의 적분 영역

$$\left|u_j(x)-u_j(y)\right| \le \lambda r^{\gamma} \tag{2.12}$$

여기서, $|\lambda| < \infty$ 이고, $0 < \gamma \le 1$ 이다. 식 (2.11)의 두 번째 항은 $A_{ij}(y)u_j(y)$ 로 나타낼 수 있는데, $A_{ij}(y)$ 는 경계의 기하형상에 의해 결정되는 상수이다. 식 (2.11)의 세 번째 적분식은 특이 적분이 된다. 식 (2.10)을 정리하면 다음과 같다.

$$c_{ij}(y)u_i(y) + \fint_{\Gamma} T_{ij}(y,x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(y,x)t_j(x)d\Gamma(x) \tag{2.13}$$

여기서, $\fint$ 는 Cauchy principal-value 적분이고, $c_{ij}(y)$ 는 경계면의 기하형상의 함수로서 다음과 같이 정의된다.

$$c_{ij}(y) = \delta_{ij} + A_{ij}(y) = \delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^*} T_{ij}(y,x)d\Gamma(x) \tag{2.14}$$

경계면의 기하형상이 미분가능하면 $c_{ij} = \delta_{ij}/2$ 이다. 체적력이 없을 때, 응력에 대한 경계적분식 (2.7)은 내부의 점 y 가 경계면상의 한 점에 가까워지면 T_{ijk}^{σ} 는 $1/r^2$ 특이성을 U_{ijk}^{σ} 는 $1/r$ 특이성을 보인다. 식 (2.7)을 ε 이 영에 가까워지는 극한 과정에 적용하면 다음과 같다.

$$\sigma_{ij}(y) + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_\varepsilon^*} T_{ijk}^{\sigma}(y,x)u_k(x)d\Gamma(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_\varepsilon^*} U_{ijk}^{\sigma}(y,x)t_k(x)d\Gamma(x) \tag{2.15}$$

식 (2.15)에서 $1/r$ 특이성을 보이는 우변의 적분식은 식 (2.10)의 좌변식에서와 같이 표면력이 식 (2.12)의 Hölder-continuity 를 만족해야 한다.

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_\varepsilon^*} U_{ijk}^{\sigma}(y,x)t_k(x)d\Gamma(x) = & \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon^*} U_{ijk}^{\sigma}(y,x)[t_k(x)-t_k(y)]d\Gamma(x) \\
& + t_k(y)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon^*} U_{ijk}^{\sigma}(y,x)d\Gamma(x) \\
& + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} U_{ijk}^{\sigma}(y,x)t_k(x)d\Gamma(x)
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

표면력에 대한 Hölder-continuity (2.2) 를 가정하면 식 (2.16) 에서 우변의 첫번째 적분항은 적분가능하고 극한 과정에서 사라지게 된다. 식 (2.16) 에서 우변의 두 번째 적분식은 표면력에 대한 불연속 항으로서 $A_{ijk}(y)t_k(y)$ 로 나타낼 수 있는데, $A_{ijk}(y)$ 는 물성치와 경계의 기하형상에 의해 결정되는 상수이다. 식 (2.16) 의 세 번째 적분식은 1 차의 특이 적분이다.

식 (2.15) 에서 $1/r^2$ 특이성을 보여주는 좌변의 적분식은 2 차의 테일러 급수로 표현하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_\varepsilon^*} T_{ijk}^{\sigma}(y,x)u_k(x)d\Gamma(x) = & \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon^*} T_{ijk}^{\sigma}(y,x)[u_k(x)-u_k(y)-u_{k,m}(y)(x_m-y_m)]d\Gamma(x) \\
& + u_k(y)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon^*} T_{ijk}^{\sigma}(y,x)d\Gamma(x) \\
& + u_{k,m}(y)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon^*} T_{ijk}^{\sigma}(y,x)(x_m-y_m)d\Gamma(x) \\
& + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} T_{ijk}^{\sigma}(y,x)u_k(x)d\Gamma(x)
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

식 (2.17) 에서 우변의 첫번째 적분항이 적분가능하기 위해서는 변위의 미분이 Hölder-continuity [Aliabadi 1993] 를 만족해야 한다. 즉 변위가 다음과 같은 부등식을 만족하는 상수 λ 와 γ 가 존재하면 식 (2.17) 의 첫번째 적분항은 적분가능하고 극한 과정에서 사라지게 된다.

$$\left|u_k(x) - u_k(y) - u_{k,m}(y)(x_m - y_m)\right| \le \lambda \left|x_m - y_m\right|^{\gamma+1} \tag{2.18}$$

여기서, $|\lambda| < \infty$ 이고 $0 < \gamma \le 1$ 이다. 식 (2.17) 의 우변에서 세 번째 적분항은 변형률에 대한 불연속 항으로서 $B_{ijk}(y)u_{k,m}(y)$ 으로 나타낼 수 있는데 $B_{ijk}(y)$ 는 물성치와 기하형상에 의해 결정되는 값이다. 네 번째 적분항은 2 차의 특이 적분으로 극한 과정에서 두 번째 적분항과 동시에 고려될 때 언제나 유한한 값을 갖는다는 것이 알려져 있다 [Aliabadi 1993]. 식 (2.16)와 (2.17)의 결과를 정리하면, y 가 부드러운 경계면상의 한 점에 위치하면 표면력과 변형도의 불연속 항들은 다음과 같이 경계에서의 응력과 같아진다.

$$A_{ijk}(y)t_k(y) - B_{ijk}(y)u_{k,m}(y) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}(y) \tag{2.19}$$

따라서, r 이 영에 가까워지는 극한과정에서 표면력과 변형도의 연속성(Hölder-continuity)을 가정하면 식 (2.15)는 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}(y) + \oint_{\Gamma} T^{\sigma}_{ijk}(y,x)u_k(x)d\Gamma(x) = \int\!\!\!\!-_{\Gamma} U^{\sigma}_{ijk}(y,x)t_k(x)d\Gamma(x) \tag{2.20}$$

여기서, $\oint$ 는 Hadamard principal-value [Portela 1992, Aliabadi 1993] 적분이다. 부드러운 경계면에서, Cauchy Principle 을 적용하면 표면력은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{1}{2}t_j(y) + n_i(y)\oint_{\Gamma} T^{\sigma}_{ijk}(y,x)u_k(x)d\Gamma(x) = n_i(y)\int\!\!\!\!-_{\Gamma} U^{\sigma}_{ijk}(y,x)t_k(x)d\Gamma(x) \tag{2.21}$$

여기서, $n_i(y)$ 는 경계면의 단위 법선 벡터 이다. 식 (2.13)과 (2.21)은 이중경계요소법

에서 사용되는 두 가지 적분식이다.

2.1.3 균열 모델링 기법

이중 경계적분식에서 특이 적분이 존재하기 위해 필요한 연속 조건들은 Portela 와 Aliabadi [Portela 1992, Aliabadi 1993] 가 제안한 균열 모델링 기법에 의해 만족될 수 있다. Cauchy 와 Hadamard principal-value integral 은 각각 특이 적분 중에서 1 차와 2 차까지의 유한한 부분에 해당한다. 식 (2.13)의 변위 적분식에서 1 차의 특이 적분이 수렴하기 위해서는 절점에서 변위가 연속이어야 한다. 식 (2.21)의 표면력 적분식에서 2 차의 특이 적분이 수렴하기 위해서는 절점에서 변위의 미분(표면력)이 연속이어야 한다. 통상적으로 사용되는 경계요소는 요소와 요소 사이에서 변위가 연속이지만 표면력의 불연속을 허용하므로 표면력에 대한 적분식은 일반적으로 적분가능하지 않다. 이러한 문제를 피하기 위하여 불연속 경계요소를 사용하는 균열 모델링 기법이 제안되었다 [Portela 1992, Aliabadi 1993]. 불연속 경계요소는 절점이 요소 내에서 정의되므로 변위와 표면력의 연속 조건을 내재적으로 만족하게 된다. Hölder-continuity 를 만족하는 마주보는 균열면상의 절점에서 두 가지 경계적분식은 다음과 같이 나타낼 수 있다 [Partheymüller 2000].

$$\frac{1}{2}u_i(y^+) + \frac{1}{2}u_i(y^-) + \fint_\Gamma T_{ij}(y,x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_\Gamma U_{ij}(y,x)t_j(x)d\Gamma(x) \tag{2.22}$$

$$\frac{1}{2}t_j(y^+) - \frac{1}{2}t_j(y^-) + n_i(y)\,\fint_\Gamma T^\sigma_{ijk}(y,x)u_k(x)d\Gamma(x) = n_i(y)\fint_\Gamma U^\sigma_{ijk}(y,x)t_k(x)d\Gamma(x) \tag{2.23}$$

여기서, y^+ 와 y^- 는 각각 동일한 위치의 마주보는 두 균열면 위의 절점이다. Portela 와 Aliabadi [Portela 1992, Aliabadi 1993]가 제안한 균열 모델링 기법에서는 그림 2.5 과 같이

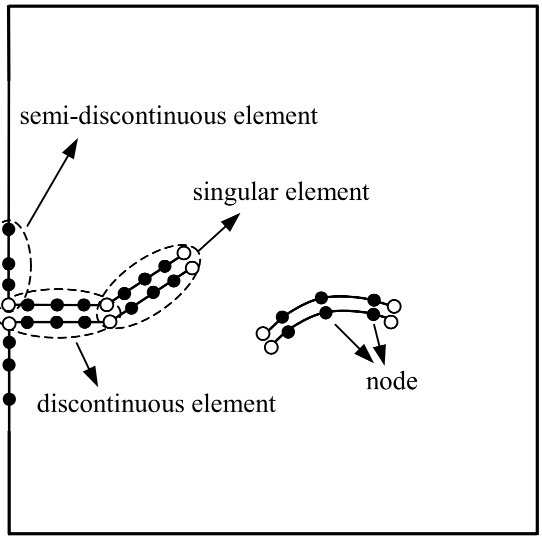


그림 2.5 불연속 이차 경계 요소를 사용한 균열 모델링

균열의 경계면은 불연속 경계요소로 모델링 한다. 이때, 한쪽 균열 경계면에는 변위 적분식 (2.22)을 적용하고, 마주보는 반대편 균열 경계면에는 표면력 적분식 (2.23)을 적용한다. 균열 부분을 제외한 나머지 경계는 연속적인 경계요소로 모델링하고 변위 적분식 (2.13)을 적용한다. 외부 경계와 균열이 만나는 곳에서는 한쪽 단이 불연속인 연결요소 (semi-discontinuous element)를 사용하고 변위 적분식 (2.13)을 적용한다. Portela 등의 균열 모델링 기법은 균열과 경계의 교차점, 균열이 꺾이는 점 그리고 균열 선단에서 특별한 처리가 필요하지 않다. 따라서 편측 균열 문제와 내부 균열문제를 효과적으로 모델링할 수 있다.

균열 선단에서는 응력의 $1/\sqrt{r}$ 특이성을 나타낼 수 있도록 불연속 특이 요소 [Kebir 1999]를 사용하였다. 이 논문에서 사용하는 2 차원의 요소에는 일반적인 이차 요소(continuous quadratic element), 불연속 요소(discontinuous element), 연속 요소와 불연속

요소를 이어주는 연결 요소(semi-discontinuous element), 불연속 특이 요소(singular element) 등이 있다. 일반적인 이차 경계요소는 절점이 요소의 양 단과 그 중간에 위치한다. 요소의 지역좌표를 $-1 \le \xi \le 1$에서 정의할 때 절점의 좌표는 $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 1$이고, 다음과 같은 형상함수를 갖는다.

$$Q_1 = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi), \quad Q_2 = 1-\xi^2, \quad Q_3 = \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \tag{2.24}$$

균열면 이산화에 사용되는 불연속 이차 요소는 절점이 $\xi_1 = -2/3$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 2/3$에서 정의 될 때 형상함수는 다음과 같다 [Portela 1992, Aliabadi 1993].

$$Q_1 = \frac{9}{8}\xi(\xi - \frac{2}{3}), \quad Q_2 = (1-\frac{3}{2}\xi)(1+\frac{3}{2}\xi), \quad Q_1 = \frac{9}{8}\xi(\xi + \frac{2}{3}) \tag{2.25}$$

연속인 요소와 불연속 요소를 이어주는 연결 요소는 절점이 각각 $\xi_1 = -2/3$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 1$에 위치하는 경우 다음과 같은 형상함수를 갖는다.

$$Q_3 = \frac{9}{10}\xi(\xi-1), \quad Q_2 = (1-\xi)(1+\frac{3}{2}\xi), \quad Q_3 = \frac{3}{5}\xi(\xi+\frac{2}{3}) \tag{2.26}$$

다음은 절점이 각각 $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 2/3$에 위치하는 연결요소의 형상함수이다.

$$Q_1 = \frac{3}{5}\xi(\xi-\frac{2}{3}), \quad Q_2 = (1+\xi)(1-\frac{3}{2}\xi), \quad Q_3 = \frac{9}{10}\xi(\xi+1) \tag{2.27}$$

균열 선단에서 응력의 $1/\sqrt{r}$ 특이성을 나타낼 수 있도록 고안된 불연속 특이 요소는 절점이 $\xi_1 = -2/3$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 2/3$에 위치할 때 형상함수는 다음과 같다 [Kebir 1999].

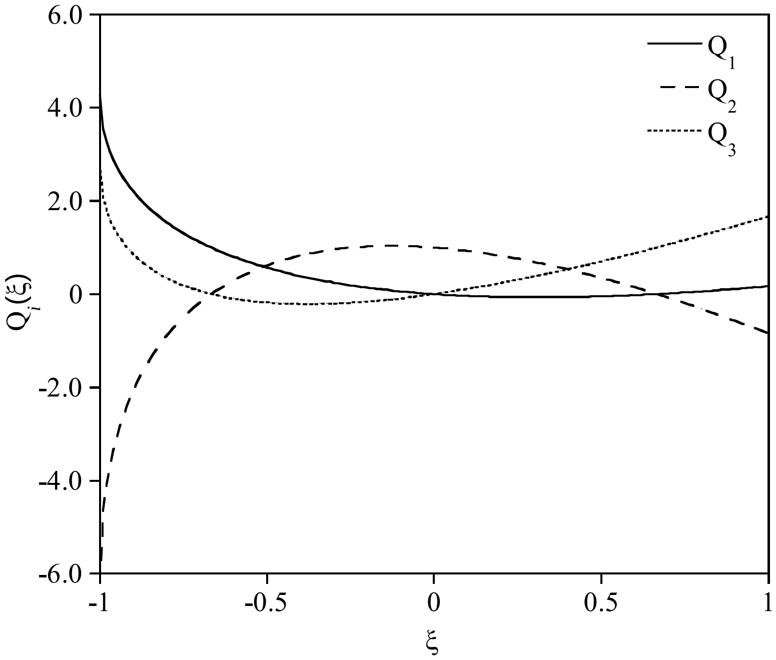


그림 2.6 불연속 특이요소의 형상함수

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{3}{2}\frac{(3-\sqrt{15})\xi + 2\sqrt{\xi+1} - 2}{\sqrt{15}+\sqrt{3}-6} \\
Q_2 &= \frac{3(\sqrt{15}-\sqrt{3})\xi - 12\sqrt{\xi+1} + 2(\sqrt{15}+\sqrt{3})}{2(\sqrt{15}+\sqrt{3}-6)} \qquad (2.28) \\
Q_3 &= \frac{3}{2}\frac{(\sqrt{3}-3)\xi + 2\sqrt{\xi+1} - 2}{\sqrt{15}+\sqrt{3}-6}
\end{aligned}
$$

이때 형상함수의 미분은 $\xi = -1$ 에서 $1/\sqrt{r}$ 특이성을 보여준다. 그림 2.6 는 식 (2.28)의 형상함수를 도시한 것이다. $\xi = 1$ 에서 그 미분이 $1/\sqrt{r}$ 특이성을 보여주는 형상함수는 다음과 같다.

$$Q_1 = \frac{3}{2}\frac{(3-\sqrt{3})\xi + 2\sqrt{1-\xi} - 2}{\sqrt{15}+\sqrt{3}-6}$$

$$Q_2 = \frac{3(\sqrt{3}-\sqrt{15})\xi - 12\sqrt{1-\xi} + 2(\sqrt{15}+\sqrt{3})}{2(\sqrt{15}+\sqrt{3}-6)} \tag{2.29}$$

$$Q_3 = \frac{3}{2}\frac{(\sqrt{15}-3)\xi + 2\sqrt{1-\xi} - 2}{\sqrt{15}+\sqrt{3}-6}$$

피로 균열의 성장은 새로운 균열 선단에 불연속 특이 요소를 추가하고, 기존의 균열 선단 요소는 불연속 요소 (2.25)로 변환하여 모델링 한다. 균열 증분 마다 마주보는 2 개의 요소와 6 개의 절점이 추가로 생성된다.

2.1.4 경계적분식의 적분

일반적으로 경계요소법에서는 이산화 된 경계적분식을 Gauss quadrature 를 이용하여 수치적분 한다. 경계적분식을 수치적분 할 경우 정확한 값을 얻기 위하여 많은 수의 Gauss point 를 사용하게 되고, 계산시간이 오래 걸려 비효율적인 방법이 될 수 있다. 또한 y 와 적분 되는 경계요소 사이의 거리가 너무 가까울 경우 Kelvin 의 해가 특이에

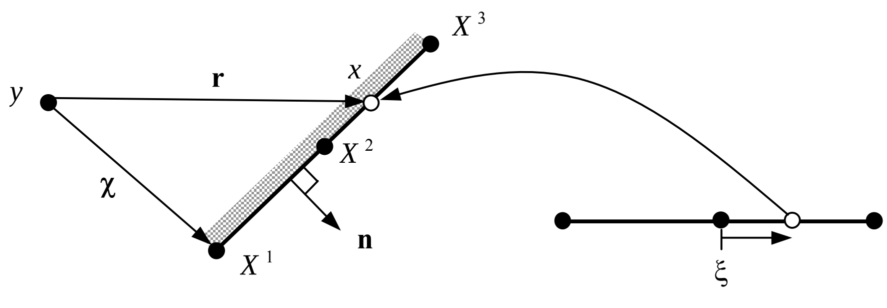


그림 2.7 경계 적분을 위한 개념도

가까워져서 부정확한 값을 얻을 수 있다는 단점이 있다. 이 논문에서는 이산화 된 2 차원 경계적분식을 해석적으로 적분하여 계산 시간을 단축하고 y와 적분 되는 경계요소사이의 거리에 관계 없이 정확하게 적분한다.

경계면을 그림 2.7 과 같이 각 요소 당 세 개의 절점을 갖는 2 차 경계요소로 이산화 한다. 경계요소가 심하게 왜곡 되지 않게 하기 위하여 각 경계요소의 두 번째 절점의 좌표는 첫번째와 세 번째 절점 좌표의 평균값을 갖도록 하여 경계요소의 형상이 선형이 되도록 한다. 요소내의 임의의 점 x는 요소를 구성하는 절점 좌표와 형상함수에 의해 결정되므로 r의 성분은 다음과 같다 [박천종 1998].

$$r_i = x_i - y_i = N_k(\xi)\cdot X_i^k - y_i = \frac{\xi+1}{2} l_i^e + \chi_i \tag{2.30}$$

여기서, l_i^e과 χ_i는 그림 2.7 의 관계로부터 다음과 같이 기술된다.

$$l_i^e = X_i^3 - X_i^1 \tag{2.30a}$$

$$\chi_i = X_i^1 - y_i \tag{2.30b}$$

식 (2.30)의 관계를 이용하면 식 (2.13), (2.21)의 경계적분식을 ξ의 함수로 표현하여 해석적으로 적분 할 수 있다. 이때 Jacobian 행렬식은 매개좌표 ξ와는 무관한 상수로 기술된다.

$$J^e = \frac{l^e}{2} \tag{2.31}$$

여기서, l^e는 경계요소의 길이 이다. 2.3.3 절에서 정의된 경계요소를 사용하여 경계를 직선으로 모델링 할 경우에는 균열 선단의 특이 요소를 제외하면 이차경계요소, 불연속

요소, 연결요소 모두 직접 적분이 가능하다. 하중점과 응답이 일치하는 경우에는 변위와 표면력의 경계적분식은 각각 1 차와 2 차의 특이점을 포함하고 있다. 외부 경계면에서는 강체운동 조건으로부터 간접적으로 이산화 된 시스템의 대각성분을 얻을 수 있지만, 균열면에 위치한 절점에서는 직접적분을 수행하여야 한다. 경계적분식의 직접적분에 필요한 해석적인 적분식들은 부록에 수록 하였다.

2.2 응력확대계수 산정

피로 균열의 성장 경로와 성장률은 균열 선단의 응력상태로부터 결정된다. 선형탄성균열역학에서는 균열 선단의 응력상태를 응력확대계수로 나타낸다. 응력확대계수는 구조물의 하중 상태와 기하형상에 의해 결정된다. 이 절에서는 혼합모드의 응력확대계수 산정법으로서 변위 외삽법과 *J*-integral 에 기초한 에너지법을 기술하고, *J*-integral 을 이중경계요소법에 적용할 때 발생하는 수치적인 문제를 밝힌다.

2.2.1 선형탄성균열역학과 응력확대계수

선형탄성균열역학에서는 균열의 길이에 비하여 균열 선단 주변의 소성 영역이 매우 작다고 가정하여 균열 선단에서 응력이 무한히 커지는 것을 허용한다. 균열 선단의 응력 특이성(singularity)의 정도는 응력확대계수로 정량화 시킬 수 있다. 균열 선단 주위의 응력장과 변위장은 해석적인 방법으로 유도된다[Gdoutos 1990, Hellan 1984]. 그림 2.8 에는 무한판의 내부에 크기가 $2a$ 인 균열을 포함하고 있고 한쪽 균열 선단에서 직교 좌표계 (x_1, x_2)와 극좌표계 (r,θ)가 정의되어 있다. 무한대의 경계면에 수직방향 인장응력 σ_∞, 수평방향 인장응력 $k\sigma_\infty$, 그리고 전단력 τ_∞ 이 작용하고 있다. 이때 균열 선단 근방에서 직교 좌표계로 변환된 응력장과 변위장은 각각 다음가 같다.

$$\sigma_{11} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\left\{K_\mathrm{I}\cos\frac{\theta}{2}(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}) - K_\mathrm{II}\sin\frac{\theta}{2}(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2})\right\} + \sigma_0 + O(\sqrt{r}) \tag{2.32a}$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\left\{K_\mathrm{I}\cos\frac{\theta}{2}(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}) + K_\mathrm{II}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right\} + O(\sqrt{r}) \tag{2.32b}$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\left\{K_\mathrm{I}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} + K_\mathrm{II}\cos\frac{\theta}{2}(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2})\right\} + O(\sqrt{r}) \tag{2.32c}$$

$$u_1 = \frac{\sqrt{2\pi r}}{8\pi\mu}\left\{K_{\mathrm{I}}((2\kappa-1)\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3\theta}{2})+K_{\mathrm{II}}((2\kappa+3)\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2})\right\}+\frac{\sigma_0}{E}r\cos\theta \tag{2.33a}$$

$$u_2 = \frac{\sqrt{2\pi r}}{8\pi\mu}\left\{K_{\mathrm{I}}((2\kappa+1)\sin\frac{\theta}{2}-\sin\frac{3\theta}{2})+K_{\mathrm{II}}((3-2\kappa)\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3\theta}{2})\right\}-\frac{\nu\sigma_0}{E}r\sin\theta \tag{2.33b}$$

여기서, E, ν, 그리고 μ는 각각 탄성계수, 포아송비 그리고 전단 탄성계수 이다. κ는 평면변형 문제와 평면응력 문제에서 각각 다음과 같이 정의 된다.

$$\kappa = 3-4\nu \quad \text{(plane strain)} \tag{2.34a}$$

$$\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu} \quad \text{(plane stress)} \tag{2.34b}$$

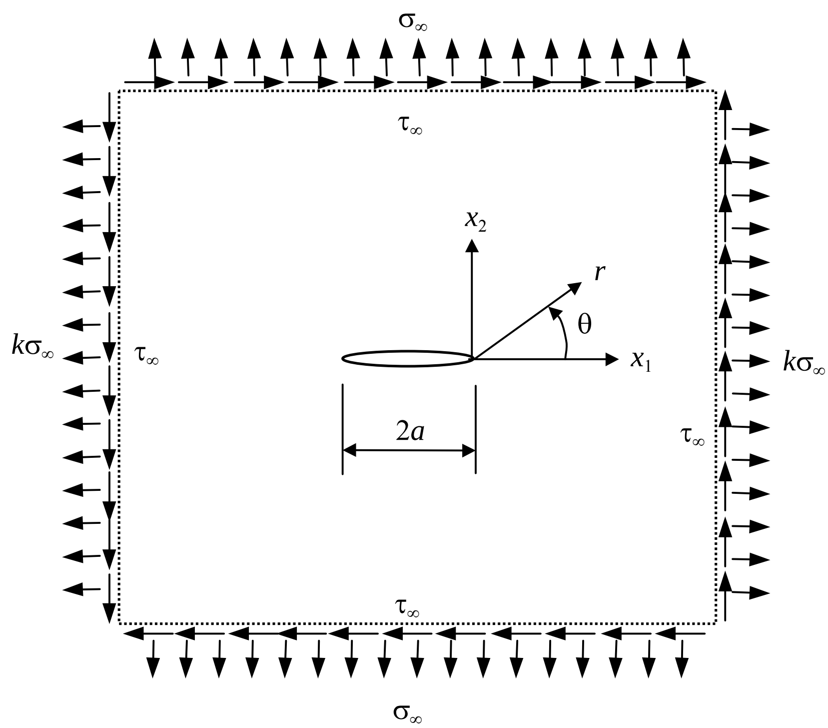


그림 2.8 무한판의 균열 선단에서의 극좌표계

σ_0는 균열에 평행한 방향으로 작용하는 응력의 정규항 (regular term)으로 다음과 같다.

$$\sigma_0 = \sigma_{11} - \sigma_{22} = (k-1)\sigma_\infty \tag{2.35}$$

식 (2.32) 과 (2.33)에서 K_{I}와 K_{II}는 일차모드 (opening mode)와 이차모드 (sliding mode)의 응력확대계수로서 각각 다음과 같이 기술된다.

$$K_{\mathrm{I}} = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \tag{2.36a}$$

$$K_{\mathrm{II}} = \tau_\infty \sqrt{\pi a} \tag{2.36b}$$

인장응력을 받는 유한한 크기의 균열판에서 일차 모드의 응력확대계수는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$K_{\mathrm{I}} = Y_{\mathrm{g}} \sigma \sqrt{\pi a} \tag{2.37}$$

여기서, σ는 유한판에 작용하는 인장응력이고, Y_{g}는 균열의 성장에 따라 변화하는 기하형상의 함수이다. 임의의 기하형상을 갖는 유한체에서는 Y_{g}를 해석적으로 산정할 수 없기 때문에 수치적인 방법으로 응력확대계수를 산정하여야 한다. 혼합모드의 응력확대계수는 균열 선단 근방에서 수치적으로 산정한 응력장과 변위장을 식 (2.32)와 (2.33)로 제시된 해석해와 비교하여 산정할 수 있다. 응력확대계수를 평가하는 대표적인 방법으로는 변위 외삽법 (displacement extrapolation method) [Kebir 1999] 과 *J*-integral 또는 변형에너지 방출률에 기초한 에너지법이 있다.

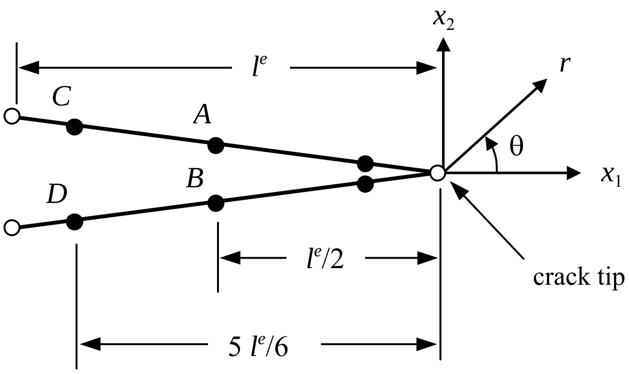


그림 2.9 균열 선단의 불연속 경계 요소

2.2.2 변위 외삽법

변위 외삽법은 마주하는 균열면 상의 몇 개의 절점으로부터 응력확대계수를 얻고 이들로부터 균열 선단의 응력확대계수를 선형 보간하여 구한다. 그림 2.9 은 균열 선단을 불연속 경계요소[Portela 1992, Kebir 1999]로 이산화 한 형상을 보여주고 있다. 평면변형 문제에서 그림 2.9 과 같은 균열 선단을 원점으로 하는 극 좌표계를 고려하면, 균열면 상의 마주보는 절점에서의 변위의 차이는 식 (2.33)로부터 다음과 같다.

$$\Delta u_2 = u_2\big|_{\theta=\pi} - u_2\big|_{\theta=-\pi} = \frac{\kappa+1}{\mu} K_{\mathrm{I}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \tag{2.38a}$$

$$\Delta u_1 = u_1\big|_{\theta=\pi} - u_1\big|_{\theta=-\pi} = \frac{\kappa+1}{\mu} K_{\mathrm{II}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \tag{2.38b}$$

식 (2.38)로부터 일차모드와 이차모드의 응력확대계수는 다음과 같다.

$$K_{\mathrm{I}} = \Delta u_2 \frac{\mu}{\kappa+1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \tag{2.39a}$$

$$K_{\mathrm{II}} = \Delta u_1 \frac{\mu}{\kappa+1}\sqrt{\frac{2\pi}{r}} \tag{2.39b}$$

그림 2.9 에서 마주보는 절점 A 와 B 그리고 절점 C 와 D 에서 각각의 응력확대계수를 산정하고 이 두 값으로부터 균열 선단에서의 값을 선형적으로 보간하면 다음과 같다.

$$K_{\mathrm{I}} = (5\cdot\Delta u_2^{AB} - \frac{3\sqrt{15}}{5}\cdot\Delta u_2^{CD})\frac{\mu}{\kappa+1}\sqrt{\frac{\pi}{L}} \tag{2.40a}$$

$$K_{\mathrm{II}} = (5\cdot\Delta u_1^{AB} - \frac{3\sqrt{15}}{5}\cdot\Delta u_1^{CD})\frac{\mu}{\kappa+1}\sqrt{\frac{\pi}{L}} \tag{2.40b}$$

식 (2.40)를 이용한 변위 외삽법은 균열 선단에서 응력 특이성을 표현할 수 있는 불연속 특이요소 (2.28)를 사용한 이중경계요소법에 직접적으로 적용할 수 있기 때문에 계산이 용이하면서도 높은 정도의 응력확대계수를 산정할 수 있다.

2.2.3 *J*-integral 에 기초한 에너지법

균열 길이가 a 인 구조물의 에너지방출률 G 는 다음과 같이 정의된다 [Kanninen 1985].

$$G = -\frac{d\Pi}{da} \tag{2.41}$$

여기서, Π 는 구조물의 탄성변형 에너지이다. 에너지 방출률은 가상균열진전법(virtual crack extension method) [Haber 1985]을 이용하여 수치적으로 산정할 수 있다. 선형탄성문제에서 에너지방출률은 균열면을 포함하는 구조물의 외부 경계면 Γ_0 를 적분경로로 하는 *J*-integral 과 동일하다 [Herrmann 1981]. *J*-integral 은 다음과 같이 정의 된다.

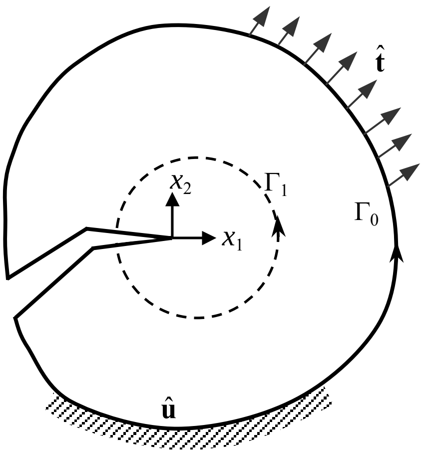


그림 2.10 *J*-integral 에서의 적분경로

$$J = \oint_{\Gamma} (W n_1 - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) d\Gamma \tag{2.42}$$

여기서, W 는 단위변형 에너지이고, n은 적분 경로의 외향 법선 벡터이다. *J*-integral 은 균열 선단을 포함하는 적분 경로에 무관하게 일정하다고 알려져 있다 [Rice 1968]. 그림 2.10 은 꺾인 균열 선단을 포함하고 있는 균열체이다. Γ_0는 균열면을 포함한 균열체의 외부 경계면이고, Γ_1는 직선의 균열면 안쪽에서 정의된 적분 경로이다. Γ_1의 직선 균열면에서는 $t_i = n_1 = 0$ 이어서 *J*-integral 의 피적분항이 영이 되기 때문에 적분경로에서 균열면을 제외할 수 있다 [Kanninen 1985]. 그러나 그림 2.10 의 외부 경계면 Γ_0와 같이 적분 경로가 꺾인 점을 포함하고 있거나 균열면이 곡선이라면 균열 선단을 포함하는 균열면에서 적분을 수행하여야 한다.

단일 모드에서는 에너지 방출률이나 *J*-integral 로 일차모드의 응력확대계수를 산정할 수 있지만 혼합모드의 경우에는 각 모드에 해당하는 응력확대계수로 분리하여야 한다. *J*-integral 법을 이용한 혼합모드의 모드 분리법은 J_k-interal 법 [Reimers 1991], Kitagawa

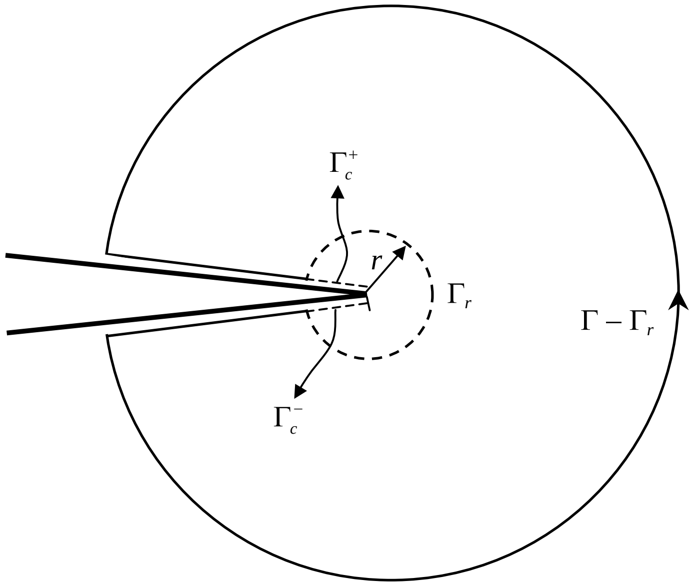


그림 2.11　J_2 적분을 위한 적분경로

에 의해 제안된 모드 분리법 [Portela 1992], mutual integral 법 [Yau 1980, Chen 1977] 등이 있다. Kitagawa 의 모드 분리법은 균열 선단 근방의 변위장과 응력장이 대칭 모드와 비대칭 모드로 분리하는 특성을 이용하고, mutual integral 법은 균열 선장의 해석 해를 이용하기 때문에 두 방법 모두 적분 영역이 직선의 균열 선단으로 제한된다. 이에 비하여 J_k-interal 법은 균열이 곡선이거나 꺾이어도 적분 영역에 관계없이 응력확대계수를 분리하여 산정할 수 있다.

J_k-integral 은 균열 선단에서 k 방향으로 진전하는 단위 균열에 대하여 다음과 같이 정의된다.

$$J_k = \lim_{\Gamma_\varepsilon \to 0} \oint_{\Gamma_\varepsilon} (Wn_k - t_j u_{j,k}) d\Gamma \tag{2.43}$$

여기서, Γ_ε 는 균열 선단을 둘러싼 폐곡선이다. $k = 1$ 인 경우에는 식 (2.42)의 J-integral

과 동일하다. 균열 선단에서 임의의 방향 θ의 단위 균열 진전에 대한 J-integral J_θ와 J_k-integral 은 다음 관계식을 만족한다.

$$J_\theta = J_1 \cos\theta + J_2 \sin\theta \tag{2.44}$$

여기서, 식 (2.32)과 (2.33)의 응력장과 변위장으로부터 J_1과 J_2는 각각 다음 관계식을 만족한다.

$$J_1 = \frac{1-\nu^2}{E}(K_{\mathrm{I}}^2 + K_{\mathrm{II}}^2) \tag{2.45a}$$

$$J_2 = -\frac{2(1-\nu^2)}{E} K_{\mathrm{I}} K_{\mathrm{II}} \tag{2.45b}$$

직선의 균열에서 유한한 면적을 갖는 적분경로를 고려할 때, J_1은 적분경로에 무관하게 일정한 값을 주지만, J_2는 균열면에서의 적분을 수행하여야 path-independence 를 만족한다. 그림 2.11 은 J_2 적분을 위한 적분경로를 보여주고 있다. 균열 선단을 둘러싸는 반지름이 $r\,(<< a)$인 적분경로는 원형의 경계 Γ_r와 상하 균열면의 경계 Γ_c^+, Γ_c^-로 구성된다. 식 (2.32)와 식 (2.33)의 균열 선단의 변위장과 응력장의 해석해를 이용하여 균열면 Γ_c^+와 Γ_c^-에서의 J_2 적분은 다음과 같다 [Eischen 1987].

$$\int_{\Gamma_c^+} (W^+ - W^-) n_2^+ d\Gamma = \frac{8(1-\nu^2)}{E\sqrt{2\pi}} K_{\mathrm{II}} \sigma_0 \sqrt{r} \tag{2.46}$$

여기서, 위 첨자 (+), (–)는 균열의 상하 경계면 값을 나타낸다. 식 (2.46)에서 정규항 σ_0의 영향을 무시할 수 없는 혼합모드의 하중상태에서는 직선의 균열이라도 균열면을

따라 적분을 수행하여야 J_2를 정확하게 평가할 수 있다.

균열 선단 근방에서 J_2 적분은 응력의 특이성으로 인하여 수치적으로 적분을 수행하는데 어려움이 있다. 식 (2.46)를 이용하여 J_2 적분은 적분경로에서 균열 선단 근방 영역을 제외시킬 수 있다. 균열 선단 근처의 반지름이 r 인 원 영역을 제외시킨 적분 경로 $\Gamma - \Gamma_r$ 를 설정한다. 반지름이 r 인 원 영역의 적분은 식 (2.46)으로 치환하면 J_2는 다음과 같다.

$$J_2 = \hat{J}_2(r) + \frac{8(1-\nu^2)}{E\sqrt{2\pi}} K_{\mathrm{II}} \sigma_0 \sqrt{r} \tag{2.47}$$

여기서,

$$\hat{J}_2(r) = \int_{\Gamma-\Gamma_r} (Wn_k - t_j u_{j,k}) d\Gamma \tag{2.48}$$

이다. 식 (2.47)에서 정규항이 포함된 항은 서로 다른 크기의 r_1, r_2를 설정하여 $\hat{J}_2(r_1)$, $\hat{J}_2(r_2)$ 를 수치적으로 산정하면 다음과 같이 산정할 수 있다.

$$\frac{8(1-\nu^2)}{E\sqrt{2\pi}} K_{\mathrm{II}} \sigma_0 = \frac{\hat{J}_2(r_1) - \hat{J}_2(r_2)}{\sqrt{r_2} - \sqrt{r_1}} \tag{2.49}$$

식 (2.42)과 식 (2.47)으로부터 J_1과 J_2을 수치해석으로 얻으면 식 (2.45)를 이용하여 일차 모드와 이차 모드에 대한 응력확대계수는 다음과 같이 분리하여 산정할 수 있다.

$$K_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E}{1-\nu^2}}(\sqrt{J_1 - J_2} + \sqrt{J_1 + J_2}) \tag{2.46a}$$

$$K_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E}{1-\nu^2}}(\sqrt{J_1 - J_2} - \sqrt{J_1 + J_2}) \tag{2.46b}$$

2.2.4 이중경계요소법에서의 응력확대계수 산정

균열면을 불연속 요소로 이산화하는 이중 경계요소법에서는 *J*-integral 에 기초한 에너지법을 사용할 수 없다. 불연속 경계요소를 사용하기 때문에 변위장이 요소와 요소 사이에서 불연속이 되고, 에너지밀도 W 가 균열면에서 유일하게 정의 되지 않기 때문이다.

균열 선단이 꺾이거나 균열면이 곡선이면 식 (2.43)의 J_k-integral 에서 균열면에서의 적분값은 에너지밀도에 대한 항이 존재하게 된다. 에너지밀도는 다음과 같이 변위의 일차 미분으로 정의된다.

$$W = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{4}D_{ijkl}(u_{k,l} + u_{l,k})u_{i,j} \tag{2.47}$$

여기서, D_{ijkl} 는 elasticity stiffness 이다. 균열면을 식 (2.25), (2.26)의 불연속 경계요소로 이산화 하면 요소와 요소 사이에서 변위장은 불연속이 된다. 조각적 연속(piece-wise continuous)인 변위장은 L_2 공간 [Johnson 1987] 에 존재하지만, 변위의 일차 미분은 L_2 공간에서 정의되지 않는다.

$$u_{i,j} \notin L_2 = \left\{ v \mid v(t) \text{ is defined on } t_1 \le t \le t_2, \int_{t_1}^{t_2} v^2 dt < \infty \right\} \tag{2.48}$$

따라서 균열 경계면의 에너지밀도 W 는 요소와 요소 사이에서 불연속이 되고, *J*-integral

의 선적분은 발산하게 된다. 변위장이 최소한 C^0–연속이어야 경계면에서 에너지밀도가 정의되고 *J*-integral 에 기초한 에너지 법을 적용할 수 있다.

이중경계요소법에서 연속인 변위장을 얻을 수 있는 두 가지 방법을 고려할 수 있다. 첫번째 방법은 균열 선단을 제외한 나머지 균열 경계면을 연속 요소로 이산화하는 것이다. 하중이 제하 되는 점(source point)과 응답 점이 일치할 때, 꺾이는 점과 균열 선단에서 표면력 경계적분식 (2.23)은 적분 불가능하다. 따라서 균열을 곡선 요소로 이산화하고, 요소와 요소의 접선각이 일치하도록 요소의 형상을 결정하여 꺾이는 점이 발생하지 않도록 한다. 그러나 편측 균열에서 균열이 시작되는 점은 여전히 표면력 경계적분식의 적분불능 문제를 피할 수 없기 때문에 꺾이는 부분을 불연속 요소로 모델링하거나 부드러운 곡선으로 기하형상을 이산화 하여야 한다. 두 번째 방법은 불연속 요소를 사용하여 산정된 절점의 변위를 외삽하여 변위장을 연속화 시키는 것이다. 그러나 외삽하여 연속화된 변위장의 해의 공간은 이중경계적분식을 정확히 만족시키는 변위장의 해 공간과 일치하지 않기 때문에, 균열 성장과 같이 해석 결과로부터 해 공간의 재정의가 필요한 문제에서는 반복적인 보정 과정에서의 수렴성을 보장할 수 없다.

J-integral 에 기초한 본래의 에너지법은 이론적으로는 적분경로에 무관하게 일정하고 수치적으로도 안정된 해를 준다. 그러나 이러한 장점에도 불구하고 이중경계요소법을 사용할 경우에는 불연속 변위장으로 인하여 *J*-integral 에 기초한 에너지법을 직접적으로 적용할 수 없다. 앞의 두 번째 방법으로 연속인 변위장를 얻어서 이로부터 *J*-integral 을 산정하더라도 변위 외삽법과 마찬가지로 사용된 변위장이 시스템방정식을 만족시키는 변위장의 해의 공간에 포함되는 것을 보장할 수 없는 문제가 있다. 따라서 이 논문에서는 변위 외삽법을 이용하여 혼합모드의 응력확대계수를 산정한다.

2.3 피로 균열의 성장 모델링

반복적인 피로하중을 받는 강재는 재료적으로 또는 구조적으로 가장 취약한 부분에서 응력집중 현상이 발생하여 균열이 발생하고 이러한 균열이 지속적으로 성장하여 결국에는 파괴에 이르게 된다. 강재의 피로수명은 균열의 크기를 기준으로 구분할 수 있다. 미세구조(micro-structure)의 재료적인 결함에서 시작하여 선형탄성균열역학(Linear Elastic Fracture Mechanics)이 적용 가능한 크기의 균열로 성장하기까지의 수명과 구조물이 파괴에 이르는 나머지 수명으로 나눌 수 있다. 그림 2.12 은 피로-강도 곡선(S-N curve) 상에서 미세균열(micro-crack)의 성장에 대한 피로수명과 전체 피로수명을 보여주고 있다. 낮은 피로응력에 대해서는 전체 피로수명에서 균열의 발생과 미세균열의 성장이 대부분을 차지하고, 높은 피로응력에 대해서는 거시적인 균열(macro-crack)의 피로 성장이 전체 피로수명에서 차지하는 비중이 높아진다. 그림 2.13 은 미세균열과 거시적인 균열의 피로 성장률 곡선을 도시한 것이다. 거시적인 균열에 대해서는 응력확대계수의 크

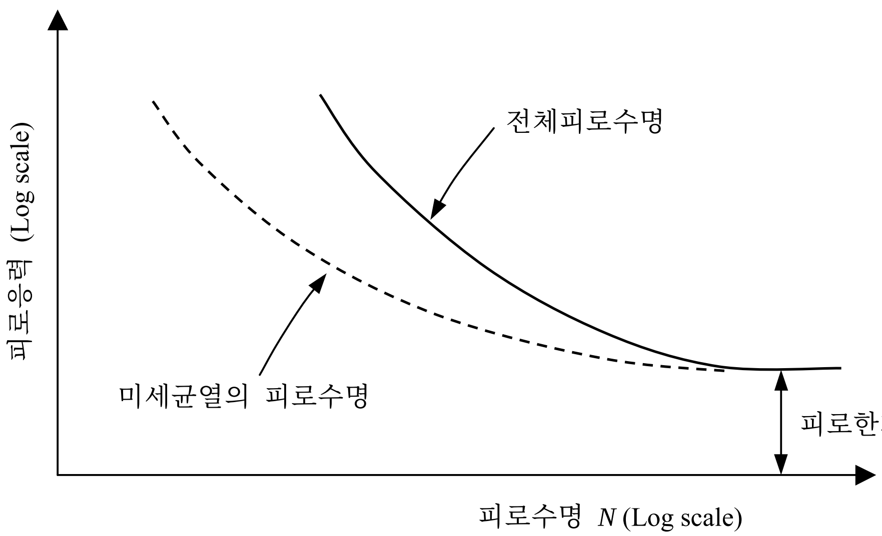


그림 2.12 피로-강도 곡선과 피로수명

기에 따라 성장률을 기준으로 그림 2.13 와 같이 세 영역(I, II, III)으로 나눈다. 영역 I 은 균열 성장에 필요한 임계 응력확대계수(ΔK_{th})의 영향을 받는 영역이고 영역 III 는 파괴 직전(K_C)의 영역이다. 영역 II 는 응력확대계수와 피로 균열 성장률의 대수관계가 선형의 안정적인 균열 성장을 보여주는 영역으로서 Paris-Erdogan 방정식이 적용 가능한 영역이다. 영역 I 과 영역 III 를 포함하여 적용할 수 있는 변형된 Paris-Erdogan 방정식이 제안되었다 [Taylor 2002]. 미세균열에 대해서는 재료의 미세구조를 고려한 미세균열이론 (small crack theory)를 적용해야 하기 때문에 선형탄성균열역학만으로는 접근하는데 한계가 있다 [McDowell 1997, Newman 1999, Taylor 2002].

