

공학석사학위논문

사장교의 형상 관리를 위한
역해석 및 폐합 해석

2005년 2월

서울대학교 대학원
지구환경시스템공학부
이민권

사장교의 형상 관리를 위한 역해석 및 폐합 해석

Inverse Analysis for Geometric Configuration Adjustment and
Closing Analysis of Cable-stayed Bridges

지도교수 이 해 성

이 논문을 공학석사학위논문으로 제출함

2004 년 10 월

서울대학교 대학원

지구환경시스템공학부

이 민 권

이민권의 공학석사학위 논문을 인준함

2004 년 12 월

위 원 장

張 承 鎰



부위원장

이 해 성



위 원

高 鉉 武



초 록

케이블지지 구조물은 케이블 부재의 특성상 장력이 도입되기 전에는 강성이 발생하지 않기 때문에 무응력 상태의 기하형상을 정의할 수 없다. 따라서 교량의 기능성에 의하여 주어진 설계 형상을 만족시키는 케이블의 장력이나 초기 무응력 길이를 결정하는 해석이 필요하며 이러한 해석을 초기평형상태 해석이라고 정의한다. 이 초기 상태는 여타의 활하중 및 동적 해석에 필요한 기준형상을 결정하는 과정이기 때문에 사장교의 설계에서 대단히 중요한 과정이다. 기존의 초기평형상태 해석방법으로는 기하학적 목표형상을 이용한 방법, 모멘트 최소화를 이용한 방법 등이 있으며 해의 유일성을 보장하고 정확한 해를 구할 수 있다. 그러나 기하학적인 목표형상을 이용한 방법은 과도한 케이블 장력이 발생할 수 있고 모멘트 최소화를 이용한 방법은 목표형상에서 벗어나는 현상이 발생할 수 있다. 이러한 단점을 보완하기 위해 두 방법을 동시에 고려하는 복합 초기평형상태 해석 기법을 제안한다.

사장교의 시공에 있어서 목표형상 구현은 대단히 중요하다. 그러나 사장교와 같이 세장한 구조물은 아무리 엄격한 관리 하에 시공이 진행되더라도 설계시 고려하지 못한 현장 상황, 사하중의 불확실성 및 각 부재의 제작오차 등으로 인하여 설계에서 제시된 물리량이 정확히 도입될 수 없다. 따라서 현 상태의 구조물의 상태를 파악하여 지속적인 보정 작업을 수행하여야 한다. 이 연구에서는 역해석을 수행하기 위한 설계 변수로 적절한 물리량을 결정하고 사장

교에 대한 역해석 기법을 제안한다. 또한 역해석 문제의 불안정성을 제거하기 위한 정규화 기법을 제시한다. 추정된 실제 물리량을 토대로 시공 중 보정해 주어야 할 케이블의 길이를 계산하여 시공 중 형상 관리에 활용하고 몬테 카를로 모사를 시행하여 오차를 추정한다.

켄틸레버 공법으로 시공되는 사장교는 중앙부에서 거더가 폐합되기 전까지는 두 개의 독립적인 구조계가 형성되고 폐합 단면에서 단면력이 존재하지 않기 때문에 적합조건이 만족되지 않는다. 따라서 양쪽의 처짐과 처짐각을 일치시키는 데릭 크레인의 인양력과 케이블의 장력이 추가로 도입이 되어야 한다. 이 연구에서는 변위 민감도가 포함되어 있는 비선형 적합조건 방정식을 풀기 위하여 민감도를 구하는 방법을 제시하고 뉴튼-랩슨 방법에 의해 방정식을 푸는 방법을 제안한다. 또한 시공 중에 발생하는 시공 오차를 추정하기 위하여 몬테 카를로 모사법을 제안한다.

이 연구에서 제안한 형상 관리를 위한 다양한 해석법을 실제 시공 중인 제 2진도대교에 적용하여 그 타당성을 검증한다.

주요어

복합 초기형상 결정법, 역해석 기법, 폐합 해석, 정규화, 민감도

학번 : 2003-21341

목 차

초록	iii
목차	v
그림목차	vii
표목차	ix
1. 서론	1
2. 케이블지지 구조물의 해석	5
2.1 탄성현수선 케이블의 강성도 행렬	5
2.2 뼈대 구조물의 압축력을 고려한 비선형 강성도 행렬	12
2.3 강체 연결 요소 및 증분형 강성도 방정식	14
3. 초기 평형 상태 해석	19
3.1 기존의 초기 평형 상태 해석법	19
3.2 복합 초기 평형 상태 해석법	21
4. 형상 관리를 위한 역해석 기법	29
4.1 설계변수의 결정	29
4.2 역해석 문제의 정의	33

5. 폐합 시공 단계 해석	38
5.1 사장교의 폐합을 위한 적합 조건식	39
5.2 변위 민감도의 계산	41
6. 해석 예제	45
6.1 제2진도대교 초기 평형 상태 해석 예제	45
6.2 제2진도대교 형상 관리 예제	54
6.3 제2진도대교 폐합 시공 단계 해석 예제	61
7. 결론	66
부록 A 연성도 및 강성도 행렬	68
A-1 탄성 현수선 케이블 요소의 연성도 행렬	68
A-2 압축력을 고려한 뼈대 부재의 비선형 강성도 행렬	69
부록 B 해석예제 문제의 자원	70
참고문헌	72

그림 목 차

그림 2.1	탄성현수선 케이블에 대한 좌표계	6
그림 2.2	케이블 세그먼트의 자유 물체도	6
그림 2.3	변위가 발생한 탄성 현수선의 두 절점의 상대적 위치	11
그림 2.4	사장교의 뼈대 요소 모델링	15
그림 2.5	연결 요소의 강체 회전 변위에 의한 강체 변위	16
그림 3.1	Fan Type 사장교의 모델링과 제어 절점	22
그림 3.2	자중에 의해 발생한 모멘트	22
그림 3.3	단위하중에 의해 발생한 모멘트	22
그림 3.4	케이블 지지 교량의 평형 상태	26
그림 3.5	복합 초기 형상 결정법 순서도	28
그림 5.1	사장교 폐합 과정	39
그림 6.1	제 2 진도대교 종단면도	45
그림 6.2	케이블 장력 (모든 구속조건에 대한 복합 초기형상 결정법)	48
그림 6.3	거더 변위 (모든 구속조건에 대한 복합 초기형상 결정법)	48
그림 6.4	거더 모멘트 (모든 구속조건에 대한 복합 초기형상 결정법)	49
그림 6.5	주탑 형상 (모든 구속조건에 대한 복합 초기형상 결정법)	49
그림 6.6	주탑 모멘트 (모든 구속조건에 대한 복합 초기형상결정법)	50
그림 6.7	케이블 장력 (부분 구속조건에 대한 복합 초기형상 결정법)	51

그림 6.8 거더 형상 (부분 구속조건에 대한 복합 초기형상 결정법)	51
그림 6.9 거더 모멘트 (부분 구속조건에 대한 복합 초기형상 결정법)	52
그림 6.10 주탑 형상 (부분 구속조건에 대한 복합 초기형상 결정법)	52
그림 6.11 주탑 모멘트 (부분 구속조건에 대한 복합 초기형상 결정법)	53
그림 6.12 제어 절점에서의 변위 (정규화 계수에 따른 역해석)	57
그림 6.13 케이블 장력 (정규화 계수에 따른 역해석)	57
그림 6.14 케이블 강성의 설계치에 대한 비 (정규화 계수에 따른 역해석)	58
그림 6.15 케이블의 보정 길이 (정규화 계수에 따른 형상관리)	58
그림 6.16 장력 보정 후 거더 변위 (정규화 계수에 따른 형상관리)	59
그림 6.17 폐합 시공 전, 폐합 시공 중 그리고 폐합 시공 후의 거더 변위	65
그림 B-1 제 2 진도대교 주요 단면도	70
그림 B-2 제 2 진도대교 전경	71

표 목 차

표 4.1	사장교에서 거더의 휨강성에 대한 변위의 민감도 최대값	32
표 4.2	사장교에서 케이블의 장력에 대한 변위의 민감도 최대값	33
표 6.1	케이블의 강성 오차 최대 10% 발생시 케이블 보정량	60
표 6.2	폐합 해석 결과	63
표 6.3	물성치 오차 최대 10% 발생시 폐합해석 결과	63
표 6.4	물성치 오차 최대 10% 발생시 처짐과 처짐각 오차	64
표 6.5	측정치 오차 최대 5% 발생시 폐합해석 결과	64
표 6.6	측정치 오차 최대 5% 발생시 처짐과 처짐각 오차	64
표 B-1	제 2 진도대교 구조 요소별 주요 제원	71

1. 서론

최근 국내외적으로 교통량 및 물류량이 증가함에 따라 교량의 건설이 증대되고 있다. 또한 교량의 설계 및 시공이 전문화 되고, 해석 기법이 발전함에 따라 사장교 및 현수교와 같은 특수 교량의 건설이 급증하고 있다. 이러한 건설 경향은 재료, 시공 및 정보 기술의 급속한 발전과 더불어 더욱 가속화 되고 있으며, 교량의 단순한 기능성을 추구하던 과거의 경향에서 탈피하여 보다 미려하고 상징성이 가미된 교량에 대한 사회적 요구가 증가하고 있기 때문이다. 특히 사장교는 미려한 외관과 경제성으로 인하여 장대 교량 형식으로 선호되고 있으며 교량 하부 유속이 빨라 중간 교각을 설치하기 어려운 경우에 적절한 구조형식으로 사용되고 있다. 케이블 지지 교량은 일반적으로 여타 형식의 교량에 비하여 세장한 구조물이고 복잡한 비선형 거동을 하기 때문에 정밀한 구조 해석이 설계를 위하여 필수적이다.