이 절에서는 그림 2.14 와 같이 피로 균열 성장을 세 단계로 나누어 균열 해석을 수행한다. 선형탄성균열역학을 적용할 수 있는 최소의 균열 길이인 하한계 균열길이 (l_0)보다 작은 미세균열에 대해서는 성장률이 일정하다고 가정하여 피로 수명을 근사한

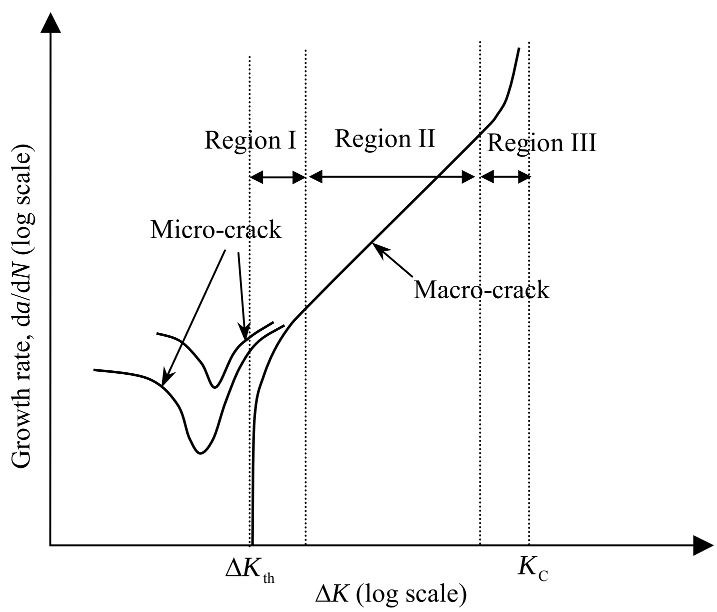


그림 2.13 미세 균열과 거시적인 균열의 성장률 곡선

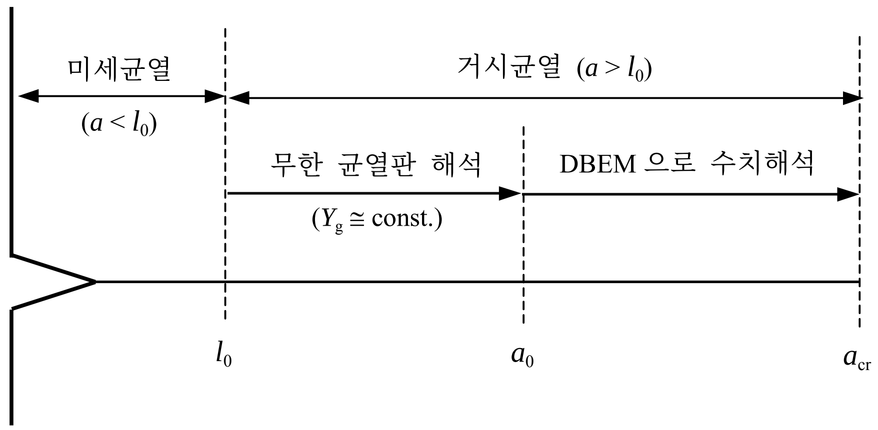


그림 2.14 피로 균열의 성장 해석

다. 거시균열의 초기 성장 단계에서는 응력확대계수의 기하형상함수의 변화가 매우 작기 때문에, 무한 균열판의 해석해를 적용하여 균열 해석을 수행할 수 있다. 기하형상함수의 변화를 무시할 수 없는 나머지 거시균열의 성장은 이중경계요소법으로 수치해석을 수행한다. 혼합모드의 하중상태에서 거시 균열은 증분법에 기초하여 성장을 수치모사한다. 기존의 접선법에 기초한 성장 모델링 기법의 단점을 극복하고자 할선법에 기초한 반복적인 균열 성장 모델링 기법을 제안한다. 미세 균열과 거시 균열의 전체 피로수명으로부터 피로-강도 곡선을 수치적으로 산정한다.

2.3.1 피로 균열 성장 기준

균열체의 피로수명을 구조해석으로부터 수치적으로 평가하기 위해서는 성장 경로와 성장률(growth rate)을 정확하게 산정하는 것이 중요하다. 피로 균열은 혼합모드의 하중 상태에서 혹은 구조물의 비대칭 기하형상으로 인하여 곡선으로 성장한다. 피로 균열 문제에서는 동적인 효과는 고려하지 않기 때문에 성장 속도가 성장 곡선에 영향을 미치지 않는다. 성장 곡선의 경로는 하중 상태, 구조물의 기하형상에 따라 결정되고, 성장률은 균열 선단의 응력상태와 재료적인 특성에 영향을 받는다. 피로 균열의 성장 경로나 성장률은 응력확대계수로부터 결정된다.

이 논문에서는 균열 성장률은 Paris-Erdogan 방정식에 의해 산정하고, 성장 방향은 최대주응력 기준으로부터 결정한다. 그림 2.15 과 같이 일정한 주기와 크기의 피로 하중을 받는 부재의 성장률은 다음과 같다.

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \tag{2.49}$$

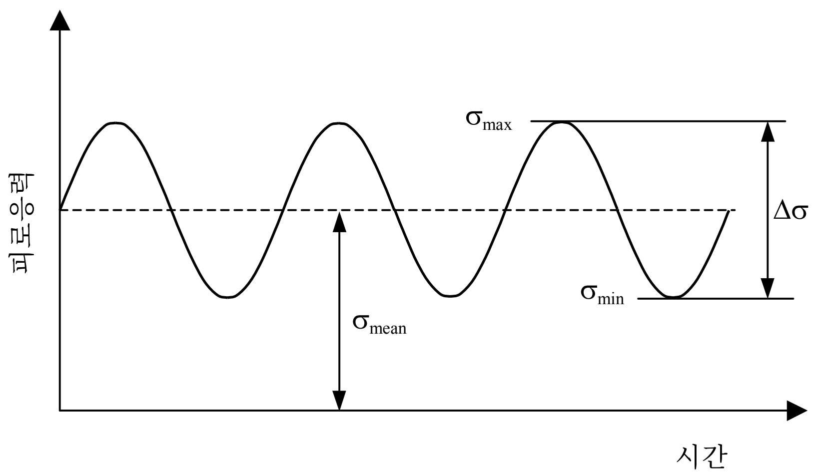


그림 2.15 일정한 크기와 주기를 갖는 피로하중

여기서, a 와 N 은 각각 균열의 길이와 피로하중의 반복 회수이고, C 와 m 은 성장률 계수로서 실험에 의해 결정되는 재료의 특성치이다. ΔK 는 응력확대계수의 최대값과 최소값의 차이로서 다음과 같이 정의 된다.

$$\Delta K = K_{\max} - K_{\min} = Y_g \Delta\sigma\sqrt{\pi a} \tag{2.50}$$

여기서, $\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ 이다. 피로응력이 $\sigma_{\min} = 0$ 인 경우에는 $\Delta\sigma = \sigma_{\max}$ 이고, $\Delta K = K_{\max}$ 가 된다. 응력확대계수는 혼합모드의 경우에는 일차모드에 상당하는 등가의 응력확대계수가 사용되는데 최대주응력 기준에 의하면 다음과 같다.

$$K = K_{\mathrm{I}} \cos^3\frac{\varphi}{2} - 3K_{\mathrm{II}}\cos^2\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} \tag{2.51}$$

여기서, φ 는 균열 선단의 지역 좌표계를 기준으로 할 때의 균열 성장 접선각이다. 최대주응력 기준에 의하면 접선각 φ 는 다음 관계식을 만족한다.

$$K_{\mathrm{I}} \sin\varphi + K_{\mathrm{II}}(3\cos\varphi - 1) = 0 \tag{2.52a}$$

식 (2.52a)를 φ 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{K_{\mathrm{I}}^2 + 9K_{\mathrm{II}}^2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{3K_{\mathrm{II}}}{K_{\mathrm{I}}}\right) \tag{2.52b}$$

최대주응력 기준에 의하면 전단응력이 최소가 되는 방향으로 균열이 성장한다. 즉 새로운 균열 선단의 지역좌표계에서는 항상 이차 응력확대계수가 영이 되는 방향으로 균열이 성장한다 ($K_{\mathrm{II}} = 0$). 만약 균열의 성장이 연속이고 미분 가능한 부드러운 곡선을

이루면 성장할 경우에는 새로운 균열 선단에서는 $\varphi = 0$ 이 된다. 직선 균열에 대한 전단모드의 하중상태 ($K_{\mathrm{I}} = 0$)일지라도 균열이 $\varphi = 0$ 의 순수한 전단모드로 성장하지 않는다. 식 (2.52a)에서 전단모드의 하중상태 ($K_{\mathrm{I}} = 0$)에서 균열의 성장 방향은 $\varphi = \pm 70.5^0$ 이고 실험 결과와 대체로 일치한다. 이것은 전단에 대한 파괴인성 (K_{IIC})이 일차모드의 파괴인성 (K_{IC})에 비하여 상대적으로 크기 때문이다 [Lo 1996].

2.3.2 미세균열의 피로수명

식 (2.49)의 Paris-Erdogan 방정식은 그림 2.13 의 영역 II 에서 유효한 피로 균열 성장률 식이다. 균열이 급속도로 성장하여 파괴에 이르는 영역 III 가 전체 피로수명에서 차지하는 비중이 극히 작으므로 이 논문에서는 고려하지 않는다. 임계 응력확대계수(ΔK_{th})가 지배적인 영역 I 의 거동을 추가로 고려하기 위해 다음과 같이 수정된 Paris-Erdogan 방정식이 제안 되었다 [Taylor 2002].

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K - K_{\mathrm{th}})^m \tag{2.53}$$

식 (2.53)의 수정된 Paris-Erdogan 방정식을 사용하더라도 재료의 미세구조의 영향을 받는 미세균열의 성장률을 산정하는 데는 적합하지 않다. 미세균열에 대해 다음과 같은 몇 가지 특징이 알려져 있다. 우선 미세균열은 임계 응력확대계수보다 작은 응력 상태에서도 성장한다. 또한 같은 응력상태에서 미세균열의 성장률이 거시적인 균열의 성장률보다 더 큰 값을 갖는다. 미세균열은 Paris-Erdogan 방정식과 같은 어떤 일정한 법칙을 찾기 어려울 만큼 다양한 양상을 보여준다. 이와 같은 특징을 보여주는 미세균열에 대해서는 연속체 역학(continuum mechanics)으로 접근하는데 한계가 있다. 그림 2.16 는

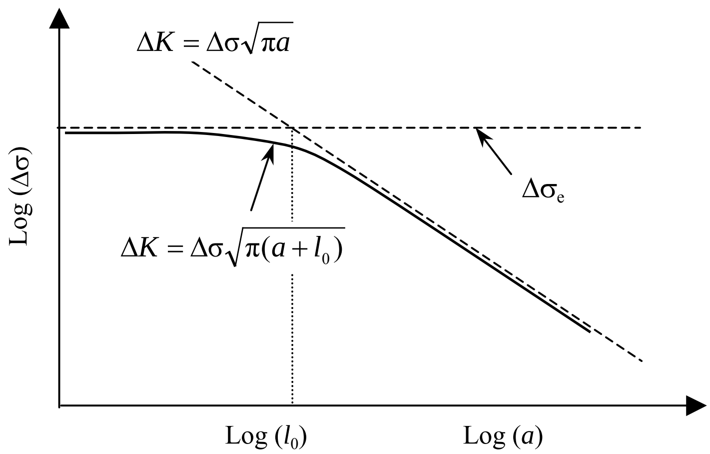


그림 2.16 피로 임계 응력과 균열 길이

일정한 크기의 응력확대계수 ΔK 에 대하여 균열 길이와 피로 응력의 관계를 도시한 것으로 특정 균열 길이 이하에서는 피로 최저 한계 응력보다 더 커지지 않는다. 그림 2.16 로부터 Paris-Erdogan 방정식을 적용할 수 있는 하한계 균열 길이는 다음과 같이 산정 할 수 있다 [Hudak 1981].

$$l_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\Delta K_{\mathrm{th}}}{Y_{\mathrm{g}}\Delta\sigma_{\mathrm{e}}}\right)^2 \tag{2.54}$$

여기서, σ_e 는 피로 한계(endurance limit)로서 이보다 작은 응력 상태에서는 피로 균열이 성장하지 않는다. 피로 한계 σ_e 는 극한강도(ultimate strength) 그리고 최대 피로응력과 최저 피로응력의 비에 따라 변화한다 [Barsom 1977, Bannantine 1990].

$a < l_0$ 인 미세균열에 대해서는 재료의 미세구조의 영향을 받게 되고, 이 보다 큰 균열은 임계 응력확대계수(Threshold)의 영향을 받게 된다. 하한계 균열길이 l_0 보다 작은 미세균열에 대해서는 미세구조를 고려하여 피로수명을 산정하여야 하지만, 이 논문에서는 미세균열의 성장률이 균열 길이가 l_0 일 때의 성장률과 같다고 가정한다.

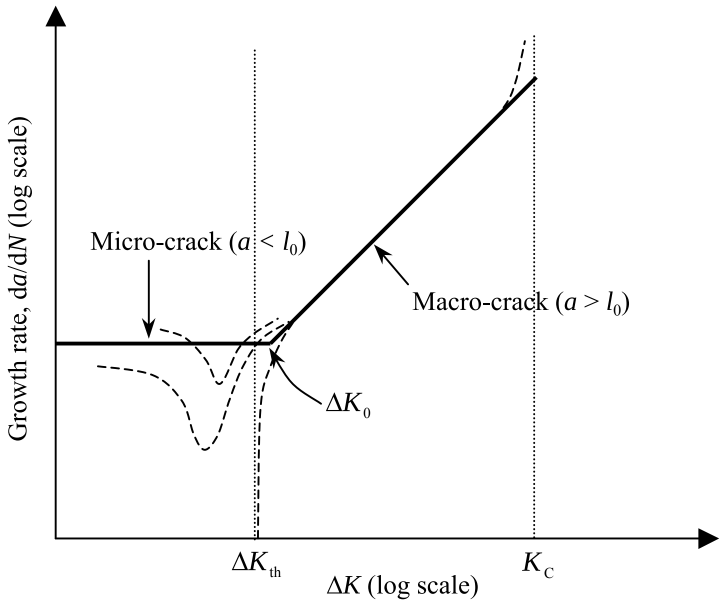


그림 2.17 미세균열의 성장률 모델

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_0)^m, \quad (a < l_0) \tag{2.55}$$

여기서, ΔK_0 는 균열 길이가 l_0 일 때의 응력확대계수로서 다음과 같다.

$$\Delta K_0 = Y_{g0} \Delta\sigma \sqrt{\pi l_0} \tag{2.56}$$

식 (2.56)에서 Y_{g0} 는 $a = l_0$ 일 때의 응력확대계수의 기하형상 함수이다. 그림 2.17 은 미세균열과 거시적인 균열의 성장률 모델을 보여주고 있다. 그림에서 ΔK_0 는 ΔK_{th} 보다 큰 값을 갖고, $\sigma = \sigma_e$ 인 경우에 $\Delta K_0 = \Delta K_{th}$ 이 된다. 식 (2.74)로부터 미세 균열의 피로 수명을 다음과 같이 산정한다.

$$N_0 = \frac{l_0}{C(\Delta K_0)^m} = \frac{(l_0)^{1-m/2}}{C(Y_{g0}\Delta\sigma\sqrt{\pi})^m} \tag{2.57}$$

2.3.3 무한 균열판의 피로 해석

응력확대계수는 균열 길이의 함수이므로 $\sigma_{min} = 0$ 일 경우, 식 (2.49)을 균열 길이에 대한 적분식의 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$N = \int_{a_0}^{a_N} \frac{1}{CK^m(a)}da = \int_{a_0}^{a_N} \frac{1}{C(Y_g\sigma\sqrt{\pi a})^m}da \tag{2.58}$$

여기서, a_0 와 a_N 은 각각 초기의 균열 길이와 N 회의 피로하중 재하로 성장한 균열의 길이이다.

초기 거시균열은 기하형상함수 Y_g 의 변화가 매우 작기 때문에, 기하형상함수가 일정한 무한 균열판의 해석해를 적용하여 성장해석을 수행할 수 있다. 인장 피로 하중을 받는 무한판에서 균열은 직선으로 성장하기 때문에 성장률만을 고려하는 문제로 단순화 시켜서 해석적으로 접근할 수 있다. 인장응력을 받는 무한판에서는 식 (2.37)의 기하형상 함수 Y_g 는 균열의 길이에 관계없이 일정한 값을 갖는다. 즉, 무한판의 내부 균열에서는 Y_g =1.0 이고, 편측 균열에서는 Y_g = 1.12 이다. 무한 균열판의 경우, Paris-Erdogan 방정식 (2.58)은 다음과 같다.

$$N = \frac{1}{C(Y_g\sigma\sqrt{\pi})^m}\int_{a_0}^{a_N} \frac{1}{a^{m/2}}da \tag{2.59}$$

식 (2.59)는 다음과 같이 해석적으로 적분 된다.

$$N = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-m/2)C(Y_g\sigma\sqrt{\pi})^m}(a_N{}^{1-m/2} - a_0{}^{1-m/2}), & (m \neq 2) \\ \dfrac{1}{C(Y_g\sigma\sqrt{\pi})^m}(\ln a_N - \ln a_0), & (m = 2) \end{cases} \tag{2.60}$$

성장 후의 균열의 길이는 피로 하중의 재하 회수와 초기 균열길이에 대한 다음의 비선형 함수로 주어진다.

$$a_N = \begin{cases} (a_0{}^{1-m/2} + (1-\dfrac{m}{2})Y_g{}^m\sigma^m\pi^{m/2}CN)^{2/(2-m)}, & (m \neq 2) \\ a_0 \exp(Y_g{}^m\sigma^m\pi^{m/2}CN), & (m = 2) \end{cases} \tag{2.61}$$

2.3.4 증분법을 이용한 피로 균열의 성장 해석

유한한 크기의 균열판이 일차모드의 피로 하중을 받을 경우, 피로 균열의 초기 성장 과정에서는 균열 선단의 응력상태가 원역 응력장 (remote stress, σ_∞)에 의하여 결정되기 때문에 무한 균열판에 대한 식 (2.61)을 이용하여 균열 성장 해석을 수행 한다. 그러나 임의의 기하형상을 갖는 혼합모드의 균열판에서 응력확대계수를 산정하기 위해서는 수치 해석법을 적용하여야 한다. 유한 균열판에 대한 혼합모드의 피로 수명을 수치적으로 산정하기 위해서는 증분법에 기초하여 피로 균열 성장을 이산화 하여야 피로 성장에 따른 기하형상의 변화를 고려할 수 있다.

식 (2.58)로부터 균열 성장을 이산화하는 두 가지 방법을 고려할 수 있다. 첫번째 방법은 주어진 일정한 크기의 균열 증분($\Delta\hat{a}$)으로 균열을 성장시키면서 피로 하중 재하 회수의 증분(ΔN)을 산정하는 것이고, 두 번째 방법은 주어진 피로하중 재하 회수의 증

분($\Delta\hat{N}$)에 대하여 균열 증분(Δa)을 결정하는 것이다. 피로 균열 문제에서는 초기 균열 성장 과정이 대부분의 피로수명을 차지한다. 이 논문에서는 피로수명을 정확히 산정하기 위하여 두 번째 방법으로 균열 성장을 이산화 한다.

그림 2.18 는 균열의 성장에 따라 Paris-Erdogan 방정식의 피적분 함수를 이산화한 것으로서 피로하중 재하 회수의 증분(ΔN)과 균열 증분(Δa)의 관계를 보여주고 있다. 식 (2.53)의 피로하중 재하 회수 N 을 n 등분하여 Paris-Erdogan 방정식을 다음과 같이 이산화 한다.

$$N = \sum_{p=1}^{n} \Delta N_p = \sum_{p=1}^{n} \int_{a_{p-1}}^{a_p} \frac{1}{CK^m} da \tag{2.62}$$

여기서, p 는 피로 하중 재하 단계 또는 피로 균열 성장 단계를 나타내는 첨자이다. 혼합모드의 피로 균열 성장을 모델링하는 방법으로서 접선법에 기초한 방법과 할선법에 기초한 증분법이 있다. 접선법에서는 초기 성장 접선 방향과 초기 성장률을 이용하여

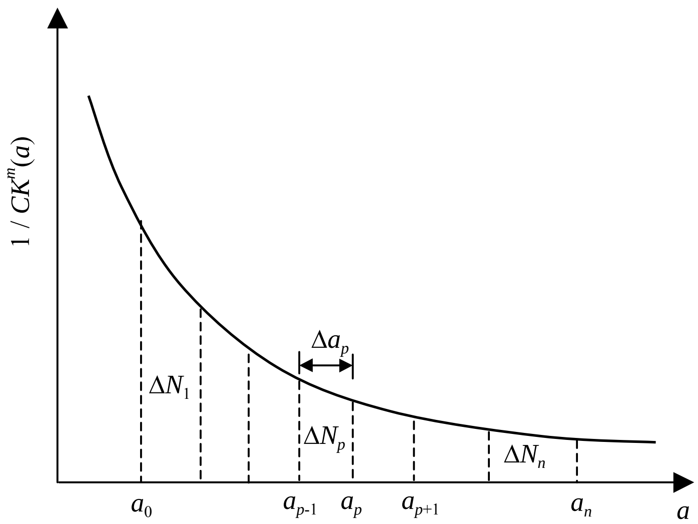


그림 2.18 균열 성장의 이산화

균열 성장을 모델링 한다. 주어진 $\Delta\hat{N}_p$ 에 대하여 균열 증분을 전 단계의 초기 균열 성장률을 이용하여 다음과 같이 산정한다.

$$\Delta a_p = CK^m(a_{p-1})\Delta\hat{N}_p \tag{2.63}$$

곡선의 균열 성장을 직선의 균열 증분으로 이산화할 경우에 새로운 균열 선단의 위치를 결정하기 위하여 최대주응력 기준식 (2.52)로부터 성장 접선 방향을 결정한다. 접선법에서 n회의 피로 하중 재하 후의 균열 길이와 균열 각은 각각 다음과 같다.

$$a_n = a_0 + \sum_{p=1}^{n} \Delta a_p \tag{2.64a}$$

$$\theta_n = \theta_0 + \sum_{p=1}^{n} \varphi_p \tag{2.64b}$$

여기서, θ_0 는 초기 균열의 방향각이고, φ_p 는 p 번째 피로 균열 성장 단계에서의 균열 성장 접선각이다.

2.3.5 할선법에 기초한 반복적인 피로 균열 성장 모델링 기법

주어진 ΔN 에 대하여 접선법에 기초하여 혼합모드의 피로 균열 성장을 이산화 하면, 실제 성장 곡선에서 벗어나게 된다. 또한 일차모드의 균열 성장이라도 초기의 균열 선단에서 평가된 응력확대계수로부터 성장률을 산정하면 균열 증분이 작게 평가된다. 이 절에서는 할선법에 기초한 혼합모드의 피로 균열 성장 모델링 기법을 제안하다. 할선법에서는 성장 후의 응력상태를 고려하여 균열 증분에 대한 성장 곡선을 반복적으로 보정한다. 균열의 성장 곡선을 포물선으로 가정하고 새로운 균열 선단에서 가정한 포물

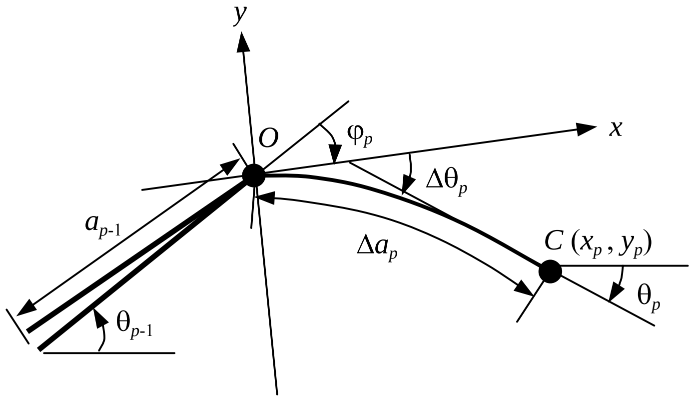


그림 2.19 피로 균열의 성장 곡선

선의 기울기와 구조해석으로부터 산정한 균열 성장방향이 같아지도록 반복적으로 포물선의 곡률을 보정한다. 즉 새로운 균열 선단에서 $K_{\text{II}} = 0$ 또는 $\varphi = 0$가 되도록 포물선을 결정한다. 그림 2.19 은 혼합모드의 피로 균열 성장 단계 p에서의 균열 성장 곡선을 보여준다. 접선법에서는 전 단계 $(p-1)$에서 산정한 성장 접선 방향 φ_p만으로 새로운 균열 선단의 위치를 결정하기 때문에 실제 곡선에서 벗어나게 된다. 할선법에서는 증분 곡선의 곡률 변화에 의해 발생하는 추가적인 방향각의 변화량 $\Delta\theta_p$를 고려하여 균열 선단의 위치를 결정한다. 할선법에서 n회의 피로하중 재하 후의 균열 길이와 곡선의 방향각은 각각 다음과 같다.

$$a_n = a_0 + \sum_{p=1}^{n} \Delta a_p \tag{2.65a}$$

$$\theta_n = \theta_0 + \sum_{p=1}^{n} (\varphi_p + \Delta\theta_p) \tag{2.65b}$$

식 (2.65a)에서 균열 증분 Δa_p 는 이산화된 Paris-Erdogan 방정식 (2.62)에서 고정된 ΔN_p 에 대하여 사다리꼴 공식(trapezoidal rule)으로 다음과 같이 수치적분 한다.

$$\Delta N_p = \int_{a_{p-1}}^{a_p} \frac{1}{CK^m(a)} da \approx \frac{\Delta a_p}{2C}\left(\frac{1}{K^m(a_{p-1})} + \frac{1}{K^m(a_p)}\right) \tag{2.66}$$

식 (2.66)에서 피로하중 재하 단계 p 에서의 응력확대계수 $K(a_p)$ 는 Δa_p 에 대한 비선형 함수이다. 주어진 ΔN_p 에 대하여 균열 증분을 Δa_p 을 정확하게 산정하기 위해서는 다음과 같이 반복적인 보정을 수행하여야 한다.

$$\Delta a_p^q \approx 2C\Delta N_p \frac{K^m(a_{p-1})K^m(a_p^{q+1})}{K^m(a_{p-1}) + K^m(a_p^{q+1})} \tag{2.67}$$

여기서, q 는 균열 증분의 보정 횟수를 나타내는 첨자이다.

식 (2.65b)에서 $\Delta\theta_p$ 는 균열 성장 곡선의 곡률변화에 의해 발생하는 추가적인 각의 변화량이다. 미분 가능한 부드러운 곡선에서 두 점 사이의 곡선의 길이 Δa_p 와 각의 변화량 $\Delta\theta_p$ 은 곡선 벡터 $\mathbf{X}(s) = (x(s), y(s))$ 로부터 다음과 같이 정의 된다.

$$\Delta a_p = \int_{a_{p-1}}^{a_p} \|\mathbf{X}'(s)\| ds \tag{2.68a}$$

$$\Delta\theta_p = \int_{a_{p-1}}^{a_p} \|\mathbf{X}''(s)\| ds \tag{2.68b}$$

성장 곡선과 새로운 균열 선단을 추정하기 위하여 그림 2.19 과 같이 균열 선단을 원점으로 하고, 성장곡선에 접하는 방향을 지역 좌표계의 x 축이 되도록 설정하여 포물선

($y = bx^2$)을 가정한다. 포물선의 원점과 새로운 균열 선단 $C(x_p, y_p)$ 사이의 곡선의 길이와 각의 변화는 식 (2.68a) 과 (2.68b)로부터 각각 다음과 같다.

$$\Delta a_p = \int_0^{x_p} \sqrt{1+4b^2x^2}\,dx = \frac{1}{4b}(2bx_p\sqrt{1+4b^2x_p^2} + \ln\left|2bx_p + \sqrt{1+4b^2x_p^2}\right|) \tag{2.69a}$$

$$\Delta\theta_p = \int_0^{x_p} \frac{2b}{1+4b^2x^2}dx = \tan^{-1}(2bx_p) \tag{2.69b}$$

식 (2.69b)으로부터 포물선의 계수 b 는 다음의 관계식을 만족시킨다.

$$b = \frac{\tan(\Delta\theta_p)}{2x_p} \tag{2.70}$$

성장곡선을 포물선으로 모델링하면, 곡선의 시작점에서 좌표와 접선각이 같고, 끝단에서 접선각이 같도록 모델링할 수 있다.

이 논문에서는 수치 해석법으로서 이중경계요소법을 사용하므로 균열을 경계요소로 이산화하여 경계적분을 수행하게 된다. 곡선 균열 면에서 경계적분의 어려움을 피하기 위하여 포물선의 균열 증분을 직선으로 이산화하여 적분을 수행한다. 그림 2.20 는 곡선의 성장 곡선을 직선으로 이산화한 기하 형상을 보여주고 있다. 그림에서 점선은 곡선의 성장 궤적이고 굵은 실선은 이산화 된 균열을 나타낸다. 그림에서 (~)는 이산화 된 변수를 나타내고, 포물선의 양단을 잇는 할선각은 다음과 같다.

$$\tilde{\theta}_p = \theta_p - \tilde{\varphi}_p = \theta_{p-1} + \varphi_p + \Delta\theta_p - \tilde{\varphi}_p \tag{2.71}$$

여기서, $\tilde{\varphi}_p$ 는 직선으로 이산화 된 새로운 균열 선단에서 산정된 성장 접선각이다. 최

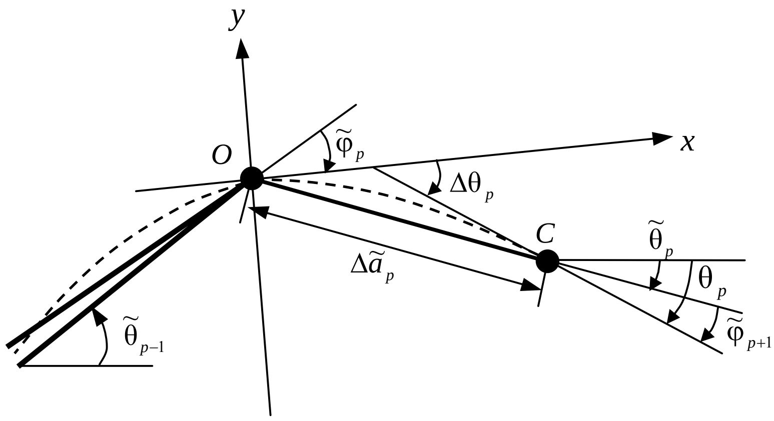


그림 2.20 포물선의 균열 증분을 직선으로 이산화

대주응력 기준에 의하면 균열이 연속이고 미분 가능한 부드러운 곡선을 이루면 새로운 균열 선단에서 $\varphi_p = 0$ 이지만, 포물선의 균열 곡선을 직선으로 근사하기 때문에 $\widetilde{\varphi}_p \neq 0$ 이다. 포물선의 곡률에 의해 추가로 발생하는 방향각의 변화는 그림 2.20 의 직선으로 이산화 된 기하형상으로부터 다음과 같다.

$$\Delta\theta_p = \tan^{-1}\left(\frac{y_p}{x_p}\right) + \widetilde{\varphi}_{p+1} \tag{2.72}$$

할선법에서 균열 증분과 할선각은 다음 과정으로 산정한다. 초기 피로하중 재하단계 $(p-1)$에서는 접선법에 기초하여 균열 증분을 성장 시키고 포물선을 가정한다. 임의의 피로하중 재하단계 p 에서는 식 (2.67)로부터 균열의 증분 Δa_p^q 을 산정하고, 식 (2.69a)의 비선형 방정식을 풀어서 성장 후의 균열 선단의 좌표 $C(x_p^q, y_p^q)$ 를 산정한다. 새로운 균열 선단에서 산정한 응력확대계수로부터 $\widetilde{\varphi}_{p+1}$ 를 결정하고, 식 (2.72)과 (2.70)

로부터 $\Delta\theta_p$ 와 b 를 각각 다음과 같이 보정한다.

$$\Delta\theta_p^{q+1} = \tan^{-1}(\frac{y_p^q}{x_p^q}) + \tilde{\varphi}_{p+1}^q \tag{2.73}$$

$$b_{q+1} = \frac{\tan(\Delta\theta_p^{q+1})}{2x_p} \tag{2.74}$$

반복적인 성장 모델링 과정에서 균열 증분과 성장각에 대해 다음의 수렴조건을 적용한다.

$$\frac{\left|\Delta a_p^q - \Delta a_p^{q-1}\right|}{\Delta a_p^q} < \varepsilon_a \tag{2.75a}$$

$$\left|\Delta\theta_p^q - \Delta\theta_p^{q-1}\right| < \varepsilon_\theta \tag{2.75b}$$

여기서, ε_a 와 ε_θ 는 각각 균열 길이와 방향각의 오차에 대하여 사용자가 정의하는 허용치이다.

2.3.6 피로-강도 곡선

미세 균열의 피로 수명과 거시적인 균열의 피로 수명으로부터 피로-강도 곡선식을 유도할 수도 있다. 미세 균열의 피로 수명 N_0 은 식 (2.00)으로부터 산정하고, 거시적인 균열의 피로수명은 Paris-Erdogan 방정식을 적분하여 산정한다. 균열이 파괴에 대한 임계 길이 a_{cr} 까지 성장하는데 소요되는 피로 하중의 재하 회수는 다음과 같다.

$$N_{\mathrm{T}} = \frac{l_0}{C(Y_{\mathrm{g}0}\Delta\sigma\sqrt{\pi l_0})^m} + \int_{l_0}^{a_{\mathrm{cr}}} \frac{1}{C(Y_{\mathrm{g}}\Delta\sigma\sqrt{\pi a})^m} da \tag{2.76}$$

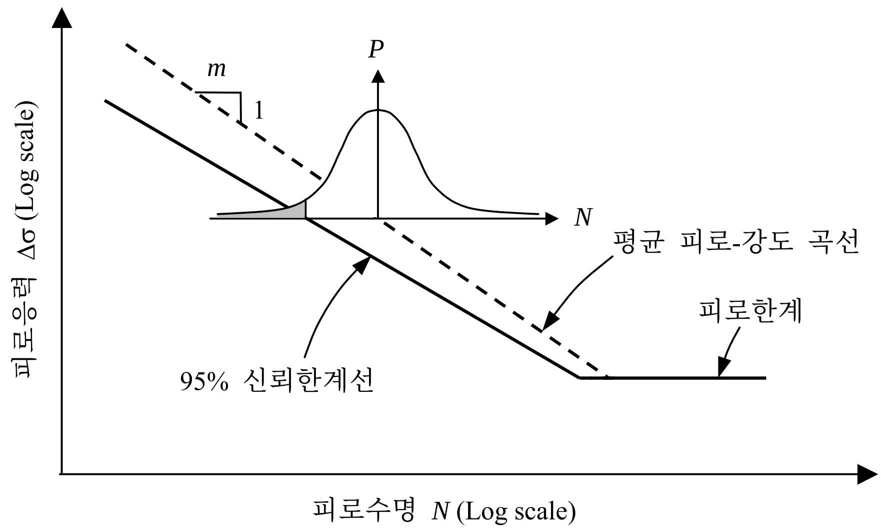


그림 2.21 피로-강도 곡선과 피로수명의 확률분포

Paris-Erdogan 방정식에서 피로 응력은 균열 길이와 무관한 변수이므로 식 (2.76)는 다음과 같다.

$$N_{\mathrm{T}}(\Delta\sigma)^{m} = \frac{l_0}{C(Y_{\mathrm{g}0}\sqrt{\pi l_0})^{m}} + \frac{1}{C\pi^{m/2}}\int_{l_0}^{a_{\mathrm{cr}}} \frac{1}{Y_{\mathrm{g}}{}^{m} a^{m/2}} da \tag{2.77}$$

식 (2.77)의 양변에 로그를 취하면 피로-강도 곡선식을 유도할 수 있다.

$$\ln(\Delta\sigma) = D_{\sigma} - \frac{1}{m}\ln N_{\mathrm{T}} \tag{2.78}$$

여기서, D_{σ}는 균열의 길이를 포함한 구조물의 기하 형상과 성장률 물성치에 의하여 결정되는 피로-강도 곡선의 절편으로서 다음과 같다.

$$D_\sigma = \frac{1}{m}\ln\left\{\frac{(l_0)^{1-m/2}}{C\pi^{m/2}Y_{g0}{}^{m}} + \frac{1}{C\pi^{m/2}}\int_{l_0}^{a_{cr}}\frac{1}{Y_g{}^{m}a^{m/2}}da\right\} \tag{2.79}$$

시방서에서 사용하는 피로-강도 곡선은 설계요소의 불확실성을 고려하기 위하여 실험을 통하여 얻어진 평균적인 곡선의 95% 하한 곡선으로 결정된다. 그림 2.21 은 피로-강도 곡선에서 주어진 피로응력에 대한 피로수명의 확률분포를 보여주고 있다. 피로성장에 대한 수치해석으로 피로수명의 평균과 분산을 산정할 수 있다면, 이에 대한 95% 신뢰도 한계선을 결정할 수 있다.

2.4 피로 균열 성장 예제

네 가지 편측 균열 예제를 수행하였다. 첫번째 예제는 균열 선단이 꺾인 균열에서 응력 확대계수를 산정하는 문제이고, 두 번째 예제는 인장 피로 응력을 받는 일차모드의 균열 성장 문제, 세 번째는 전단 피로 응력을 받는 혼합모드의 균열 성장 문제이다. 네 번째 예제에서는 반복적인 보정이 없는 접선법과 제안된 할선법을 이용한 반복적인 균열 성장 해석을 비교하여 제안된 방법의 타당성을 검증한다.

모든 예제에서 사용되는 직사각형 균열판은 크기가 가로 20cm, 세로 40cm 이고 좌측 중앙에 편측 균열을 포함하고 있다. 탄성계수와 포아송비는 각각 E = 21,000 kN/cm^{2}와 ν = 0.3 이다. Paris-Erdogan 방정식에 사용되는 물성치는 $C = 1.886\times10^{-10}$, m = 3.0 를 사용하였다 [Barsom 1977]. 균열을 제외한 경계면에는 259 개의 절점과 128 개의 이차 경계요소를 사용하여 모델링 하였다. 이때 편측 균열과 만나는 곳에는 식 (2.26)과 (2.27)의 한쪽이 불연속인 연결요소를 사용하였다. 균열 선단은 식 (2.28)과 (2.29)의 불연속 특이요소를 사용하였다.

두 번째와 세 번째 예제에서 식 (2.75a)와 (2.75b)의 반복적인 균열 성장 모델링의 수렴조건으로는 균열 증분에 대해서 ε_a=0.01, 방향각의 증분에 대해서 ε_θ=0.02 rad 으로 설정하였다. 피로 응력을 ΔN = 2,000 회씩 균열 길이가 약 10cm 에 도달할 때까지 50 ~ 70 회를 성장시켰다. 이때 최소 균열 증분을 Δa_{min}= 0.01 cm, 최대 균열 증분을 Δa_{max} = 0.2cm 로 설정하였다. 고정된 ΔN 을 사용하면 성장 초기에는 균열의 증분이 매우 작고, 파괴 상태에 가까이 가면서 균열 증분이 커지게 된다. 균열 성장량이 최소 균열 증분보다 작을 때에는 ΔN 을 두 배로 증가 시키고, 최대 균열 증분보다 클 경우에는 ΔN 을 절반으로 줄여서 균열을 성장 시켰다. 이와 같이 균열 성장을 모델링 함으로써 균열 성장 초기에는 새로운 균열 선단에 추가되는 경계요소가 너무 작아져서 적분 시에 발

생하는 수치적인 문제를 피할 수 있다. 또한 파괴 상태에 가까이 가면서 균열의 증분이 과도하게 커지는 것을 방지함으로써 균열 성장 곡선을 보다 정확히 모델링 할 수 있고, 반복적인 균열 성장 기법에서 수치적 불안정성으로 인하여 발산하는 문제를 피할 수 있다.

2.4.1 꺾인 균열의 응력확대계수 산정

첫번째 예제는 그림 2.22 과 같이 균열이 a_0 = 8.0cm 의 수평 부분과, l_{kink} = 0.08cm 의 θ_{kink} 만큼 꺾인 균열 선단을 가지고 있다. 직선영역은 왼쪽 7 cm 까지는 1 cm 씩 7 등분

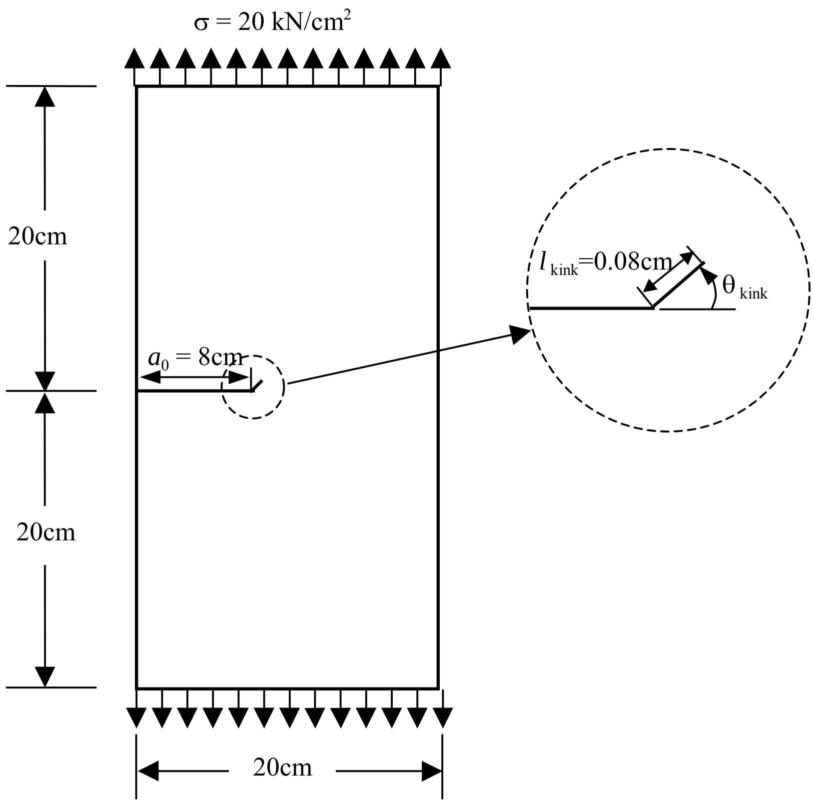


그림 2.22 균열 선단이 꺾인 균열 문제

하고, 나머지 1 cm 는 0.4, 0.3, 0.2, 0.1 cm 로 4 등분하여 각각을 마주보는 불연속 경계요소로 모델링 하였다. 0.08cm 의 꺾인 균열 선단은 마주보는 한 쌍의 불연속 특이요소로 모델링 하였다. 하중은 $\sigma = 20$ kN/cm^2 의 인장 응력이 그림 2.22 과 같이 작용한다.

혼합모드의 피로 균열 문제에서는 균열 증분량이 매우 작으면서 균열 선단이 조금씩 꺾이게 된다. 이 예제에서는 피로 균열 성장으로 인해 균열 선단이 조금 꺾인 경우 변위 외삽법을 적용하여 응력확대계수를 일차와 이차 모드를 분리하고 Cotterell 등 [Cotterell 1980]의 결과와 비교하였다. Cotterell 등은 반무한 균열에서 균열 선단 부분이 미소하게 꺾인 경우($l_{\mathrm{kink}} << a_0$), 꺾인 각의 변화에 따른 응력확대계수를 산정하였다.

그림 2.23 과 2.24 는 각각 일차 모드와 이차 모드에 대한 응력확대계수를 도시한 것이다. Cotterell 등의 결과와 비교할 때 균열의 꺾인 각이 커지더라도 일차 응력확대계수는 오차가 1% 미만이고, 이차 응력확대계수는 6% 미만으로서 대체로 잘 일치하고 있다.