일반적으로 3 차원 부재를 뼈대 요소로 모델링할 때는 부재와 부재를 연결하는 요소가 필요하다. 연결 요소는 요소 내의 변형은 없고 강제로서의 변위만 발생하여야 하므로 정밀한 해석을 수행하려면 강제 변위 구속조건을 적용하는 해석이 필요하다. 그러나 대부분의 해석 프로그램이 편의성을 위해서 강성이 매우 큰 요소를 강제 연결 요소로 사용하고 있다. 이 연구에서는 강제 변위 구속조건을 라그랑지 계수 (Lagrange Multiplier) 를 이용한 구속 조건으로 전

체 구조물 강성도 방정식에 추가한다. 또한 압축력에 의한 모멘트 증폭 효과를 고려한 증분형 비선형 강성도 행렬도 구하여 추가한다.

케이블은 장력이 도입되기 전에는 강성이 발생하지 않기 때문에 무응력 상태의 기하형상을 정의할 수 없다. 따라서 사장교에서는 사하중 하에서의 교량 형상을 일반적인 하중 하에서의 구조해석을 위한 기준 형상으로 사용한다. 사하중 상태에서의 교량 형상은 교량의 기능성에 의하여 주어진 설계 형상 또는 여타의 설계 조건에 의하여 결정된다. 이러한 사하중 상태에서의 교량형상을 초기 평형 상태로 정의하며, 이 초기 상태는 여타의 활하중 및 동적 해석에 필요한 기준 형상을 결정하는 과정이기 때문에 케이블지지 교량의 설계에서 대단히 중요한 과정이다. 초기 형상 결정법은 주어진 사하중 하에서 주어진 설계 조건을 만족시킬 수 있는 케이블의 장력을 결정하는 과정이며, 케이블의 비선형 거동과 함께 복잡한 비선형 문제로 정의된다. 국내외에서 초기 형상 결정법으로 시산법 및 순차적 반복 계산법이 널리 사용되어 왔으나, 늦은 수렴속도와 초기치에 따라 다른 해가 구해지는 등의 여러 가지 문제점이 지적되었다. 이러한 문제점을 개선하기 위해서 수학적으로 잘 정립된 뉴턴-랩슨 (Newton-Raphson) 방법을 이용하여 보다 안정된 수렴성이 보장되고, 초기치에 관계없이 유일한 해에 수렴할 수 있는 초기 형상 결정법으로서 교량의 형상을 이용하여 초기 장력을 결정하는 방법과 뼈대 구조물에서 발생하는 휨 모멘트를 최소화하도록 초기 장력을 결정하는 방법이 제안되었다. 그러나 교량의 형상에 의한 방법은 과도한 부재력이 발생할 수 있으며 모멘트 최소화에 의한 방법은 목표

형상에서 벗어날 수 있다는 단점이 있다. 이 연구에서는 두 방법의 단점을 보완하여 기하학적 형상과 모멘트 최소화 조건을 동시에 고려할 수 있는 복합적인 초기 형상 결정법을 제안한다.

목표 형상의 구현은 사장교 건설에서 대단히 중요한 부분이다. 그러나 실제 시공 상황에서는 여러 가지 현장 조건 및 제작 오차 등의 불확실성에 의하여 목표 형상을 만족시키기 어렵다. 따라서 현 단계의 구조물의 상태를 파악하여 시공 중에 지속적인 보정을 해주어야 한다. 현 상태의 구조 시스템의 특성은 구조물의 형상을 계측하여 역해석 문제를 풀어 추정할 수 있다. 역해석 문제는 측정치의 부족과 측정치 오차 등으로 인한 불안정성을 지닌 *ill-posed problem* 이다. 이러한 역해석 문제의 불안정성을 안정화 시키기 위하여 정규화 기법을 도입하였다. 추정된 실제 구조물의 상태를 바탕으로 목표 형상을 만족시키기 위하여 장력을 보정하는 형상 관리를 수행한다. 장력의 보정량은 케이블 길이의 조정량으로 나타낼 수 있다. 이 연구에서는 역해석을 통하여 구조물의 실제 물리량을 추정하고 교량의 목표형상 구현을 위해 필요한 케이블 길이의 보정량을 계산하여 교량의 형상을 관리하는 방법을 제안하고 몬테 카를로 모사 (Monte Carlo simulation) 를 시행하여 시공 오차를 추정한다.

일반적으로 캔틸레버 공법으로 시공되는 사장교는 폐합 시공이 완료되기 전까지는 폐합 단면에서 단면력이 작용하지 않기 때문에 적합조건이 만족하지 못하게 된다. 따라서 폐합점에서의 처짐과 처짐각에 대한 적합조건을 만족시키기 위한 추가의 외부하중을 계산하여 폐합을 진행하여야 하지만 일반적으로

현장에서는 시공자의 경험과 판단에 따라 폐합을 시공하였다. 그러나 구조물의 제시된 설계조건을 만족시키고 목표 형상을 구현하기 위해서는 정밀한 폐합 단계 해석과 시공이 필수적이다. 이 연구에서는 뉴튼-랩슨 방법에 의한 적합 조건식을 사용하여 폐합 시공 단계에서 필요한 케이블 길이의 보정량과 데릭 크레인의 인양력을 계산하는 해석 방법을 제안한다. 또한 몬테 카를로 모사를 시행하여 시공 중 발생할 수 있는 불확실성을 예측한다.

이 논문에는 사장교의 초기 형상 결정부터 시공 중 형상 관리를 위한 역해석 기법, 그리고 최종적으로 진행되는 폐합 시공 단계 해석 방법까지 사장교의 시공 과정에 필요한 모든 해석법을 포함하고 있다. 제안된 방법을 현재 시공 중인 제 2 진도대교에 적용하여 그 타당성을 검증한다.

2. 케이블지지 구조물의 해석

이 장에서는 케이블지지 구조물의 해석을 위한 강성도 방정식을 유도한다. 케이블지지 구조물의 해석을 위해서는 케이블 초기 길이가 기지의 값으로 주어져야 한다. 탄성현수선 케이블 요소와 강체 연결 요소에 대한 강성도 행렬을 구성하고 구조물 전체에 대한 강성도 방정식을 구성한다.

2.1 탄성현수선 케이블의 강성도 행렬

그림 2.1 은 무응력 길이가 L_0^e 인 케이블 요소 e 의 좌표계를 보이고 있다. 무응력 상태에서의 라그랑지 (lagrangian) 좌표 s 에 의하여 표시된 케이블의 한 질점은 케이블이 변형한 후에는 카테시안 (cartesian) 좌표계에서 \mathbf{x}^e 에 위치하게 된다. $p(s)$ 는 원점으로부터 라그랑지 좌표 s 까지의 변형 후 케이블의 길이를 의미하며 다음과 같이 정의된다.

$$p(s) = \int_0^s \left(\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} ds \quad (2.1a)$$

식 (2.1a) 를 s 에 대하여 미분하여 정리하면 다음 같이 표시된다.

$$\left(\frac{dx}{dp} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dp} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dp} \right)^2 = 1 \quad (2.1b)$$