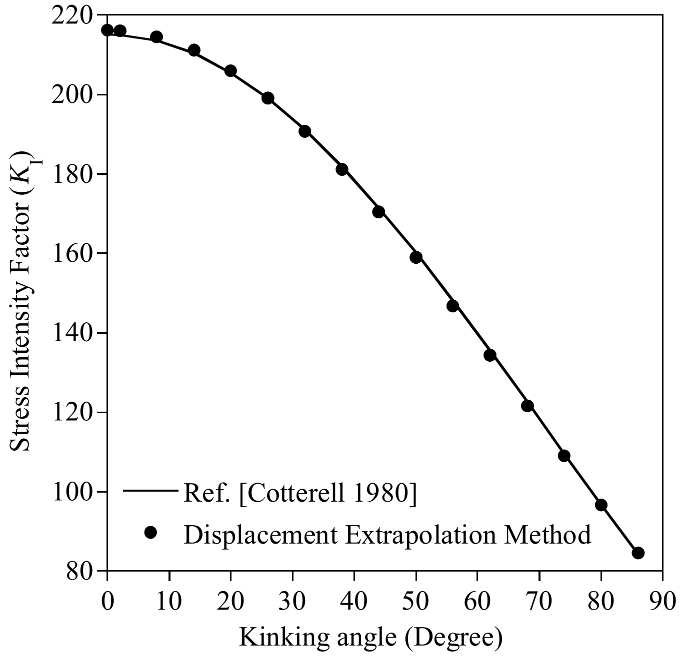


그림 2.23 꺾인 균열의 일차 응력확대계수

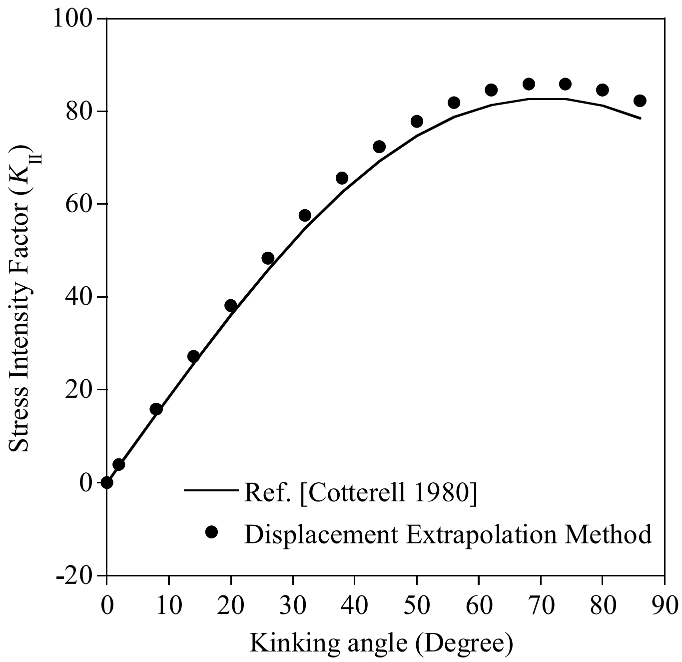


그림 2.24 꺾인 균열의 이차 응력확대계수

2.4.2 인장 피로 응력을 받는 균열의 성장

예제 2 는 그림 2.25 와 같이 인장 응력을 받는 피로 균열 성장 문제이다. 균열판의 가로 너비와 높이는 각각 $w = 20$cm 와 $h = 40$cm 이고 좌측면 중앙에 편측 균열이 있다. 균열의 초기 길이는 $a_0 = 0.2$cm 로서 균열 선단쪽으로 갈수록 작아지도록 6 등분 (3 @ 0.05, 0.025, 0.0125, 0.0125 cm) 하였다. 최소 인장력이 $\sigma_{min} = 0$ kN/cm^2 이고, 최대 인장력 σ_{max} 는 각각 16.5, 25.5, 43.3 kN/cm^2 인 세가지 피로하중에 대하여 피로 균열 성장 해석을 수행하였다.

유한한 너비를 갖는 편측 균열판($h >> w$, $a < 0.7w$)이 인장 응력을 받는 문제에서 Gross 등은 응력확대계수의 기하형상 함수 Y_g 를 다음과 같이 제안하였다 [Hellan 1984].

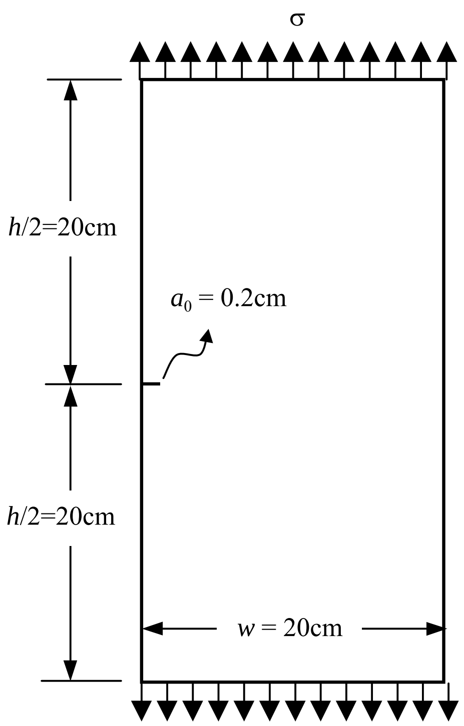


그림 2.25 인장 피로 응력을 받는 균열 성장 문제

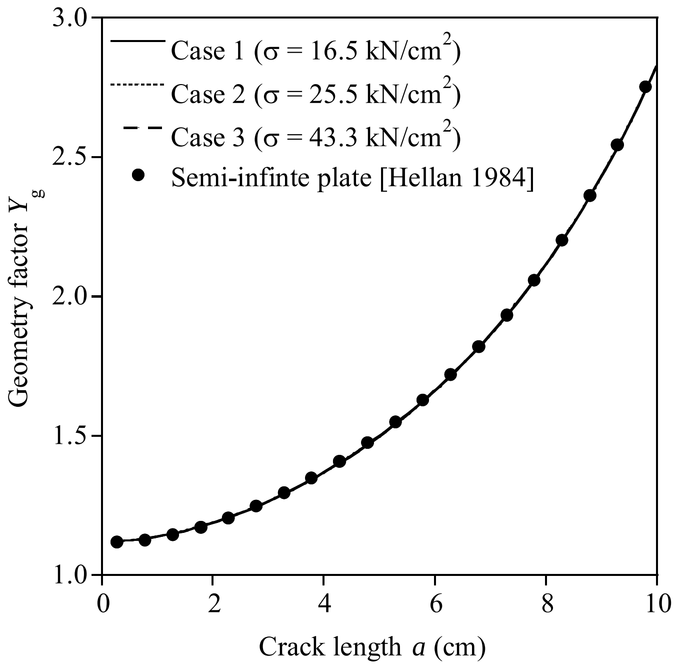


그림 2.26 균열 성장에 따른 기하형상 함수의 변화

$$Y_g = 1.12 - 0.23\frac{a}{w} + 10.6(\frac{a}{w})^2 - 2.17(\frac{a}{w})^3 + 30.4(\frac{a}{w})^4 \tag{2.80}$$

세 가지 피로하중(σ_{max} = 16.5, 25.5, 43.3 kN/cm^2) 의 경우에 균열 선단에서 산정한 응력확대 계수 K_{calc} 로부터 다음과 같이 Y_g 를 산정하였다.

$$Y_g = \frac{K_{calc}}{\sigma_{max}\sqrt{\pi a}} \tag{2.81}$$

그림 2.26 는 식 (2.80)과 (2.81)로부터 산정한 기하형상 함수인 Y_g 의 변화를 도시한 것이다. 세가지 피로하중의 경우에 대한 수치해석 결과와 식 (2.80)의 결과가 매우 잘 일치하고 있다.

식 (2.80)에서 $w >> a$ 인 반무한 균열에서는 Y_g = 1.12 이다. 0.2cm 의 초기 균열에 대

하여 1.123 의 수치해석 결과를 얻었고 오차는 약 0.3%이다. 유한한 균열 판에서 균열의 크기가 매우 작은 경우에는 균열판을 모델링하여 수치 해석법을 적용하기보다는 반무한 판을 가정하여 피로 수명을 산정 할 수 있다.

세가지 하중 경우에 대하여 전체 피로수명을 산정하였다. 전체 피로수명은 균열 크기에 따라 세가지로 구분하여 산정한다. 첫번째는 균열의 크기가 선형탄성균열역학이 적용 가능한 하한계 균열 길이(l_0)까지의 미세균열의 피로수명이고, 두 번째는 하한계 균열길이에서 0.2 cm 의 초기 균열길이까지의 피로수명으로서 무한 균열판을 가정하여 산정한다. 마지막으로 세 번째는 0.2cm 의 초기균열에서 응력확대계수가 파괴인성 (100 kN/cm$^{1.5}$)에 이르는 파괴에 대한 임계 균열 길이(a_{cr})까지의 피로수명으로서 수치해석으로 산정한다.

임계 응력확대계수(threshold)가 K_{th} = 6 kN/cm$^{1.5}$ 이고, 피로 한계 응력이 σ_e = 16.5kN/cm^2 인 경우에 선형탄성균열역학으로 해석 가능한 균열의 최소 길이는 식 (2.54)로부터 다음과 같다.

$$l_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{6}{1.12 \times 16.5}\right)^2 \approx 0.0336\,\text{cm} \tag{2.82}$$

즉, 최소한 0.0336 cm 이상의 균열이어야 응력확대계수가 threshold (6 kN/cm$^{1.5}$)보다 커져서 균열이 성장할 수 있다. 미세균열에서 0.0336cm 까지 균열이 성장하는데 필요한 피로수명은 threshold 에서의 성장률인 근사식 (2.57)을 이용하여 산정하면 다음과 같다.

$$N_0 = \frac{l_0}{C(\Delta K_{th})^m} = \frac{0.0336}{1.886 \times 10^{-10} \times (6)^3} \approx 823{,}000 \tag{2.83}$$

피로 균열이 0.0336cm 에서 0.2cm 까지의 피로수명은 전체 구조물에 비하여 균열의 크

기가 작으므로 무한판을 가정하여 Y_g = 1.12 를 사용하면 식 (2.60)로부터 다음과 같이 산정한다.

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{(1-m/2)C(Y_g\sigma\sqrt{\pi})^m}(a_0^{\ 1-m/2} - l_0^{\ 1-m/2}) \\ &= \frac{1}{(1-3/2)\times 1.886\times 10^{-10}\times(1.12\times 16.5\sqrt{\pi})^3}(\frac{1}{\sqrt{0.2}} - \frac{1}{\sqrt{0.034}}) \\ &= 972{,}000 \end{aligned} \tag{2.84}$$

그림 2.27 과 그림 2.28 은 각각 균열 성장에 따른 응력확대계수의 변화와 피로하중 재하에 따른 균열 길이를 도시한 것이다. 0.2 cm 의 균열이 약 5.264 cm 까지 성장하여 응력확대계수가 파괴인성 (100 kN/cm$^{1.5}$)에 이르면 구조물이 파괴되었다고 판단 할 수 있다. 이때까지의 피로수명은 해석결과로부터 약 503,000 회 이다. 따라서 전체 피로수명은 대략 N = 2298,000 회이다. 우리나라 도로교 시방서에 따르면 다재하 상태의 매끈한 모재의 경우, 200 만회에 대한 허용응력은 16.5kN/cm^2 (= 1680 kgf/cm^2) 이므로 시방서 기준을 안전측으로 볼 때, 제안된 방법으로 해석한 결과와 대체로 일치하는 것을 확인 할 수 있다. 표 2.1 는 각각의 피로 하중 크기에 따라 피로 균열의 성장에 필요한 임계 응력확대계수와 파괴시의 임계균열길이를 보여준다. 표 2.2 에서는 각각의 피로 하중 크기에 따른 수치해석으로부터 얻어진 피로수명과 우리나라 시방서의 피로수명을 비교하였다. 그림 2.29 는 우리나라 시방서에 제시된 수치로부터 얻어진 피로강도 곡선과 계산된 피로강도 곡선을 도시한 것이다. 제안된 방법에서는 비록 미세균열의 성장률을 근사적으로 가정하였지만 피로 하중의 크기에 따라 산정한 전체 피로수명이 설계 피로-강도 곡선이 95% 신뢰 하한선의 위쪽에 위치함을 확인할 수 있다.

표 2.1 초기 응력확대계수와 파괴 균열 길이

	Case 1 (σ = 16.5 kN/cm^2)	Case 2 (σ = 25.5 kN/cm^2)	Case 3 (σ = 43.3 kN/cm^2)
$K(l_0)$ (kN/cm$^{1.5}$)	6.000	9.273	15.745
a_{cr} (cm)	5.264	3.131	1.445

표 2.2 추정된 피로수명과 설계 피로수명

	Case 1 (σ = 16.5 kN/cm^2)	Case 2 (σ = 25.5 kN/cm^2)	Case 3 (σ = 43.3 kN/cm^2)
미세균열 ($0 \sim l_0$)	823,000	223,000	45,000
무한판 가정 ($l_0 \sim 0.2$cm)	972,000	263,000	53,000
성장 해석 (0.2cm $\sim a_{cr}$)	503,000	130,000	23,000
계산된 전체 피로수명	2,298,000	616,000	121,000
설계 피로수명	2,000,000	500,000	100,000

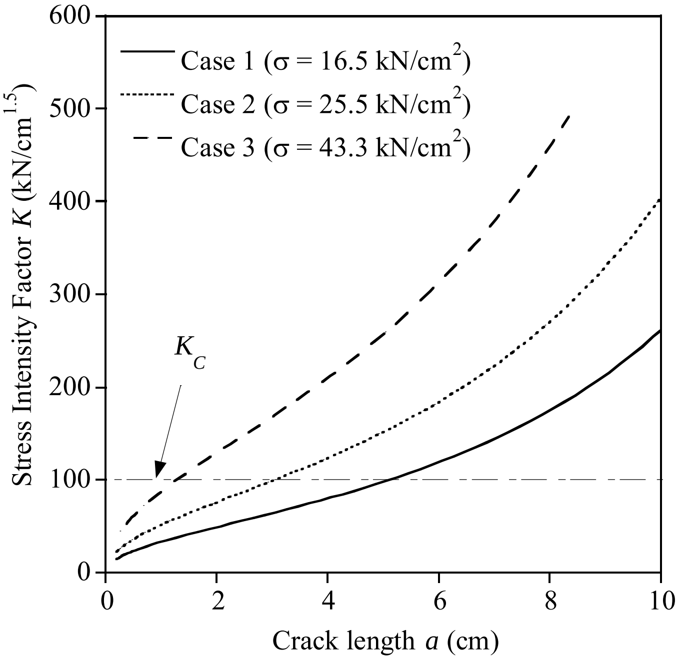


그림 2.27 균열 성장에 따른 응력확대계수의 변화

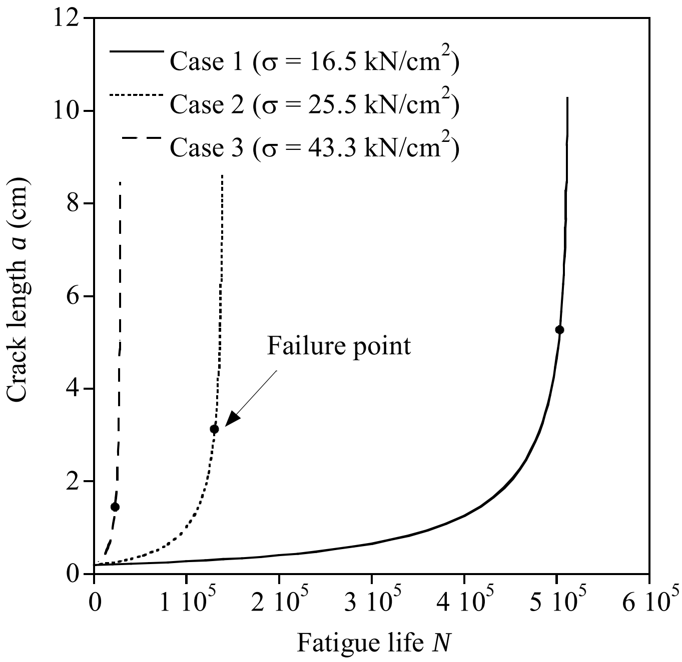


그림 2.28 $a-N$ 관계 그래프

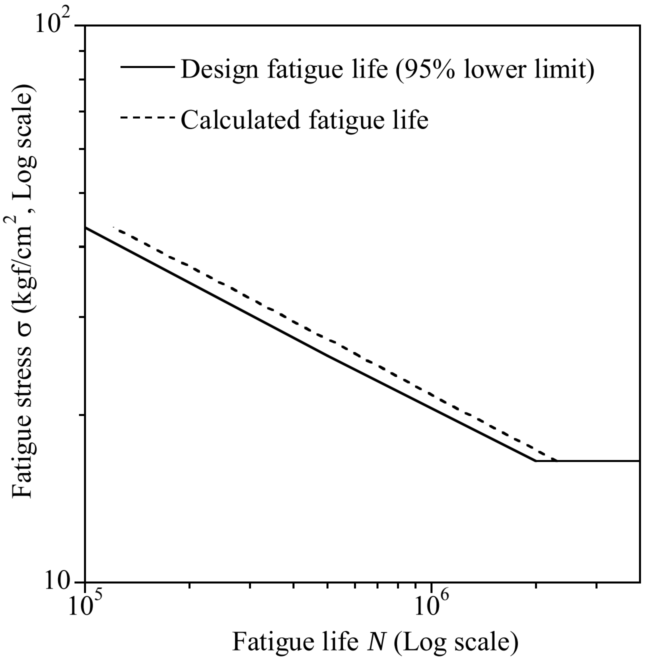


그림 2.29 피로-강도 곡선

2.4.3 전단 피로 응력을 받는 균열의 성장

예제 3 은 그림 2.30 와 같이 전단 응력을 받는 편측 피로 균열 성장 문제이다. 초기 균열 선단에서 방향각에 따라 $\theta_0 = 30°, 0°, -30°$ 의 세가지 경우에 대하여 피로 균열의 성장을 비교 하였다. 균열의 초기 길이는 $a_0 = 0.2$cm 로서 균열 선단으로 갈수록 작아지도록 6 등분(3 @ 0.05, 0.025, 0.0125, 0.0125 cm) 하여 모델링 하였다. 피로하중은 상부 경계면에 $\tau_{max} = 5.5$ kN/cm^2 , $\tau_{min} = 0$ kN/cm^2 의 반복적인 전단 응력을 작용시켰고, 하부 경계면의 변위는 고정시켰다.

그림 2.31 은 초기 균열의 방향각 변화에 따른 피로 균열의 성장 경로를 보여준다. 그림 2.31 의 오른쪽 그래프는 성장경로를 확대한 것으로서 세가지 성장 곡선이 초기 균열 선단의 위치가 다를 뿐 거의 평행하게 달리고 있다. 초기 균열의 길이가 작아질수

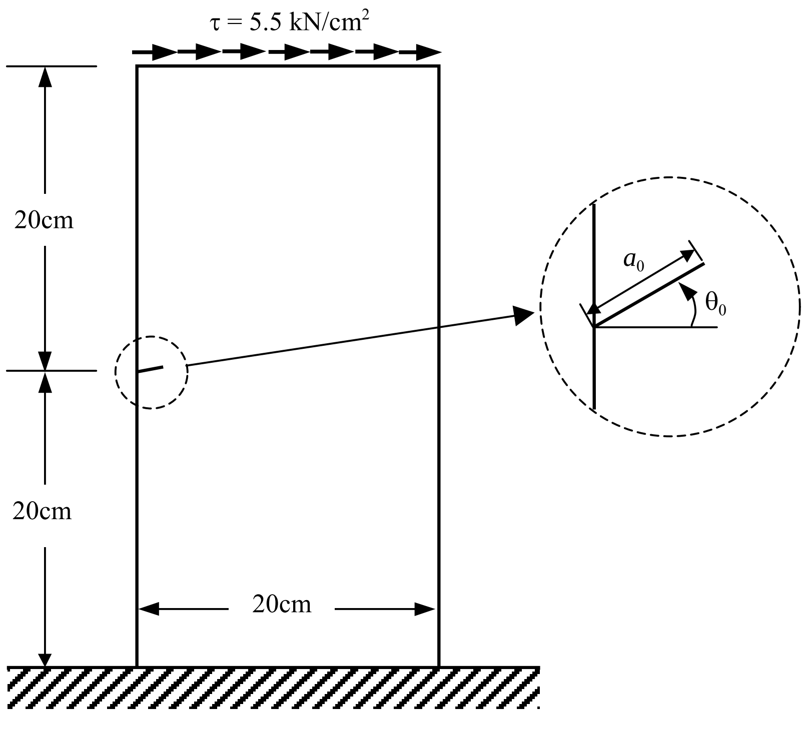


그림 2.30 전단 피로 응력을 받는 균열 성장 문제

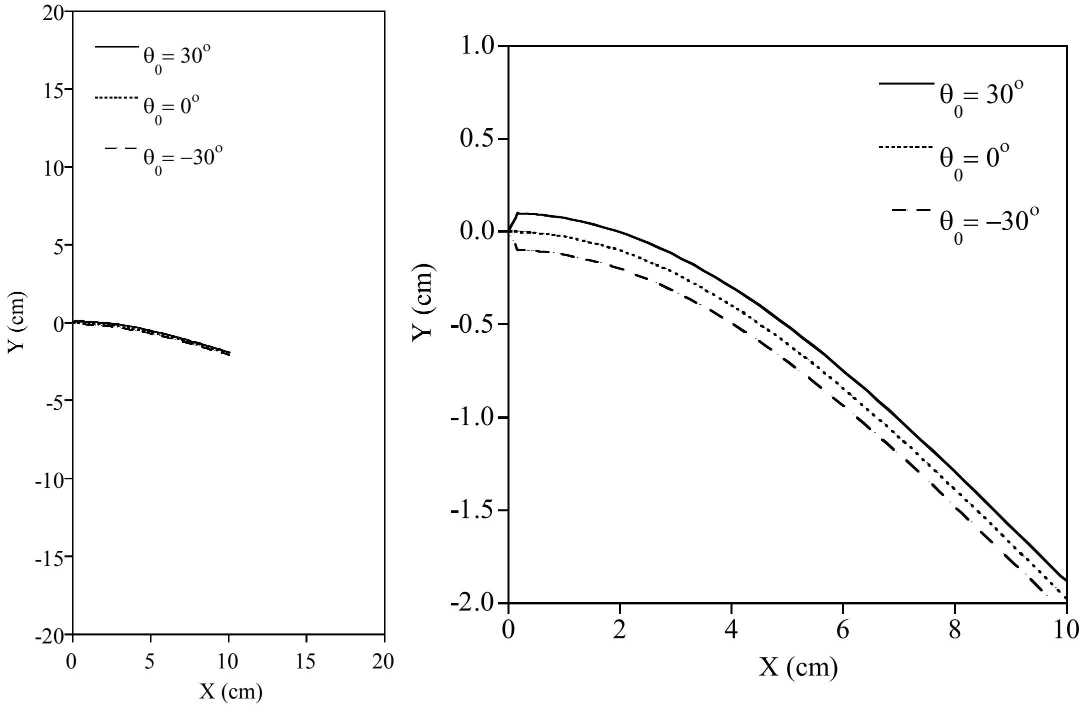


그림 2.31 초기 균열의 방향각 변화에 따른 피로 균열의 성장 경로

록 초기 방향각의 차이로 인한 성장 곡선의 변화는 더 작아 질 것이 분명하다. 즉 미세 균열에서는 초기 방향각의 변화가 전체 균열 성장 곡선에 미치는 영향이 매우 작을 것으로 판단된다.

그림 2.32 와 2.33 은 각각 균열 성장에 따른 일차 모드와 이차 모드의 응력확대계수이다. 응력확대계수는 균열 곡선을 따라 가면서 균열 선단에서 균열과 나란한 방향을 x 축으로 하여 지역 좌표계를 설정하여 산정한다. 표 2.3 는 초기 균열 상태와 1 회의 균열 증분 (ΔN = 3,000) 이후에 산정한 응력확대계수와 성장 접선 방향각이다. 이차 모드의 응력확대계수는 세가지 경우 모두 초기 상태에서는 어느 정도 큰 값을 갖지만, 한번의 균열 성장 이후에는 급격히 작아지고 균열이 성장하면서 0 에 가까워 진다. 이에 따라 균열 성장 접선 방향 φ 도 균열 성장에 따라 급격히 0 에 가까워 진다. 이것은 전단

응력을 받더라도 최대주응력 기준에 의하여 전단 응력이 최소가 되는 방향을 따라 일차 모드로 균열이 성장하기 때문이다.

그림 2.34 와 2.35 는 피로하중 재하 회수 N 에 따른 응력확대계수와 균열 길이의 변화를 보여주고 있다. 그림 2.31 에서 초기 균열 방향각의 변화에 따라 성장 곡선의 변화가 거의 없고, 그림 2.32 와 2.33 에서 주어진 균열 길이에 대하여 응력확대계수가 거의 비슷한 값을 보여준다. 그러나 초기 균열 방향 θ_0 에 따라 초기 성장단계에서 응력의 상태가 다르고 이로 인하여 성장률의 차이가 피로수명에 영향을 준 것으로 판단된다. 초기의 응력확대계수가 크면 피로 수명이 작을 것으로 기대할 수 있다.

표 2.3 초기 성장에서의 응력확대계수와 성장 접선각의 변화

	$\theta_0 = 30°$		$\theta_0 = 0°$		$\theta_0 = -30°$	
	$N = 0$	$N = 3{,}000$	$N = 0$	$N = 3{,}000$	$N = 0$	$N = 3{,}000$
K	27.130	27.895	29.078	30.490	27.426	28.199
K_{I}	23.685	27.895	29.076	30.471	24.126	28.199
K_{II}	7.973	0.011	0.177	0.612	−7.481	0.028
φ	−0.551	−0.001	-0.012	−0.040	0.538	−0.002

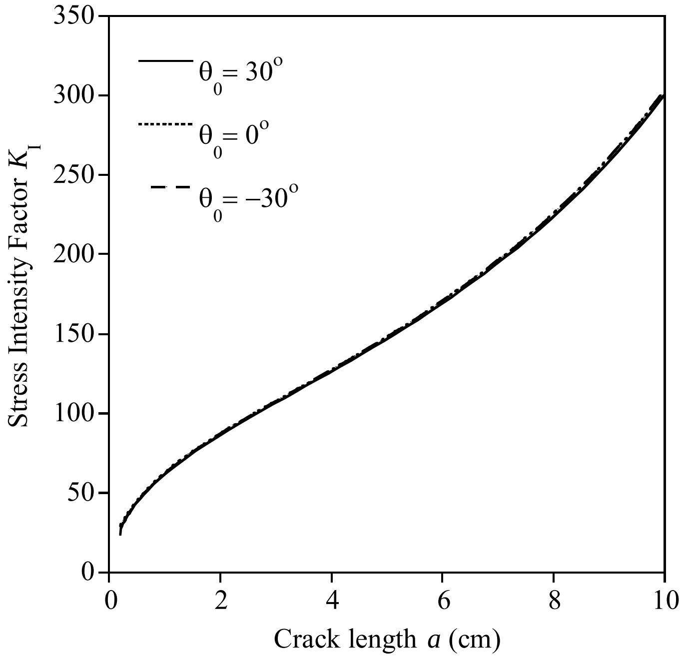


그림 2.32 균열 성장에 따른 일차 모드 응력확대계수의 변화

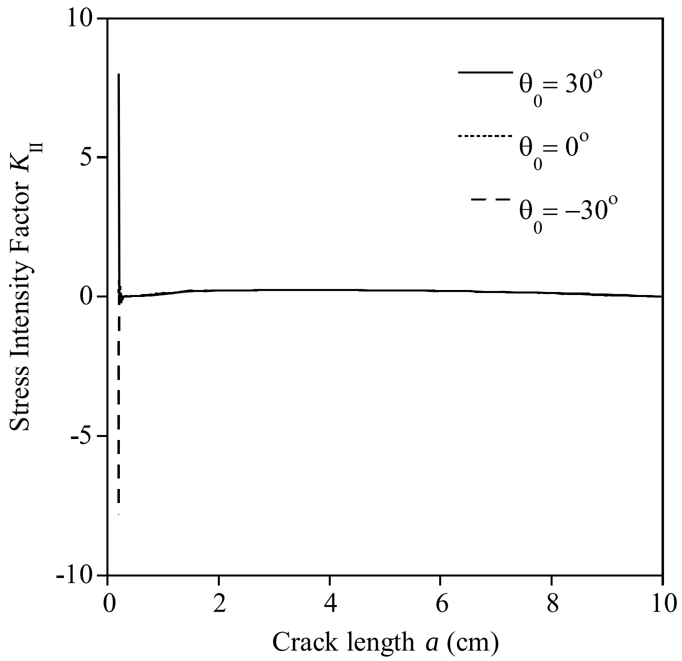


그림 2.33 균열 성장에 따른 이차 모드 응력확대계수의 변화

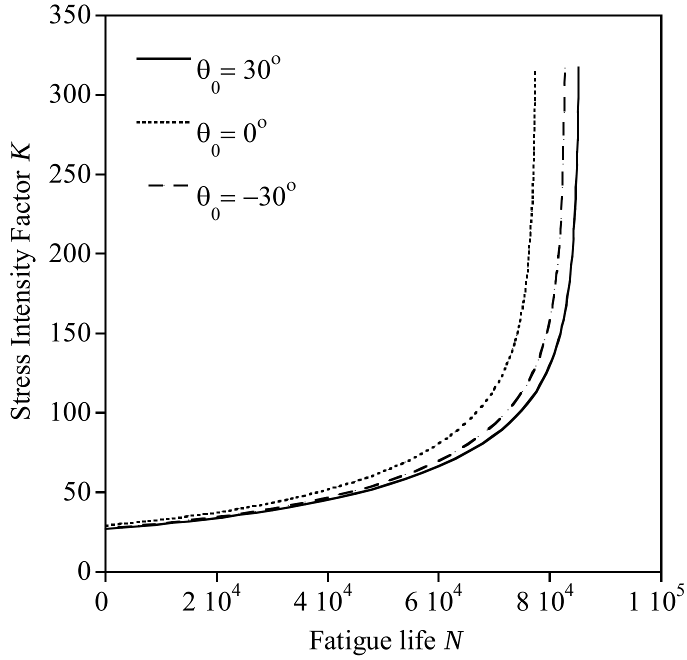


그림 2.34 피로하중 재하에 따른 응력확대계수의 증가

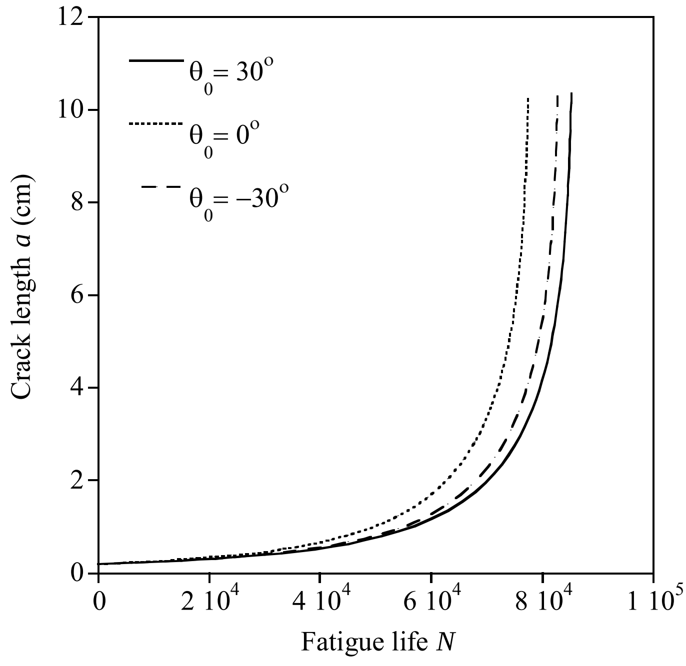


그림 2.35 피로하중 재하에 따른 균열 성장

2.4.4 접선법과 할선법의 균열 성장 기법 비교

앞 절의 예제 3 에서 $\theta_0 = 0°$ 인 경우에 대하여, 두 가지 균열 성장 기법에 따른 결과를 비교하였다. 첫번째는 주어진 피로하중에 대하여 접선법에 기초하여 반복적인 보정 없이 균열 선단에서의 초기 성장률과 성장 접선 방향으로 균열 성장을 모델링하는 기법이고, 다른 하나는 이 논문에서 제안하는 할선법에 기초한 반복적으로 균열 성장 모델링 기법이다.

피로하중의 증분이 ΔN =3,000 와 ΔN =6,000 의 두 가지 경우에 대하여 균열 성장해석을 수행하였다. 그림 2.36 은 균열 성장 곡선을 비교한 그래프이고, 그림 2.37 은 피로하중 재하에 따른 균열 성장량을 비교한 것이다. 그림 2.36 의 균열 성장 곡선에서 접선법에 기초한 균열 성장 기법과 제안된 할선법을 이용한 반복적인 균열 성장 기법의 차이가 균열 성장에 따라 점점 커진다. 접선법의 경우에는 초기 성장 방향으로 균열을 성장 시키기 때문에 성장 곡선의 곡률이 클수록 그리고 균열 증분이 클수록 실제 곡선에서 더 많이 벗어나게 된다. 그림 2.37 의 균열 길이와 피로수명과의 관계에서는 제안된 할선법의 경우 피로수명이 ΔN 의 크기에 영향을 거의 받지 않고 있음을 확인할 수 있다. $N = 60{,}000$ 에서 접선법의 경우 ΔN =3,000 와 ΔN =6,000 에 대한 균열 길이의 차이는 5.4% 인 반면에, 접선법의 경우에는 15.7%의 차이가 발생한다. 즉 반복계산을 수반하지 않은 할선법의 경우, ΔN 의 크기에 따라 피로 수명에 차이가 상당히 커질 수 있지만, 제안된 할선법을 이용한 반복적인 균열 성장 기법을 이용하면 ΔN 의 변화에 덜 민감한 해석 결과를 얻을 수 있다.

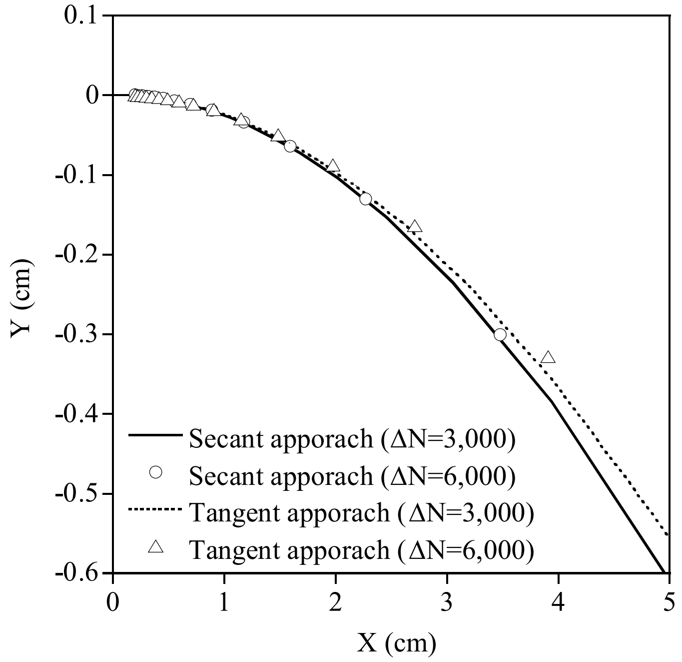


그림 2.36 균열 성장 곡선 비교

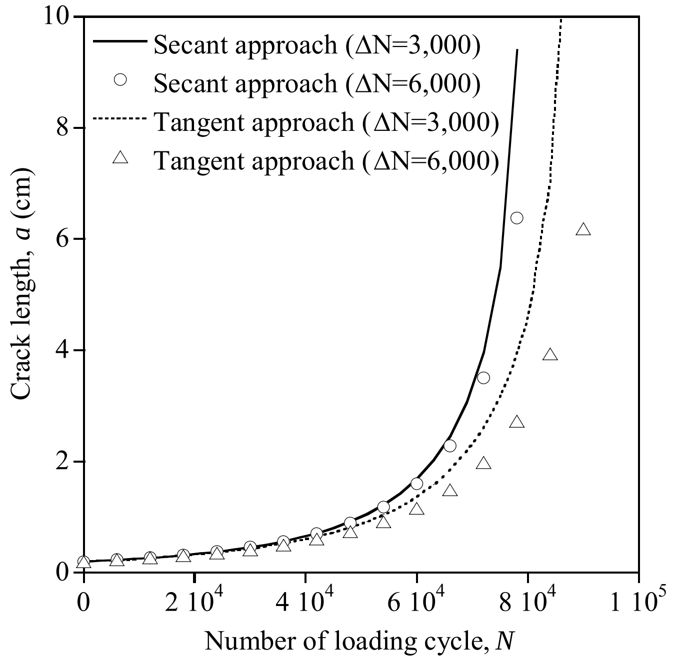


그림 2.37 균열 성장량 비교

3. 피로 균열의 확률 해석

구조해석에서 확정론적 접근법(deterministic approach)은 해석에서 고려되는 변수들이 불변의 일정한 값을 갖는다고 가정하고 평균적인 의미에서 구조물의 거동을 분석하기 위해 각각의 물성치들의 대표값을 이용한다. 물성치들이 갖는 임의성(randomness)을 보완해 주기 위한 하나의 방편으로서 확정론적 접근법에서는 안전계수 개념을 도입한다. 이에 비하여 확률론적 접근법(probabilistic approach)에서는 확률변수에 대한 확률분포로부터 응답의 확률분포를 얻고 이로부터 보다 합리적인 판단을 내릴 수 있는 지표를 얻고자 한다. 확률 해석은 확정론적 해석과 다른 별개의 것이 아니라 확정론적 해석의 보완으로서 한 번 또는 여러 번의 구조해석에 의하여 평균, 표준편차, 왜도 등의 다른 통계적인 특성치를 산정하는 것이다.

확률론적 접근법은 목적에 따라 확률분포를 추정하기 위한 모멘트법과 신뢰도 또는 파괴확률을 산정하기 위한 신뢰도법으로 구분할 수 있다. 모멘트법은 구조물 응답의 평균과 분산 등의 통계적인 특성을 얻고자 하는 것이고, 신뢰도법은 파괴확률 혹은 시스템이 얼마나 안전한지를 수치적으로 평가하는 것이다. 신뢰도법은 응답과 확률변수의 함수 관계에서 확률변수의 분포 특성을 이용하여 파괴 확률을 산정하고, 모멘트법은 응답과 확률변수의 함수관계를 이용하여 응답의 확률분포를 직접적으로 추정하고자 한다. 두 가지 접근법은 서로 다른 정보를 얻을 수 있기 때문에, 두 가지 접근법을 상호 보완적으로 적용하면 확률변수와 응답의 전체 확률분포를 유기적으로 구성할 수 있다.

이 장에서는 이계삼차모멘트법(second-order third-moment method)에 기초하여 성장 후 균열 길이의 평균, 표준편차, 왜도 등의 통계적인 특성치를 근사하고, 확률분포를 대수정규분포로 가정하여 직접적으로 파괴확률 또는 신뢰도를 산정한다. 또한 미세균열

과 거시균열의 전체 피로수명의 확률분포를 추정하여 피로-강도 곡선을 수치적으로 도출한다.

3.1 응답의 확률분포 추정

이 절에서는 Monte-Carlo simulation 과 이계삼차모멘트법을 이용한 확률분포 추정 방법에 대하여 기술한다. 확률변수와 응답이 선형의 관계라면 확률변수의 확률분포로부터 직접적으로 응답의 확률분포를 정확하게 산정할 수 있다. 비선형 응답함수에 대해서는 근사적인 접근법을 사용하여 확률분포를 추정한다. 비선형 응답함수의 확률분포 추정법에는 Monte-Carlo simulation 을 이용하는 방법과 테일러 급수를 이용한 모멘트법이 있다. Monte-Carlo simulation 을 이용하는 방법에서는 주어진 확률변수의 확률분포로부터 많은 수의 임의 자료를 추출하여 각각에 대한 응답으로부터 평균, 분산 등의 확률 모멘트를 추정한다. 모의 실험을 이용한 확률분포 추정의 경우, 추출자료가 많을수록 응답의 확률분포를 더 정확하게 추정할 수 있지만, 이에 비례하여 해석에 많은 계산이 필요해 진다. 테일러 급수를 이용하는 이계삼차모멘트법을 이용하면 한번의 구조해석으로부터 응답의 평균, 표준편차, 왜도를 추정할 수 있기 때문에 수치계산에 소요되는 비용과 시간을 줄일 수 있다.

응답의 분포함수를 추정하기 위해서는 응답의 확률분포를 대수정규분포나 Weibull 분포 등의 특정한 확률분포로 가정하고 모멘트법(method of moments 또는 method of moment estimation)을 이용하여 확률분포의 모수를 추정한다.

3.1.1 Monte-Carlo simulation 에 의한 확률분포 추정

이 절에서는 Monte-Carlo simulation 을 이용하여 성장 후의 균열 길이의 확률분포를 추

정한다. Latin Hypercube Sampling (LHS) 기법을 도입하여 임의 자료를 추출하여 피로 균열 성장을 수치 모사한다. 성장 후의 균열 길이의 확률분포를 정규분포, 대수정규분포, Weibull 분포 등으로 가정하고 Kolmogorov-Smirnov test (K-S test) [Benjamin 1970]를 이용하여 가정한 확률분포를 검정한다.

확률분포를 추정하기 위한 임의 자료 추출법으로는 Direct Random Sampling (DRS), LHS 등이 있다. DRS 은 0 과 1 사이에서 직접적으로 무작위 자료를 추출하지만, LHS 은 0 과 1 사이의 구간을 추출하고자 하는 자료의 개수 M 으로 균등하게 분할하여 각각의 구간 내에서 무작위 자료를 추출한다. 추출된 0 과 1 사이의 무작위 자료로부터 역변환법(inverse transformation method)을 이용하여 주어진 확률분포를 따르는 무작위 자료를 추출한다. k 번째 구간에서 추출된 무작위 자료는 다음과 같다.

$$z_s = \frac{\hat{z}_s}{M} + \frac{k-1}{M} \tag{3.1}$$

여기서, $\hat{z}_s \in [0,1]$ 이다. LHS 의 경우 DRS 에 비하여 비교적 적은 수의 추출로도 가정한 확률분포를 더 정확히 모사할 수 있다.

Monte-Carlo simulation 으로부터 성장 후의 균열의 평균, 표준편차 등의 확률모멘트와 돗수분포를 얻을 수 있다. 이로부터 성장 후의 균열의 확률분포를 정규분포, 대수정규분포 또는 Weibull 분포 등의 특정한 확률분포로 가정할 수 있다. 이러한 확률분포에 대한 가정에 대한 검정법으로서 K-S test 를 도입한다. K-S test 는 다음과 같이 귀무가설을 설정하고 누적확률밀도함수(Cumulative Distribution Function)로부터 가설의 채택과 기각을 결정한다. 귀무 가설은 확률변수가 특정한 확률분포를 갖는다고 가정한다. 가정한 누적 확률분포와 관측된 누적 돗수로의 차이 $D_{\max}$ 와 유의수준 α에 대한 기준치

D_α 를 비교하여 $D_{\max} \le D_\alpha$ 인 경우에 귀무 가설을 채택하고 $D_{\max} > D_\alpha$ 인 경우에는 기각하게 된다. $D_{\max}$ 는 다음과 같이 산정한다.

$$D_{\max} = \max_{i=1}^{M} \left| \tilde{\Phi}_Z(z_i) - \Phi_Z(z) \right| \tag{3.2}$$

여기서, $\Phi_Z(z)$ 는 가정한 누적 확률분포 이고, $\tilde{\Phi}_Z(z_i)$ 는 관측된 누적 돗수이다.

$$\tilde{\Phi}_Z(z_i) = \frac{i}{N}, \quad z_{i-1} < z_i < z_{i+1} \tag{3.3}$$

유의수준 α에 대한 기준치 D_α 는 다음 관계식을 만족한다.

$$P[D_{\max} \le D_\alpha] = 1 - \alpha \tag{3.4}$$

귀무가설을 채택할 경우, 가정한 확률분포는 유의수준 α 에서 유효한 확률분포라고 할 수 있다.

3.1.2 이계삼차모멘트법

모멘트법에서는 응답 ψ 를 확률변수 z 에 대한 테일러 급수를 이용하여 z 의 확률분포로부터 ψ 의 확률분포를 추정한다. 그림 3.1 에서는 응답 ψ 가 일대일 함수 $\psi = \psi(z)$ 일 때, z 의 확률 밀도함수와 ψ 의 확률 밀도함수의 관계를 보여주고 있다. 확률변수의 증분 dz 에 대한 확률은 응답의 증분 $d\psi$ 에 대한 확률과 같다. 이러한 관계로부터 응답의 k 차 모멘트는 다음과 같이 z 의 확률분포부터 유도할 수 있다.

$$E[\psi^k] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^k \phi_\Psi(\psi) d\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \{\psi(z)\}^k \phi_Z(z) dz \tag{3.5}$$

여기서, $\phi_Z(z)$와 $\phi_\Psi(\psi)$는 각각 확률변수 z와 응답 z의 확률밀도함수로서 다음 관계식을 만족한다.

$$\phi_\Psi(\psi) = \left|\frac{dz}{d\psi}\right| \phi_Z(z) \tag{3.6}$$

식 (3.5)과 응답의 테일러 급수를 이용하면 z의 확률 모멘트로부터 ψ의 확률 모멘트를 근사적으로 추정할 수 있다 [Benjamin 1970]. 비선형성이 크지 않은 경우, 응답 ψ를 확률변수 z의 일차식으로 근사하면 다음과 같다.

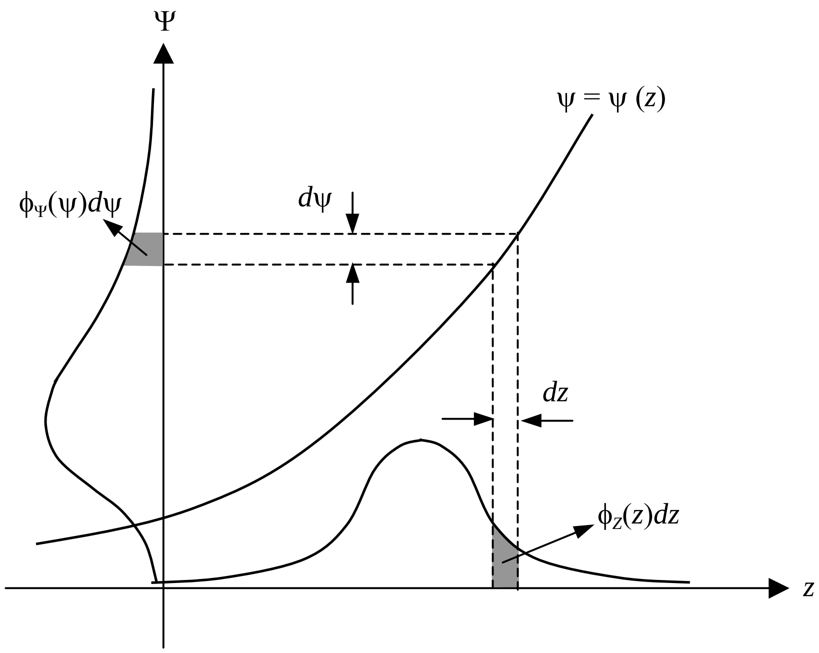


그림 3.1 일대일 함수의 확률밀도함수

$$\psi(z) \cong \psi(\bar{z}) + (\frac{\partial \psi}{\partial z})\bigg|_{\bar{z}} (z - \bar{z}) \tag{3.7}$$

여기서, $\bar{z}$ 는 확률변수 z 의 평균이다. 식 (3.7)을 식 (3.5)에 대입하면 응답의 평균과 분산은 각각 다음과 같다.

$$E[\psi] = \overline{\psi} = \psi(\bar{z}) \tag{3.8}$$

$$\sigma_{\psi}^2 = (\frac{\partial \psi}{\partial z}\bigg|_{\bar{z}})^2 \sigma_Z^2 \tag{3.9}$$

확률변수 z 의 확률분포가 정규분포와 같이 2 변수 확률분포로 주어진다면, 확률변수 z 의 평균과 분산으로부터 응답의 확률분포를 추정할 수 있다. 응답 ψ 가 확률변수 z 와 선형의 관계가 아닐지라도 비선형성이 크지 않고, z 의 변동계수 (Coefficient of Variance)가 작을 경우에는 식 (3.8)과 (3.9)를 이용하여 평균과 분산을 근사할 수 있다 [Benjamin 1970]. 변동계수가 10% 보다 작으면 근사로 인해 발생하는 오차는 1% 정도 이다. 응답의 비선형성이 큰 경우에는 2 차 이상의 테일러 급수로부터 고차의 확률 모멘트를 추정한다.

모멘트법을 다변수 확률변수를 갖는 비선형 응답 함수에 적용하여 확률분포를 추정한다. 다변수 확률변수 $\mathbf{z}$ 의 응답 ψ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\psi = \psi(\mathbf{z}) \tag{3.10}$$

여기서, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 이다. $\mathbf{z}$ 의 확률분포가 주어져 있을 때, 응답의 확률분포를 추정하기 위해 다음과 같이 확률변수의 평균 $\bar{\mathbf{z}}$ 에서 2 차 테일러 급수로 응답을 근사한다.

$$\psi(\mathbf{z}) \approx \psi(\bar{\mathbf{z}}) + \sum_i \left(\frac{\partial\psi}{\partial z_i}\right)\Bigg|_{\bar{\mathbf{z}}} (z_i - \bar{z}_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z_i \partial z_j}\right)\Bigg|_{\bar{\mathbf{z}}} (z_i - \bar{z}_i)(z_j - \bar{z}_j) \tag{3.11a}$$

Indicial notation 을 이용하여 식 (3.11a)을 다음과 같이 단순화 시킨다.

$$\psi = \psi_0 + \psi_{,i}(z_i - \bar{z}_i) + \psi_{,ij}(z_i - \bar{z}_i)(z_j - \bar{z}_j) \tag{3.11b}$$

여기서, $\psi_0 = \psi(\bar{\mathbf{z}})$ 이고, 평균에서의 1 차와 2 차 편미분 항인 $\psi_{,i}$ 와 $\psi_{,ij}$ 는 각각 다음과 같다.

$$\psi_{,i} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial z_i}\right)\Bigg|_{\bar{\mathbf{z}}} \tag{3.12a}$$

$$\psi_{,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z_i \partial z_j}\right)\Bigg|_{\bar{\mathbf{z}}} \tag{3.12b}$$

식 (3.11)에서 응답 ψ 의 평균은 다음과 같다.

$$E[\psi] = \bar{\psi} = \psi_0 + \psi_{,ij}C_{ij} \tag{3.13}$$

여기서, C_{ij} 는 확률변수 z 의 2 차 공분산 행렬이다.

$$C_{ij} = E[(z_i - \bar{z}_i)(z_j - \bar{z}_j)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(z_i - \bar{z}_i)(z_j - \bar{z}_j)\phi_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})dz_i dz_j \tag{3.14}$$

여기서, $\phi_{\mathbf{Z}}$ 는 $\mathbf{z}$ 의 결합확률밀도 함수로서 $\mathbf{z}$ 의 확률 변수들이 서로 독립인 경우에는 각각의 확률밀도 함수의 곱이 된다. 응답 ψ 의 k 차 중심 모멘트는 다음과 같이 확률 변수 $\mathbf{z}$ 의 확률밀도 함수로부터 산정할 수 있다.

$$\begin{aligned}\mu_\Psi^{(k)} &= E[(\psi-\overline{\psi})^k] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(\psi-\overline{\psi})^k \phi_\Psi(\psi)d\psi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(\psi_{,i}(z_i-\overline{z}_i)+\psi_{,ij}(z_i-\overline{z}_i)(z_j-\overline{z}_j)-\psi_{,ij}C_{ij})^k \phi_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})d\mathbf{z}\end{aligned} \tag{3.15}$$

식 (3.15)를 이용하여 응답에 대한 2 차와 3 차 중심모멘트는 각각 다음과 같다.

$$\sigma_\Psi^2 = \psi_{,i}\psi_{,j}C_{ij} + 2\psi_{,ij}\psi_{,k}C_{ijk} + \psi_{,ij}\psi_{,kl}(C_{ijkl} - C_{kl}C_{ij}) \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}\mu_\Psi^{(3)} &= \psi_{,i}\psi_{,j}\psi_{,k}C_{ijk} + 3\psi_{,ij}\psi_{,k}\psi_{,l}(C_{ijkl} - C_{ij}C_{kl}) + 3\psi_{,ij}\psi_{,kl}\psi_{,m}(C_{ijklm} - 2C_{ij}C_{klm}) \\ &\quad + \psi_{,ij}\psi_{,kl}\psi_{,mn}(C_{ijklmn} - 3C_{ij}C_{klmn} + 2C_{ij}C_{kl}C_{mn})\end{aligned} \tag{3.17}$$

여기서, C_{ijk}, C_{ijkl}, C_{ijklm}, C_{ijklmn} 는 각각 확률변수 $\mathbf{z}$ 의 3 차, 4 차, 5 차, 6 차 공분산 행렬이다. 확률분포가 좌우로 치우친 정도의 지표인 왜도(skewness)는 3 차 중심모멘트로부터 다음과 같이 정의된다.

$$\gamma_\Psi = \frac{\mu_\Psi^{(3)}}{\sigma_\Psi^3} \tag{3.18}$$

$\gamma_\Psi > 0$ 이면 확률분포가 왼쪽으로 치우쳐서 오른쪽에 긴 꼬리를 갖는다. 2 차의 테일러 급수를 이용하였기 때문에 식 (3.13), (3.16), (3.17)에서 사용된 확률변수의 모멘트 차수는 응답의 모멘트 차수의 두 배이다. 즉, 응답의 왜도를 추정하기 위해서는 확률변수의 6 차 모멘트까지 필요하다. 응답에 대한 4 차, 5 차, 6 차 중심 모멘트는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mu_\Psi^{(4)} &= \psi_{,i}\psi_{,j}\psi_{,k}\psi_{,l}C_{ijkl} + 4\psi_{,ij}\psi_{,k}\psi_{,l}\psi_{,m}(C_{ijklm} - C_{ij}C_{klm}) \\ &\quad + 6\psi_{,ij}\psi_{,kl}\psi_{,m}\psi_{,n}(C_{ijklmn} - 2C_{ij}C_{klmn} + C_{ij}C_{kl}C_{mn})\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\mu_{\Psi}^{(5)} = \psi_{,i}\psi_{,j}\psi_{,k}\psi_{,l}\psi_{,m}C_{ijklm} + 5\psi_{,ij}\psi_{,k}\psi_{,l}\psi_{,m}\psi_{,n}(C_{ijklmn} - C_{ij}C_{klmn}) \tag{3.20}$$

$$\mu_{\Psi}^{(6)} = \psi_{,i}\psi_{,j}\psi_{,k}\psi_{,l}\psi_{,m}\psi_{,n}C_{ijklmn} \tag{3.21}$$

응답 ψ 와 확률변수 z_c 의 6 차까지의 공분산은 다음과 같이 근사된다.

$$\begin{aligned}
&E[(\psi-\overline{\psi})(z_c-\overline{z}_c)] = \psi_{,i}C_{ic} + \psi_{,ij}C_{ijc} \\
&E[(\psi-\overline{\psi})(z_c-\overline{z}_c)^2] = \psi_{,i}C_{icc} + \psi_{,ij}(C_{ijcc} - C_{ij}C_{cc}) \\
&E[(\psi-\overline{\psi})^2(z_c-\overline{z}_c)] = \psi_{,i}\psi_{,j}C_{ijc} + 2\psi_{,ij}\psi_{,k}(C_{ijkc} - C_{ij}C_{kc}) \\
&\qquad + \psi_{,ij}\psi_{,kl}(C_{ijklc} - C_{kl}C_{ijc} - C_{ij}C_{klc}) \\
&E[(\psi-\overline{\psi})(z_c-\overline{z}_c)^3] = \psi_{,i}C_{iccc} + \psi_{,ij}(C_{ijccc} - C_{ij}C_{ccc}) \\
&E[(\psi-\overline{\psi})^2(z_c-\overline{z}_c)^2] = \psi_{,i}\psi_{,j}C_{ijcc} + 2\psi_{,ij}\psi_{,k}(C_{ijkcc} - C_{ij}C_{kcc}) \\
&\qquad + \psi_{,ij}\psi_{,kl}(C_{ijklcc} - C_{kl}C_{ijcc} - C_{ij}C_{klcc} + C_{ij}C_{kl}C_{cc}) \\
&E[(\psi-\overline{\psi})^3(z_c-\overline{z}_c)] = \psi_{,i}\psi_{,j}\psi_{,k}C_{ijkc} + 3\psi_{,ij}\psi_{,k}\psi_{,l}(C_{ijklc} - C_{ij}C_{klc}) \\
&\qquad + 3\psi_{,ij}\psi_{,kl}\psi_{,m}(C_{ijklmc} - 2C_{ij}C_{klmc} + C_{ij}C_{kl}C_{mc}) \\
&E[(\psi-\overline{\psi})(z_c-\overline{z}_c)^4] = \psi_{,i}C_{icccc} + \psi_{,ij}(C_{ijcccc} - C_{ij}C_{cccc}) \\
&E[(\psi-\overline{\psi})^2(z_c-\overline{z}_c)^3] = \psi_{,i}\psi_{,j}C_{ijccc} + 2\psi_{,ij}\psi_{,k}(C_{ijkccc} - C_{ij}C_{kccc}) \\
&E[(\psi-\overline{\psi})^3(z_c-\overline{z}_c)^2] = \psi_{,i}\psi_{,j}\psi_{,k}C_{ijkcc} + 3\psi_{,ij}\psi_{,k}\psi_{,l}(C_{ijklcc} - C_{ij}C_{klcc}) \\
&E[(\psi-\overline{\psi})^4(z_c-\overline{z}_c)] = \psi_{,i}\psi_{,j}\psi_{,k}\psi_{,l}C_{ijklc} + 4\psi_{,ij}\psi_{,k}\psi_{,l}\psi_{,m}(C_{ijklmc} - C_{ij}C_{klmc}) \\
&E[(\psi-\overline{\psi})(z_c-\overline{z}_c)^5] = \psi_{,i}C_{iccccc} \\
&E[(\psi-\overline{\psi})^2(z_c-\overline{z}_c)^4] = \psi_{,i}\psi_{,j}C_{ijcccc} \\
&E[(\psi-\overline{\psi})^3(z_c-\overline{z}_c)^3] = \psi_{,i}\psi_{,j}\psi_{,k}C_{ijkccc}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$E[(\psi-\overline{\psi})^4(z_c-\bar{z}_c)^2]=\psi_{,i}\psi_{,j}\psi_{,k}\psi_{,l}C_{ijklcc}$$

$$E[(\psi-\overline{\psi})^5(z_c-\bar{z}_c)]=\psi_{,i}\psi_{,j}\psi_{,k}\psi_{,l}\psi_{,m}C_{ijklmc}$$

3.1.3 확률분포의 모수 추정

앞 절에서는 테일러 급수를 이용하여 확률변수의 확률 모멘트로부터 응답의 평균과 표준편차, 왜도 등을 근사적으로 추정하였다. 평균과 표준편차 등의 통계치를 이용하여 응답의 확률을 계산하기 위해서는 응답의 분포를 적절한 확률분포로 가정하여야 한다. 이 절에서는 평균, 표준편차, 왜도의 3 가지 통계치가 주어진 경우, 모멘트 추정법 (Method of Moment Estimation)에 의하여 공학문제 전반에 많이 사용되고 있는 삼변수 대수정규분포와 Weibull 분포의 모수를 결정하는 방법에 대하여 기술한다.

(a) 삼변수 대수정규분포

삼변수 대수정규분포의 확률변수 y는 $\ln(z-z_0)$가 정규분포를 이룬다. 여기서, z_0는 z의 하한치로서 $z_0=0$인 경우에 z는 이변수 대수정규분포를 따른다. z의 확률밀도함수는 다음과 같이 표준정규분포의 확률밀도함수로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}\phi_Z(z)&=\frac{1}{(z-z_0)\sigma_{\text{norm}}\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(z-z_0)-\mu_{\text{norm}}}{\sigma_{\text{norm}}}\right)^2\right\}\\&=\frac{1}{(z-z_0)\sigma_{\text{norm}}}\phi(s)\end{aligned} \tag{3.23}$$

여기서, μ_{norm}와 σ_{norm}는 각각 정규분포인 $\ln(z-z_0)$의 평균과 표준편차이다. ϕ는 표준정규분포의 확률밀도함수이고, 표준정규분포의 확률변수 s는 다음 관계식을 만족한다.

$$s = \frac{\ln(z - z_0) - \mu_{norm}}{\sigma_{norm}} \tag{3.24}$$

삼변수 대수정규분포를 정의하는 3 개의 모수는 $z_0, \mu_{norm}, \sigma_{norm}$ 이다. 식 (3.24)의 관계를 이용하면 대수정규분포의 누적확률을 다음과 같이 표준정규분포의 확률분포함수 $\Phi(s)$ 로부터 산정할 수 있다.

$$\Phi_Z(z) = \Phi(s) \tag{3.25}$$

삼변수 대수정규분포의 평균, 표준편차, 왜도는 각각 다음과 같다.

$$\mu_Z = z_0 + \exp(\mu_{norm} + \frac{\sigma^2_{norm}}{2}) \tag{3.26a}$$

$$\sigma_Z = (\mu_Z - z_0)\sqrt{\exp(\sigma^2_{norm}) - 1} \tag{3.26b}$$

$$\gamma_Z = 3V_Z + V_Z^3 \tag{3.26c}$$

여기서, V_Z 는 이변수 대수정규분포의 변동계수로서 다음과 같이 정의된다.

$$V_Z = \frac{\sigma_Z}{\mu_Z - z_0} = \sqrt{\exp(\sigma^2_{norm}) - 1} \tag{3.27}$$

삼변수 대수정규분포의 평균 $\hat{\mu}_Z$, 표준편차 $\hat{\sigma}_Z$, 왜도 $\hat{\gamma}_Z$ 가 주어진 경우에 분포에 대한 모수인 $z_0, \mu_{norm}, \sigma_{norm}$ 는 다음 방법으로 산정한다. 우선 식 (3.26c)의 왜도로부터 V_Z 에 대한 다음의 3 차 방정식을 얻는다.

$$V_Z^3 + 3V_Z - \hat{\gamma}_Z = 0 \tag{3.28}$$

식 (3.28)의 3 차 방정식의 해는 다음과 같다 [Tichý 1994].

$$V_Z = \left\{ \sqrt[3]{v+w} + \sqrt[3]{v-w} + \frac{1}{\hat{\gamma}_Z} \right\}^{-1} \tag{3.29}$$

여기서,

$$v = \frac{1}{\hat{\gamma}_Z}\left(\frac{1}{\hat{\gamma}_Z^2} + \frac{1}{2}\right), \quad w = \frac{1}{2\hat{\gamma}_Z^2}\sqrt{\hat{\gamma}_Z^2 + 4} \tag{3.30}$$

이다. 식 (3.29)를 이용하여 왜도 $\hat{\gamma}_Z$ 로부터 V_Z 를 산정하고, 식 (3.27)의 관계로부터 y_0 는 다음과 같다.

$$z_0 = \hat{\mu}_Z - \frac{\hat{\sigma}_Z}{V_Z} \tag{3.31a}$$

정규분포의 표준편차 σ_{norm} 와 평균 μ_{norm} 을 순차적으로 다음과 같이 산정할 수 있다.

$$\sigma_{\text{norm}} = \sqrt{\ln\left[\left(\frac{\hat{\sigma}_Z}{\hat{\mu}_Z - z_0}\right)^2 + 1\right]} \tag{3.31b}$$

$$\mu_{\text{norm}} = \ln(\hat{\mu}_Z - z_0) - \frac{\sigma_{\text{norm}}^2}{2} \tag{3.31c}$$

(b) Weibull 분포

Weibull 분포는 제 3 종 극한분포의 일종으로서, 확률밀도함수는 다음과 같이 정의 된다 [Lindsay 1996].

$$\phi_Z(z) = \frac{c_w}{b_w}\left(\frac{z-a_w}{b_w}\right)^{c_w-1} \exp\left\{-\left(\frac{z-a_w}{b_w}\right)^{c_w}\right\} \tag{3.32}$$

여기서, a_w, b_w, c_w 는 각각 location parameter, scale parameter, shape parameter 이다. 분포함수는 다음의 지수함수로 표현된다.

$$\Phi_Z(z) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{z-a_w}{b_w}\right)^{c_w}\right\} \tag{3.33}$$

Weibull 분포의 평균과 표준편차, 왜도는 각각 다음과 같이 Gamma 함수로 표현된다.

$$\mu_Z = a_w + b_w\Gamma\left(1+\frac{1}{c_w}\right) \tag{3.34a}$$

$$\sigma_Z = b_w\sqrt{\Gamma\left(1+\frac{2}{c_w}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{c_w}\right)} \tag{3.34b}$$

$$\gamma_Z = \frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{c_w}\right) - 3\Gamma\left(1+\frac{2}{c_w}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{c_w}\right) + 2\Gamma^3\left(1+\frac{1}{c_w}\right)}{\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{c_w}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{c_w}\right)\right\}^{3/2}} \tag{3.34c}$$

여기서, Gamma 함수는 다음과 같이 정의 된다.

$$\Gamma(1+x) = \int_0^\infty e^{-t}t^x\,dt \tag{3.35}$$

Weibull 분포의 평균 $\hat{\mu}_Z$, 표준편차 $\hat{\sigma}_Z$, 왜도 $\hat{\gamma}_Z$가 주어진 경우에 모수 a_w, b_w, c_w 는 다음과 같이 산정한다. 우선 식 (3.34c)의 왜도 $\hat{\gamma}_Z$로부터 Bisection 법을 사용하여 c_w를 얻고 b_w와 a_w는 순차적으로 다음과 같이 결정한다 [Lindsay 1996].

$$b_w = \frac{\hat{\sigma}_Z}{\sqrt{\Gamma(1+\frac{2}{c_w}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{c_w})}} \tag{3.36a}$$

$$a_w = \hat{\mu}_Z - b_w \Gamma(1+\frac{1}{c_w}) \tag{3.36b}$$

3.2 피로성장에 따른 균열 길이의 확률분포 추정

성장 후의 균열의 길이는 주어진 피로수명 $\hat{N}$ 에 대하여 다음과 같이 초기 균열 길이 (a_0), 구조물의 기하형상(Y_g), 피로 하중(σ), 피로 성장률 계수(C, m)에 대한 비선형 함수이다.

$$a_N = a_N(a_0, C, m, Y_g, \sigma) \tag{3.37}$$

식 (3.37)의 변수들이 확률분포를 갖을 때, 균열 성장에 따라 성장 후의 균열 길이의 확률분포가 변화한다. 확률해석은 결정론적 해석에 기초하여 수행된다. 2 장의 증분법에 기초한 피로 균열 성장 해석에 대하여 확률 해석을 추가하기 위해여 피로 하중 재하 단계에 따라 균열 성장을 이산화 한다. 피로 균열의 확률문제에서는 2 장의 증분법에 의한 해석 결과를 이용하여 각각의 피로 하중 재하 단계 마다 이전 단계의 확률분포로부터 성장 후의 균열 길이의 확률분포를 추정한다. 이 절에서는 초기 균열 길이(a_0), 피로 성장률 계수(C), 초기 균열 방향각(θ_0)이 확률 분포를 갖을 경우에 Monte-Carlo Simulation 과 제안된 모멘트법을 적용하여 균열 길이의 평균, 표준편차, 왜도를 추정한다.

3.2.1 무한 균열판의 확률해석

거시균열의 초기 성장 과정에서는 기하형상함수의 변화가 무시할 수 있을 만큼 매우 작기 때문에 무한 균열판의 응력확대계수에 대한 해석해로부터 피로 수명과 성장 후의 균열 길이를 산정할 수 있다. 유한 균열판의 초기 거시균열의 성장 과정에서는 균열의 길이가 하한계 균열 길이 l_0 보다 크지만 전체 구조물의 크기에 비해서 매우 작기 때

문에 수치 해석법을 적용하려면 많은 자유도를 사용하여 요소망을 매우 촘촘히 구성하여야 한다. 원역 응력장(remote stress)의 영향이 지배적인 초기 성장 과정에서는 무한 균열판 해석으로 성장 해석 및 확률 해석을 수행하는 것이 합리적이다.

편측 균열을 포함하고 있는 무한 균열판에서 초기 균열의 길이가 확률분포를 갖는 경우 피로 성장에 따른 균열 길이의 확률분포를 Monte-Carlo simulation 과 3.1 장의 모멘트 법으로 산정하여 비교한다. 2 장의 식 (2.59)에서 $m \neq 2$ 인 경우에, 무한판에서의 피로수명 N 은 다음과 같다.

$$N = \frac{1}{C(Y_g \sigma \sqrt{\pi})^m} \int_{a_0}^{a_N} \frac{1}{a^{m/2}} da \tag{3.38a}$$

균열 성장 과정에 따른 확률분포를 추정하기 위하여 무한 균열판에서 p 번째 성장 단계에서는 다음과 같다.

$$N_p = \sum_{k=1}^{p} \Delta N_k = \frac{1}{C(Y_g \sigma \sqrt{\pi})^m} (a_p{}^{1-m/2} - a_0{}^{1-m/2}) \tag{3.38b}$$

식 (3.38b)로부터 균열 길이 a_p 는 다음과 같다.

$$a_p = \left\{ a_0{}^{1-m/2} + (1 - \frac{m}{2}) Y_g{}^m \sigma^m \pi^{m/2} C N_p \right\}^{2/(2-m)} \tag{3.39}$$

Monte-Carlo simulation 에서는 식 (3.39)를 이용하여 각각의 성장 단계에서의 평균, 표준편차, 왜도 등의 확률 모멘트를 추정한다. 응답의 테일러 급수를 이용하는 모멘트법은 두 가지 접근법을 고려할 수 있다. 첫번째 방법 (Type 1)는 식 (3.39)의 관계식을 이용하여 a_p 의 확률 모멘트를 a_0 의 확률 모멘트로부터 산정하는 것이다. 즉, a_0 의 평균에서

a_p의 테일러 급수를 취하여 고차의 중심 모멘트를 추정한다. 두 번째 방법(Type 2)은 각각의 성장 단계에서 이전 단계 (p–1)의 확률분포로부터 다음 단계 (p)의 확률 분포를 추정한다. 식 (3.38a)에서 p 번째 성장 단계의 피로 증분은 다음과 같다.

$$\Delta N_p = \frac{1}{(1-m/2)C(Y_g \sigma \sqrt{\pi})^m}(a_p{}^{1-m/2} - a_{p-1}{}^{1-m/2}) \tag{3.40}$$

식 (3.40)에서 p 번째 피로하중 재하 단계에서 a_p는 다음과 같이 a_{p-1}의 함수로 표현된다.

$$a_p = \left\{ a_{p-1}{}^{1-m/2} + (1-\frac{m}{2}) Y_g{}^m \sigma^m \pi^{m/2} C \Delta N_p \right\}^{2/(2-m)} \tag{3.41}$$

식 (3.41)에서 a_{p-1}의 평균에서 a_p의 테일러 급수를 취하여 p 번째 성장 단계에서의 확률 모멘트를 추정한다. 두 가지 접근법에서 테일러 급수에 사용되는 고차의 편미분은 각각 식 (3.39)와 (3.41)로부터 해석적으로 유도한다. 2 장의 2.4.2 예제에 대하여 Monte-Carlo simulation 과 두 가지 모멘트법의 결과를 비교한다. 인장응력 σ = 16.5 kN/cm^2 의 피로하중을 받는 무한판의 편측 균열은 길이가 최소한 l_0 = 0.0336 cm 이상이어야 응력확대계수가 threshold (6 kN/cm$^{1.5}$)보다 커져서 균열이 성장한다. 따라서 초기 균열을 평균이 0.0336 cm 이고 변동계수가 5 %인 대수정규분포로 가정하여 N = 1,000,000 회의 피로 하중을 재하 하였다. Monte-Carlo simulation 에서는 대수정규분포를 가지는 50,000 개의 초기 균열을 생성하여 성장 후의 균열의 분포를 추정하였다. 성장 후의 추정된 균열 길이의 평균은 0.220 cm, 표준편차는 0.023 cm, 왜도는 0.513 이다. 모멘트법에서는 6 차까지의 테일러 급수와 6 차까지의 공분산을 고려하였다. 그림 3.2 는

모멘트법의 두 가지 접근법으로 추정한 평균, 표준편차, 왜도를 Monte-Carlo simulation 의 결과와 비교하여 그 차이(%)를 테일러 급수의 차수에 따라 도시한 그래프이다. 두 번째 접근법 (Type 2)의 경우에는 테일러 급수의 차수가 증가할수록 평균, 표준편차, 왜도가 Monte-Carlo simulation 의 결과와 점차로 가까워 진다. 반면 첫번째 접근법 (Type 1)을 적용했을 경우에는 평균은 대체로 정확하게 추정하고 있지만, 표준편차와 왜도는 2 차 이후로는 차이가 커져서 6 차에서는 발산하게 된다. 테일러 급수를 취하는 확률변수의 값에 따라 두 가지 접근법의 차이가 발생한 것으로 판단된다. 응답에서 보다 가까운 점에서 테일러 급수를 취할수록 더 정확한 추정 결과를 얻을 수 있다.

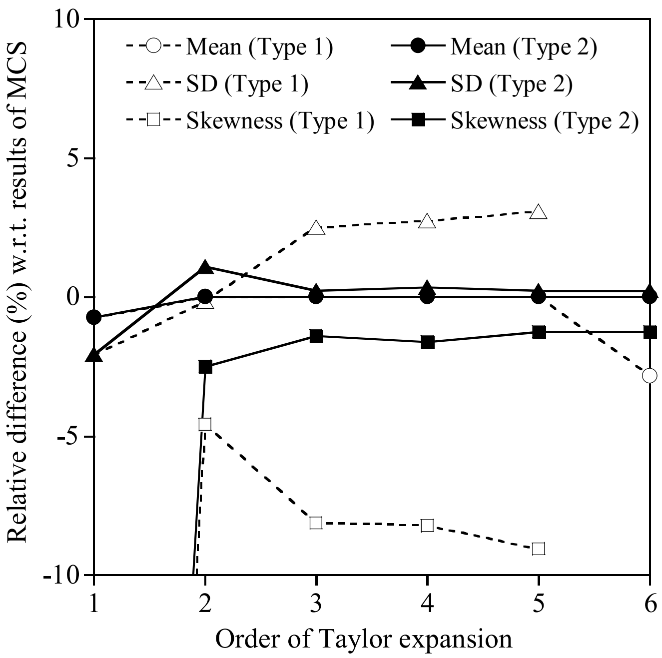


그림 3.2 무한 균열판에 대한 균열 길이의 추정된 확률 모멘트 비교

3.2.2 거시 균열의 확률 분포 추정

이 절에서는 초기 균열 길이, 성장률 계수, 초기 방향각이 확률 변수인 경우에 대하여 이계삼차모멘트법을 이용하고 2 장의 증분법에 기초하여 피로 성장에 따른 균열 길이의 확률 분포 추정법을 제안한다.

(a) 초기 균열 길이가 확률분포를 갖는 경우

피로 균열 성장을 2 장의 할선법에 기초한 증분법을 이용하여 피로하중 재하 단계에 따라 이산화하고, 3.1 절의 모멘트법을 적용하여 성장 전의 확률분포로부터 성장 후의 균열의 확률분포를 추정할 수 있다. 식 (3.37)은 비선형 관계식이므로, 2 차 이상의 테일러 급수를 이용하여 이산화된 피로 성장 단계 마다, 이전 단계($p-1$)의 확률분포로부터 다음 단계(p)의 확률분포를 추정한다. 2 장의 이산화된 Paris-Erdogan 방정식 (2.62)에서 주어진 $\Delta\hat{N}_p$ 에 대하여 a_p 와 a_{p-1} 는 다음의 관계식을 만족한다.

$$\Delta\hat{N}_p = \int_{a_{p-1}}^{a_p} \frac{1}{CK^m(a)} da \tag{3.42}$$

식 (3.42)에서 a_p 와 a_{p-1} 는 다음과 같은 비선형의 일대일 함수 관계에 있다.

$$a_p = f_p(a_{p-1}) \tag{3.43}$$

3.1 절의 모멘트법에서 a_p 를 응답 ψ 로 a_{p-1} 를 확률변수 z 로 치환하여 a_{p-1} 의 확률 모멘트로부터 a_p 의 확률 모멘트를 추정한다. a_{p-1} 의 평균에서 n 차의 테일러 급수로 a_p 을 근사하면 다음과 같다.

$$a_p \approx f_p(\overline{a}_{p-1}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f_p^{(k)}(\overline{a}_{p-1})}{k!}(a_{p-1} - \overline{a}_{p-1})^k \tag{3.44}$$

여기서, $f_p^{(k)}$는 f_p의 k차 도함수이다. 2차의 테일러 급수를 이용하여 3.1 절의 식 (3.13), (3.16), (3.17)로부터 a_p의 평균 $\overline{a}_p$, 표준편차 σ_p, 왜도 γ_p를 다음과 같이 산정한다.

$$\overline{a}_p = f_p(\overline{a}_{p-1}) + \frac{1}{2} f_p^{(2)}(\overline{a}_{p-1})\sigma_{p-1}^2 \tag{3.45a}$$

$$\begin{aligned}\sigma_p = \Big\{ & (f_p^{(1)}(\overline{a}_{p-1}))^2 \sigma_{p-1}^2 + f_p^{(1)}(\overline{a}_{p-1}) f_p^{(2)}(\overline{a}_{p-1}) \gamma_{p-1} \sigma_{p-1}^3 \\ & + \frac{1}{4}(f_p^{(2)}(\overline{a}_{p-1}))^2 (\mu_{p-1}^{(4)} - \sigma_{p-1}^4) \Big\}^{1/2}\end{aligned} \tag{3.45b}$$

$$\begin{aligned}\gamma_p = \Big\{ & (f_p^{(1)}(\overline{a}_{p-1}))^3 \gamma_{p-1}\sigma_{p-1}^3 + \frac{3}{2}(f_p^{(1)}(\overline{a}_{p-1}))^2 f_p^{(2)}(\overline{a}_{p-1})(\mu_{p-1}^{(4)} - \sigma_{p-1}^4) \\ & + \frac{3}{4} f_p^{(1)}(\overline{a}_{p-1})(f_p^{(2)}(\overline{a}_{p-1}))^2 (\mu_{p-1}^{(5)} - 2\gamma_{p-1}\sigma_{p-1}^5) \\ & + \frac{1}{8}(f_p^{(2)}(\overline{a}_{p-1}))^3 (\mu_{p-1}^{(6)} - 3\mu_{p-1}^{(4)}\sigma_{p-1}^2 + 2\sigma_{p-1}^6) \Big\} \frac{1}{\sigma_p^3}\end{aligned} \tag{3.45c}$$

여기서, $\sigma_{p-1}, \gamma_{p-1}, \mu_{p-1}^{(k)}$는 각각 a_{p-1}의 표준편차, 왜도, 그리고 k차 중심 모멘트이다. $\mu_{p-1}^{(k)}$는 다음과 같이 정의 된다.

$$\mu_{p-1}^{(k)} = E[(a_{p-1} - \overline{a}_{p-1})^k] \tag{3.46}$$

초기 균열 길이의 평균 $\overline{a}_0$, 표준편차 σ_0, 왜도 γ_0 등이 주어지면 식 (3.45a), (3.45b), (3.45c)로부터 n회의 피로하중 재하 후의 균열 길이의 평균 $\overline{a}_n$, 표준편차 σ_n, 왜도 γ_n

를 추정할 수 있다. 3차 이상의 중심 모멘트는 3.1절의 식 (3.22)로부터 산정한다.

피로 균열의 성장 문제에서 확률분포를 추정하기 위해 식 (3.7)의 1차 테일러 급수를 이용하면 균열이 평균에서 평균으로 성장하기 때문에 확정론적 해석방법과 동일하고 추가적으로 1차 민감도로부터 분산을 산정한다. 그러나 2차 테일러 급수를 사용하게 되면 식 (3.45a)과 같이 σ_{p-1}에 대한 항이 추가되기 때문에 더 이상 균열이 평균 $\bar{a}_{p-1}$에서 평균 $\bar{a}_p$으로 성장하지 않는다. 따라서 주어진 피로하중 재하 회수 ΔN_p에 대하여 식 (3.45a)의 우변의 두 번째 항만큼 균열을 추가적으로 성장 시켜야 한다.

식 (3.43)을 이용하면 n번째 피로 하중 재하 후의 균열 길이 a_n은 초기 균열 길이 a_0의 함수로 나타낼 수 있다.

$$a_n = g_n(a_0) = f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1(a_0) \tag{3.47}$$

여기서, $(\circ)$는 함수의 연산자로서 $f_k \circ f_l(z) = f_k(f_l(z))$로 정의한다. 식 (3.47)을 이용하면 a_n의 확률 모멘트를 초기 균열 길이의 평균 $\bar{a}_0$에서 테일러 급수를 취하여 산정할

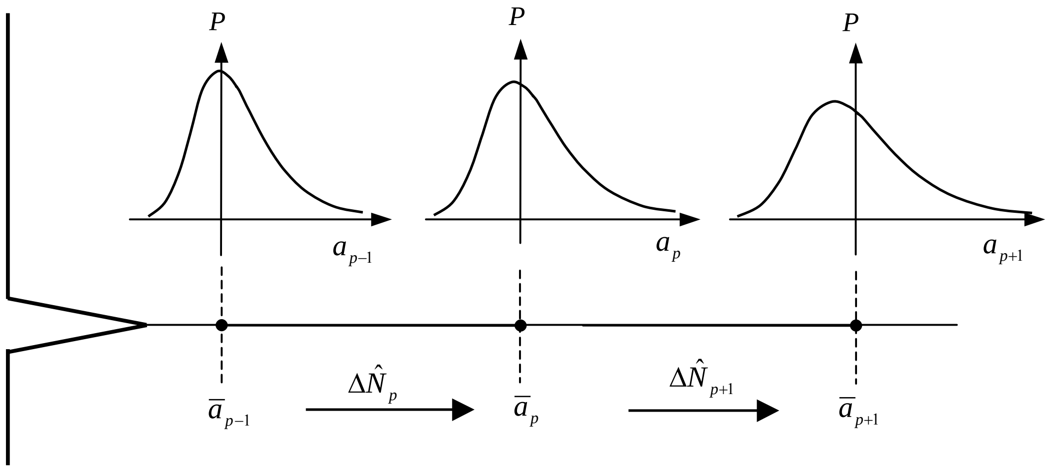


그림 3.3 균열의 성장에 따른 확률분포의 변화 (a)

수 있다. 그러나 a_n에 가까운 곳에서 테일러 급수를 취할수록 테일러 급수의 근사의 정도를 높일 수 있다. 따라서 증분법으로 이산화된 각각의 균열 성장 단계에서 균열 길이를 이전 단계의 균열 길이의 평균에서 테일러 급수로 근사한다.

그림 3.3 에는 피로 균열이 a_{p-1}에서 a_p으로 그리고 a_{p+1}로 성장함에 따라 변화하는 확률분포를 보여주고 있다. 이때 a_p와 a_{p+1}는 다음의 함수 관계를 만족한다.

$$a_p = f_p(a_{p-1}) \tag{3.48a}$$

$$a_{p+1} = f_{p+1}(a_p) \tag{3.48b}$$

a_{p+1}는 다음과 같이 a_{p-1}에 대한 함수로 기술할 수 있다.

$$a_{p+1} = g_{p+1}(a_{p-1}) = f_{p+1} \circ f_p(a_{p-1}) \tag{3.48c}$$

식 (3.48a)와 (3.48b)에서 a_p와 a_{p+1}를 각각 $\overline{a}_{p-1}$와 $\overline{a}_p$에서 테일러 n차의 급수로 근사하면 다음과 같다.

$$a_p \approx f_p(\overline{a}_{p-1}) + \sum_k^n \frac{f_p^{(k)}(\overline{a}_{p-1})}{k!}(a_{p-1} - \overline{a}_{p-1})^k \tag{3.49a}$$

$$a_{p+1} \approx f_{p+1}(\overline{a}_p) + \sum_k^n \frac{f_{p+1}^{(k)}(\overline{a}_p)}{k!}(a_p - \overline{a}_p)^k \tag{3.49b}$$

또는, 식 (3.48c)의 a_{p+1}를 $\overline{a}_{p-1}$에서 테일러 급수로 근사하면 다음과 같다.

$$a_{p+1} \approx g_{p+1}(\overline{a}_{p-1}) + \sum_k^n \frac{g_{p+1}^{(k)}(\overline{a}_p)}{k!}(a_{p-1} - \overline{a}_{p-1})^k \tag{3.49c}$$

이때, 일차까지의 테일러 급수를 이용하면 $\overline{a}_p \approx f_p(\overline{a}_{p-1})$ 이므로 식 (3.49a)를 식 (3.49b)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_{p+1} &\approx f_{p+1}(f(\overline{a}_{p-1})) + f_{p+1}^{(1)}(\overline{a}_p) f_p^{(1)}(\overline{a}_{p-1})(a_{p-1} - \overline{a}_{p-1}) \\ &= g_{p+1}(\overline{a}_{p-1}) + g_{p+1}^{(1)}(\overline{a}_{p-1})(a_{p-1} - \overline{a}_{p-1}) \end{aligned} \tag{3.50}$$

식 (3.50)는 a_{p+1}, a_p, a_{p-1}가 서로 선형 관계라면 1차의 테일러 급수를 이용하여, a_{p+1}의 확률분포를 a_{p-1}의 확률분포로부터 직접적으로 산정할 수 있음을 보여준다. 그러나 2차 이상의 테일러 급수를 이용하면 식 (3.50)와 같은 관계식이 성립되지 않는다. 이것은 응답함수가 비선형인 경우에는 테일러 급수를 근사하는 독립변수의 위치에 따라 다른 값을 갖기 때문이다. 성장 후의 균열 길이는 성장 전의 균열 길이와 비선형 관계이므로, 테일러 급수를 취하는 점에 따라 근사의 정도가 달라진다. 근사의 정도를 높이기 위하여 성장 후의 균열 분포 a_p를 초기 균열 길이 a_0의 평균에서 근사하지 않고, 이전 단계의 균열 길이 a_{p-1}의 평균에서 테일러 급수로 근사한다.

초기 균열 길이에 대한 1차와 2차 민감도는 Paris-Erdogan 방정식을 편미분하여 산정한다. 이산화된 피로 성장에서 고정된 $\Delta\hat{N}_p$에 대한 Paris-Erdogan 방정식은 다음과 같다.

$$\Delta\hat{N}_p = \int_{a_{p-1}}^{a_p} \frac{1}{CK^m(a)} da = \int_{a_{p-1}}^{a_p} f_1(a) da = F_1(a_p) - F_1(a_{p-1}) \tag{3.51}$$

여기서, f_1는 적분식의 피적분 함수이고, F_1는 f_1의 부정적분이다. 식 (3.51)에서 응력확대계수는 균열 길이 a로 매개화 되었다. 식 (3.51)의 양변을 a_{p-1}에 대하여 다음과

같이 편미분한다.

$$\frac{\partial(\Delta\hat{N})}{\partial a_{p-1}} = \frac{1}{CK^m(a_p)}\frac{\partial a_p}{\partial a_{p-1}} - \frac{1}{CK^m(a_p)} = 0 \tag{3.52}$$

식 (3.52)를 정리하면 초기 균열 길이에 대한 1 차 미분은 다음과 같다.

$$\frac{\partial a_p}{\partial a_{p-1}} = \frac{K^m(a_p)}{K^m(a_{p-1})} \tag{3.53}$$

식 (3.53)으로부터 2 차 미분은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 a_p}{\partial a_{p-1}^2} = m\frac{\partial a_p}{\partial a_{p-1}}\left\{\frac{1}{K(a_p)}\left.\frac{\partial K}{\partial a}\right|_{a_p}\frac{\partial a_p}{\partial a_{p-1}} - \frac{1}{K(a_{p-1})}\left.\frac{\partial K}{\partial a}\right|_{a_{p-1}}\right\} \tag{3.54}$$

식 (3.53)의 1 차 미분에는 성장 전(p)과 성장 후($p-1$)의 응력확대계수로부터 결정된다. 식 (3.54)의 2 차 미분에는 성장 전후의 응력확대계수의 균열 길이에 대한 1 차 민감도를 포함하고 있다. 이 논문에서는 유한차분법(Finite Difference Method)을 이용하여 응력확대계수에 대한 민감도를 근사한다.

테일러 급수를 이용한 모멘트 산정법에서 근사의 정도를 높이는 방법은 고차의 테일러 급수를 이용하고 보다 높은 차수의 모멘트까지 고려하는 것이다. 모멘트법을 이용하여 어떤 사건에 대한 확률을 산정하기 위해서는 주어진 평균, 표준편차, 왜도 등의 모멘트로부터 확률분포를 가정하여야 한다. 초기 균열의 분포가 정규분포인 경우에 성장후의 균열의 분포는 근사적으로는 대수 정규분포라고 가정할 수 있다. 따라서 평균과 표준편차가 주어진 경우에는 대수정규분포로 확률분포를 근사하고, 왜도까지 주어진 경우에는 삼변수 대수정규분포나 Weibull 분포를 사용하여 확률 분포를 근사할 수 있다.