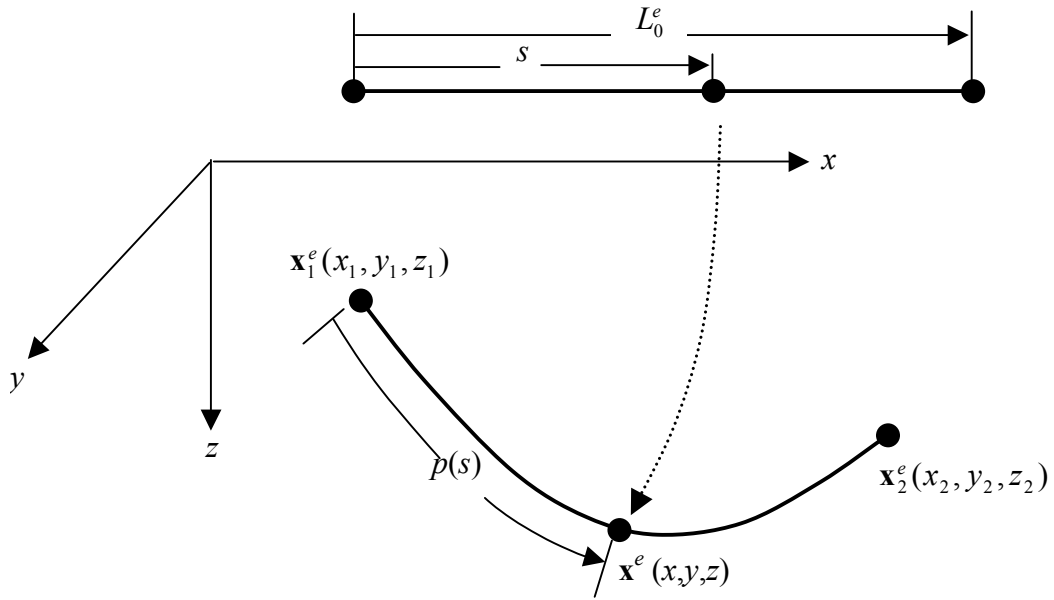


그림 2.1 탄성현수선 케이블에 대한 좌표계

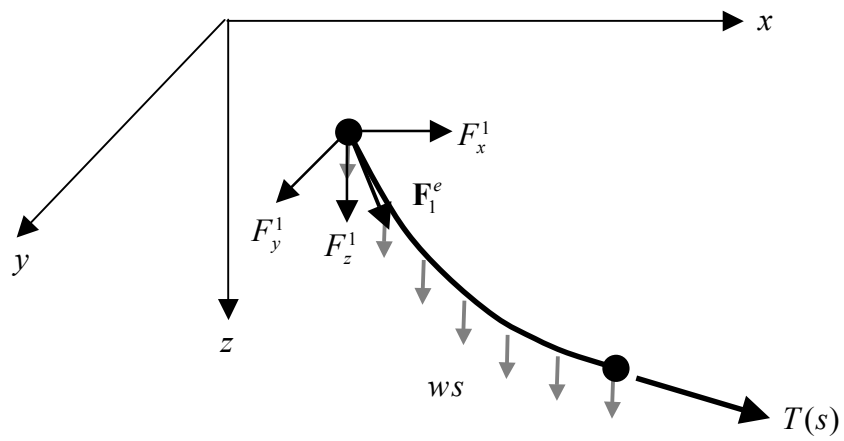


그림 2.2 케이블 세그먼트의 자유 물체도

그림 2.2 는 케이블의 자중만 작용하고 있을 경우 케이블의 1 번 절점에서 임의 점 x^e 까지의 자유 물체도를 보이고 있다. 케이블에는 인장력만 작용하게 되므로 평형방정식은 케이블의 인장력에 대하여 다음과 같이 표시된다.

$$T \frac{dx}{dp} + F_x^1 = 0, \quad T \frac{dy}{dp} + F_y^1 = 0, \quad T \frac{dz}{dp} + F_z^1 + ws = 0 \quad (2.2)$$

여기서 T 는 점 $p(s)$ 에서의 장력이고 F_x^1, F_y^1, F_z^1 는 각각 1 번 절점에서 각 좌표 방향으로 작용하는 재단력이며 w 는 변형전 케이블의 단위길이 당 중량이다.

케이블이 소변형 거동을 할 경우 케이블의 변형도는 다음과 같이 정의된다.

$$\varepsilon = \frac{dp^2 - ds^2}{2ds^2} \cong \frac{dp - ds}{ds} = \frac{dp}{ds} - 1 \quad (2.3)$$

Hooke 의 법칙으로부터 케이블의 인장력을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$T = EA\varepsilon \quad (2.4)$$

여기서 E 는 영계수 (Young's Modulus) 이고 A 는 변형 전의 케이블 단면적이다.

식 (2.3)을 식 (2.4)에 대입하여 p 와 s 의 관계를 구할 수 있다.

$$\frac{dp}{ds} = \frac{T}{EA} + 1 \quad (2.5)$$

자중만을 받는 케이블의 거동은 식 (2.1), 식 (2.2) 및 식 (2.5)의 5 개의 지배

방정식으로 정의되며 미지수는 x, y, z, p, T 이다. 케이블의 지배방정식을 적분하여 p, T 를 소거하고 x, y, z 를 독립변수 s 로 표현하면 케이블의 형상을 구할 수 있다. 케이블의 지배방정식으로부터 직각 좌표계 x, y, z 와 변형 전의 라그랑지 좌표 s 의 대응관계를 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned}
 x(s) &= \int_0^s \frac{dx}{dp} \frac{dp}{ds} ds + x(0) \\
 y(s) &= \int_0^s \frac{dy}{dp} \frac{dp}{ds} ds + y(0) \\
 z(s) &= \int_0^s \frac{dz}{dp} \frac{dp}{ds} ds + z(0)
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

식(2.6)에서 케이블 양단의 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 x = x_1, y = y_1, z = z_1 \quad \text{at } s = 0 \\
 x = x_2, y = y_2, z = z_2 \quad \text{at } s = L_0^e
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

식 (2.1b)와 식 (2.2)로부터 케이블의 장력을 1 번 절점의 재단력과 케이블의 자중에 대하여 표시할 수 있다.

$$T(s) = \sqrt{(F_x^1)^2 + (F_y^1)^2 + (F_z^1 + ws)^2} \tag{2.8}$$

식(2.8)을 식(2.2)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 관계식을 구할 수 있다.