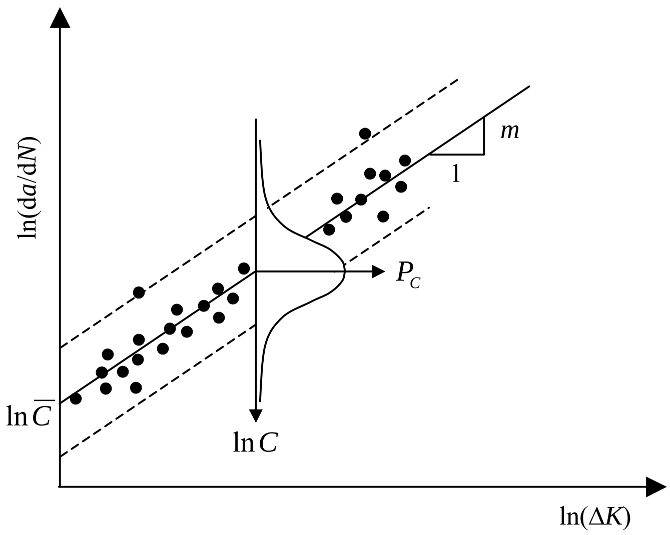


그림 3.4 피로 성장률의 확률분포

(b) 초기 균열 길이와 성장률 계수가 확률분포를 갖는 경우

Paris-Erdogan 방정식에서 사용되는 계수 C 와 m 은 피로시험에 의해 결정되는 값으로 확률분포를 갖는다. 그림 3.4 는 시험 자료의 변동성을 고려하여 응력확대계수와 성장률의 관계를 도시한 개념도이다. 응력확대계수와 성장률 각각의 대수는 선형의 관계에 있다. 2 장의 성장률식 (2.49)에 대수를 취하면 그림 3.4 와 같이 m 은 직선의 기울기가 되고, $\ln C$ 는 성장률축의 절편이 된다.

$$\ln\left(\frac{da}{dN}\right) = \ln C + m\ln(\Delta K) \tag{3.55}$$

피로시험에서 보여지는 성장률의 확률분포를 직선의 기울기 m 을 고정된 값으로 하고 C 가 특정한 분포를 갖는 확률변수로 하여 해석할 수 있다. 이 절에서는 C 와 초기 균열 길이 a_0 가 확률분포를 가질 경우, 균열 성장의 확률 모멘트 추정 방법을 제안한

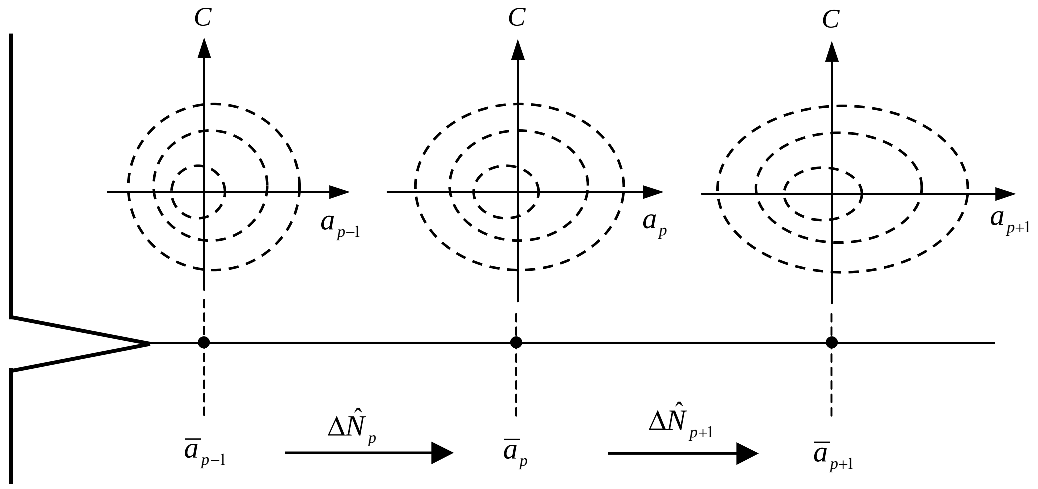


그림 3.5 균열의 성장에 따른 확률분포의 변화 (b)

다. C가 확률 변수인 경우에는 균열의 성장은 C의 확률분포에 영향을 받지만, C 자체는 재료의 특성치이므로 균열 성장 과정에서 확률분포가 일정하다고 가정한다. 2장의 증분법을 이용한 피로 균열 성장 모델링 과정에서 각각의 피로하중 재하 단계마다 균열 길이 a_p의 확률분포는 이전 단계의 균열 길이 a_{p-1}의 확률분포뿐만 아니라 C의 확률분포의 영향을 받는다. 초기 균열 길이 a_0가 C와 확률적으로 독립이더라도, 성장 후에는 균열 길이 a_p와 C의 공분산이 존재하게 된다.

식 (3.42)에서 a_p는 a_{p-1}와 C 에 대한 다음과 같은 비선형 함수이다.

$$a_p = f_p(\mathbf{z}_{p-1}) \tag{3.56}$$

여기서, $\mathbf{z}_{p-1} = (a_{p-1}, c)$는 $(p-1)$번째 성장 단계의 확률변수 벡터이다. a_p를 a_{p-1}와 C의 평균에서 2차의 테일러 급수를 취하면 다음과 같다.

$$a_p \approx f_p(\overline{\mathbf{z}}_{p-1}) + \sum_{i=1}^{2} f_{p,i}^{(1)}(\overline{\mathbf{z}}_{p-1})(z_i^{p-1} - \overline{z}_i^{p-1}) + \sum_{i,j=1}^{2} f_{p,ij}^{(2)}(\overline{\mathbf{z}}_{p-1})(z_i^{p-1} - \overline{z}_i^{p-1})(z_j^{p-1} - \overline{z}_j^{p-1}) \tag{3.57}$$

여기서, $f_{p,i}^{(1)}$ 와 $f_{p,ij}^{(2)}$ 는 각각 다변수 함수 f_p 의 일차와 이차 도함수이다. 2 차의 테일러 급수를 이용하여 3.1 절의 식 (3.13), (3.16), (3.17)로부터 a_p 의 평균 $\overline{a}_p$, 표준편차 σ_p, 왜도 γ_p 를 다음과 같이 산정한다.

$$\overline{a}_p = f_{p,i}^{(1)}(\overline{\mathbf{z}}_{p-1}) + \frac{1}{2} f_{p,ij}^{(2)}(\overline{\mathbf{z}}_{p-1}) C_{ij}[\mathbf{z}_{p-1}] \tag{3.58a}$$

$$\begin{aligned}\sigma_p = \Big\{ & f_{p,i}^{(1)}(\overline{\mathbf{z}}_{p-1}) f_{p,j}^{(1)}(\overline{\mathbf{z}}_{p-1}) C_{ij}[\mathbf{z}_{p-1}] + + f_{p,ij}^{(2)}(\overline{\mathbf{z}}_{p-1}) f_{p,k}^{(1)}(\overline{\mathbf{z}}_{p-1}) C_{ijk}[\mathbf{z}_{p-1}] \\ & + \frac{1}{4} f_{p,ij}^{(2)}(\overline{\mathbf{z}}_{p-1}) f_{p,kl}^{(2)}(\overline{\mathbf{z}}_{p-1}) (C_{ijkl}[\mathbf{z}_{p-1}] - C_{ij}[\mathbf{z}_{p-1}] C_{kl}[\mathbf{z}_{p-1}]) \Big\}^{1/2}\end{aligned} \tag{3.58b}$$

$$\begin{aligned}\gamma_p = \Big\{ & f_{p,i}^{(1)}(\overline{\mathbf{z}}_{p-1}) f_{p,j}^{(1)}(\overline{\mathbf{z}}_{p-1}) f_{p,k}^{(1)}(\overline{\mathbf{z}}_{p-1}) C_{ijk}[\mathbf{z}_{p-1}] \\ & + \frac{3}{2} f_{p,ij}^{(2)}(\overline{\mathbf{z}}_{p-1}) f_{p,k}^{(1)}(\overline{\mathbf{z}}_{p-1}) f_{p,l}^{(1)}(\overline{\mathbf{z}}_{p-1}) (C_{ijkl}[\mathbf{z}_{p-1}] - C_{ij}[\mathbf{z}_{p-1}] C_{kl}[\mathbf{z}_{p-1}]) \\ & + \frac{3}{4} f_{p,ij}^{(2)}(\overline{\mathbf{z}}_{p-1}) f_{p,kl}^{(2)}(\overline{\mathbf{z}}_{p-1}) f_{p,m}^{(1)}(\overline{\mathbf{z}}_{p-1}) (C_{ijklm}[\mathbf{z}_{p-1}] - 2C_{ij}[\mathbf{z}_{p-1}] C_{klm}[\mathbf{z}_{p-1}]) \\ & + \frac{1}{8} f_{p,ij}^{(2)}(\overline{\mathbf{z}}_{p-1}) f_{p,kl}^{(2)}(\overline{\mathbf{z}}_{p-1}) f_{p,mn}^{(1)}(\overline{\mathbf{z}}_{p-1}) (C_{ijklmn}[\mathbf{z}_{p-1}] - 3C_{ij}[\mathbf{z}_{p-1}] C_{klmn}[\mathbf{z}_{p-1}] \\ & + 2C_{ij}[\mathbf{z}_{p-1}] C_{kl}[\mathbf{z}_{p-1}] C_{mn}[\mathbf{z}_{p-1}]) \Big\} \frac{1}{\sigma_p^3}\end{aligned} \tag{3.58c}$$

여기서, C_{ij}, C_{ijk}, C_{ijkl}, C_{ijklm}, C_{ijklmn} 는 각각 확률변수 $\mathbf{z}_{p-1} = (a_{p-1}, C)$ 의 2 차, 3 차, 4 차, 5 차, 6 차 공분산 행렬이다. a_p 에 대한 3 차 이상의 중심 모멘트는 3.1 절의 식 (3.22)를 이용하여 산정한다.

그림 3.5 은 서로 독립인 초기 균열의 길이 a_0 와 성장률 계수 C 가 확률분포를 가

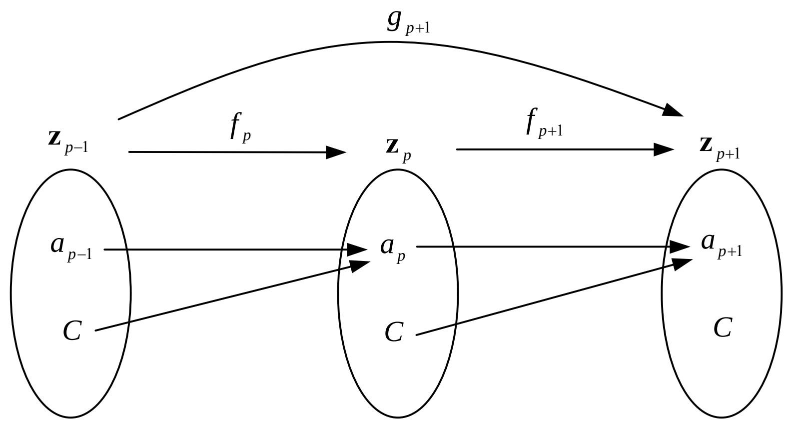


그림 3.6 균열 성장에 따른 균열길이와 C의 함수 관계

질 때, 피로하중 재하단계에 따라서 균열이 a_{p-1}에서 a_p으로 그리고 a_{p+1}로 성장해 나가는 것을 형상화한 것이다. 균열이 성장하면서 a_{p-1}, a_p, a_{p+1}는 각각 다른 확률분포를 갖게 된다. 이때 응답 a_p는 그림 3.6 과 같이 a_{p-1}와 C의 함수가 되고, 응답 a_{p+1}는 a_p와 C의 함수가 된다. 그림 3.6 에서 a_p와 a_{p+1}는 다음의 함수 관계가 성립한다.

$$a_p = f_p(\mathbf{z}_{p-1}) = f_p(a_{p-1}, C) \tag{3.59a}$$

$$a_{p+1} = f_{p+1}(\mathbf{z}_p) = f_{p+1}(a_p, C) \tag{3.59b}$$

a_{p+1}는 다음과 같이 a_{p-1}와 C에 대한 함수로 기술할 수 있다.

$$a_{p+1} = f_{p+1}(f_p(\mathbf{z}_{p-1}), C) = g_{p+1}(a_{p-1}, C) \tag{3.59c}$$

a_p와 a_{p+1}를 각각 $\bar{\mathbf{z}}_{p-1}$와 $\bar{\mathbf{z}}_p$에서 1 차의 테일러 급수로 근사하면 다음과 같다.

$$a_p \approx f_p(\bar{\mathbf{z}}_{p-1}) + \left.\frac{\partial f_p}{\partial a_{p-1}}\right|_{\bar{\mathbf{z}}_{p-1}} (a_{p-1} - \bar{a}_{p-1}) + \left.\frac{\partial f_p}{\partial C}\right|_{\bar{\mathbf{z}}_{p-1}} (C - \bar{C}) \tag{3.60a}$$

$$a_{p+1} \approx f_{p+1}(\bar{\mathbf{z}}_p) + \left.\frac{\partial f_{p+1}}{\partial a_p}\right|_{\bar{\mathbf{z}}_p} (a_p - \bar{a}_p) + \left.\frac{\partial f_{p+1}}{\partial C}\right|_{\bar{\mathbf{z}}_p} (C - \bar{C}) \tag{3.60b}$$

또는 a_{p+1}는 $\bar{\mathbf{z}}_{p-1}$에서 다음과 같이 1 차의 테일러 급수로 근사할 수 있다.

$$a_{p+1} \approx g_{p+1}(\bar{\mathbf{z}}_{p-1}) + \left.\frac{\partial g_{p+1}}{\partial a_p}\right|_{\bar{\mathbf{z}}_{p-1}} (a_{p-1} - \bar{a}_{p-1}) + \left.\frac{\partial g_{p+1}}{\partial C}\right|_{\bar{\mathbf{z}}_{p-1}} (C - \bar{C}) \tag{3.60c}$$

이때, $\bar{a}_p = f_p(\bar{\mathbf{z}}_{p-1})$, $\bar{a}_{p+1} = f_{p+1}(\bar{\mathbf{z}}_p)$ 이므로 식 (3.43a), (3.43b)로부터 a_p의 편차는 다음과 같다.

$$a_p - \bar{a}_p = \left.\frac{\partial f_p}{\partial a_{p-1}}\right|_{\bar{\mathbf{z}}_{p-1}} (a_{p-1} - \bar{a}_{p-1}) + \left.\frac{\partial f_p}{\partial C}\right|_{\bar{\mathbf{z}}_{p-1}} (C - \bar{C}) \tag{3.61}$$

1 차의 테일러 급수를 이용하였기 때문에 식 (3.60c)와 (3.61)으로부터 f_{p+1}에 대해 기술된 a_{p+1}의 편차는 다음과 같이 g_{p+1}에 대한 식으로 변환할 수 있다..

$$\begin{aligned}
a_{p+1} - \bar{a}_{p+1} &= \left.\frac{\partial f_{p+1}}{\partial a_p}\right|_{\bar{\mathbf{z}}_p} (a_p - \bar{a}_p) + \left.\frac{\partial f_{p+1}}{\partial C}\right|_{\bar{\mathbf{z}}_p} (C - \bar{C}) \\
&= \left.\left(\frac{\partial f_{p+1}}{\partial a_p}\frac{\partial f_p}{\partial a_{p-1}}\right)\right|_{\bar{\mathbf{z}}_{p-1}} (a_{p-1} - \bar{a}_{p-1}) + \left(\left.\left(\frac{\partial f_{p+1}}{\partial a_p}\frac{\partial f_p}{\partial C}\right)\right|_{\bar{\mathbf{z}}_{p-1}} + \left.\frac{\partial f_{p+1}}{\partial C}\right|_{\bar{\mathbf{z}}_p}\right)(C - \bar{C}) \\
&= \left.\frac{\partial g_{p+1}}{\partial a_{p-1}}\right|_{\bar{\mathbf{z}}_{p-1}} (a_{p-1} - \bar{a}_{p-1}) + \left.\frac{\partial g_{p+1}}{\partial C}\right|_{\bar{\mathbf{z}}_p} (C - \bar{C})
\end{aligned} \tag{3.62}$$

식 (3.62)로부터 다음과 같이 a_{p+1}의 분산을 유도하였다.

$$\begin{aligned}\sigma^2[a_{p+1}] = (\frac{\partial g_{p+1}}{\partial a_{p-1}})^2\Big|_{\bar{\mathbf{z}}_{p-1}} \sigma^2[a_p] + (\frac{\partial g_{p+1}}{\partial C})^2\Big|_{\bar{\mathbf{z}}_p} \sigma^2[C] \\ + 2(\frac{\partial g_{p+1}}{\partial a_{p-1}}\frac{\partial g_{p+1}}{\partial C})\Big|_{\bar{\mathbf{z}}_p} E[(a_{p-1} - \bar{a}_{p-1})(C - \overline{C})]\end{aligned} \tag{3.63}$$

식 (3.63)에서 우변의 세 번째 항에는 a_{p-1}과 C의 공분산을 포함하고 있다. 초기 균열 길이 a_0와 C가 확률적으로 독립이라도 균열이 성장하면서 성장 후의 균열의 길이는 이전 단계의 C의 함수이므로 공분산이 발생하고 다음 성장 단계의 확률분포에 영향을 미치게 된다. 성장 후의 균열 길이 a_{p+1}와 성장률 계수 C의 공분산은 식 (3.22)에서 $\psi = a_{p+1}$, $z_c = C$로 치환하여 산정한다.

C에 대한 1차와 2차 민감도는 Paris-Erdogan 방정식을 편미분하여 산정한다. C는 재료의 물성치로서 균열 길이와 독립이므로 고정된 $\Delta\hat{N}_p$에 대하여 이산화된 Paris-Erdogan 방정식은 다음과 같다.

$$\Delta\hat{N}_p = \frac{1}{C}\int_{a_{p-1}}^{a_p} \frac{1}{K^m(a)} da \tag{3.64}$$

식 (3.64)의 양변을 C에 대하여 편미분하면 균열 길이 a_p의 C에 대한 1차와 2차 편미분 항은 각각 다음과 같다.

$$\frac{\partial a_p}{\partial C} = \Delta\hat{N}_p K^m(a_p) \tag{3.65a}$$

$$\frac{\partial^2 a_p}{\partial C^2} = \frac{m}{K(a_p)} \frac{\partial K}{\partial a}\bigg|_{a_p} (\frac{\partial a_p}{\partial C})^2 \tag{3.65b}$$

$$\frac{\partial^2 a_p}{\partial C \partial a_{p-1}} = \frac{m}{K(a_p)} \frac{\partial K}{\partial a}\bigg|_{a_p} \frac{\partial a_p}{\partial a_{p-1}} \frac{\partial a_p}{\partial C} \tag{3.65c}$$

초기 균열 a_0가 확정론적 변수이고, 피로 성장률의 계수 C가 확률 변수인 경우에도 a_0와 C가 모두 확률변수 인 경우와 동일한 과정으로 확률분포를 추정한다. 성장 전에는 초기 균열 a_0의 확률분포를 고려하지 않지만, 주어진 $\Delta\hat{N}_p$에 대하여 성장한 이후에는 C의 확률분포로 인하여 균열 길이 a_p의 확률분포가 발생하므로, 새로운 균열 증분에 대해서는 균열 길이 a_p와 C의 확률분포를 고려해 주어야 한다. 이때 균열 길이의 분포는 이전 단계에서 C의 확률분포의 영향을 받으므로 새로운 균열 증분에 대해서는 균열 길이와 C가 서로 독립이 아니다. 즉, C만이 확률 변수인 경우에는 첫 번째 성장 단계에서 a_0를 확정론적 변수로 취급하는 것을 제외하면 성장에 대한 확률 해석 과정은 a_0와 C를 동시에 확률변수로 고려해 주는 경우와 동일하다.

(c) 초기 균열 길이와 방향각이 확률분포를 갖는 경우

이 절에서는 초기 균열 길이 a_0와 방향각 θ_0가 확률 변수인 경우에 대하여 균열 성장에 따른 균열 길이와 방향각의 확률분포의 변화를 고려한다. 이산화된 균열 성장의 p 번째 하중 재하 단계에서 균열 길이와 방향각은 다음과 같이 이전 단계($p-1$)의 균열 길이와 방향각의 함수가 된다.

$$a_p = f_p(a_{p-1}, \theta_{p-1}) \tag{3.66a}$$

$$\theta_p = g_p(a_{p-1}, \theta_{p-1}) \tag{3.66b}$$

식 (3.66a), (3.66b)를 a_{p-1}와 θ_{p-1}의 평균에서 1 차의 테일러 급수를 취하면 각각 다음과 같다.

$$a_p \approx f_p(\bar{\mathbf{z}}_{p-1}) + \left.\frac{\partial f_p}{\partial a_{p-1}}\right|_{\bar{\mathbf{z}}_{p-1}} (a_{p-1} - \bar{a}_{p-1}) + \left.\frac{\partial f_p}{\partial \theta_{p-1}}\right|_{\bar{\mathbf{z}}_{p-1}} (\theta_{p-1} - \bar{\theta}_{p-1}) \tag{3.67a}$$

$$\theta_p \approx g_p(\bar{\mathbf{z}}_{p-1}) + \left.\frac{\partial g_p}{\partial a_{p-1}}\right|_{\bar{\mathbf{z}}_{p-1}} (a_{p-1} - \bar{a}_{p-1}) + \left.\frac{\partial g_p}{\partial \theta_{p-1}}\right|_{\bar{\mathbf{z}}_{p-1}} (\theta_{p-1} - \bar{\theta}_{p-1}) \tag{3.67a}$$

응답 a_p와 θ_p의 평균과 분산은 각각 다음과 같이 산정한다.

$$\bar{a}_p \approx f_p(\bar{a}_{p-1}, \bar{\theta}_{p-1}) \tag{3.68a}$$

$$\bar{\theta}_p \approx g_p(\bar{a}_{p-1}, \bar{\theta}_{p-1}) \tag{3.68b}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2[a_p] \approx & \left.\left(\frac{\partial f_p}{\partial a_{p-1}}\right)^2\right|_{\bar{\mathbf{z}}_{p-1}} \sigma^2[a_{p-1}] + \left.\left(\frac{\partial f_p}{\partial \theta_{p-1}}\right)^2\right|_{\bar{\mathbf{z}}_{p-1}} \sigma^2[\theta_{p-1}] \\ & + 2\left.\left(\frac{\partial f_p}{\partial a_{p-1}} \frac{\partial f_p}{\partial \theta_{p-1}}\right)\right|_{\bar{\mathbf{z}}_{p-1}} E[(a_{p-1} - \bar{a}_{p-1})(\theta_{p-1} - \bar{\theta}_{p-1})] \end{aligned} \tag{3.69a}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2[\theta_p] \approx & \left.\left(\frac{\partial g_p}{\partial a_{p-1}}\right)^2\right|_{\bar{\mathbf{z}}_{p-1}} \sigma^2[a_{p-1}] + \left.\left(\frac{\partial g_p}{\partial \theta_{p-1}}\right)^2\right|_{\bar{\mathbf{z}}_{p-1}} \sigma^2[\theta_{p-1}] \\ & + 2\left.\left(\frac{\partial g_p}{\partial a_{p-1}} \frac{\partial g_p}{\partial \theta_{p-1}}\right)\right|_{\bar{\mathbf{z}}_{p-1}} E[(a_{p-1} - \bar{a}_{p-1})(\theta_{p-1} - \bar{\theta}_{p-1})] \end{aligned} \tag{3.69b}$$

초기 균열 길이 a_0와 방향각 θ_0가 확률적으로 독립이라도 이산화된 균열 성장의 각

단계에서 성장 후의 균열 길이 a_p 와 방향각 θ_p 은 더 이상 독립이 아니므로 공분산이 발생한다.

식 (3.67)의 일차의 테이러 급수에 대한 민감도를 산정하기 위해서는 균열 길이와 방향각에 대한 방정식이 주어져야 한다. 균열 길이에 대한 민감도는 이산화된 Paris-Erdogan 방정식으로부터 얻는다.

$$\Delta \hat{N}_p = \int_{a_{p-1}}^{a_p} \frac{1}{CK^m(a)} da \tag{3.70}$$

성장 후의 균열의 초기 길이와 방향각에 대한 편미분은 각각 다음과 같다.

$$\frac{\partial a_p}{\partial a_{p-1}} = \frac{K^m(a_p)}{K^m(a_{p-1})} \tag{3.71a}$$

$$\frac{\partial a_p}{\partial \theta_{p-1}} = K^m(a_p) \int_{a_{p-1}}^{a_p} \frac{m}{K^{m+1}} \left(\frac{\partial K}{\partial \theta}\right)\Bigg|_{\theta_{p-1}} da \tag{3.71b}$$

식 (3.71b)에는 균열 방향각에 대한 응력확대계수의 1 차 민감도를 포함하고 있다. 식 (3.71b)에는 다음의 정적분에 대한 편미분 공식이 사용 되었다.

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{g(z)}^{h(z)} f(z,t) dt = \int_{g(z)}^{h(z)} \frac{\partial f}{\partial z}(z,t) dt + f(z,h(z)) \frac{\partial h}{\partial z}(z) - f(z,g(z)) \frac{\partial g}{\partial z}(z) \tag{3.72}$$

성장 후의 균열 방향각을 초기 기하 형상(a_{p-1}, θ_{p-1})의 함수로 기술하면 다음과 같다.

$$\theta_p(a_{p-1}, \theta_{p-1}) = \theta_{p-1} + \varphi_p(a_{p-1}, \theta_{p-1}) + \Delta\theta_p(a_{p-1}, \theta_{p-1}) \tag{3.73}$$

여기서, $\Delta\theta_p$ 는 곡선의 두 점 사이의 곡률의 적분으로 정의할 수 있다.

$$\Delta\theta_p = \int_{a_{p-1}}^{a_p} \left\| \mathbf{X}''(a) \right\| da \tag{3.74}$$

성장 곡선을 포물선으로 가정하면 2 장의 식 (2.69a)와 식 (2.69b)로부터 Δa_p 를 $\Delta\theta_p$ 에 대하여 나타낼 수 있다.

$$\Delta a_p = \frac{1}{4b}\left\{\tan(\Delta\theta_p)\sec(\Delta\theta_p) + \ln\left|\tan\Delta\theta_p + \sec\Delta\theta_p\right|\right\} \tag{3.75}$$

방향각의 균열 길이에 대한 편미분는 식 (3.73)의 양변을 a_{p-1} 에 대해 편미분하여 얻는다.

$$\frac{\partial\theta_p}{\partial a_{p-1}} = \frac{\partial\varphi_p}{\partial a_{p-1}} + \frac{\partial(\Delta\theta_p)}{\partial a_{p-1}} \tag{3.76}$$

여기서, $\partial\varphi_p / \partial a_{p-1}$ 는 2 장의 식 (2.52a)을 편미분하여 구한다.

$$K_{\mathrm{I}} \sin\varphi_p + K_{\mathrm{II}}(3\cos\varphi_p - 1) = 0 \tag{3.77}$$

$$\frac{\partial\varphi_p}{\partial a_{p-1}} = -\frac{1}{K_{\mathrm{I}}\cos\varphi_p - 3K_{\mathrm{II}}\sin\varphi_p}\left\{\frac{\partial K_{\mathrm{I}}}{\partial a_{p-1}}\sin\varphi_p + \frac{\partial K_{\mathrm{II}}}{\partial a_{p-1}}(3\cos\varphi_p - 1)\right\} \tag{3.78}$$

식 (3.76)의 우변의 두 번째 항은 식 (3.77)의 관계로부터 유도한다.

$$\frac{\partial(\Delta\theta_p)}{\partial a_{p-1}} = \left\|\mathbf{X}''(a_p)\right\|\frac{\partial a_p}{\partial a_{p-1}} - \left\|\mathbf{X}''(a_{p-1})\right\| \tag{3.79}$$

성장 후의 방향각의 이전 단계의 방향각에 대한 편미분은 식 (3.73)의 양변을 θ_{p-1} 에 대

해 편미분하여 유도한다.

$$\frac{\partial\theta_p}{\partial\theta_{p-1}} = 1 + \frac{\partial\varphi_p}{\partial\theta_{p-1}} + \frac{\partial(\Delta\theta_p)}{\partial\theta_{p-1}} \tag{3.80}$$

여기서, $\partial\varphi_p / \partial\theta_{p-1}$ 는 식 (3.60)을 편미분하여 유도한다.

$$\frac{\partial\varphi_p}{\partial\theta_{p-1}} = -\frac{1}{K_{\mathrm{I}}\cos\varphi_p - 3K_{\mathrm{II}}\sin\varphi_p}\left\{\frac{\partial K_{\mathrm{I}}}{\partial\theta_{p-1}}\sin\varphi_p + \frac{\partial K_{\mathrm{II}}}{\partial\theta_{p-1}}(3\cos\varphi_p - 1)\right\} \tag{3.81}$$

식 (3.77)의 우변의 두 번째 항은 식 (3.74)으로부터 다음과 같이 기술된다.

$$\frac{\partial(\Delta\theta_p)}{\partial\theta_{p-1}} = \int_{a_0}^{a_N}\left\|\frac{\partial\mathbf{X}''}{\partial\theta}\right\|_{\theta_{p-1}} da + \left\|\mathbf{X}''(a_p)\right\|\frac{\partial a_p}{\partial\theta_{p-1}} \tag{3.82}$$

식 (3.82)에서는 곡선의 매개변수 a를 따라가면서 방향각에 대한 곡률의 민감도 $\left\|\partial\mathbf{X}''/\partial\theta\right\|$ 를 산정하여야 한다. 식 (3.79)에서 곡률($\left\|\mathbf{X}''\right\|$)은 반복적인 균열 성장 해석으로부터 얻어진 포물선의 곡률로 산정할 수 있지만, 식 (3.82)의 곡률에 대한 방향각의 민감도를 수치적으로 산정하기 위해서는 많은 계산이 소요된다. 식 (3.82)의 곡률과 곡률에 대한 민감도 산정에 있어서의 수치적인 문제를 피하기 위하여, 포물선을 이용하여 균열의 성장 곡선을 모델링하면 방향각에 대한 민감도를 다음과 같이 산정할 수 있다.

$$\frac{\partial(\Delta\theta_p)}{\partial\theta_{p-1}} = \frac{\partial(\Delta\theta_p)}{\partial(\Delta a_p)}\frac{\partial(\Delta a_p)}{\partial\theta_{p-1}} \tag{3.83}$$

식 (3.83)의 우변의 첫번째 항은 식 (3.75)로부터 다음과 같다.

$$\frac{\partial(\Delta\theta_p)}{\partial(\Delta a_p)} = \frac{2b}{\sec^3(\Delta\theta_p)} \tag{3.84}$$

식 (3.79)의 우변의 두 번째 항은 이전 단계의 균열 길이와 방향각이 독립이라면 다음과 같다.

$$\frac{\partial(\Delta a_p)}{\partial\theta_{p-1}} = \frac{\partial a_p}{\partial\theta_{p-1}} \tag{3.85}$$

식 (3.71b)과 식 (3.82)에서 초기 방향각에 대한 민감도 $\partial K/\partial\theta$ 는 유한차분법이나 shape sensitivity 를 이용한 수치적인 방법으로 산정한다.

이 절에서는 미세 균열에서 방향각의 확률분포가 미치는 영향을 직접적으로 접근할 수 없기 때문에, 거시적인 크기를 갖는 균열의 초기 방향각의 확률분포가 성장 후 균열 길이의 확률분포에 미치는 영향에 대하여 해석적인 방법으로 접근하였다. 균열각에 대한 응력확대계수의 민감도 산정에 있어서 수치적 어려움으로 예제에서 수치해석은 수행하지 않았지만 2 장의 2.4.3 절의 예제에서 초기 균열 방향각이 균열 성장 곡선에 미치는 영향이 매우 작음을 확인하였다. 미세균열에서도 초기 방향각의 확률분포가 전체 성장 경로에 미치는 영향이 작을 것으로 판단된다. 이러한 이유로 이 논문에서는 거시적인 균열의 성장해석에서 초기 방향각을 평균값을 갖는 것으로 간주한다. 다만 미세 균열에서 초기 방향각에 따라 초기 응력상태가 달라지고 이에 따라 피로 수명이 영향을 받으므로 이에 대한 연구가 필요함을 밝혀둔다.

3.3 피로수명의 확률분포 추정과 피로-강도 곡선

균열체의 피로 수명은 균열 발생에 대한 피로수명을 제외하면, 2 장의 식 (2.77)과 같이 미세균열과 거시균열 각각의 피로 수명의 합으로 나타낼 수 있다.

$$N_{\mathrm{T}} = \frac{a_0}{C(Y_{\mathrm{g0}}\sigma\sqrt{\pi a_0})^m} + \int_{a_0}^{a_{\mathrm{cr}}} \frac{1}{CK^m(a)} da \tag{3.86}$$

여기서, a_0 는 하한계 균열길이이고, Y_{g0} 는 $a = a_0$ 일 때의 기하형상 함수이다. a_{cr} 은 파괴에 대한 임계 균열길이이다. 피로 수명은 여러 가지 확률인자에 의하여 확률분포를 갖게 된다. 피로 수명의 확률분포를 3.1.2 절의 이계삼차모멘트법으로 추정할 수 있다. 식 (3.86)의 전체 피로수명을 확률변수 a_0 와 C 에 대하여 2 차의 테일러 급수를 취하고 이로부터 전체 피로수명의 확률 모멘트를 제안된 모멘트법으로 산정한다.

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{T}}(a_0, C) \approx\ & N_{\mathrm{T}}(\bar{a}_0, \bar{C}) + \left.\frac{\partial N_{\mathrm{T}}}{\partial a_0}\right|_{\bar{\mathbf{z}}} (a_0 - \bar{a}_0) + \left.\frac{\partial N_{\mathrm{T}}}{\partial C}\right|_{\bar{\mathbf{z}}} (C - \bar{C}) \\ & + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 N_{\mathrm{T}}}{\partial a_0^{\,2}}\right|_{\bar{\mathbf{z}}} (a_0 - \bar{a}_0)^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 N_{\mathrm{T}}}{\partial C^2}\right|_{\bar{\mathbf{z}}} (C - \bar{C})^2 + \left.\frac{\partial^2 N_{\mathrm{T}}}{\partial a_0 \partial C}\right|_{\bar{\mathbf{z}}} (a_0 - \bar{a}_0)(C - \bar{C}) \end{aligned} \tag{3.87}$$

여기서, 피로수명에 대한 일차와 이차의 미분 항은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\mathrm{T}}}{\partial a_0} &= -\frac{m}{2}\frac{1}{CK^m(a_0)} \\ \frac{\partial^2 N_{\mathrm{T}}}{\partial a_0^{\,2}} &= \frac{m^2}{2}\frac{1}{CK^{m+1}(a_0)}\left.\frac{dK}{da}\right|_{a_0} \\ \frac{\partial N_{\mathrm{T}}}{\partial C} &= -\frac{N_{\mathrm{T}}}{C} \end{aligned} \tag{3.88}$$

$$\frac{\partial^2 N_{\mathrm{T}}}{\partial C^2} = 2\frac{N_{\mathrm{T}}}{C^2}$$

$$\frac{\partial^2 N_{\mathrm{T}}}{\partial a_0 \partial C} = \frac{m}{2C^2 K^m (a_0)}$$

식 (3.87)을 제안된 이계삼차모멘트법에 적용하면, 초기 균열 길이와 성장률 계수 C의 확률분포로부터 전체 피로수명의 확률분포를 결정할 수 있다. 이때 초기균열길이의 확률분포는 하한계 균열 길이로부터 추정할 수 있다. Threshold K_{th}와 한계 피로응력 σ_{e}의 확률분포를 각각 대수정규분포로 가정하면 하한계 균열길이 a_0의 확률분포를 대수정규분포로 산정할 수 있다.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{K_{\mathrm{th}}}{Y_{\mathrm{g}}\sigma_{\mathrm{e}}}\right)^2 \tag{3.89a}$$

$$\ln a_0 = 2\ln K_{\mathrm{th}} - 2\ln \sigma_{\mathrm{e}} - \ln(\pi Y_{\mathrm{g}}^{\;2}) \tag{3.89b}$$

하한계 균열길이 a_0와 성장률 계수 C의 확률분포를 대수정규분포로 가정하여 전체 피로수명 N_{T}의 확률분포를 제안된 모멘트법을 이용하여 확률분포를 추정하고, 이로부터 피로-강도 곡선상에서 95% 신뢰한계선을 산정한다.

3.4 신뢰도 평가

이 절에서는 피로 균열의 파괴확률 산정법으로서 Monte-Carlo simulation 을 이용한 모의 실험법과 신뢰도 지수를 이용하여 산정하는 일계신뢰도법, 모멘트법을 이용한 방법을 비교하고 각각의 장단점을 파악하고자 한다.

3.4.1 파괴확률의 정의

균열의 피로 파괴에 대한 한계상태식은 다음과 같이 정의 된다 [Lua 1993, Besterfield 1991, Tryon 1996].

$$g(z_R, z_L) = z_R - z_L \tag{3.90}$$

여기서, z_R 은 저항 요소이고, z_L 은 하중 요소이다. 파괴확률은 그림 3.5 와 같이 저항요소와 하중요소의 확률분포로부터 정의된다.

$$\begin{aligned} P_f &= P[z_R < z_L] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z_L} \phi_R(z_R)\phi_L(z_L)\,dz_R\,dz_L \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{z_L} \phi_R(z_R)\,dz_R\right\}\phi_L(z_L)\,dz_L \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_R(z)\phi_L(z)\,dz \end{aligned} \tag{3.91}$$

여기서, ϕ_R 과 ϕ_L 은 저항요소와 하중요소의 확률밀도함수이고, Φ_R 은 저항요소의 누적밀도함수이다. 그림 3.7 에서 파괴확률은 두 확률분포가 겹치는 면적보다 작다.

피로 균열의 파괴에 대한 한계상태식은 같은 파괴상태일지라도 공학적인 관점에 따라 다음과 같이 몇 가지를 고려할 수 있다. [Lua 1993, Besterfield 1991, Tryon 1996].

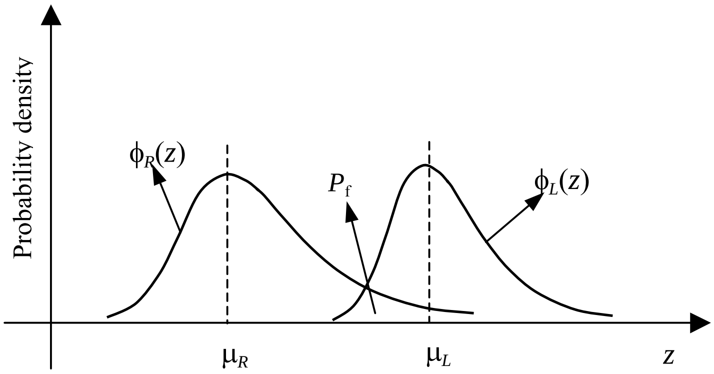


그림 3.7 파괴확률의 정의

$$g(\mathbf{z}) = N_T(\mathbf{z}) - N_S \tag{3.92a}$$

$$g(\mathbf{z}) = K_C - K_S(\mathbf{z}) \tag{3.92b}$$

$$g(\mathbf{z}) = a_{cr} - a_S(\mathbf{z}) \tag{3.92c}$$

식 (3.92a), (3.92b), (3.92c)의 한계상태식은 서로 다른 물리량으로 정의되어 있지만 동일한 파괴상태를 나타내고 있다. 식 (3.92a)에서 N_T은 균열이 파괴상태에 도달할 때까지의 전체 피로수명이고, N_S는 공용 피로수명(service life)이다. 식 (3.92b)에서 K_C는 파괴인성(toughness)이고 K_S은 N_S의 피로하중 재하 후의 응력확대계수이다. 식 (3.92c)에서 a_{cr}은 응력확대계수가 파괴인성에 도달했을 때의 임계균열길이고, a_S는 피로하중을 공용피로수명 N_S만큼 재하 하였을 때의 성장한 균열의 길이이다. N_T, K_S, a_S는 주어진 확률변수에 대하여 수치적으로 산정되고, K_C, a_{cr}는 재료의 특성치로 결정된다. 확률변수 $\mathbf{z}$는 다음과 같이 초기 균열길이(a_0), 피로 균열의 성장률 계수(C, m), 피로 응력(σ) 등이다.

$$\mathbf{z} = (a_0, C, m, \sigma) \tag{3.93}$$

파괴확률은 확률변수 $\mathbf{z}$가 한계상태를 넘어선 영역에서 다변수 결합확률밀도함수 (multivariate density function) $\phi_{\mathbf{Z}}$의 적분으로 정의된다.

$$P_f = \int_{g(\mathbf{z})\leq 0} \phi_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})d\mathbf{z} \tag{3.94}$$

피로 균열 문제에서 식 (3.94)을 이용한 파괴확률 산정이나 신뢰도 평가에는 두 가지 어려움이 있다. 우선은 확률 변수들의 분포를 알 수 없기 때문에 확률밀도함수를 가정하여야 한다는 것이다. 다른 한가지는 식 (3.94)에서 한계상태식의 비선형성이 심한 경우 적분경로를 정확하게 파악하기가 거의 불가능하므로 해석적인 방법으로 정해를 구할 수 있는 경우는 매우 제한적이고, 수치적분을 하더라도 많은 계산을 필요로 한다. 파괴확률에 대한 적분을 근사적으로 평가하는 방법으로는 Monte-Carlo simulation 을 이용한 모의 실험법, 일계신뢰도법(First-Order Reliability Method), 이계신뢰도법(Second-Order Reliability Method) 등이 있다.

3.4.2 Monte-Carlo simulation 에 의한 신뢰도 평가

Monte-Carlo simulation 은 결합확률밀도함수를 이용하여 확률 변수들의 분포특성이 반영된 난수를 추출하여 충분한 수의 표본집단을 생성한다. M 개의 자료를 추출하였을 때 한계상태식이 0 보다 작은 경우가 m_f 라면 파괴확률은 다음과 같이 추정한다.

$$P_f \approx \frac{m_f}{M} \tag{3.95}$$

Shooman 은 M 개의 추출 자료로부터 추정한 파괴확률에 대한 유의수준 5%의 오차 추

정식을 다음과 같이 제안하였다 [양영순 2002].

$$\varepsilon_{\mathrm{f}}(\%) = 2\sqrt{\frac{1-P_f}{P_f M}} \tag{3.96}$$

Monte-Carlo Simulation 으로 추정된 파괴확률이 적절한 신뢰도를 갖기 위해서는 예상 파괴확률에 대한 역수의 10 배 내지 100 배 이상의 값을 전체 추출개수 M 으로 취하는 것이 일반적으로 추천된다.

3.4.3 일계신뢰도법

일계신뢰도법(First-Order Reliability Method)에서는 초기 균열의 확률분포를 정규분포라는 가정하에 파괴확률의 간접적인 지표인 신뢰도지수(Reliability index)를 산정한다. 확률분

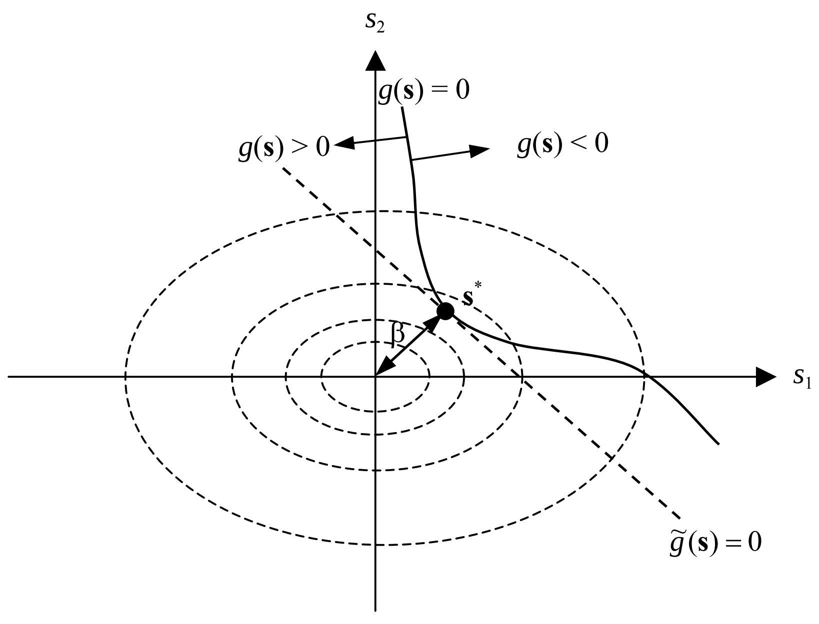


그림 3.8 표준확률분포 좌표계에서의 한계상태와 신뢰도지수

포가 정규 분포가 아닌 경우에는 Rackwitz-Fiessler 변환법[Lua 1993, 양영순 2002]을 사용하여 등가의 정규분포의 평균과 표준편차를 추정한다. 식 (3.94)의 파괴확률은 확률분포를 정규분포로 가정하면 표준정규분포 상에서 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$P_{\mathrm{f}} = \int_{g(\mathbf{s})\le 0} \frac{1}{(2\pi)^{n_s/2}} \exp(-\frac{\mathbf{s}^T\mathbf{s}}{2}) d\mathbf{s} \tag{3.97}$$

여기서, $g(\mathbf{s})$ 는 표준정규분포 좌표계에서의 한계상태식이고, $\mathbf{s}$ 은 n_s 개의 서로 독립적인 표준정규분포 좌표계로 변환된 확률 변수이다.