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{F_x^1}{\sqrt{(F_x^1)^2 + (F_y^1)^2 + (F_z^1 + ws)^2}} \quad (2.9a)$$

$$\frac{dy}{dp} = -\frac{F_y^1}{\sqrt{(F_x^1)^2 + (F_y^1)^2 + (F_z^1 + ws)^2}} \quad (2.9b)$$

$$\frac{dz}{dp} = -\frac{(F_z^1)^2 + ws}{\sqrt{(F_x^1)^2 + (F_y^1)^2 + (F_z^1 + ws)^2}} \quad (2.9c)$$

$$\frac{dp}{ds} = \frac{1}{EA} \sqrt{(F_x^1)^2 + (F_y^1)^2 + (F_z^1 + ws)^2} + 1 \quad (2.9d)$$

식(2.5)와 식(2.8) 및 (2.9)의 관계식을 식 (2.6)에 대입하여 적분하고, $s = 0$ 에서의 경계 조건을 이용하면 자중이 재하된 케이블의 처짐 곡선을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} x(s) &= x_1 - \frac{F_x^1}{EA} s - \frac{F_x^1}{w} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{F_z^1 + ws}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{F_z^1}{H} \right) \right\} \\ y(s) &= y_1 - \frac{F_y^1}{EA} s - \frac{F_y^1}{w} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{F_z^1 + ws}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{F_z^1}{H} \right) \right\} \\ z(s) &= z_1 - \frac{F_z^1}{EA} s - \frac{ws^2}{2EA} - \frac{1}{w} \left\{ \sqrt{H^2 + (F_z^1 + ws)^2} - \sqrt{H^2 + (F_z^1)^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

여기서 $H = \sqrt{(F_x^1)^2 + (F_y^1)^2}$ 이다. 식(2.10)에 $s = L_0^e$ 에서 경계조건을 적용하면 다음과 같은 탄성현수선 케이블의 적합 조건식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
\phi_x = x_2 - x_1 &= -\frac{F_x^1}{EA} L_0^e - \frac{F_x^1}{w} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{F_z^1 + wL_0^e}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{F_z^1}{H} \right) \right\} \\
\phi_y = y_2 - y_1 &= -\frac{F_y^1}{EA} L_0^e - \frac{F_y^1}{w} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{F_z^1 + wL_0^e}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{F_z^1}{H} \right) \right\} \\
\phi_z = z_2 - z_1 &= -\frac{F_z^1}{EA} L_0^e - \frac{w(L_0^e)^2}{2EA} - \frac{1}{w} \left\{ \sqrt{H^2 + (F_z^1 + wL_0^e)^2} - \sqrt{H^2 + (F_z^1)^2} \right\}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

식 (2.11)의 케이블의 적합 조건식은 다음과 같이 행렬식 형태로 표시할 수 있다.

$$\mathbf{B}\mathbf{x}^e = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{F}_1^e, L_0^e) \tag{2.12}$$

여기서 $\mathbf{x}^e = (\mathbf{x}_1^e, \mathbf{x}_2^e)^T = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)^T$ 이며 \mathbf{B} 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

그림 2.3 에 보인 어떤 케이블 요소 e 의 평형상태에서의 양단 절점 위치가 기지의 기준 위치 \mathbf{x}_0^e 에서 절점 1 과 절점 2 에서 발생한 변위 $\mathbf{u}_1^e, \mathbf{u}_2^e$ 에 의하여 결정되었다면 식 (2.12)는 다음과 같이 표시된다.

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}_0^e + \mathbf{u}^e) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{F}_1^e, L_0^e) \tag{2.14}$$

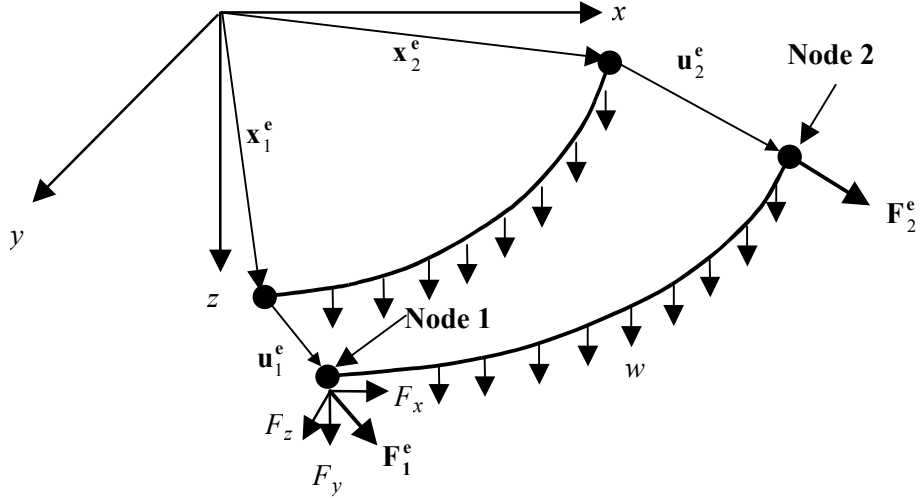


그림 2.3 변위가 발생한 탄성 현수선의 두 절점의 상대적 위치

케이블 요소 e 의 외적 평형 조건은 다음과 같다.