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{z} - \overline{\mathbf{z}}}{\sigma_{\mathrm{z}}} \tag{3.98}$$

일계신뢰도법은 표준정규분포 확률변수의 공간에서 주어진 한계상태까지의 최단거리를 구하기 위해 최적화기법을 도입하고, 파괴확률은 그림 3.8 과 같이 한계상태식을 파괴에 대한 최빈점(Most Probable Failure Point 또는 Design Point)에서 선형의 한계상태식으로 근사하여 산정한다. 한계상태식에 대한 최빈점 $\mathbf{s}^*$ 에서의 1 차 선형 근사는 다음과 같다.

$$g(\mathbf{s}) \approx \frac{\partial g(\mathbf{s})}{\partial s_i}(s_i - s_i^*) = \tilde{g}(\mathbf{s}) \tag{3.99}$$

식 (3.94)으로부터 파괴확률은 다음과 같이 표준정규분포의 분포함수 Φ 로 표현할 수 있다.

$$P_{\mathrm{f1}} = \int_{\tilde{g}<0} \frac{1}{(2\pi)^{n_s/2}} \exp(-\frac{\mathbf{s}^T\mathbf{s}}{2}) d\mathbf{s} = \Phi(-\beta) \tag{3.100}$$

여기서, β는 신뢰도 지수로서 최빈점까지의 최단거리를 나타낸다. 표준정규분포 공간에서 한계상태식을 만족하면서 신뢰도 지수 β를 최소화 하는 최빈점을 찾는다.

$$\text{Min } \beta = (\mathbf{s}^T\mathbf{s})^{1/2} \text{ subject to } \tilde{g}(\mathbf{s}) = 0 \tag{3.101}$$

최적화 알고리즘으로는 gradient projection method, Hasofer-Lind method, 그리고 modified HL-RF method 등이 있다 [Lua 1993]. Hasofer-Lind method (또는 HL-RF method)에서는 최적화 과정에서 다음과 같이 최빈점을 반복적으로 보정해 준다.

$$s_i^{(j+1)} = \frac{1}{\tilde{g}_{,k}\tilde{g}_{,k}}\left[\tilde{g}_{,m}s_m^{(j)} - g(\mathbf{s}^{(j)})\right]\tilde{g}_{,i} \tag{3.102}$$

여기서, j는 반복계산 횟수이고, $\tilde{g}_{,m}$는 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{g}_{,m} = \frac{\partial\tilde{g}(\mathbf{s}^{(j)})}{\partial s_m} \tag{3.103}$$

피로 균열 성장 문제에서 확률변수가 초기 균열 길이 a_0와 성장률 계수 C인 경우에는 식 (3.94)의 한계상태식을 이용한다. 식 (3.102)에서 한계상태식에 대한 민감도는 Paris-Erdogan 방정식으로부터 얻을 수 있다. 한계상태식 (3.92a)는 피로 균열이 파괴에 이르는 균열 길이 (a_{cr})까지 성장하는데 필요한 피로하중 재하 회수 N이 확률분포를 이룬다는 것을 가정한다. 따라서 Paris-Erdogan 방정식에서 적분상수를 $a_N = a_{\mathrm{cr}}$ 으로 치환하여 피로 수명에 대한 민감도를 산정한다.

$$N_{\mathrm{T}}(a_0, C) = \frac{a_0}{C(Y_{\mathrm{g}0}\sigma\sqrt{\pi a_0})^m} + \int_{a_0}^{a_{\mathrm{cr}}} \frac{1}{CK^m(a)}da \tag{3.104}$$

식 (3.104)으로부터 초기 균열 길이 a_0와 성장률 계수 C에 대한 1차 민감도는 각각 다음과 같다.

$$\frac{\partial N_{\mathrm{T}}}{\partial a_0} = -\frac{m}{2}\frac{1}{CK^m(a_0)} \tag{3.105a}$$

$$\frac{\partial N_{\mathrm{T}}}{\partial C} = -\frac{N_{\mathrm{T}}}{C} \tag{3.105b}$$

그림 3.9은 초기 길이 a_0가 확률분포를 갖을 때, 파괴상태에 이르는데 소요되는 피로하중 재하 회수 N의 확률분포와 파괴확률을 보여준다. 평균이 $\overline{a}_0$인 확률분포를 갖는 초기균열이 a_{cr}까지 성장하는데 소요되는 피로하중의 재하 회수 N은 평균이 $\overline{N}_{\mathrm{T}}$인 확률분포를 이루고, N의 확률분포에서 공용피로수명 N_{S}보다 작을 확률은 초기 균열의

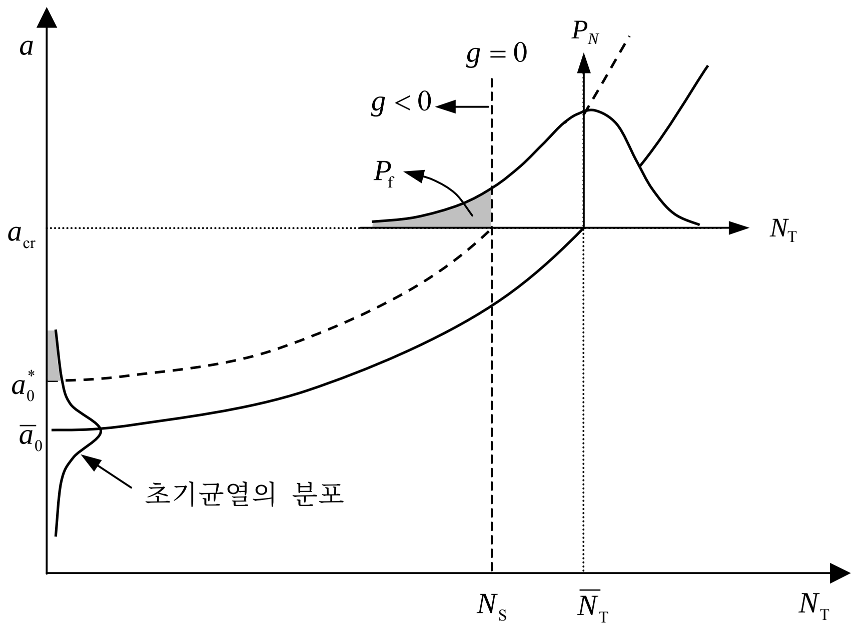


그림 3.9 피로수명 N의 분포와 파괴확률

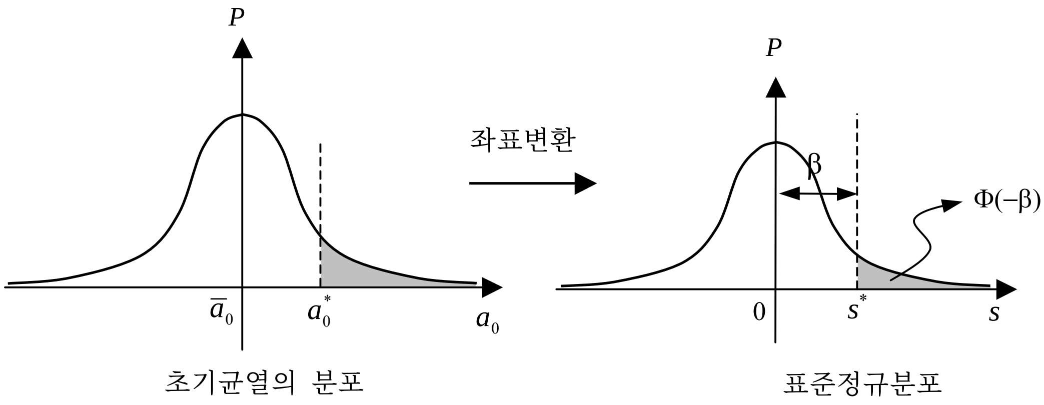


그림 3.10 초기 균열의 분포와 파괴확률의 산정

확률분포에서 a_0 가 a_0^* 보다 클 확률과 같다. 크기가 a_0^* 인 초기균열이 N_S 회의 피로하중을 받으면 균열이 a_{cr} 까지 성장하여 파괴에 이른다. 초기 길이가 a_0^* 일 때 한계상태식은 다음과 같이 0 이 된다.

$$g(a_0^*) = N_T(a_0^*) - N_S = 0 \tag{3.106}$$

파괴에 이르는 임계 균열 길이 a_{cr} 는 재료의 파괴인성(K_C)으로부터 결정된다. 초기 균열의 확률분포에서 a_0^* 보다 클 확률은 그림 3.10 에서와 같이 표준정규분포 확률공간에서 신뢰도지수 β 로부터 산정한다.

파괴인성의 확률분포를 고려하기 위해서는 식 (3.92b)의 한계상태식을 적용한다. 초기균열길이와 성장률 계수 C, 파괴인성(K_C)을 확률변수로 하여 한계상태식을 다음과 같이 정의한다.

$$g(\mathbf{x}) = g(a_0, C, K_C) = K_C - K_s(a_0, C) \tag{3.107}$$

$g < 0$ 을 만족하는 파괴확률은 확률 변수들이 서로 독립적인 정규분포일 때 다음과 같

이 신뢰도지수 β로부터 산정할 수 있다.

$$P_{\mathrm{f}} = \int_{g(\mathbf{z})\le 0} \phi_{\mathrm{Z}}(\mathbf{z})d\mathbf{z} \approx \Phi(-\beta) \tag{3.108}$$

신뢰도지수 β를 결정하기 위한 최적화 과정에는 한계상태식에 대한 다음의 일차 편미분이 사용된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial a_0} &= -\frac{\partial K}{\partial a_0} = -\frac{\partial K}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial a_0} \\ \frac{\partial g}{\partial C} &= -\frac{\partial K}{\partial C} = -\frac{\partial K}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial C} \\ \frac{\partial g}{\partial K_c} &= 1 \end{aligned} \tag{3.109}$$

여기서, 초기 균열 길이와 성장률 계수에 대한 균열 길이의 일차 민감도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial a_0} &= \frac{m}{2}\frac{K^m(a)}{K^m(a_0)} \\ \frac{\partial a}{\partial C} &= N_{\mathrm{T}}K^m(a) \end{aligned} \tag{3.110}$$

3.4.4 모멘트법에 의한 신뢰도 평가

모멘트법을 이용하는 파괴확률 산정법은 앞절의 일계신뢰도법에 비하여 보다 직접적으로 파괴확률을 산정할 수 있다. 파괴에 대한 한계상태식은 다음과 같이 균열의 길이에 대한 식으로 변환할 수 있다.

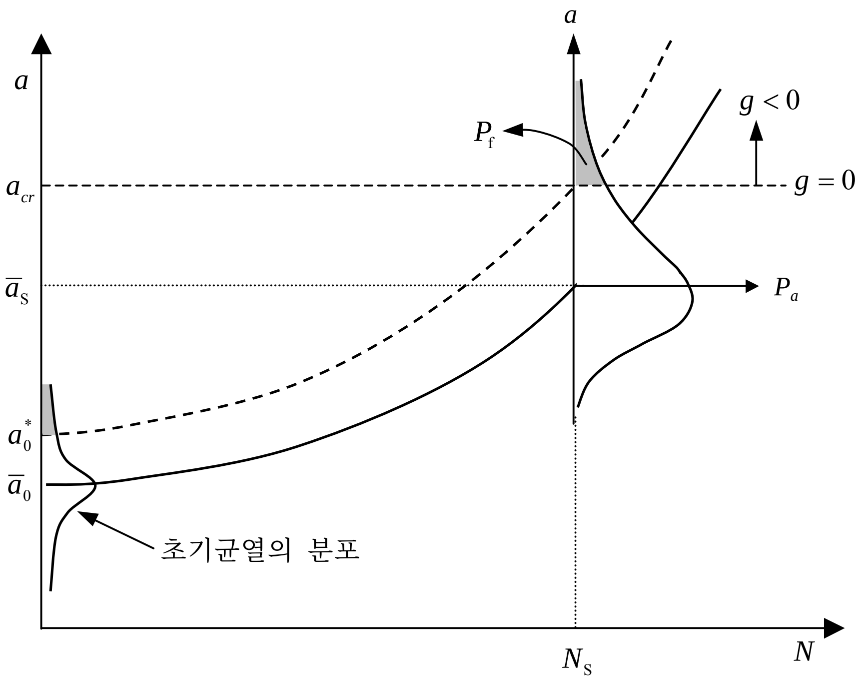


그림 3.11 균열의 길이 a_N 의 분포와 파괴확률

$$g(\mathbf{z}) = a_{cr} - a_S(\mathbf{z}) \tag{3.111}$$

여기서, a_S 는 피로하중을 공용피로수명 N_S 만큼 재하하였을 때의 성장한 균열의 길이이다.

그림 3.11 은 초기 길이 a_0 가 확률분포를 갖을 때, 공용피로수명 만큼의 피로하중을 재하 하였을 때 균열 길이의 확률분포와 파괴확률의 관계를 보여준다. 평균이 $\bar{a}_0$ 인 확률분포를 갖는 초기균열이 공용피로수명 N_S 의 피로하중 재하 후에는 균열은 평균길이가 $\bar{a}_S$ 인 확률분포를 이루고, 균열 길이 a_S 가 파괴에 대한 임계균열 길이 a_{cr} 보다 클 확률은 초기 균열의 확률분포에서 a_0 가 a_0^* 보다 클 확률과 같다. 즉, 크기가 a_0^* 인 초기균열이 N_S 회의 피로하중을 받으면 균열이 a_{cr} 까지 성장하여 균열이 파괴에 이른

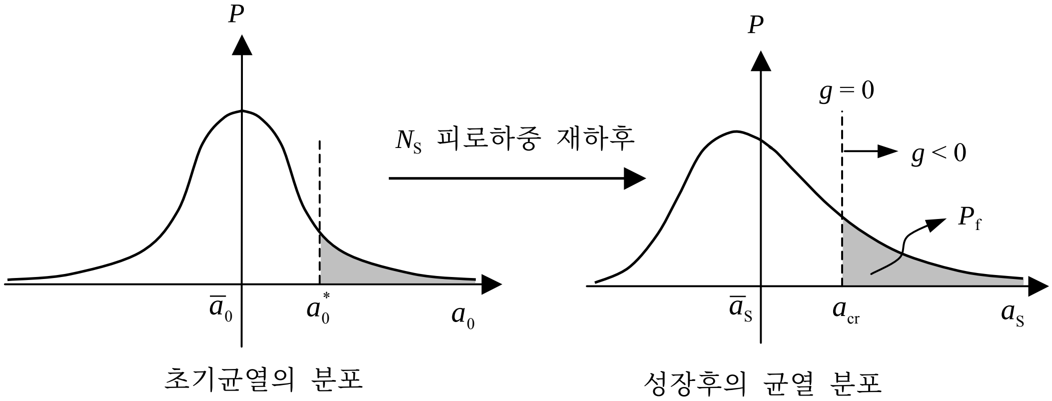


그림 3.12 성장 균열의 길이와 파괴확률의 관계

다. 초기 길이가 a_0^* 일 때 한계상태식은 다음과 같이 0 이 된다.

$$g(a_0^*) = a_{cr} - a_S(a_0^*) = 0 \tag{3.112}$$

이때 그림 3.12 와 같이 a_{cr} 보다 큰 균열의 확률로부터 직접적으로 파괴확률을 산정할 수 있다. 파괴 확률을 산정하기 위해서는 모멘트법으로 산정한 평균, 표준편차, 왜도 등의 확률 모멘트로부터 주어진 문제의 특성에 맞게 성장 후의 균열의 분포를 lognormal 또는 Weibull 분포 등으로 가정하여야 한다.

Monte-Carlo simulation 을 이용하여 파괴확률을 산정할 경우에는 파괴확률의 역수의 10 배 내지 100 배의 자료를 추출하여 각각을 해석하여야 하므로 많은 계산 시간이 소요된다. 일계신뢰도법의 경우에는 주어진 공용피로수명에 대하여 수 차례의 반복계산으로 성장 전의 확률분포에서 파괴에 대한 최빈점(a_0^*)을 찾는다. 따라서 공용피로수명의 변화에 따른 파괴확률을 산정할 경우에는 계산량이 많아지게 된다. 또한 다변수 확률분포에 대해서는 한계상태식을 1 차로 근사하게 된다. 제안된 모멘트법으로 파괴확

률을 산정할 경우에는 균열의 성장에 따른 확률분포로부터 직접적으로 파괴확률을 산정하므로 한번의 해석으로 공용피로수명의 변화에 따른 파괴확률의 변화를 추정할 수 있다. 제안된 방법으로 파괴확률을 산정하기 위해서는 평균, 표준편차, 왜도 등의 고차 확률 모멘트로부터 균열 길이의 확률분포를 적절히 가정하는 것이 선행되어야 한다.

제안된 모멘트법에서 파괴인성을 확률변수로 하는 식 (3.92b)의 한계상태식을 적용하기 위해서는, 균열 성장과정에서 추정된 균열길이 a의 확률분포로부터 K의 확률분포를 추정해야 한다. 응력확대계수 K의 확률분포를 추정하기 위하여 2차의 테일러 급수를 취하면 다음과 같다.

$$K(a) \approx K(\bar{a}) + \left.\frac{\partial K}{\partial a}\right|_{\bar{a}} (a-\bar{a}) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 K}{\partial a^2}\right|_{\bar{a}} (a-\bar{a})^2 \tag{3.113}$$

식 (3.113)에서 2차 민감도 산정의 수치적 어려움으로 인하여, K_{C}의 확률분포로에 대응하는 a_{cr}의 확률분포를 추정하여 다음과 같이 한계상태식을 재 정의하고, a와 a_{cr}의 확률분포로부터 파괴확률을 산정할 수 있다.

$$g(\mathbf{x}) = g(a_0, C, a_{\mathrm{cr}}) = a_{\mathrm{cr}} - a_{\mathrm{S}}(a_0, C) \tag{3.114}$$

$$P_{\mathrm{f}} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\mathrm{cr}}(a)\phi_a(a)da \tag{3.115}$$

여기서, Φ_{cr}과 ϕ_a은 각각 a_{cr}의 누적밀도함수와 균열길이 a의 확률밀도함수이다. 파괴에 대한 임계균열길이 a_{cr}와 파괴인성(K_{C})의 확률분포를 결정하기 위하여 Monte-Carlo simulation 로부터 파괴상태의 a와 K의 확률분포를 이용한다.

3.5 피로 균열 확률 예제

제안된 피로 균열의 확률분포 추정과 파괴확률 산정을 검증하고자 편측 균열판 예제에 대하여 초기 균열 길이와 성장률 계수 C 의 확률분포를 고려하여 확률해석을 수행하였다. 그림 3.13 는 인장 피로 응력 (σ = 16.5 kN/cm^2)을 받는 균열판이다. 균열판은 크기가 가로 20cm, 세로 40cm 이고 좌측 중앙에 초기 균열을 포함하고 있다. 탄성계수와 포아송비는 각각 E = 21,000 kN/cm^2 와 ν = 0.3 이다. Paris-Erdogan 방정식에 사용되는 물성치는 $C = 1.886\times10^{-10}$, m = 3.0 이다. 초기 균열 길이가 하한계 균열길이 0.0336cm 에서부터 0.2cm 까지는 무한 균열판에 대한 해석해를 이용하여 수치해석 하고, 0.2cm 이후부터 이중경계요소법으로 수치해석을 수행한다. 초기 균열 길이와 성장률 계수 C 에 대한 다음의 세가지 확률분포에 대하여 확률 해석을 수행한다.

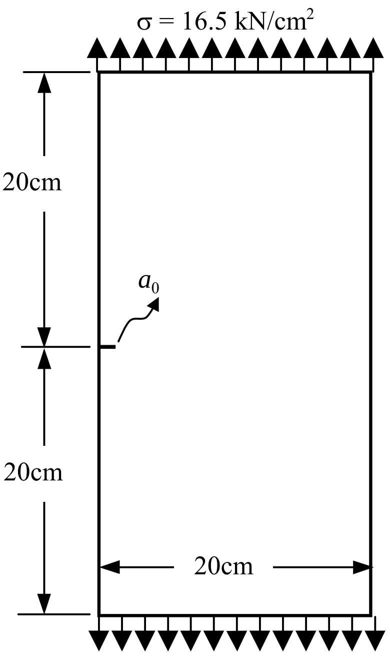


그림 3.13 인장 피로 응력을 받는 편측 균열

Case 1 : 초기 균열 길이가 변동계수 5%의 정규분포

Case 2: 성장률 계수 C 가 변동계수 5%의 정규분포

Case 3: 초기균열 길이와 성장률 계수 C 가 각각 변동계수 3%의 정규분포

그림 3.14 는 예제에 대한 응력확대계수의 민감도를 균열 증분을 변화시켜서 유한 차분법으로 산정한 것이다. 예제에서 초기 균열의 증분 크기는 균열 길이의 0.01% ($\delta a = a \times 10^{-4}$)로 설정하여 응력확대계수의 민감도를 산정하였다.

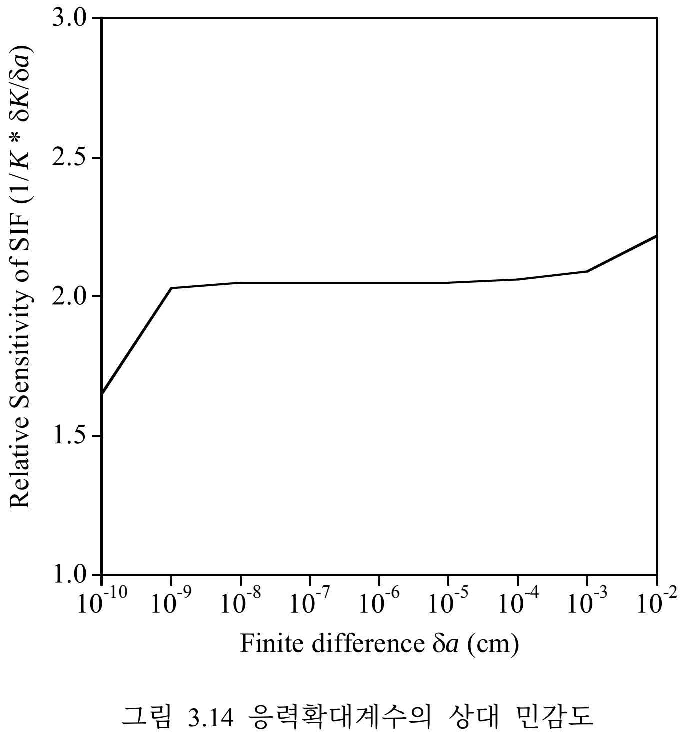


그림 3.14 응력확대계수의 상대 민감도

3.5.1 균열 길이의 확률분포 추정

세가지 확률분포에 대하여 제안된 방법으로 확률분포를 추정하고 Monte-Carlo simulation의 결과와 비교하였다. 2 장의 2.4.2 예제에서 피로응력이 $\sigma = 16.5$ kN/cm^2 인 경우에 미세 균열과 거시균열의 구분이 되는 하한계 균열길이는 $l_0 = 0.0336$ cm 이다. 미세균열은 823,000 회의 피로하중 재하 후에 0.0336 cm 로 성장한다. 거시균열의 확률해석은 무한판 해석과 수치해석으로 구분하여 수행한다. 균열길이가 0.0336cm 에서 0.2cm 까지의 균열 성장은 기하형상함수가 Y_g=1.12 의 일정한 값을 갖는 무한 균열판이라고 가정하여 확률해석을 수행하였다. 이때 약 970,000 회의 피로하중을 제하하였다. 균열 길이의 평균이 0.2cm 일 경우의 확률분포를 추정하기 위하여 세가지 경우에 대하여 각각 10,000 개의 임의자료를 Latin Hypercube Sampling 법으로 추출하여 Monte-Carlo simulation 을 수행하였다. 표 3.1 은 위의 세가지 경우에 대하여 초기 거시균열을 무한 균열판으로 가정하여 Monte-Carlo simulation 으로 산정한 균열 길이의 평균, 표준편차, 왜도이다. 세가지 경우에 대해 균열의 평균이 0.2 cm 일 때의 균열 길이의 변동계수가 각각 12 %, 15 %, 11 % 로서 확률변수의 종류와 분산의 정도에 따라 다른 결과를 보여주고 있다. Case 2 의 경우에는 하한계 균열 길이에서 균열 길이의 분산이 0 이지만, 약 97 만회의 피로 하중 재하 후에는 균열 길이의 분산이 가장 커졌다. 성장률 계수 C 가 균열의 성장에 미치는 영향이 매우 큰 것으로 판단된다.

균열의 길이가 0.2cm 보다 큰 거시 균열에 대해서는 균열판을 이중경계요소로 이산화하여 피로 균열 성장해석을 수행하여 확률분포를 추정하였다. Monte-Carlo simulation 과 제안된 모멘트법으로 40 만회의 추가적인 피로하중을 재하하고 성장 후의 균열 길이의 확률분포를 산정하였다. 피로하중을 ΔN = 20,000 씩 20 회 분할하여 각각의 하중 재하 단계마다 성장 해석과 확률 해석을 수행하였다. Monte-Carlo simulation 에서는 표

3.1 에 주어진 거시 균열 길이의 분포를 정규분포로 가정하여 10,000 개의 임의 자료를 추출하였다. 제안된 모멘트법에서는 균열 길이에 대한 1 차 및 2 차의 테일러 급수로 평균, 표준편차, 왜도를 추정하였다.

그림 3.15, 3.16, 3.17 은 각각 220 만회까지의 피로하중 재하에 따른 균열길이의 평균, 표준편차, 왜도에 대한 Monte-Carlo simulation 의 결과를 보여준다. 이때 미세균열 영역에서는 $N = 0$ 일때의 균열 길이의 평균, 표준편차, 왜도를 영으로 보고 하한계 균열 길이까지 선형으로 성장한다고 가정하여 점선으로 표시하였다. 그림 3.15 에서 세가지 경우에 대해 균열 길이의 평균은 거의 일정하지만, 그림 3.16 과 그림 3.17 의 표준편차와 왜도는 균열 성장에 따라 차이가 커지고 있다. 그림 3.18 는 피로하중 재하에 따른 변동계수의 변화를 보여주고 있다. 성장률 계수 C 의 변동계수가 5%인 Case 2 의 경우가 균열 성장에 따른 균열 길이의 변동계수의 변화가 가장 크다.

표 3.1 초기 거시균열과 무한 균열판 해석 후의 균열 길이의 확률 분포

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th>Case 1</th><th>Case 2</th><th>Case 3</th></tr>
<tr><td rowspan="2">초기 균열
(정규분포)</td><td>평균 (cm)</td><td>0.0336</td><td>0.0336</td><td>0.0336</td></tr>
<tr><td>변동계수</td><td>5 %</td><td>0 %</td><td>3 %</td></tr>
<tr><td rowspan="5">MCS 해석결과
(무한 균열판)</td><td>평균 (cm)</td><td>0.2</td><td>0.2</td><td>0.2</td></tr>
<tr><td>표준편차 (cm)</td><td>0.0244</td><td>0.0292</td><td>0.0228</td></tr>
<tr><td>왜도</td><td>0.324</td><td>0.680</td><td>0.474</td></tr>
<tr><td>변동계수</td><td>12 %</td><td>15 %</td><td>11 %</td></tr>
<tr><td>하중 재하 (N_{inf})</td><td>969,300</td><td>966,300</td><td>968,800</td></tr>
</table>

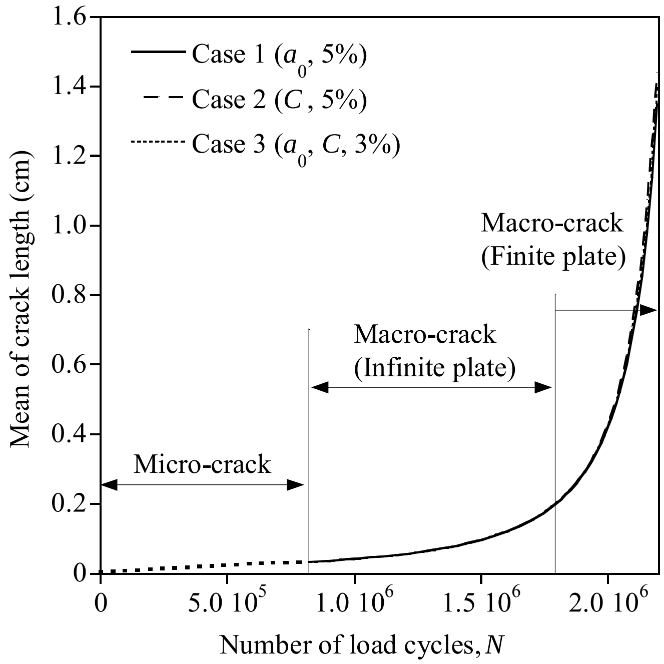


그림 3.15 MCS 로 추정한 균열 길이의 평균

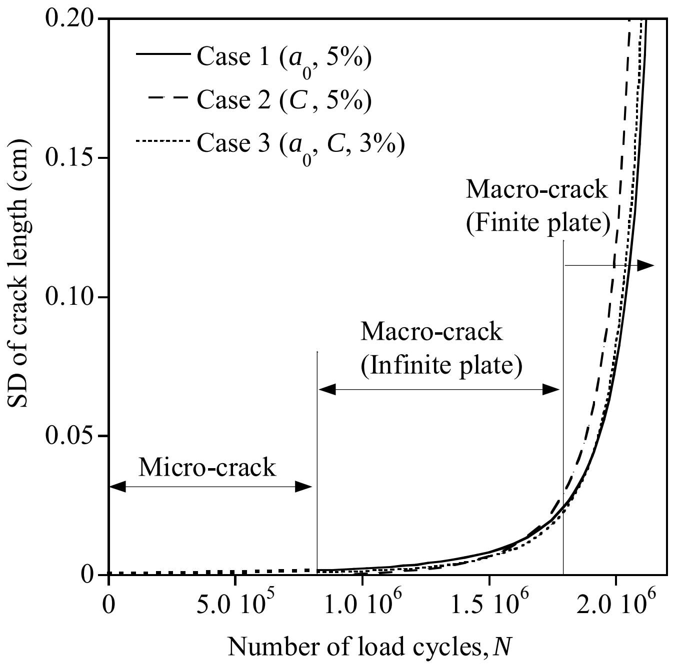


그림 3.16 MCS 로 추정한 균열 길이의 표준편차

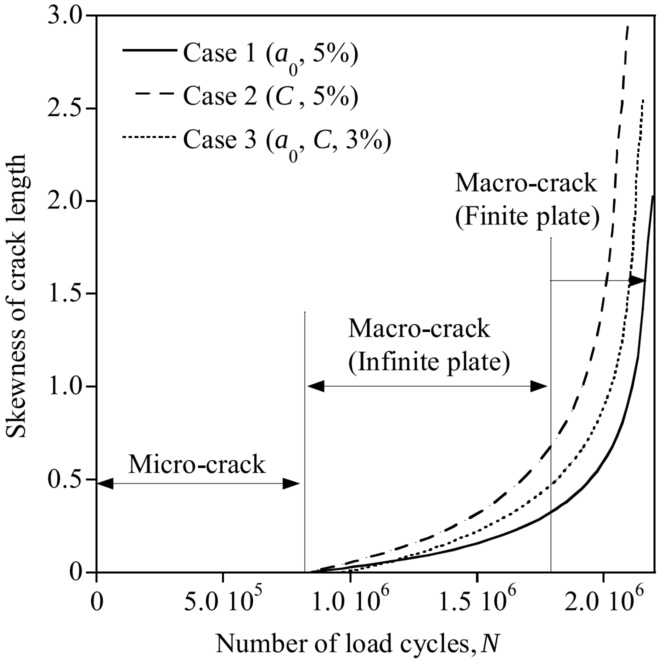


그림 3.17 MCS 로 추정한 균열 길이의 왜도

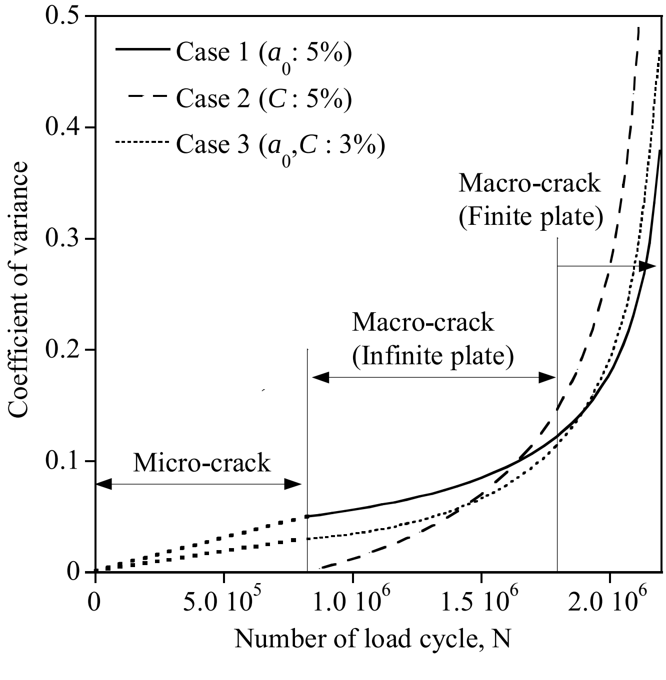


그림 3.18 MCS 로 추정한 균열 길이의 변동계수

(a) Case 1 : 초기 균열 길이가 변동계수 5%의 정규분포

제안된 1 차와 2 차의 테일러 급수를 이용한 모멘트법과 Monte-Carlo simulation 으로 균열 성장에 따른 균열 길이의 평균과 표준편차, 왜도를 추정하였다. 표 3.2 는 성장 후의 균열 분포에 대한 제안된 모멘트법과 Monte-Carlo simulation 의 결과를 비교한 것이다. 변동계수가 약 30%인 18 번째의 하중 재하 단계와 마지막 하중 재하 단계의 균열 길이의 평균, 표준편차, 왜도를 비교 하였다. 제안된 모멘트법의 경우 높은 차수의 테일러 급수를 이용할수록 더 정확한 해석 결과를 보여준다. 2 차의 테일러 급수를 이용할 경우 변동계수 30%인 18 번째 하중 재하 후의 평균과 표준편차는 오차가 1% 이내이고 왜도는 15%의 오차가 발생한다. 변동계수가 38%인 마지막 하중 재하 후에는 평균에서는 0.1 %, 표준편차에서는 1.4 %, 왜도에서는 26 %의 차이가 발생하였다. 고차의 모멘트일수록 Monte-Carlo simulation 의 결과와 차이가 조금씩 커짐을 알 수 있다. 그림 3.19, 3.20, 3.21 은 각각 균열 성장에 따른 평균과 표준편차 그리고 왜도의 변화를 보여 주고 있다. 그림에서 Monte-Carlo simulation 이 점선으로 표시된 부분은 일부 균열이 파괴상태에 도달하여 균열의 길이를 산정할 수 없기 때문에 파괴된 자료를 제한 결과이다. ΔN = 20,000 씩 19 회 재하에서 10,000 개의 균열 중에서 1 개의 균열이, 20 회 재하에서 9 개의 균열이 파괴에 도달하였다. 왜도의 경우에는 1 차의 테일러 급수로는 추정이 거의 불가능하고, 2 차의 테일러 급수를 이용한 경우에도 변동계수가 30% 보다 커지면서 차이가 급격히 커지기 시작한다.

그림 3.22 는 성장후의 균열 길이를 정규분포, 삼변수 대수정규분포, Weibull 분포의 세가지 확률분포로 가정하였을 경우, Kolmogorov-Smirnov test 의 결과를 보여주고 있다. 성장 후의 균열 길이의 확률분포는 변동계수가 30%이하인 N = 2,150,000 회까지는 유의수준 5%에서 대수정규분포라고 가정할 수 있다. 초기 균열의 확률분포가 정규분포이기

때문에 초기 성장과정에서는 균열 길이의 확률분포가 정규분포에 가깝지만, 균열이 성장하면서 대수정규분포에 가까워짐을 K-S test 로부터 확인할 수 있다.

그림 3.23 은 18 번째와 20 번째 피로 하중 재하 후의 Monte-Carlo simulation 으로 얻어진 돗수분포와 모멘트법으로 산정한 표 3.2 의 평균, 표준편차, 왜도로부터 추정한 대수정규분포의 확률밀도함수를 비교한 것이다. 변동계수가 30%인 18 번째 하중 재하 단계에서는 제안된 모멘트법으로 추정한 결과가 Monte-Carlo simulation 의 돗수분포와 잘 일치하고 있으나, 20 번째 하중 재하 단계에서는 차이가 벌어졌음을 확인 할 수 있다. 초기 균열 길이가 확률 변수인 Case 1 의 경우에 제안된 이계삼차모멘트법은 변동계수가 대략 30% 까지는 확률분포를 잘 근사한다고 판단된다.

표 3.2 균열 성장후의 평균, 표준편차, 왜도 (Case 1)

		Monte-Carlo simulation	모멘트법 (1st-order)	모멘트법 (2nd-order)
$N = 2,152,400$ (18th step)	평균 (cm)	0.980	0.945	0.980
	표준편차 (cm)	0.290	0.258	0.289
	왜도	0.142	0.324	0.121
	변동계수	30 %	27 %	29 %
$N = 2,192,400$ (20th step)	평균 (cm)	1.347	1.264	1.348
	표준편차 (cm)	0.511	0.411	0.504
	왜도	2.024	0.324	1.503
	변동계수	38 %	33 %	37 %

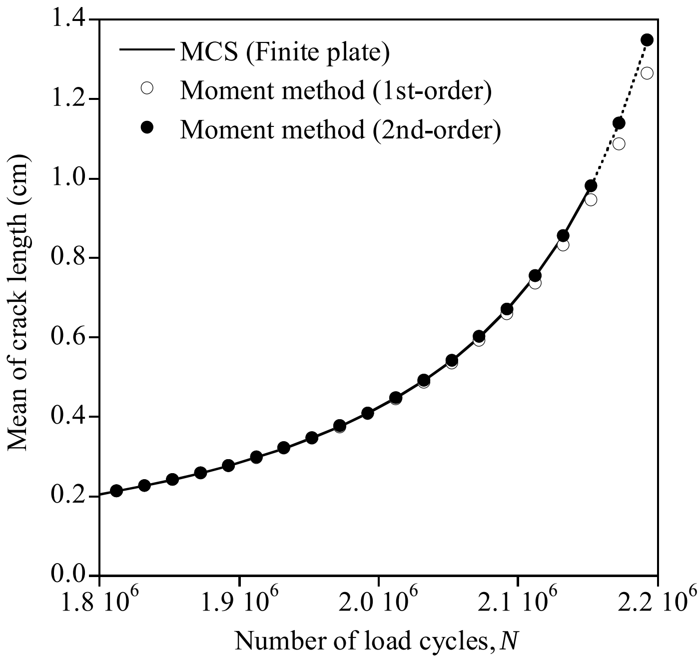


그림 3.19 균열 성장에 따른 균열 길이의 평균 (Case 1)

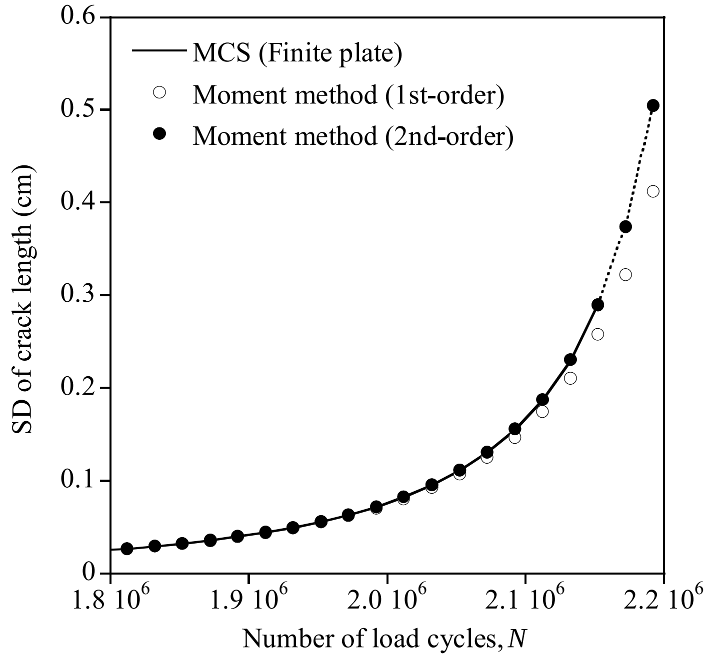


그림 3.20 균열 성장에 따른 균열 길이의 표준편차 (Case 1)

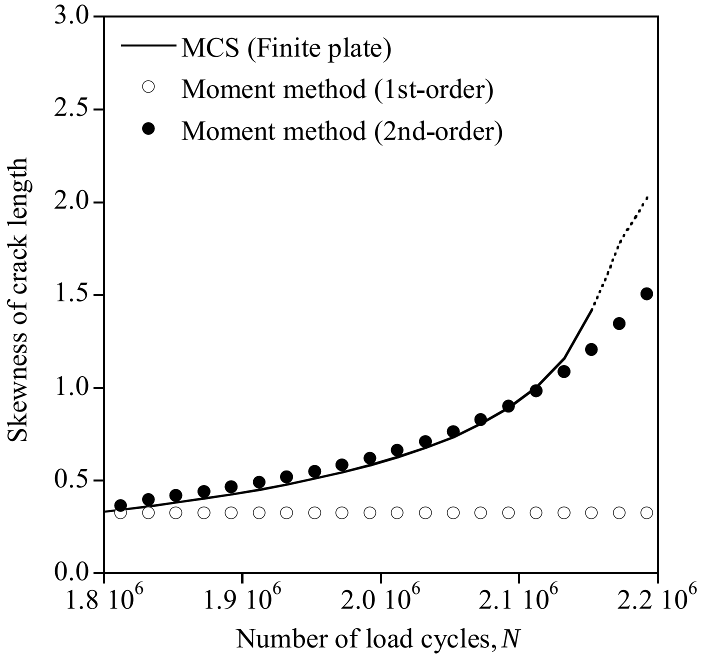


그림 3.21 균열 성장에 따른 균열 길이의 왜도 (Case 1)

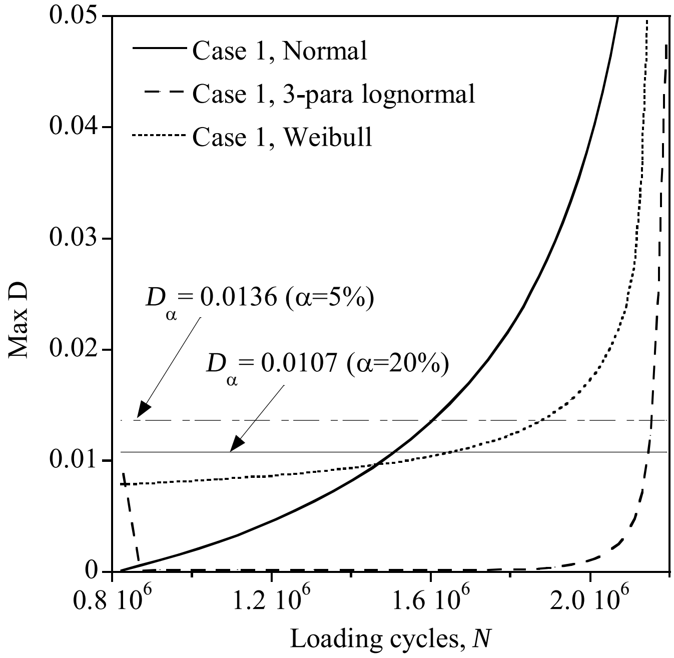


그림 3.22 성장 후 균열 길이의 확률분포에 대한 K-S Test (Case 1)

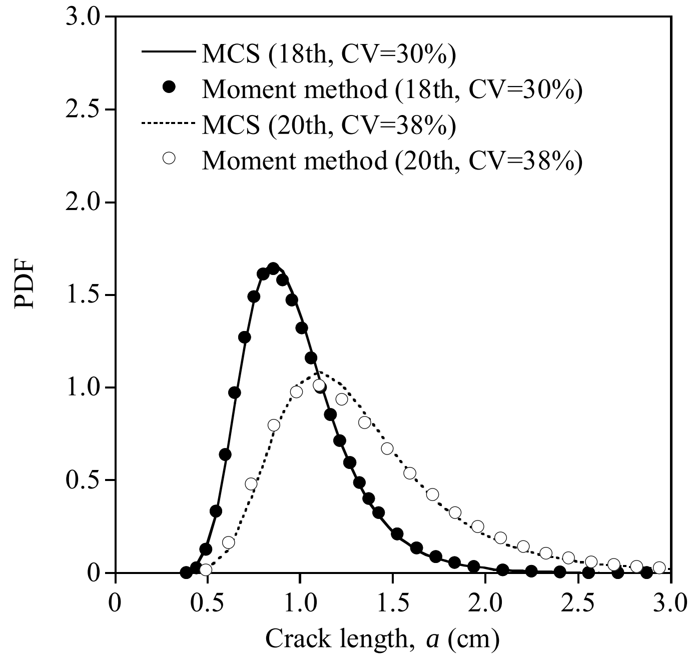


그림 3.23 성장 후 균열 길이의 확률밀도함수 (Case 1)

(b) Case 2 : 성장률 계수 C 가 변동계수 5%의 정규분포

Case 2 의 확률분포를 갖는 거시 균열에 대하여 제안된 모멘트법과 Monte-Carlo simulation 으로 균열 성장에 따른 균열 길이의 평균과 표준편차, 왜도를 추정하였다. 표 3.3 은 성장 후의 균열 분포에 대한 제안된 모멘트법과 Monte-Carlo simulation 의 결과를 비교한 것이다. 2 차 테일러 급수를 이용한 경우 변동계수가 31%인 12 번째 하중 재하 단계에서 평균, 표준편차 왜도는 각각 0.2%, 3 %, 20%의 차이가 발생하고, 마지막 하중 재하 단계에서는 평균, 표준편차, 왜도에서 각각 17 %, 66 %, 26 %의 차이가 발생하였다. 그림 3.24, 3.25, 3.26 은 각각 균열 성장에 따른 균열의 평균과 표준편차, 왜도의 변화를 도시한 것이다. 그림에서 점선은 10,000 개의 자료 중에서 구조물이 파괴된 자료를 제외한 결과이다. ΔN = 20,000 씩 14 회 재하에서 처음으로 1 개의 균열이 파괴상태에 도달하였고, 최종적으로는 412 개의 자료가 파괴상태에 도달하였다. N = 2,029,400 이후부터 변동계수가 30%를 넘어서고 이후부터는 추정한 평균과 표준편차가 Monte-Carlo simulation 의 결과와 차이가 커지기 시작한다.

그림 3.27 는 성장후의 균열 길이를 정규분포, 삼변수 대수정규분포, Weibull 분포의 세가지 확률분포로 가정하였을 경우, Kolmogorov-Smirnov Test 의 결과를 보여주고 있다. 성장 후의 균열 길이의 확률분포는 변동계수가 30%이하인 200 만회까지는 유의수준 5%에서 대수정규분포라고 가정할 수 있다. 초기 균열의 확률분포가 정규분포이기 때문에 초기 성장과정에서는 균열 길이의 확률분포가 정규분포에 가깝지만, 균열이 성장하면서 대수정규분포에 가까워짐을 K-S test 로부터 확인할 수 있다.