$$\mathbf{F}_2^e = -\mathbf{F}_1^e - \mathbf{w}L_0^e \quad (2.15)$$

여기서 $\mathbf{w} = (0, 0, w)^T$ 이다. 변위법에 기초한 일반적인 유한요소 해석법을 적용하기 위하여 케이블 요소 양단의 절점력을 절점 변위에 대하여 표시하여야 한다. 그러나 식 (2.11)은 비선형 방정식이므로 증분형 관계식을 사용하여야 한다. 식 (2.14)와 식 (2.15)의 증분식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}^e &= \Delta\boldsymbol{\phi}(\mathbf{F}_1^e, L_0^e) \\ \Delta\mathbf{F}_2^e &= -\Delta\mathbf{F}_1^e \end{aligned} \quad (2.16)$$

식 (2.11)을 Taylor 전개하여 1 차 항까지 만 포함시키면 다음과 같다.

$$\Delta\boldsymbol{\phi}(\mathbf{F}_1^e, I_0^e) = \begin{pmatrix} \Delta\phi_x^e \\ \Delta\phi_y^e \\ \Delta\phi_z^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_x^e}{\partial F_x} \Delta F_x + \frac{\partial\phi_x^e}{\partial F_y} \Delta F_y + \frac{\partial\phi_x^e}{\partial F_z} \Delta F_z \\ \frac{\partial\phi_y^e}{\partial F_x} \Delta F_x + \frac{\partial\phi_y^e}{\partial F_y} \Delta F_y + \frac{\partial\phi_y^e}{\partial F_z} \Delta F_z \\ \frac{\partial\phi_z^e}{\partial F_x} \Delta F_x + \frac{\partial\phi_z^e}{\partial F_y} \Delta F_y + \frac{\partial\phi_z^e}{\partial F_z} \Delta F_z \end{pmatrix} = \frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial \mathbf{F}_1^e} \Delta \mathbf{F}_1^e \quad (2.17)$$

식 (2.17)에 대한 자세한 표현식은 부록 A-1 에 기술되어 있다. 식 (2.17)을 식 (2.16) 에 대입하여 절점력의 증분에 대하여 표시하면 다음과 같다.

$$\Delta \mathbf{F}_1^e = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \mathbf{F}_1^e} \right)^{-1} \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}^e = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \mathbf{F}_1^e} \right)^{-1} (-\Delta \mathbf{u}_1^e + \Delta \mathbf{u}_2^e) = \mathbf{k}_c (-\Delta \mathbf{u}_1^e + \Delta \mathbf{u}_2^e) \quad (2.18)$$

$$\Delta \mathbf{F}_2^e = -\Delta \mathbf{F}_1^e = \mathbf{k}_c (\Delta \mathbf{u}_1^e - \Delta \mathbf{u}_2^e)$$

식 (2.18)을 한 개의 행렬식으로 표시하면 최종적인 증분형 케이블 요소 강성도 행렬식을 구할 수 있다.

$$\Delta \mathbf{F}_c^e = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{F}_1^e \\ \Delta \mathbf{F}_2^e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_c & \mathbf{k}_c \\ \mathbf{k}_c & -\mathbf{k}_c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_1^e \\ \Delta \mathbf{u}_2^e \end{pmatrix} = \mathbf{K}_c^e \Delta \mathbf{u}^e \quad (2.19)$$

2.2 뼈대 구조물의 압축력을 고려한 비선형 강성도 행렬

사장교의 뼈대 구조물에는 케이블의 인장력으로 인하여 큰 압축력이 작용하게 되기 때문에 정밀한 구조해석이 필요할 경우에는 뼈대 구조물에서 압축력

에 의한 모멘트 증폭 효과를 고려하여야 한다. 축 방향력의 휨 모멘트를 고려한 뼈대 부재의 강성도 행렬은 부재 좌표계에서 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{f}_F^e = (\mathbf{k}_L^e + F_A^e \mathbf{k}_G^e) \hat{\mathbf{u}}^e \quad (2.20)$$

여기서 \mathbf{k}_L^e 은 3 차원 뼈대 부재의 선형 강성도 행렬이며 $F_A^e \mathbf{k}_G^e$ 는 압축력을 고려한 비선형 강성도 행렬이다. 자세한 식은 부록 A-2 에 주어져 있다. F_A^e , $\hat{\mathbf{u}}^e$, \mathbf{f}_F^e 는 각각 뼈대 부재 e 의 부재 좌표계에서 정의된 압축력, 절점 변위, 재단력이다. 뼈대 부재에 작용하는 압축력은 절점 변위의 함수이므로 식 (2.20)은 비선형이다. 증분형 요소 강성도 행렬을 유도하기 위하여 압축력과 변위를 증분형으로 표시하면 다음과 같다.