그림 3.28 은 12 번째와 20 번째 피로 하중 재하 후의 Monte-Carlo simulation 으로 얻어진 돗수분포와 모멘트법으로 산정한 표 3.2 의 평균, 표준편차, 왜도로부터 추정한 대수정규분포의 확률밀도함수를 비교한 것이다. 변동계수가 31%인 12 번째 하중 재하

단계에서는 제안된 모멘트법으로 추정한 결과가 Monte-Carlo simulation 의 돗수분포와 잘 일치하고 있으나, 20 번째 하중 재하 단계에서는 변동계수가 61%이고 추정된 결과를 신뢰할 수 없을 만큼 차이가 벌어졌다.

표 3.3 균열 성장후의 평균, 표준편차, 왜도 (Case 2)

		Monte-Carlo simulation	모멘트법 (1^{st}-order)	모멘트법 (2^{nd}-order)
N = 2,029,400 (12^{th} step)	평균 (cm)	0.505	0.486	0.504
	표준편차 (cm)	0.159	0.138	0.155
	왜도	1.834	0.541	1.461
	변동계수	31 %	28 %	31 %
N = 2,189,400 (20^{th} step)	평균 (cm)	1.438	1.264	1.676
	표준편차 (cm)	0.871	0.694	1.450
	왜도	2.042	0.476	1.514
	변동계수	61 %	55 %	87 %

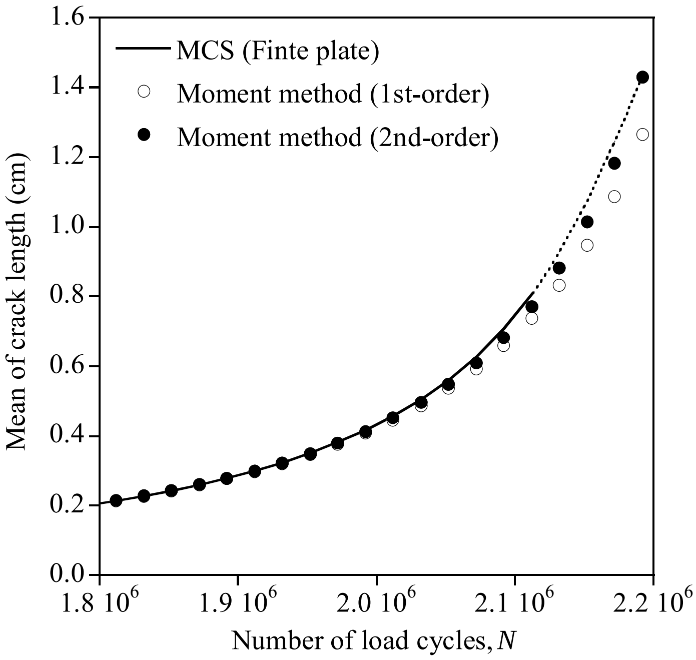


그림 3.24 균열 성장에 따른 균열 길이의 평균 (Case 2)

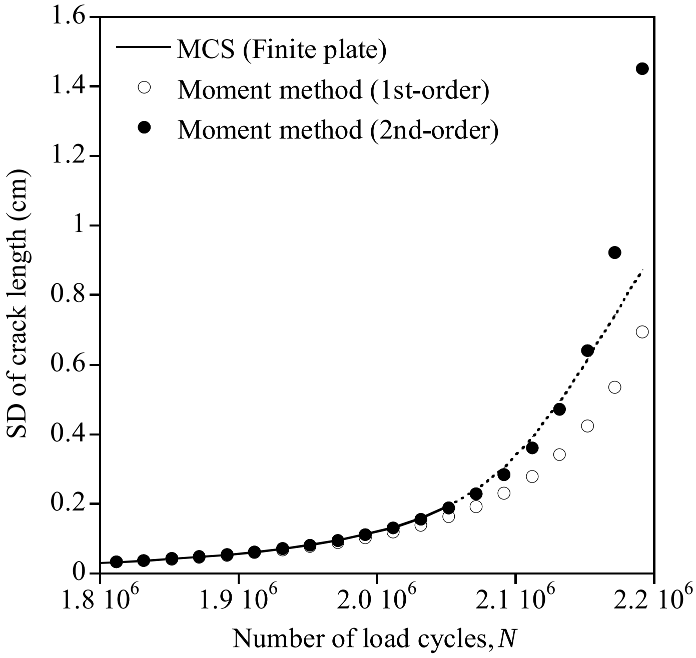


그림 3.25 균열 성장에 따른 균열 길이의 표준편차 (Case 2)

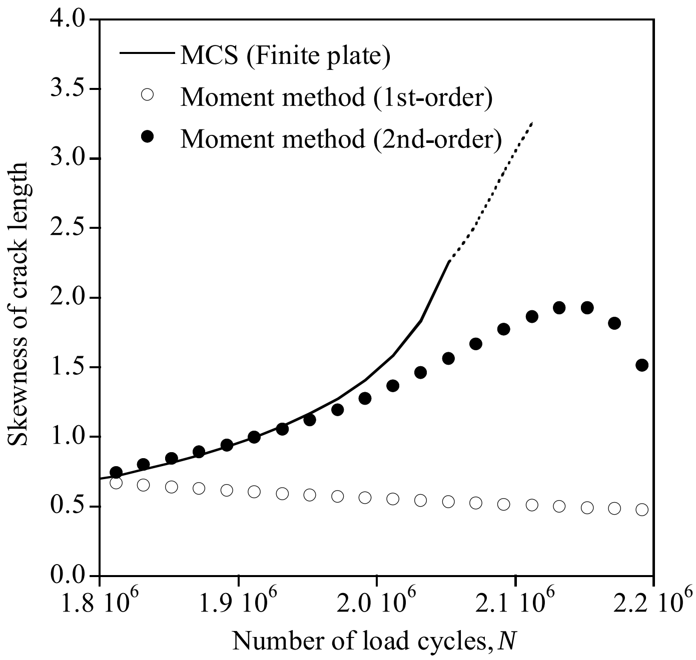


그림 3.26 균열 성장에 따른 균열 길이의 왜도 (Case 2)

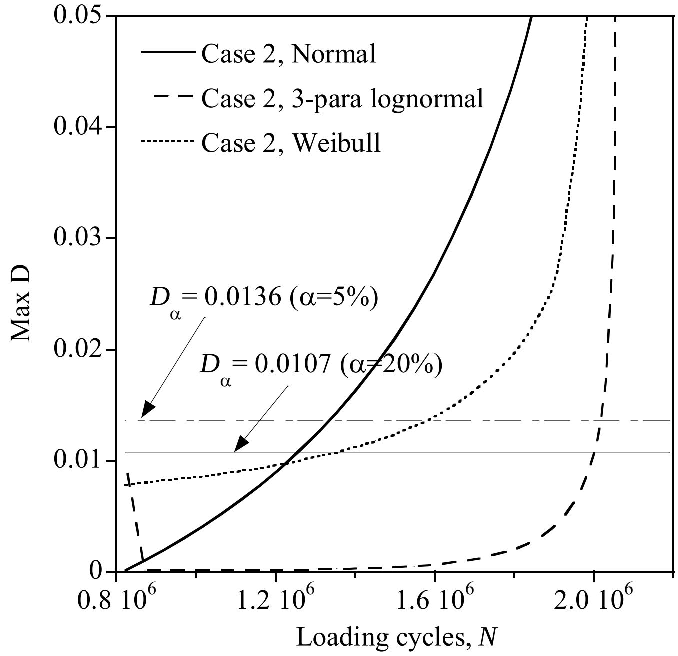


그림 3.27 성장 후 균열 길이의 확률분포에 대한 K-S test (Case 2)

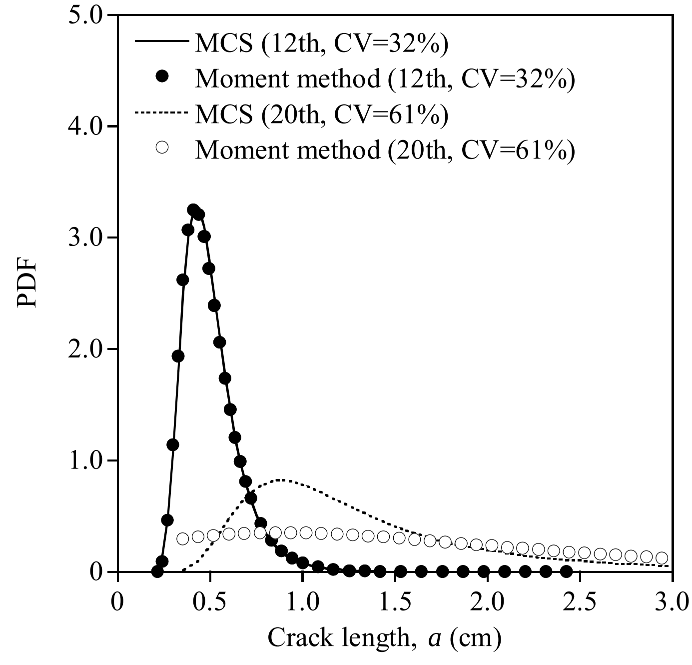


그림 3.28 성장 후 균열 길이의 확률밀도함수 (Case 2)

(c) Case 3 : 초기균열 길이와 성장률 계수 *C* 가 각각 변동계수 3%의 정규분포

모멘트법과 Monte-Carlo simulation 으로 추정된 평균과 표준편차, 왜도를 균열 성장에 따라 그림 3.29, 3.30, 3.31 에 각각 도시하였다. 그림에서 점선은 10,000 개의 자료 중에서 구조물이 파괴된 자료를 제외한 결과이다. 18 번째 성장 단계에서 처음으로 4 개의 균열이 파괴상태에 도달하였고, 최종적으로는 71 개의 자료가 파괴상태에 도달하였다. 표 3.4 는 성장 후의 균열 분포에 대한 제안된 모멘트법과 Monte-Carlo simulation 의 결과를 비교한 것이다. 2 차 테일러 급수를 이용한 경우 변동계수가 30%인 16 번째 하중 재하 단계에서 평균, 표준편차 왜도는 각각 0.1 %, 2 %, 21 %의 차이가 발생하고, 마지막 하중 재하 단계에서는 변동계수가 47%이고 이때의 평균, 표준편차, 왜도는 각각 1 %, 5 %, 24 %의 차이가 발생하였다.

그림 3.32 는 성장후의 균열 길이를 정규분포, 삼변수 대수정규분포, Weibull 분포의 세가지 확률분포로 가정하였을 경우, Kolmogorov-Smirnov test 의 결과를 보여주고 있다. 성장 후의 균열 길이의 확률분포는 변동계수가 30%이하인 210 만회까지는 유의수준 5%에서 대수정규분포라고 가정할 수 있다. 초기 균열의 확률분포가 정규분포이기 때문에 초기 성장과정에서는 균열 길이의 확률분포가 정규분포에 가깝지만, 균열이 성장하면서 대수정규분포에 가까워진다.

그림 3.33 은 16 번째와 20 번째 피로 하중 재하 후의 Monte-Carlo simulation 으로 얻어진 돗수분포와 표 3.2 의 모멘트법으로 산정한 평균, 표준편차, 왜도로부터 추정한 대수정규분포의 확률밀도함수를 비교한 것이다. 변동계수가 30%인 16 번째 하중 재하 단계에서는 제안된 모멘트법으로 추정한 결과가 Monte-Carlo simulation 의 돗수분포와 잘 일치하고 있으나, 20 번째 하중 재하 단계에서는 차이가 벌어졌음을 알 수 있다.

표 3.4 균열 성장후의 평균, 표준편차, 왜도 (Case 3)

		Monte-Carlo simulation	모멘트법 (1^{st}-order)	모멘트법 (2^{nd}-order)
N = 2,111,900 (16^{th} step)	평균 (cm)	0.766	0.737	0.765
	표준편차 (cm)	0.228	0.197	0.223
	왜도	1.693	0.398	1.341
	변동계수	30 %	27 %	29 %
N = 2,191,900 (20^{th} step)	평균 (cm)	1.394	1.264	1.410
	표준편차 (cm)	0.653	0.484	0.687
	왜도	2.300	0.380	1.757
	변동계수	47 %	30 %	49 %

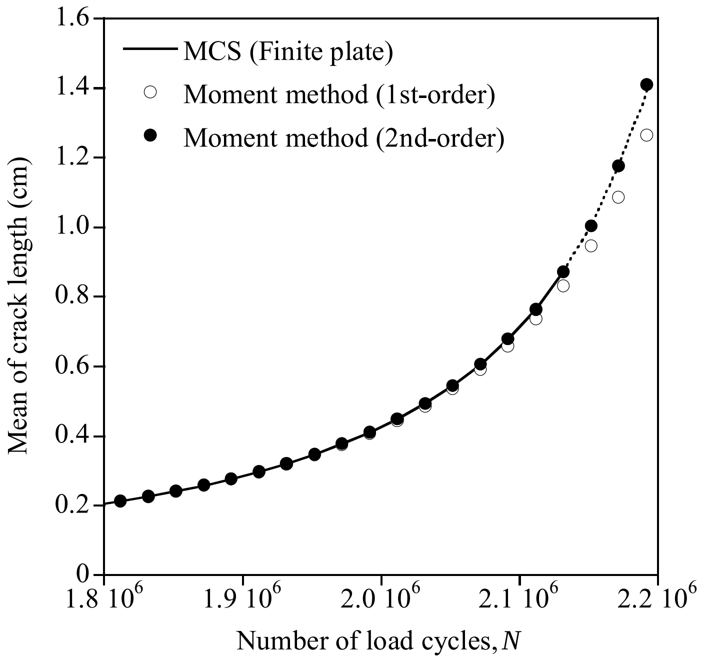


그림 3.29 균열 성장에 따른 균열 길이의 평균 (Case 3)

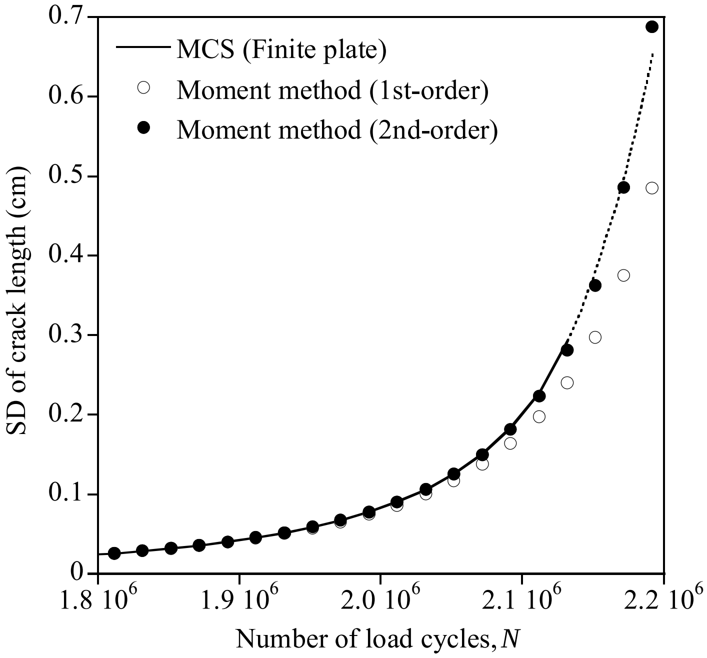


그림 3.30 균열 성장에 따른 균열 길이의 표준편차 (Case 3)

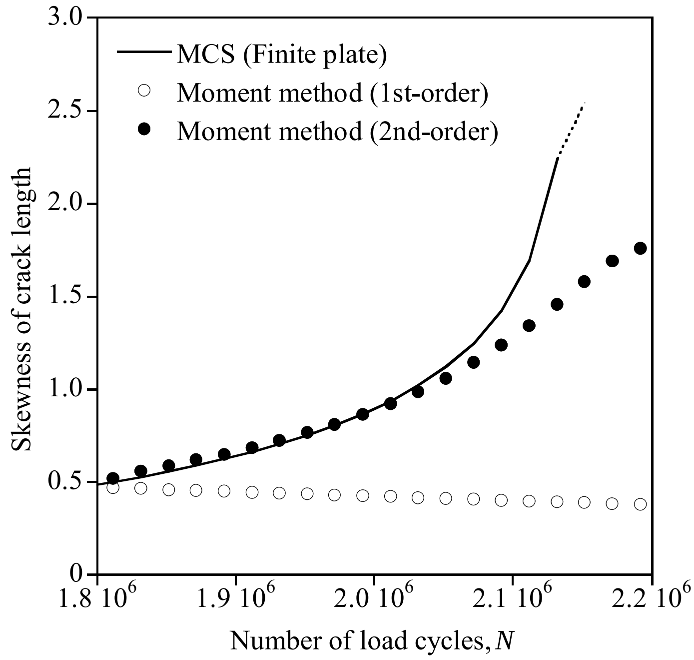


그림 3.31 균열 성장에 따른 균열 길이의 왜도 (Case 3)

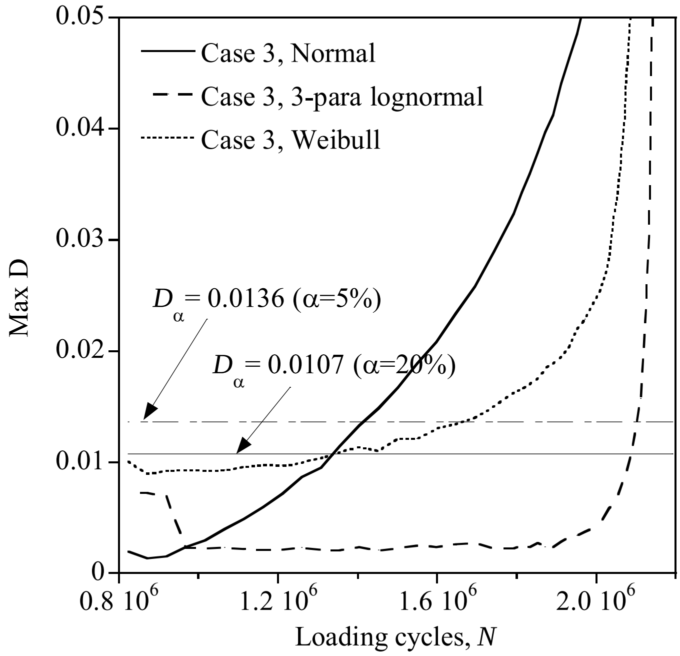


그림 3.32 성장 후 균열 길이의 확률분포에 대한 K-S test (Case 3)

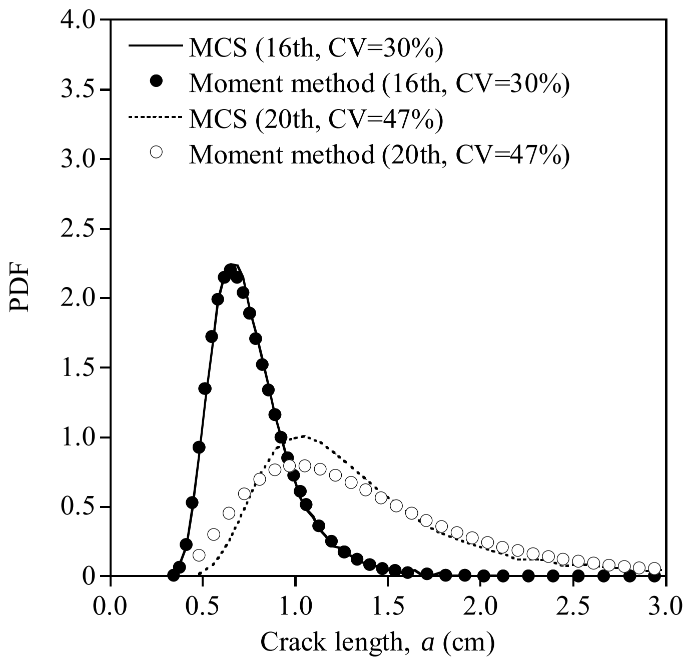


그림 3.33 성장 후 균열 길이의 확률밀도함수 (Case 3)

3.5.2 피로-강도 곡선 추정

2 장의 2.4.2 절 예제에 대하여 Threshold K_{th}와 한계 피로응력 σ_e 그리고 성장률 계수 C의 확률분포를 대수정규분포로 가정하여 피로수명의 확률분포를 추정하였다. 표 1 은 2.4.2 절의 확정론적인 해석 결과이고, 표 3.5, 3.6, 3.7 는 각각 물성치들의 변동계수를 동일하게 3%, 5%, 10%로 가정했을 때의 피로수명의 확률분포이다. 95% 신뢰한계선은 피로수명의 확률분포를 삼변수 대수정규분포로 가정하여 산정하였다. 그림 3.34 는 물성치의 변동계수에 따른 95% 신뢰한계선의 변화를 도시한 것이다. 변동계수 5%에서 설계치와 비슷한 피로-강도곡선을 얻었다.

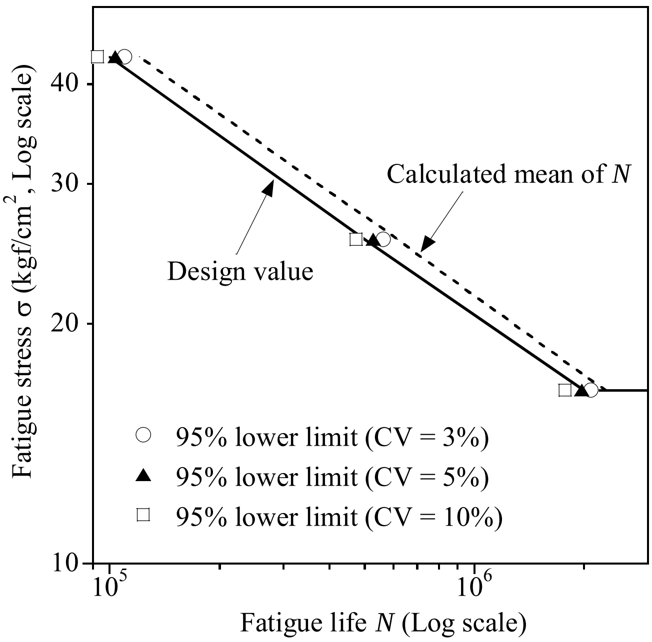


그림 3.34 물성치의 변동계수에 따른 피로수명의 95% 신뢰한계선의 변화

표 3.5 피로수명의 확률분포 (CV = 3 %)

	Case 1 (σ = 16.5 kN/cm^2)	Case 2 (σ = 25.5 kN/cm^2)	Case 3 (σ = 43.3 kN/cm^2)
평균	2,307,000	618,000	121,000
표준편차	125,000	33,900	6,800
왜도	0.007	0.008	0.011
95% 신뢰한계선	2,1010,000	563,000	110,000

표 3.6 피로수명의 확률분포 (CV = 5 %)

	Case 1 (σ = 16.5 kN/cm^2)	Case 2 (σ = 25.5 kN/cm^2)	Case 3 (σ = 43.3 kN/cm^2)
평균	2,322,000	623,000	122,000
표준편차	209,000	56,500	11,400
왜도	0.010	0.012	0.018
95% 신뢰한계선	1,979,000	530,000	104,000

표 3.7 피로수명의 확률분포 (CV = 10 %)

	Case 1 (σ = 16.5 kN/cm^2)	Case 2 (σ = 25.5 kN/cm^2)	Case 3 (σ = 43.3 kN/cm^2)
평균	2,396,000	643,000	126,000
표준편차	418,000	113,000	22,800
왜도	0.528	0.532	0.546
95% 신뢰한계선	1776,000	475,000	92,700

3.5.3 파괴확률 산정과 피로 수명 평가

세가지 확률분포에 대하여 제안된 모멘트법과 일계신뢰도법으로 산정한 파괴확률을 비교하였다. 일계신뢰도법의 경우에는 주어진 공용피로수명에 대하여 4~6 회의 반복계산으로 초기 확률분포에서 파괴에 대한 최빈점을 찾았다. 약 30 개의 연속적인 공용피로수명에 대하여 고려하였고 대략 150 회의 피로 균열 성장 해석을 수행하였다. 제안된 모멘트법을 이용한 파괴확률 산정에서는 한번의 성장해석을 수행한다. 피로 하중은 $\Delta N = 20{,}000$ 씩 30 회 이상 재하 하였다. 최소 균열 증분을 $\Delta a_{\min} = 0.01$ cm 로, 최대 균열 증분을 $\Delta a_{\max} = 0.05$ cm 로 설정하여 균열 성장량이 최소 균열 증분보다 작을 때에는 ΔN 을 두 배로 증가시키고, 최대 균열 증분보다 클 경우에는 ΔN 을 절반으로 줄여서 균열을 성장 시켰다. 제안된 모멘트법에서는 성장 후의 균열의 분포를 삼변수 대수정규분포로 가정하여 파괴확률을 산정한다. 0.2cm 의 초기 균열이 N = 450,000 의 하중 재하로 2.06cm 까지 성장하면 응력확대계수가 주어진 파괴인성 50 kN/cm$^{1.5}$ 에 도달한다. 그림 3.35 은 균열 성장에 따른 변동계수의 변화를 보여 주는데, 파괴 시에 변동계수는 Case 1, 2, 3 에 대하여 각각 57 %, 109 %, 82 %이고, 이후로 변동계수는 급격히 커지는 것을 확인할 수 있다. 파괴인성(K_C)의 확률분포를 고려하기 위하여 임계균열길이 a_{cr} 의 확률분포를 결정해 주어야 한다. 표 3.8 은 무한 균열판에 대하여 Monte-Carlo simulation 으로 추정한 파괴인성과 임계 균열길이의 확률분포이다. 파괴인성의 확률분포를 고려하는 경우에 일계신뢰도법과 제안된 모멘트법에서는 각각 표 3.5 의 파괴인성과 임계균열길이의 확률분포를 이용하였다.

그림 3.36, 3.37, 3.38 는 각각 Case 1, 2, 3 에 대한 파괴확률을 도시한 것이다. 파괴인성의 확률분포를 고려한 경우 또는 임계균열길이의 확률분포를 고려한 경우에는 고려하지 않을 경우보다 파괴확률이 커진다. 그림에서 제안된 모멘트법은 일계신뢰도법에

비하여 해의 정도는 떨어지지만 주어진 공용 피로수명에 N_s 에 대하여 같은 정도(order)의 신뢰도 또는 파괴확률을 보여주고 있다. Case 1 의 경우 대수정규분포로부터 추정한 파괴확률이 일계신뢰도법의 결과와 잘 일치하고 있다. 그림 3.37 의 Case 2 의 경우에는 균열 길이의 분산이 가장 빠르게 커지고 변동계수가 커져서 추정된 확률분포가 가장 부정확하기 때문에 산정한 파괴확률이 일계신뢰도법의 결과와 가장 많은 차이를 보여주고 있다.

그림 3.39 는 주어진 신뢰도 또는 파괴확률에 도달하는 피로수명을 일계신뢰도법과 제안된 모멘트법으로 산정했을 때의 피로 수명의 상대적인 차이를 보여주고 있다. 파괴확률 0.01% 에 대한 피로수명의 차이는 Case 1, 2, 3 에서 각각 3.2 %, 7.7 %, 5.1 % 이고, 파괴확률이 커질수록 그 차이가 작아진다. 제안된 모멘트법은 일계신뢰도법과 비교하여 주어진 파괴확률에 대한 피로수명을 잘 추정하고 있음을 확인할 수 있다.

표 3.8 파괴인성과 임계균열길이의 확률분포

	파괴인성 (K_C)	임계균열길이(a_{cr})
평균	51.15 kN/cm$^{1.5}$	2.076 cm
표준편차	5.812 kN/cm$^{1.5}$	0.342 cm
왜도	0.687	0.535

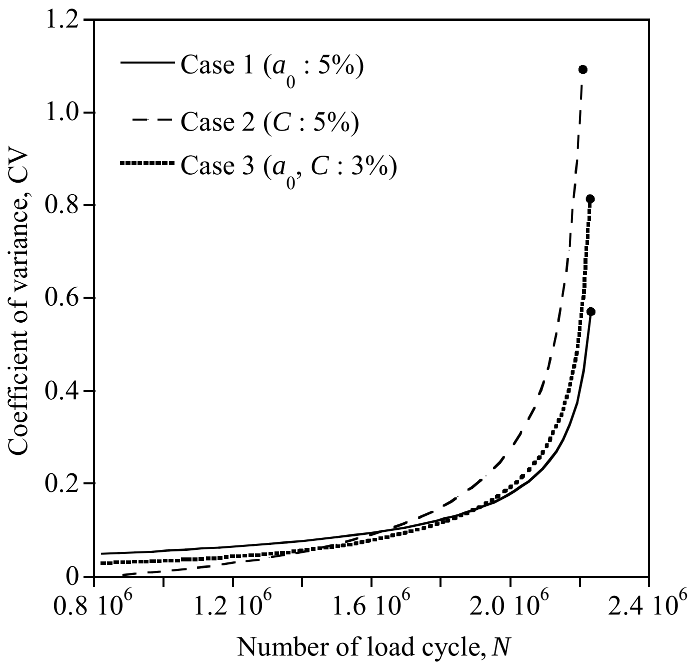


그림 3.35 균열 성장에 따른 변동계수의 변화와 파괴상태

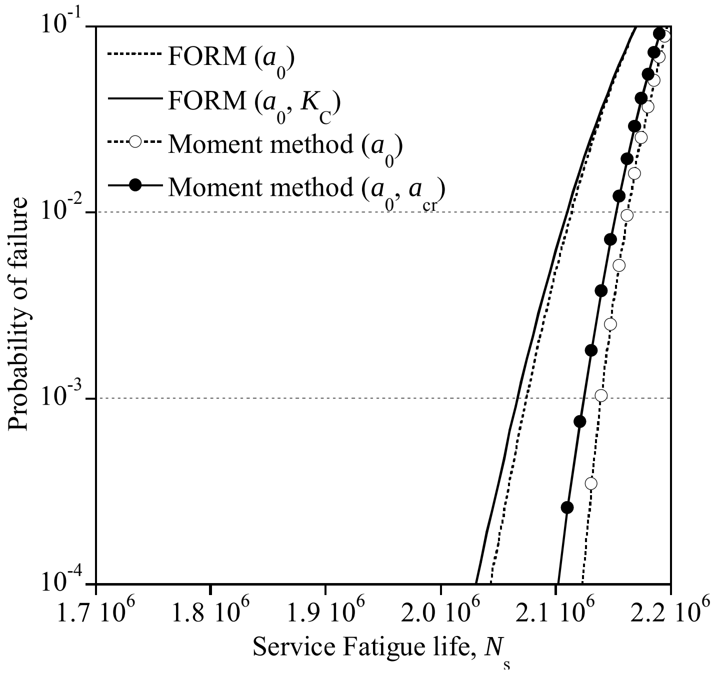


그림 3.36 공용피로수명의 증가에 따른 파괴확률 (Case 1)

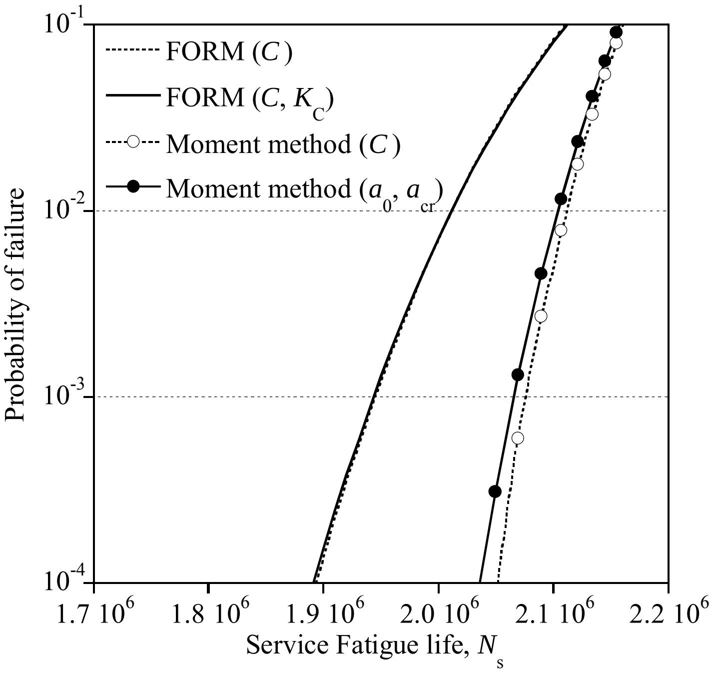


그림 3.37 공용피로수명의 증가에 따른 파괴확률 (Case 2)

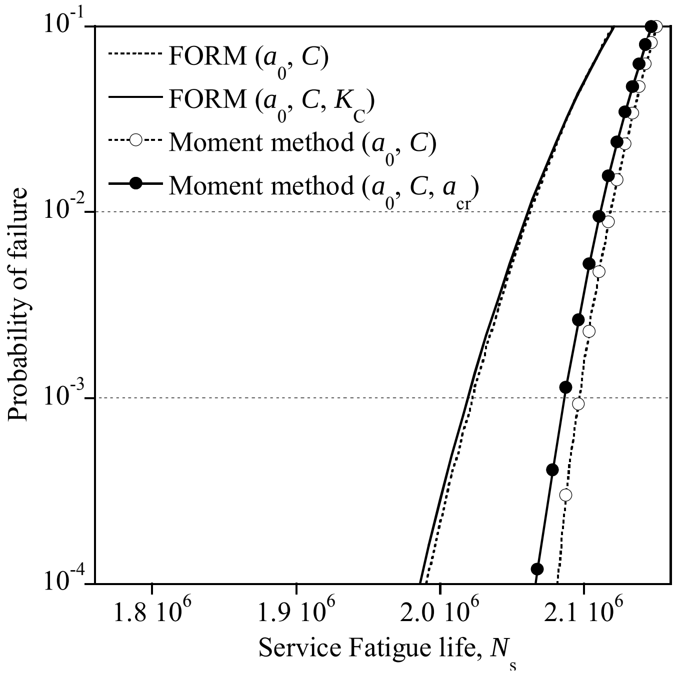


그림 3.38 공용피로수명의 증가에 따른 파괴확률 (Case 3)

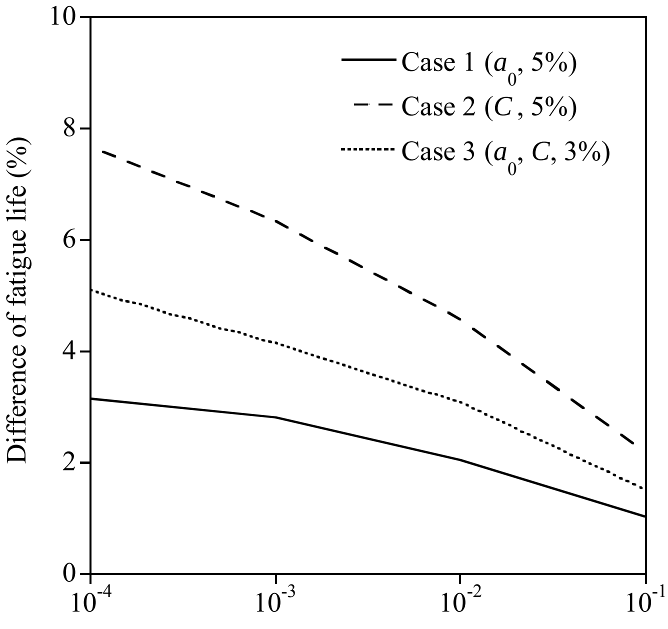


그림 3.39 일계신뢰도법과 제안된 모멘트법의 피로수명의 차이

4. 결론

이 논문에서는 혼합모드의 피로 균열 성장을 수치모사하기 위하여 할선법에 기초한 반복적인 균열 성장 모델링 기법을 제안하였다. 이계삼차모멘트법을 이용하여 피로 성장에 따른 균열 길이의 확률분포를 추정하고, 이로부터 주어진 신뢰도 또는 파괴확률에 대한 피로수명을 산정하였다. 또한 미세균열과 거시균열에 대한 전체 피로 수명의 확률분포를 추정하여 피로-강도 곡선을 수치적을 도출하였다.

피로 균열의 성장 해석

이중경계요소법을 도입하여 2 차원 균열체를 수치해석 하였다. 이중경계요소법은 균열면의 한쪽 경계면에 대해서는 변위 경계적분식을, 마주보는 경계면에 대해서는 표면력 경계적분식을 사용하고 균열면을 불연속 경계요소로 이산화 한다. 균열 선단의 응력의 특이성을 표현할 수 있도록 균열 선단을 불연속 특이 요소로 이산화 하였다. 직선의 경계요소에서는 변위와 표면력 경계적분식을 해석적으로 직접 적분을 수행하였다.

이중경계요소법에서는 혼합모드의 응력확대계수 산정법으로서 *J*-integral 에 기초한 에너지법을 적용할 수 없음을 밝혔다. 이중경계요소법에서는 균열면을 불연속 경계요소로 이산화하기 때문에, 요소와 요소 사이에서 변위장의 불연속이 발생하고 균열면에서 에너지밀도를 정의할 수 없다. 변위 외삽법을 적용하여 혼합모드의 응력확대계수를 산정하였다.

주어진 피로하중에 대한 균열 증분을 결정하기 위하여, 성장 전과 후의 응력상태를 고려하여 성장 할선 방향과 균열 증분량을 반복적으로 보정하였다. 균열 성장 접선방향은 최대주응력 기준으로부터 산정하고, 성장률은 Paris-Erdogan 방정식을 적용하여

산정하였다. 균열 증분에 대한 할선 방향을 결정하기 위하여, 균열 성장 곡선을 포물선으로 가정하고 성장 후의 새로운 균열 선단에서 산정한 성장 접선 방향과 포물선의 기울기가 같도록 반복적으로 포물선의 곡률을 보정하였다. 피로 균열의 성장률은 성장 전의 응력확대계수와 성장 후의 새로운 균열 선단에서 산정한 응력확대계수를 이용하여 Paris-Erdogan 방정식을 사다리꼴 공식으로 적분하였다. 수치예제를 통하여 제안된 반복적인 균열 성장 모델링 기법이 접선법에 기초한 모델링 기법보다 균열 증분의 크기에 덜 민감하면서도 성장 곡선의 추정과 피로수명 산정에 있어서 더 정확한 결과를 산정할 수 있음을 보였다.

선형탄성균열역학을 적용할 수 없는 크기의 미세균열에 대해서는 균열 성장에 대한 임계 응력확대계수로부터 미세균열의 성장률을 근사하였다. 초기 거시균열에 대해서는 응력확대계수의 기하형상함수의 변화가 매우 작기 때문에 무한 균열판의 해석해를 이용하여 피로 수명을 평가할 수 있다. 기하형상함수의 변화가 큰 영역에 대해서는 이중경계요소법으로 수치해석을 수행하여 피로수명을 평가하였다. 미세균열의 피로 수명과 수치해석으로 산정한 거시적인 균열의 피로 수명으로 전체 피로 수명을 추정하고 피로 하중의 변화에 따라 피로수명을 추정하여 피로강도 곡선을 얻고 그 결과를 시방서의 설계치와 비교하였다.

피로 균열의 확률 해석

초기 균열 길이와 성장률 계수가 확률분포를 갖는 확률변수일 때, 성장 후 균열 길이의 확률분포를 추정하기 위하여 응답의 이차 테일러 급수를 이용한 이계삼차모멘트법을 도입하였다. 증분법을 이용한 균열 성장 모델링 기법에서 전 단계의 균열 길이의 확률분포로부터 성장 후의 균열 길이의 평균, 표준편차, 왜도 등의 고차 모멘트를 추정하였

다. 성장 균열 길이의 이차 테일러 급수에서 응력확대계수의 일차 민감도는 유한차분법으로 산정하였다. 추정된 평균, 표준편차, 왜도를 이용하여 균열 길이의 확률분포를 삼변수 대수정규분포로 근사하였다. 수치 예제를 통하여 제안된 이계삼차모멘트법의 결과를 모의실험(Monte Carlo simulation)의 결과와 비교하였다. 제안된 모멘트법은 평균과 표준편차는 정확하게 근사할 수 있었고, 왜도까지 정확하게 추정하기 위해서는 이차 이상의 테일러 급수를 이용하여야 할 것으로 판단된다.

제안된 이계삼차모멘트법에서 초기 균열 길이와 성장률 계수를 확률변수로 하여 미세균열과 거시균열의 전체 피로 수명의 확률분포를 추정하였다. 제안된 확률 변수들의 분산에 따라 피로-강도 곡선의 95% 신뢰 한계선을 도출하고 시방서의 설계치와 비교하였다.

피로 균열 성장에 따라 추정한 균열 길이의 확률분포로부터 신뢰도를 평가하였다. 파괴확률은 성장 후의 균열 길이와 파괴에 대한 임계 균열 길이의 확률분포로부터 산정하였다. 제안된 모멘트법에서는 한번의 균열 성장 해석으로부터 공용피로수명의 변화에 따른 신뢰도를 평가할 수 있고, 일계신뢰도법과 비교했을 때 같은 크기(order)의 파괴확률을 산정할 수 있었다. 그리고 주어진 파괴확률에 대한 피로수명을 일계신뢰도법과 비교했을 때 3 ~ 8 % 수준으로 추정할 수 있었다.

추후 연구과제

피로 균열 성장 해석과 확률해석에서 보완하거나 추가적으로 연구하여야 할 점으로 다음의 4 가지를 들 수 있다. 혼합모드의 균열 성장에 대한 확률해석, 곡선의 연속 이중 경계요소의 개발, shape sensitivity 를 이용한 응력확대계수의 일차 민감도 산정, 그리고 일계신뢰도법과 모멘트법을 연계한 확률해석법의 개발이 그것이다.

혼합모드의 균열 성장에 대한 결정론적 방법론은 2 장에서 이미 제안하였지만, 이를 확률해석에 적용하는 데는 추가적인 연구가 필요하다. 다양한 기하형상과 하중 상태의 구조물에 대한 확률해석을 수행하여 시방서에 규정된 여러 가지 시편에 대한 피로-강도 곡선을 수치적으로 도출할 수 있을 것이다.

곡선의 균열면에서의 경계적분식의 특이 적분을 고려한 곡선의 연속 요소를 개발하면, 혼합모드 피로 균열의 성장 곡선을 보다 정확히 추정할 수 있을 뿐만 아니라, *J*-integral 에 기초한 에너지법을 적용할 수 있다. 특히 곡선의 균열에서는 균열 이산화에 관계없이 적분 경로를 자유롭게 설정할 수 있는 J_k-integral 법을 적용하여 응력확대계수를 정확히 산정할 수 있다. 또한 제안된 반복적인 균열 성장 모델링에서는 균열의 증분 곡선을 포물선으로 가정하므로 이차의 곡선 요소를 사용하면 직선으로 이산화하여 발생하는 모델링 오차를 줄일 수 있다.

일차 모드에서 shape sensitivity 를 이용한 *J*-integral 의 균열 길이에 대한 일차 민감도는 Chen 등에 의하여 제안되었지만, 혼합모드에서 응력확대계수의 민감도에 대한 연구 사례는 아직까지 보고된 바 없다. 혼합모드의 피로 균열 문제에서 shape sensitivity 를 이용하여 균열 길이에 대한 응력확대계수의 민감도를 산정하면 한번의 구조해석을 수행하기 때문에 해석 시간을 단축시키면서도 유한차분법에 비하여 정도가 높은 해석 결과를 얻을 수 있다.

구조물에 대한 확률 해석의 목적은 응답의 확률분포 추정과 신뢰도 평가라고 할 수 있다. 확률분포 추정은 피로-강도 곡선에서 95% 신뢰한계선을 결정하는 문제 등에서 중요한 확률문제가 된다. Monte-Carlo simulation 은 확률 해석의 두 가지 목적을 모두 적용할 수 있는 방법론이지만, 많은 추출자료를 이용하여 모의 실험을 수행해야 해의 정도를 높일 수 있다. 제안된 모멘트법과 일계신뢰도법은 각각 확률분포 추정과 신뢰

도 평가에 있어서 Monte-Carlo simulation의 단점을 극복할 수 있다. 그러나 제안된 모멘트법은 신뢰도 평가에 있어서는 일계신뢰도법에 비하여 해의 정도가 떨어지고, 반대로 일계신뢰도법으로는 응답의 확률분포를 추정할 수 없다. 따라서 구조물에 대한 통합적인 확률해석을 수행하기 위해서는 모멘트법과 일계신뢰도법을 연계하여 서로의 단점을 보완할 필요가 있다.

위의 네 가지의 추가적인 연구가 이루어 지고, 미세균열의 피로수명과 확률분포가 주어진다면, 제안된 혼합모드 피로 균열의 성장해석 및 확률해석 기법은 구조물의 피로수명과 신뢰도를 평가할 수 있는 강력한 수치해석 방법론이 될 것으로 판단된다.

참고문헌

Aliabadi 1993

M.H. Aliabadi, C.A. Brebbia, Advanced Formulations in Boundary Element Methods, Southampton; Boston: Computational Mechanics Publications, 1993

Banerjee 1994

P.K. Banerjee, The Boundary Element Methods in Engineering, 2nd edition, London: McGraw-Hill, 1994

Bannantine 1990

J.A. Bannantine, J.J. Comer, J.L. Handrock, Fundamentals of Metal Fatigue Analysis, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1990

Barsom 1977

J.M. Barsom, S.T. Rolfe, Fracture and fatigue control in structures: Applications of Fracture Mechanics 3rd-Edition, Philadelphia: Butterworth-Heinemann, 1977

Becker 1992

A.A. Becker, The boundary element method in engineering: A complete course, London: McGraw-Hill, 1992

Belytschko 1994

T. Belytschko, Y.Y. Lu, L, Gu, "Element-free Galerkin methods", International Journal for Numerical Methods of Engineering Vol. 37, pp. 229-256, 1994

Benjamin 1970

J.R. Benjamin, C.A. Cornell, Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers, New York: McGraw-Hill, 1970

Besterfield 1991

G.H. Besterfield, W.K. Liu, M.A. Lawrence, T. Belytschko, "Fatigue crack growth reliability by probabilistic finite elements", Computer methods in applied mechanics and engineering Vol. 86, pp. 297-320, 1991

Chen 1977

F.H.K. Chen, R.T. Shield, "Conservation laws in elasticity of the J-integral type", Journal of Applied Mathematics and Physics Vol. 28, pp. 1-21, 1977

Chen 2001

G. Chen, S. Rahman, Young Ho Park, "Shape sensitivity and reliability analyses of linear-elastic cracked structures", International Journal of Fracture Vol. 112, pp. 223-246, 2001

Cotterell 1980

B. Cotterell, J.R. Rice, "Slightly curved or kinked cracks", International Journal of Fracture Vol. 16, pp. 155-169, 1980

Dong 2001

C.Y. Dong, C.J. de Pater, "Numerical implementation of displacement discontinuity method and its application in hydraulic fracturing", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering Vol. 191, pp. 745-760, 2001

Eischen 1987

J.W. Eischen, "An improved method for computing the J_2 integral", Engineering Fracture Mechanics Vol. 26, pp. 691-700, 1987

Gdoutos 1990

E.E. Gdoutos, Fracture Mechanics Criteria and Applications, Engineering Application of Fracture Mechanics Vol. 10, Dordrecht, Boston, London : Kluwer Academic Publishers, 1990

Haber 1985

R.B. Haber, H.M. Koh, "Explicit Expressions for Energy Release Rates Using Virtual Crack Extensions", International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 21, pp. 301-315, 1985

Hellan 1984

K. Hellan, Introduction to Fracture Mechanics, New York: McGraw-Hill, 1984

Herrmann 1981

A.G. Herrmann, G. Herrmann, "On energy-release rates for a plane crack", ASME Journal of Applied Mechanics Vol. 48, pp. 525-528, 1981

Hong 1988

H.-K. Hong, J.-T. Chen, "Derivations of integral equations of elasticity", ASCE Journal of Engineering Mechanics Vol. 114, pp. 1028-1044, 1988

Hong 1999

Y.J. Hong, J. Xing, J.B. Wang, "A second-order third-moment method for calculating the reliability of fatigue", The International Journal of Pressure Vessels and Piping Vol. 76, pp. 567-570, 1999

Hudak 1981

S.J. Hudak, "Small crack behavior and the prediction of fatigue life", ASME Journal of Engineering Materials and Technology Vol 103, pp. 26-35, 1981

Jiao 1992

G. Jiao, T. Moan, "Reliability-based fatigue and fracture design criteria for welded offshore structures", Engineering Fracture Mechanics Vol. 41, pp. 271-282, 1992

Johnson 1987

C. Johnson, Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method, Studentlitteratur, Lund, Sweden: Cambridge University Press, 1987

Kanninen 1985

M.F. Kanninen, C.H. Popelar, Advanced Fracture Mechanics, Oxford University Press, New York, 1985

Karihaloo 1980

B.L. Karihaloo, L.M. Keer, S. Nemat-Nasser, "Crack kinking under nonsymmetric loading", Engineering Fracture Mechanics Vol. 13, pp. 879-888, 1980

Kebir 1999

H. Kebir, J.M. Roelandt, J. Foulquier, "A new singular boundary element for crack problems: Application to bolted joints", Engineering Fracture Mechanics Vol 62, pp. 497-510, 1999

Kim 2000

J.K. Kim, D.S. Shim, "The variation in fatigue crack growth due to the thickness effect", International Journal of Fatigue Vol. 22, pp. 611-618, 2000

Liao 1996

M. Liao, Q. Shun, Q. Yang, "Large sample size experimental investigation on the statistical nature of fatigue crack initiation and growth", International Journal of Fatigue Vol. 18, pp. 87-94, 1996

Lindsay 1996

S.R. Lindsay, G.R. Wood, R.C. Woollons, "Stand table modelling through the Weibull distribution and usage of skewness information", Forest Ecology and Management Vol. 81, pp. 19-23, 1996

Lo 1996

K.W. Lo, T. Tamilselvan, K.H. Chua, M.M. Zhao, "A unified model for fracture mechanics", Engineering fracture mechanics Vol. 54, pp. 189-210, 1996

Lua 1993

Y.J. Lua, W.K. Liu, T. Belytschko, "Curvlinear fatigue crack reliability analysis by stochastic boundary element method", International journal for numerical methods in Engineering Vol. 36, pp. 3841-3854, 1993

McDowell 1997

D.L. McDowell, “Multiaxial small fatigue crack growth in metals”, International Journal of Fatigue Vol. 19, pp. S127-S135, 1997

McKay 1979

M.D. Mckay, R.J. Beckman, W.J. Conover, “A comparision of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code”, Technometrics Vol. 21, pp. 293-245, 1979

Miranda 2003

A.C.O. Miranda, M.A. Meggiolaro, J.T.P. Castro, L.F. Martha, T.N. Bittencourt, “Fatigue life and crack path predictions in generic 2D structural components”, Engineering Fracture Mechanics Vol. 70, pp. 1259-1279, 2003

Mogilevskaya 1997

S.G. Mogilevskaya, “Numerical modeling of 2-D smooth crack growth”, International journal of fracture Vol. 87, pp. 389-405, 1997.

Newman 1999

J.C. Newman Jr, E.P. Pillips, M.H. Swain, “Fatigue-life prediction methodology using small-crack theory”, International journal of fatigue Vol. 21, pp 109-119, 1999

Partheymüller 2000

P. Partheymüller, M. Haas, G. Kuhn, “Comparison of the basic and the discontinuity formulation of the 3D-dual boundary element method”, Engineering Analysis with Boundary Elements Vol. 24, pp. 777-788, 2000

Portela 1992

A. Portela, M.H. Aliabadi, and D.P. Rooke, “The dual boundary element method: effective implementation for crack problems”, International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 33, pp. 1269-1287, 1992

Portela 1993

A. Portela, M.H. Aliabadi, and D.P. Rooke, "Dual boundary element incremental analysis of crack propagation", Computers & Structures Vol. 46, pp. 237-247, 1993

Qian 1996

J. Qian, A. Fatemi, "Mixed mode fatigue crack growth: A literature survey", Engineering Fracture Mechanics Vol. 55, pp. 969-990, 1996

Reimers 1991

P. Reimers, "Simulation of mixed mode fatigue crack growth", Computers & Structures, Vol. 40, pp. 339-346, 1991

Rice 1968

J.R. Rice, "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks", ASME Journal of Applied Mechanics Vol. 35, pp. 379-386, 1968

Shen 2001

W. Shen, A.B.O. Soboyejo, W.O. Soboyejo, "Probabilistic modeling of fatigue crack growth in Ti-6Al-4V", International Journal of Fatigue Vol. 23, pp. 917-925, 2001

Socha 2003

G. Socha, "Experimental investigations of fatigue cracks nucleation, growth and coalescence in structural steel", International Journal of Fatigue Vol. 25, pp. 139-147, 2003

Sundararajan 1995

C. Sundararajan, Probabilistic Structural Mechanics Handbook: Theory and Industrial Applications, New York: Chapman & Hall, 1995

Taylor 2002

D. Taylor, "Modelling of fatigue crack growth at the microstructural level", Computational Materials Science Vol. 25, pp. 228-236, 2002

Tichý 1994

M. Tichý, "First-order third-moment reliability method", Structural Safety Vol. 16, pp. 189-200, 1994

Tryon 1996

R.G. Tryon, T.A. Cruse, S. Mahadevan, "Development of a reliability-based fatigue life model for gas turbine engine structures", Engineering fracture mechanics Vol. 53, pp. 807-828, 1996

Yau 1980

J.F. Yau, S.S. Wang, H.T. Corten, "A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity", Journal of Applied Mechanics Vol. 47, pp. 335-341, 1980

Zhao 1996

Z. Zhao, A. Haldar, "Bridge fatigue damage evaluation and updating using non-destructive inspectons", Engineering Fracture Mechanics Vol. 53, pp. 775-788, 1996

Zhao 2000

Y.-X. Zhao, Q. Gao, J.-N. Wang, "An approach for determining an appropriate assumed distribution of fatigue life under limited data", Reliability Engineering and System Safety Vol. 67, pp. 1-7, 2000

박천종 1998

박천종, 경계면 변수화 기법 및 정규화 기법에 의한 유한체 내부영역의 기하학적 형상과 물성치 경정을 위한 역해석, 석사학위논문, 서울대학교, 1998

양영순 2002

양영순, 서용석, 이재옥, 구조 신뢰성 공학, 서울대학교 출판부, 2002

부록

A. 경계적분식의 직접 적분

균열체의 경계면을 경계요소로 이산화하면 식 (2.13)와 (2.21)의 적분식은 다음과 같다.

$$c_{ij}(y)u_i(y)+\sum_e \int_{\Gamma^e} T_{ij}(y,x)u_j(x)d\Gamma(x)=\sum_e \int_{\Gamma^e} U_{ij}(y,x)t_j(x)d\Gamma(x) \tag{A.1a}$$

$$\frac{1}{2}t_j(y)+n_i(y)\sum_e \int_{\Gamma^e} T^{\sigma}_{ijk}(y,x)u_k(x)d\Gamma(x)=n_i(y)\sum_e \int_{\Gamma^e} U^{\sigma}_{ijk}(y,x)t_k(x)d\Gamma(x) \tag{A.1b}$$

식 (A.1)에서 Kelvin 의 해는 다음과 같다.

$$U_{ij}=c_1\left\{\frac{r_i r_j}{r^2}-c_2\delta_{ij}\ln r\right\} \tag{A.2a}$$

$$T_{ij}=-\frac{c_3}{r}\left\{\frac{\partial r}{\partial n}(c_4\delta_{ij}+2\frac{r_i r_j}{r^2})+c_4(n_i\frac{r_j}{r}-n_j\frac{r_i}{r})\right\} \tag{A.2b}$$

$$U^{\sigma}_{ijk}=\frac{c_3}{r}\left\{c_4(\delta_{ik}\frac{r_j}{r}+\delta_{jk}\frac{r_i}{r}-\delta_{ij}\frac{r_k}{r})+2\frac{r_i r_j r_k}{r^3}\right\} \tag{A.2c}$$

$$\begin{aligned}T^{\sigma}_{ijk}=\frac{c_5}{r^2}\Bigg\{&2\frac{\partial r}{\partial n}(c_4\delta_{ij}\frac{r_k}{r}+\nu(\delta_{ik}\frac{r_j}{r}+\delta_{jk}\frac{r_i}{r})-4\frac{r_i r_j r_k}{r^3})\\&+2\nu(n_i\frac{r_j r_k}{r^2}+n_j\frac{r_i r_k}{r^2})+c_4(2n_k\frac{r_i r_j}{r^2}+n_j\delta_{ik}+n_i\delta_{jk})-c_6 n_k\delta_{ij}\Bigg\}\end{aligned} \tag{A.2d}$$

여기서, 물성치에 대한 상수 c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6 는 각각 다음과 같다.

$$c_1=\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)},\ \ c_2=3-4\nu$$

$$c_3 = \frac{1}{4\pi(1-\nu)}, \quad c_4 = 1-2\nu$$

$$c_5 = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)}, \quad c_6 = 1-4\nu$$

경계면을 그림 2.7 과 같은 직선의 경계요소로 이산화 할 경우에는 식 (A.1)을 해석적으로 적분할 수 있다. 식 (A.2)에서 법선벡터 **n** 은 직선 요소에서 다음과 같이 지역좌표계에 무관하게 결정된다.

$$\mathbf{n} = (\frac{l_2^e}{l^e}, -\frac{l_1^e}{l^e}) \tag{A.3}$$

A.1 하중점과 응답점이 서로 다른 경우

하중이 작용하는 절점(y)과 응답점(x)이 일치하지 않는 경우에는 식 (A.1)의 각각의 적분 항들은 다음과 같이 $0 \le \eta \le 2$ 에서 정의되는 직선 요소의 지역 좌표계로 변환하여 해석적으로 적분한다.

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma^e} U_{ij}(y,x)t_j(x)d\Gamma(x) = t_j^k \int_{-1}^{1} U_{ij}Q_k(\xi)J^e(\xi)d\xi = t_j^k J^e \int_0^2 U_{ij}Q_k(\eta)d\eta \\
&\int_{\Gamma^e} T_{ij}(y,x)u_j(x)d\Gamma(x) = u_j^k \int_{-1}^{1} T_{ij}Q_k(\xi)J^e(\xi)d\xi = u_j^k J^e \int_0^2 T_{ij}Q_k(\eta)d\eta \\
&\int_{\Gamma^e} U_{ijk}^{\sigma}(y,x)t_k(x)d\Gamma(x) = t_l^k \int_{-1}^{1} U_{ijk}^{\sigma}N_l(\xi)J(\xi)d\xi = t_l^k J^e \int_0^2 U_{ijk}^{\sigma}N_l(\eta)d\eta \\
&\int_{\Gamma^e} T_{ijk}^{\sigma}(y,x)u_k(x)d\Gamma(x) = u_k^l \int_{-1}^{1} T_{ijk}^{\sigma}Q_l(\xi)J^e(\xi)d\xi = u_k^l J^e \int_0^2 T_{ijk}^{\sigma}Q_l(\eta)d\eta
\end{aligned} \tag{A.4}$$

여기서, u_j^k 와 t_j^k 는 요소 e 를 구성하는 k 번째 절점의 j 방향의 변위와 표면력이다. 식 (A.4)에서 $\xi = \eta - 1$ 의 선형관계로부터 $Q(\xi)$ 를 다음과 같은 이차의 형상함수 $Q(\eta)$ 로 변화하였다.

$$Q(\eta) = q_2\eta^2 + q_1\eta + q_0 \tag{A.5}$$

식 (A.4)에서 y 가 요소 외부에 위치하면 r 을 포함하고 있는 항들은 다음과 같이 η 의 함수로 표현할 수 있다.

$$r_i = \frac{l_i^e}{2}\eta + \chi_i = a_i^1\eta + a_i^0 \tag{A.6a}$$

$$r_i r_j = \frac{l_i^e l_j^e}{4}\eta^2 + \frac{\chi_i l_j^e + \chi_j l_i^e}{2}\eta + \chi_i\chi_j = b_{ij}^2\eta^2 + b_{ij}^1\eta + b_{ij}^0 \tag{A.6b}$$

$$\begin{aligned} r_i r_j r_k &= \frac{l_i^e l_j^e l_k^e}{8}\eta^3 + \frac{\chi_i l_j^e l_k^e + \chi_j l_k^e l_i^e + \chi_k l_i^e l_j^e}{4}\eta^2 + \frac{\chi_i\chi_j l_k^e + \chi_i\chi_k l_j^e + \chi_j\chi_k l_i^e}{2}\eta + \chi_i\chi_j\chi_k \\ &= e_{ijk}^3\eta^3 + e_{ijk}^2\eta^2 + e_{ijk}^1\eta + e_{ijk}^0 \end{aligned} \tag{A.6c}$$

$$r = \sqrt{\frac{(l^e)^2}{4}\eta^2 + (l_1^e\chi_1 + l_2^e\chi_2)\eta + \chi^2} = \sqrt{a + b\eta + c\eta^2} \tag{A.6d}$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\chi_1 l_2^e - \chi_2 l_1^e}{l^e}\frac{1}{r} = \frac{\omega}{r} \tag{A.6e}$$

식 (A.6)을 사용하면 Kelvin 의 해는 다음과 같이 r 과 η에 대하여 기술할 수 있다.

$$\begin{aligned} U_{ij} &= c_1\left\{b_{ij}^2\frac{\eta^2}{r^2} + b_{ij}^1\frac{\eta}{r^2} + b_{ij}^0\frac{1}{r^2} - c_2\delta_{ij}\ln r\right\} \\ &= A_2\frac{\eta^2}{r^2} + A_1\frac{\eta}{r^2} + A_0\frac{1}{r^2} + A_3\ln r \end{aligned} \tag{A.7a}$$

$$T_{ij} = -c_3\left\{c_4(\omega\delta_{ij} + n_i a_j^0 - n_j a_i^0)\frac{1}{r^2} + 2\omega(b_{ij}^2\frac{\eta^2}{r^4} + b_{ij}^1\frac{\eta}{r^4} + b_{ij}^0\frac{1}{r^4})\right.$$

$$\left. + c_4(n_i a_j^1 - n_j a_i^1)\frac{\eta}{r^2}\right\} \tag{A.7b}$$

$$= B_1\frac{\eta}{r^2} + B_2\frac{1}{r^2} + B_3\frac{\eta^2}{r^4} + B_4\frac{\eta}{r^4} + B_5\frac{1}{r^4}$$

$$U_{ijk}^{\sigma} = c_3\left\{c_4(\delta_{ik}a_j^1 + \delta_{jk}a_i^1 - \delta_{ij}a_k^1)\frac{\eta}{r^2} + c_4(\delta_{ik}a_j^0 + \delta_{jk}a_i^0 - \delta_{ij}a_k^0)\frac{1}{r^2}\right.$$

$$\left. + 2(e_{ijk}^3\frac{\eta^3}{r^4} + e_{ijk}^2\frac{\eta^2}{r^4} + e_{ijk}^1\frac{\eta}{r^4} + e_{ijk}^0\frac{1}{r^4})\right\} \tag{A.7c}$$

$$= D_1\frac{\eta}{r^2} + D_2\frac{1}{r^2} + D_3\frac{\eta^3}{r^4} + D_4\frac{\eta^2}{r^4} + D_5\frac{\eta}{r^4} + D_6\frac{1}{r^4}$$

$$T_{ijk}^{\sigma} = c_5\left\{(c_4 n_j\delta_{ik} + c_4 n_i\delta_{jk} - c_6 n_k\delta_{ij})\frac{1}{r^2} + 2(c_4 n_k b_{ij}^2 + \nu n_i b_{jk}^2 + \nu n_j b_{ki}^2)\frac{\eta^2}{r^4}\right.$$

$$+ 2(\omega c_4\delta_{ij}a_k^1 + \omega\nu\delta_{jk}a_i^1 + \omega\nu\delta_{ik}a_j^1 + c_4 n_k b_{ij}^1 + \nu n_i b_{jk}^1 + \nu n_j b_{ki}^1)\frac{\eta}{r^4}$$

$$+ 2(\omega c_4\delta_{ij}a_k^0 + \omega\nu\delta_{ik}a_j^0 + \omega\nu\delta_{jk}a_i^0 + c_4 n_k b_{ij}^0 + \nu n_i b_{jk}^0 + \nu n_j b_{ki}^0)\frac{1}{r^4} \tag{A.7d}$$

$$\left. - 8\omega(e_{ijk}^3\frac{\eta^3}{r^6} + e_{ijk}^2\frac{\eta^2}{r^6} + e_{ijk}^1\frac{\eta}{r^6} + e_{ijk}^0\frac{1}{r^6})\right\}$$

$$= E_1\frac{1}{r^2} + E_2\frac{\eta^2}{r^4} + E_3\frac{\eta}{r^4} + E_4\frac{1}{r^4} + E_5\frac{\eta^3}{r^6} + E_6\frac{\eta^2}{r^6} + E_7\frac{\eta}{r^6} + E_8\frac{1}{r^6}$$

식 (A.4)의 피적분 함수는 식 (A.5)와 (A.7)를 사용하여 정리하면 각각 다음과 같다.

$$U_{ij}Q_k = (A_2\frac{\eta^2}{r^2} + A_1\frac{\eta}{r^2} + A_0\frac{1}{r^2} + A_3\ln r)(q_2\eta^2 + q_1\eta + q_0)$$

$$= q_2 A_2\frac{\eta^4}{r^2} + (q_2 A_1 + q_1 A_2)\frac{\eta^3}{r^2} + (q_2 A_0 + q_1 A_1 + q_0 A_2)\frac{\eta^2}{r^2} + (q_1 A_0 + q_0 A_1)\frac{\eta}{r^2} \tag{A.8a}$$

$$+ q_0 A_0\frac{1}{r^2} + q_2 A_3\eta^2\ln r + q_1 A_3\eta\ln r + q_0 A_3\ln r$$

$$
\begin{aligned}
T_{ij}Q_k &= (B_1\frac{\eta}{r^2}+B_2\frac{1}{r^2}+B_3\frac{\eta^2}{r^4}+B_4\frac{\eta}{r^4}+B_5\frac{1}{r^4})(q_2\eta^2+q_1\eta+q_0) \\
&= q_2B_1\frac{\eta^3}{r^2}+(q_2B_2+q_1B_1)\frac{\eta^2}{r^2}+(q_1B_2+q_0B_1)\frac{\eta}{r^2}+q_0B_2\frac{1}{r^2}+q_2B_3\frac{\eta^4}{r^4} \\
&+(q_2B_4+q_1B_3)\frac{\eta^3}{r^4}+(q_2B_5+q_1B_4+q_0B_3)\frac{\eta^2}{r^4}+(q_1B_5+q_0B_4)\frac{\eta}{r^4}+q_0B_5\frac{1}{r^4}
\end{aligned} \tag{A.8b}
$$

$$
\begin{aligned}
U^{\sigma}_{ijk}Q_l &= (D_1\frac{\eta}{r^2}+D_2\frac{1}{r^2}+D_3\frac{\eta^3}{r^4}+D_4\frac{\eta^2}{r^4}+D_5\frac{\eta}{r^4}+D_6\frac{1}{r^4})(q_2\eta^2+q_1\eta+q_0) \\
&= q_2D_1\frac{\eta^3}{r^2}+(q_2D_2+q_1D_1)\frac{\eta^2}{r^2}+(q_1D_2+q_0D_1)\frac{\eta}{r^2}+q_0D_2\frac{1}{r^2} \\
&+q_2D_3\frac{\eta^5}{r^4}+(q_2D_4+q_1D_3)\frac{\eta^4}{r^4}+(q_2D_5+q_1D_4+q_0D_3)\frac{\eta^3}{r^4} \\
&+(q_2D_6+q_1D_5+q_0D_4)\frac{\eta^2}{r^4}+(q_1D_6+q_0D_5)\frac{\eta}{r^4}+q_0D_6\frac{1}{r^4}
\end{aligned} \tag{A.8c}
$$

$$
\begin{aligned}
T^{\sigma}_{ijk}Q_l &= (\frac{E_1}{r^2}+E_2\frac{\eta^2}{r^4}+E_3\frac{\eta}{r^4}+\frac{E_4}{r^4}+E_5\frac{\eta^3}{r^6}+E_6\frac{\eta^2}{r^6}+E_7\frac{\eta}{r^6}+\frac{E_8}{r^6})(q_2\eta^2+q_1\eta+q_0) \\
&= E_1q_2\frac{\eta^2}{r^2}+E_1q_1\frac{\eta}{r^2}+E_1q_0\frac{1}{r^2}+q_2E_2\frac{\eta^4}{r^4}+(q_2E_3+q_1E_2)\frac{\eta^3}{r^4} \\
&+(q_2E_4+q_1E_3+q_0E_2)\frac{\eta^2}{r^4}+(q_1E_4+q_0E_3)\frac{\eta}{r^4}+q_0E_4\frac{1}{r^4}+q_2E_5\frac{\eta^5}{r^6} \\
&+(q_2E_6+q_1E_5)\frac{\eta^4}{r^6}+(q_2E_7+q_1E_6+q_0E_5)\frac{\eta^3}{r^6}+(q_2E_8+q_1E_7+q_0E_6)\frac{\eta^2}{r^6} \\
&+(q_1E_8+q_0E_7)\frac{\eta}{r^6}+q_0E_8\frac{1}{r^6}
\end{aligned} \tag{A.8d}
$$

식 (A.6d)의 r 이 완전 자승식으로 표현될 때와 그렇지 않을 경우, 식 (A.8)의 각 피적분 항들의 적분 방법이 달라지게 된다. r 이 완전 자승식으로 표현되기 위해서는 다음 관계식이 성립되어야 한다.

$$d = 4ac - b^2 = (l_1^e\chi_2 - l_2^e\chi_1)^2 = 0 \tag{A.9}$$

식(A.9)는 y 가 경계요소의 연장선 상에 위치할 경우에 성립되면 이때의 r 은 다음과

같이 정리된다.

$$r=\sqrt{(\frac{l^e}{2}\eta+\frac{l_k^e\chi_k}{l^e})^2}=|\chi|\pm\frac{l^e}{2}\eta=g+h\eta \tag{A.10}$$

여기서, $b<0$인 경우 (−) 의 부호를 갖는다. $d=4ac-b^2>0$ 인 경우에 대하여 식 (A.8)의 각 항에 대한 적분은 다음의 정적분이 사용된다.

$$\int_0^2 \ln r d\eta=\ln(a+2b+4c)+\frac{b}{4c}\ln\frac{a+2b+4c}{a}-2+\frac{\sqrt{d}}{2c}(\tan^{-1}\frac{4c+b}{\sqrt{d}}-\tan^{-1}\frac{b}{\sqrt{d}})$$

$$\int_0^2 \eta\ln r d\eta=\ln(a+2b+4c)-\frac{c}{2}\int_0^2\frac{\eta^3}{r^2}d\eta-\frac{b}{4}\int_0^2\frac{\eta^2}{r^2}d\eta$$

$$\int_0^2 \eta^2\ln r d\eta=\frac{4}{3}\ln(a+2b+4c)-\frac{c}{3}\int_0^2\frac{\eta^4}{r^2}d\eta-\frac{b}{6}\int_0^2\frac{\eta^3}{r^2}d\eta$$

$$\int_0^2\frac{1}{r^2}d\eta=\frac{2}{\sqrt{d}}(\tan^{-1}\frac{4c+b}{\sqrt{d}}-\tan^{-1}\frac{b}{\sqrt{d}})$$

$$\int_0^2\frac{\eta}{r^2}d\eta=\frac{1}{2c}\ln\frac{a+2b+4c}{a}-\frac{b}{2c}\int_0^2\frac{1}{r^2}d\eta$$

$$\int_0^2\frac{\eta^2}{r^2}d\eta=\frac{2}{c}-\frac{b}{c}\int_0^2\frac{\eta}{r^2}d\eta-\frac{a}{c}\int_0^2\frac{1}{r^2}d\eta=\frac{2}{c}-\frac{b}{2c^2}\ln\frac{a+2b+c}{a}+\frac{b^2-2ac}{2c^2}\int_0^2\frac{1}{r^2}d\eta$$

$$\int_0^2\frac{\eta^3}{r^2}d\eta=\frac{2}{c}-\frac{b}{c}\int_0^2\frac{\eta^2}{r^2}d\eta-\frac{a}{c}\int_0^2\frac{\eta}{r^2}d\eta$$

$$\int_0^2 \frac{\eta^4}{r^2} d\eta = \frac{8}{3c} - \frac{b}{c}\int_0^2 \frac{\eta^3}{r^2} d\eta - \frac{a}{c}\int_0^2 \frac{\eta^2}{r^2} d\eta$$

$$\int_0^2 \frac{1}{r^4} d\eta = \frac{4c+b}{d(a+2b+4c)} - \frac{b}{da} + \frac{2c}{d}\int_0^2 \frac{1}{r^2} d\eta$$

$$\int_0^2 \frac{\eta}{r^4} d\eta = -\frac{2(a+b)}{d(a+2b+4c)} + \frac{2}{d} - \frac{b}{d}\int_0^2 \frac{1}{r^2} d\eta$$

$$\int_0^2 \frac{\eta^2}{r^4} d\eta = -\frac{2}{c(a+2b+4c)} + \frac{a}{c}\int_0^2 \frac{1}{r^4} d\eta = \frac{2(b^2-2ac)+ab}{cd(a+2b+4c)} - \frac{b}{cd} + \frac{2a}{d}\int_0^2 \frac{1}{r^2} d\eta$$

$$\int_0^2 \frac{\eta^3}{r^4} d\eta = \frac{1}{c}\int_0^2 \frac{\eta}{r^2} d\eta - \frac{b}{c}\int_0^2 \frac{\eta^2}{r^4} d\eta - \frac{a}{c}\int_0^2 \frac{\eta}{r^4} d\eta$$

$$\int_0^2 \frac{\eta^4}{r^4} d\eta = \frac{8}{c(a+2b+4c)} - \frac{2b}{c}\int_0^2 \frac{\eta^3}{r^4} d\eta - \frac{3a}{c}\int_0^2 \frac{\eta^2}{r^4} d\eta$$

$$\int_0^2 \frac{\eta^5}{r^4} d\eta = \frac{8}{c(a+2b+4c)} - \frac{3b}{2c}\int_0^2 \frac{\eta^4}{r^4} d\eta - \frac{2a}{c}\int_0^2 \frac{\eta^3}{r^4} d\eta$$

$$\int_0^2 \frac{1}{r^6} d\eta = \frac{4c+b}{d}\left(\frac{1}{2(a+2b+4c)^2} + \frac{3c}{d(a+2b+4c)}\right) - \frac{b}{d}\left(\frac{1}{2a^2} + \frac{3c}{da}\right) + \frac{6c^2}{d^2}\int_0^2 \frac{1}{r^2} d\eta$$

$$\int_0^2 \frac{\eta}{r^6} d\eta = -\frac{2(a+b)}{2d(a+2b+4c)^2} + \frac{1}{da} - \frac{3b}{2d}\int_0^2 \frac{1}{r^4} d\eta$$

$$\int_0^2 \frac{\eta^2}{r^6} d\eta = -\frac{2}{3c(a+2b+4c)^2} - \frac{b}{3c}\int_0^2 \frac{\eta}{r^6} d\eta + \frac{a}{3c}\int_0^2 \frac{1}{r^6} d\eta$$

$$\int_0^2 \frac{\eta^3}{r^6} d\eta = -\frac{2}{c(a+2b+4c)^2} + \frac{a}{c}\int_0^2 \frac{\eta}{r^6} d\eta$$

$$\int_0^2 \frac{\eta^4}{r^6} d\eta = -\frac{8}{c(a+2b+4c)^2} + \frac{b}{c}\int_0^2 \frac{\eta^3}{r^6} d\eta + \frac{3a}{c}\int_0^2 \frac{\eta^2}{r^6} d\eta$$

$$\int_0^2 \frac{\eta^5}{r^6} d\eta = \frac{1}{c^2}\int_0^2 \frac{\eta}{r^2} d\eta - \frac{2b}{c^2}\int_0^2 \frac{\eta^2}{r^4} d\eta - \frac{2a}{c}\int_0^2 \frac{\eta^3}{r^6} d\eta + \frac{b^2}{c^2}\int_0^2 \frac{\eta^3}{r^6} d\eta - \frac{a^2}{c^2}\int_0^2 \frac{\eta}{r^6} d\eta$$

$d = 4ac - b^2 = 0$ 인 경우에 대하여 경계적분식을 해석적으로 적분하기 위해서는 다음의 정적분이 사용된다.

$$\int_0^2 \ln r d\eta = 2\ln(2h+g) + \frac{g}{h}\ln\frac{2h+g}{g} - 2$$

$$\int_0^2 \eta \ln r d\eta = 2\ln(2h+g) - \frac{1}{2}\left(\frac{g}{h}\right)^2 \ln\frac{2h+g}{g} + \frac{g}{h} - 1$$

$$\int_0^2 \eta^2 \ln r d\eta = \frac{8}{3}\ln(2h+g) + \frac{1}{3}\left(\frac{g}{h}\right)^3 \ln\frac{2h+g}{g} - \frac{2}{3}\left(\frac{g}{h}\right)^2 + \frac{2}{3}\frac{g}{h} - \frac{8}{9}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{r^2} d\eta = \frac{1}{b}\left\{-\frac{1}{(a+2b)} + \frac{1}{a}\right\}$$

$$\int_0^2 \frac{\eta}{r^2} d\eta = \frac{1}{b^2}\left\{\ln\frac{a+2b}{a} + \frac{a}{a+2b} - 1\right\}$$

$$\int_0^2 \frac{\eta^2}{r^2} d\eta = \frac{1}{b^3}\left\{a + 2b - 2a\ln\frac{a+2b}{a} - \frac{a^2}{a+2b}\right\}$$

$$\int_0^2 \frac{\eta^3}{r^2} d\eta = \frac{1}{b^4}\left\{\frac{(a+2b)^2}{2} - 3a(a+2b) + 3a^2 \ln\frac{a+2b}{a} + \frac{a^3}{a+2b} + \frac{3a^2}{2}\right\}$$

$$\int_0^2 \frac{\eta^4}{r^2} d\eta = \frac{1}{b^5}\left\{\frac{(a+2b)^3}{3} - \frac{4a(a+2b)^2}{2} + 6a^2(a+2b) - 4a^3 \ln\frac{a+2b}{a} - \frac{a^4}{a+2b} - \frac{10a^3}{3}\right\}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{r^4} d\eta = -\frac{1}{3b(a+2b)^3} + \frac{1}{3ba^3} = \frac{1}{3b}\left\{-\frac{1}{(a+2b)^3} + \frac{1}{a^3}\right\}$$

$$\int_0^2 \frac{\eta}{r^4} d\eta = \frac{1}{b^2}\left\{-\frac{1}{2(a+2b)^2} + \frac{a}{3(a+2b)^3} + \frac{1}{6a^2}\right\}$$

$$\int_0^2 \frac{\eta^2}{r^4} d\eta = \frac{1}{b^3}\left\{-\frac{1}{(a+2b)} + \frac{2a}{2(a+2b)^2} - \frac{a^2}{3(a+2b)^3} + \frac{1}{3a}\right\}$$

$$\int_0^2 \frac{\eta^3}{r^4} d\eta = \frac{1}{b^4}\left\{\ln\frac{a+2b}{a} + \frac{3a}{a+2b} - \frac{3a^2}{2(a+2b)^2} + \frac{a^3}{3(a+2b)^3} - \frac{11}{6}\right\}$$

$$\int_0^2 \frac{\eta^4}{r^4} d\eta = \frac{1}{b^5}\left\{(a+2b) - 4a\ln\frac{a+2b}{a} - \frac{6a^2}{(a+2b)} + \frac{4a^3}{2(a+2b)^2} - \frac{a^4}{3(a+2b)^3} + \frac{10a}{3}\right\}$$

$$\int_0^2 \frac{\eta^5}{r^4} d\eta = \frac{1}{b^6}\left\{\frac{(a+2b)^2}{2} - 5a(a+2b) + 10a^2 \ln\frac{a+2b}{a} + \frac{10a^3}{(a+2b)} - \frac{5a^4}{2(a+2b)^2}\right.$$
$$\left. + \frac{a^5}{3(a+2b)^3} - \frac{10a^2}{3}\right\}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{r^6} d\eta = -\frac{1}{5b(a+2b)^5} + \frac{1}{5ba^5} = \frac{1}{b}\left\{-\frac{1}{5(a+2b)^5} + \frac{1}{5a^5}\right\}$$

$$\int_0^2 \frac{\eta}{r^6} d\eta = \frac{1}{b^2}\left\{-\frac{1}{4(a+2b)^4}+\frac{a}{5(a+2b)^5}+\frac{1}{20a^4}\right\}$$

$$\int_0^2 \frac{\eta^2}{r^6} d\eta = \frac{1}{b^3}\left\{-\frac{1}{3(a+2b)^3}+\frac{2a}{4(a+2b)^4}-\frac{a^2}{5(a+2b)^5}+\frac{1}{30a^3}\right\}$$

$$\int_0^2 \frac{\eta^3}{r^6} d\eta = \frac{1}{b^4}\left\{-\frac{1}{2(a+2b)^2}+\frac{3a}{3(a+2b)^3}-\frac{3a^2}{4(a+2b)^4}+\frac{a^3}{5(a+2b)^5}+\frac{1}{20a^2}\right\}$$

$$\int_0^2 \frac{\eta^4}{r^6} d\eta = \frac{1}{b^5}\left\{-\frac{1}{r}+\frac{4a}{2r^2}-\frac{6a^2}{3r^3}+\frac{4a^3}{4r^4}-\frac{a^4}{5r^5}+\frac{1}{5a}\right\}$$

$$\int_0^2 \frac{\eta^5}{r^6} d\eta = \frac{1}{b^6}\left\{\ln\frac{a+2b}{a}+\frac{5a}{r}-\frac{10a^2}{2r^2}+\frac{10a^3}{3r^3}-\frac{5a^4}{4r^4}+\frac{a^5}{5r^5}-\frac{137}{60}\right\}$$

A.2 하중점과 응답점이 일치하는 경우

그림 2.7 에서 y가 요소를 구성하는 절점(X^k)과 일치하는 경우에 경계적분식은 특이적분을 포함한다. 식 (2.14)의 변위 경계적분식은 1 차의 Cauchy principal value integral 을 포함하고, 식 (2.21)의 표면력 경계적분식은 2 차의 Hadamard principal value integral 을 포함한다. y와 일치하는 절점에서의 적분은 강체운동조건(rigid body motion)으로 간접적으로 산정하고, 요소에 포함된 다른 절점에서의 적분값은 수치적분이나 직접적분으로 산정한다. 그러나 균열 면에 위치한 절점에서는 강체운동조건을 적용할 수 없으므로 직접적분을 수행한다. y가 요소를 구성하는 절점과 일치하는 경우에는 식 (2.30)은 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$r_i = (\xi - \rho)\frac{l_i^e}{2} \tag{A.11}$$

여기서, ρ는 y의 지역 좌표 값이다. 식 (2.31)에 의해 r는 다음과 같다.

$$r = |\xi - \rho| J^e \tag{A.12}$$

식 (A.6e)는 y가 요소 내부에 위치하므로 다음 관계식을 만족한다.

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{r_1 n_1 + r_2 n_2}{r} = 0 \tag{A.13}$$

식 (A.12) 과 (A.13)을 사용하여 식 (A.2) 의 Kelvin의 해를 정리하면 다음과 같다.

$$U_{ij} = c_1 \left\{ \frac{(\xi-\rho)^2}{|\xi-\rho|^2 (J^e)^2} \frac{l_i^e l_j^e}{4} - c_2 \delta_{ij} \ln(|\xi-\rho| J^e) \right\} \tag{A.14a}$$

$$T_{ij} = -\frac{c_3 c_4}{r^2}(n_i r_j - n_j r_i) \tag{A.14b}$$

$$U_{ijk}^{\sigma} = \frac{c_3}{r}\left\{ c_4 (\delta_{ik}\frac{r_j}{r} + \delta_{jk}\frac{r_i}{r} - \delta_{ij}\frac{r_k}{r}) + 2\frac{r_i r_j r_k}{r^3} \right\} \tag{A.14c}$$

$$T_{ijk}^{\sigma} = \frac{c_5}{r^2}\left\{ 2n_k \frac{r_i r_j}{r^2} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk} - n_k \delta_{ij} \right\} \tag{A.14d}$$

균열면에 표면력이 작용하지 않는다면 식 (A.14c)는 적분을 수행할 필요가 없다. 식 (A.14a), (A.14b), (A.14d)를 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{U} = c_1 \begin{bmatrix} \frac{(l_1^e)^2}{4J^2} - c_2 \ln(|\xi - \rho| J^e) & \frac{l_1^e l_2^e}{4(J^e)^2} \\ \frac{l_1^e l_2^e}{4(J^e)^2} & \frac{(l_2^e)^2}{4(J^e)^2} - c_2 \ln(|\xi - \rho| J^e) \end{bmatrix} \tag{A.15a}$$

$$\mathbf{T} = \frac{c_3 c_4}{(\xi - \rho) J^e} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{A.15b}$$

$$\mathbf{T}^\sigma = \frac{c_5}{(\xi - \rho)^2 (J^e)^2} \begin{bmatrix} n_1(2n_2^2 + 1) & -n_2(-2n_2^2 + 1) \\ n_1(2n_1^2 - 1) & -n_2(-2n_1^2 - 1) \\ -n_2(2n_1^2 - 1) & n_1(-2n_2^2 + 1) \end{bmatrix} \tag{A.15c}$$

식(A.15a)의 적분에는 이차 경계요소(2.24)를 사용할 경우 다음의 정적분이 사용된다.

$$\int_{-1}^{1} Q(\xi)\, d\xi = 2b_0 + \frac{2}{3} b_2 \tag{A.16a}$$

$$\int_{-1}^{1} Q(\xi) \ln(\xi + 1) d\xi = (\frac{2b_2}{3} + 2b_0) \ln 2 - 2b_0 + b_1 - \frac{8b_2}{9} \tag{A.16b}$$

$$\int_{-1}^{1} Q(\xi) \ln(\xi - 1) d\xi = (\frac{2b_2}{3} + 2b_0) \ln(2) - 2b_0 - b_1 - \frac{8b_2}{9} \tag{A.16c}$$

$$\int_{-1}^{1} Q(\xi) \ln(\xi) d\xi = -2b_0 - \frac{2b_2}{9} \tag{A.16d}$$

여기서, b_0 는 이차 경계요소의 형상함수의 상수항이고, b_1 와 b_2 는 일차항과 이차항의 계수이다. 식 (A.15b)는 균열면에서 정의된 요소에 변위 경계적분식 (2.13)이 적용될 경우에 사용되고, 식 (A.15c)는 표면력 경계적분식 (2.21)이 적용될 경우에 사용된다. 형상함수 (2.25)를 갖는 불연속 경계요소에서의 각각의 특이 적분은 다음과 같다.

$$\fint_{-1}^{1} \frac{Q(\xi)}{\xi-\rho} d\xi = 2(b_2\rho + b_1) + Q(\rho)\ln\left|\frac{1-\rho}{1+\rho}\right| \tag{A.17a}$$

$$\fint\!\!\!\!-_{-1}^{1} \frac{Q(\xi)}{(\xi-\rho)^2} d\xi = 2b_2 + Q(\rho)\frac{2}{\rho^2-1} + Q'(\rho)\ln\left|\frac{1-\rho}{1+\rho}\right| \tag{A.17b}$$

식 (A.17)에서 Q'는 형상함수의 일차미분이다. 불연속 특이 요소에 대한 식 (2.28)의 형상함수와 일차미분은 다음과 같이 기술된다.

$$Q(\xi) = c_s\xi + d_s\sqrt{1\pm\xi} + e_s \tag{A.18a}$$

$$Q'(\xi) = c_s + \frac{d_s}{2\sqrt{1\pm\xi}} \tag{A.18b}$$

여기서, c_s, d_s, e_s는 특이요소 형상함수의 계수들이다. 식 (2.28)의 형상함수를 갖는 불연속 특이 요소에 대한 특이 적분은 다음과 같다.

$$\fint_{-1}^{1} \frac{Q(\xi)}{\xi-\rho} d\xi = 2c_s + 2d_s(\sqrt{2} + \sqrt{\rho+1}\ln\frac{\sqrt{\rho+1}}{\sqrt{2}+\sqrt{\rho+1}}) + Q(\rho)\ln\left|\frac{1-\rho}{1+\rho}\right| \tag{A.19a}$$

$$\begin{aligned}\fint\!\!\!\!-_{-1}^{1} \frac{Q(\xi)}{(\xi-\rho)^2} d\xi = {} & \frac{d_s}{\sqrt{\rho+1}}(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{\rho+1}} + \ln\frac{\sqrt{\rho+1}}{\sqrt{2}+\sqrt{\rho+1}}) \\ & + Q(\rho)\frac{2}{\rho^2-1} + Q'(\rho)\ln\left|\frac{1-\rho}{1+\rho}\right|\end{aligned} \tag{A.19b}$$

식 (2.29)의 불연속 특이 형상함수에 대한 특이 적분은 다음과 같다.

$$\fint_{-1}^{1} \frac{Q(\xi)}{\xi-\rho} d\xi = 2c_s + 2d_s(\sqrt{2} + \sqrt{1-\rho}\ln\frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{2}+\sqrt{1-\rho}}) + Q(\rho)\ln\left|\frac{1-\rho}{1+\rho}\right| \tag{A.20a}$$

$$\fint_{-1}^{1} \frac{Q(\xi)}{(\xi-\rho)^2} d\xi = \frac{d_s}{\sqrt{1-\rho}} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{1-\rho}} + \ln \frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{2}+\sqrt{1-\rho}} \right)$$
$$+ Q(\rho) \frac{2}{\rho^2 - 1} + Q'(\rho) \ln \left| \frac{1-\rho}{1+\rho} \right| \qquad \text{(A.20b)}$$

ABSTRACT

This paper presents a new secant approach to estimate the path of growth of mixed-mode fatigue crack and proposes the second-order third-moment method to predict the probabilistic distribution of fatigue life.

Lower limit of macro-crack length, which is applicable to linear elastic fracture mechanics, is defined. Fatigue life of micro-crack is approximated with a constant growth rate corresponding to the lower limit of macro-crack length. The dual boundary element method is employed for the analysis of macro-crack. The mixed-mode stress intensity factors are evaluated by displacement extrapolation method. Paris-Erdogan law and maximum circumferential stress criterion are adopted to determine the crack growth rate and tangent direction, respectively. Integral equation of Paris-Erdogan law is discretized for a given increment of loading cycle. In each loading step, crack increment is assumed as a parabola, but discretized as a straight line with secant direction. The parabola is updated iteratively until the tangent of the assumed parabola converges to the growth direction at the new crack tip.

The probabilistic distribution of crack length is approximated as three-parameter lognormal by the second-order third-moment method incorporated with the proposed incremental formulation. Initial crack length and the coefficient of Paris-Erdogan equation are considered as random variables. For each loading step, the mean, standard deviation and skewness of crack length are approximated by those of previous step. The distribution of fatigue life is estimated from material properties and the S-N curve is derived numerically by the proposed method. The fatigue life for a given probability of failure is evaluated from the distribution of crack length. Proposed method produces a good approximation of the distribution of crack length compared with the results of the Monte Carlo simulation. In the evaluation of probability of failure, proposed method needs much less computational cost than the first-order reliability method.

Keywords:

Fatigue Crack, Fatigue Life, S-N Curve, Stress Intensity Factor, Dual Boundary Element Method, Second-Order Third-Moment Method, Probability of Failure

Student Number: 99415-802