$$\mathbf{f}_F^e = (\mathbf{k}_L^e + (F_A^e + \Delta F_A^e) \mathbf{k}_G^e) (\hat{\mathbf{u}}^e + \Delta \hat{\mathbf{u}}^e) \quad (2.21)$$

식 (2.21)을 전개하여 변위와 축 방향력의 증분항에 대한 일차항만 포함시키면 부재 강성도 행렬의 증분형 강성도 행렬을 구할 수 있다.

$$\Delta \mathbf{f}_F^e = \mathbf{k}_L^e \Delta \hat{\mathbf{u}}^e + F_A^e \mathbf{k}_G^e \Delta \hat{\mathbf{u}}^e + \Delta F_A^e \mathbf{k}_G^e \hat{\mathbf{u}}^e \quad (2.22)$$

축 방향력의 증분은 뼈대 부재의 축방향 강성과 절점의 변위 증분의 곱으로 표시할 수 있다.

$$\Delta F_A^e \mathbf{k}_G^e \hat{\mathbf{u}}^e = \Delta F_A^e \mathbf{Q}^e = \mathbf{Q}^e \Delta F_A^e = \mathbf{Q}^e \mathbf{k}_N \Delta \hat{\mathbf{u}}^e = \mathbf{k}_A^e \Delta \hat{\mathbf{u}}^e \quad (2.23)$$

여기서 \mathbf{k}_N 은 뼈대 부재의 축방향 강성도 벡터로서 부재 좌표계에서 다음과 같이 표시된다.

$$\mathbf{k}_N = \frac{EA^e}{l^e}(-1, 0, 0, 1, 0, 0) \quad (2.24)$$

위식에서 EA^e 와 l^e 은 각각 뼈대 부재의 축방향 강성 및 길이이다. 식 (2.23) 을 (2.22)에 대입하면 축 방향력의 영향을 고려한 뼈대요소의 증분형 강성도 행렬을 구할 수 있다

$$\Delta \mathbf{f}_F^e = (\mathbf{k}_L^e + F_A^e \mathbf{k}_G^e + \mathbf{k}_A^e) \Delta \hat{\mathbf{u}}^e = \mathbf{k}_F^e \Delta \hat{\mathbf{u}}^e \quad (2.25a)$$

부재 e 에 대한 부재 좌표계와 전체 구조물 좌표간의 좌표변환행렬 \mathbf{R}^e 을 이용하여 식 (2.25a) 를 구조물 좌표계에서의 재단 변위 및 재단력 증분으로 표시할 수 있다.

$$\Delta \mathbf{F}_F^e = (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{k}_F^e \mathbf{R}^e \Delta \mathbf{u}^e = \mathbf{K}_F^e \Delta \mathbf{u}^e \quad (2.25b)$$

2.3 강제 연결 요소 및 증분형 강성도 방정식

3 차원 부재를 부피가 없는 뼈대 요소로 이상화할 경우에는 그림 2.4 와 같이 각 부재 단면의 도심을 따라서 모델링하기 때문에 부재와 부재를 연결하기 위하여 연결 요소가 필요하다. 연결 요소는 연결부에서 각 부재의 도심을 연결하는 가상의 요소로서 요소내의 변형은 없으며 강제로서의 변위만 발생하여야

한다. 연결요소의 강체 운동을 정확히 묘사하기 위해서는 연결 요소 양단 재단 변위에 대한 강체 변위 구속조건을 적용하여야 한다. 그러나 일반적으로 프로그램상의 편의성을 위하여 강성이 아주 큰 뼈대 부재를 연결 요소로 사용하고 있다. 강성이 아주 큰 연결 부재를 사용하면 강성도 방정식을 푸는 과정에서 유효 숫자 손실이 생겨 평형방정식을 정확히 만족시킬 수 없고 수렴성이 떨어지는 경우가 발생한다. 이 연구에서는 연결요소의 강체 변위 조건을 라그랑지 계수법을 이용한 구속 조건으로 전체 구조물 강성도 방정식에 추가한다.

그림 2.5 는 강체 회전에 의한 연결요소의 강체 운동을 부재 좌표계에서 보이고 있다. 강체 병진 변위는 회전 변위에 영향을 미치지 않지만 y 및 z 방향 회전 변위는 각각 z 및 y 방향 강체 병진 변위에 영향을 미친다. 회전 변위가 작을 경우 회전 강체 변위에 의하여 발생하는 1 번 절점에 대한 2 절점의 병진

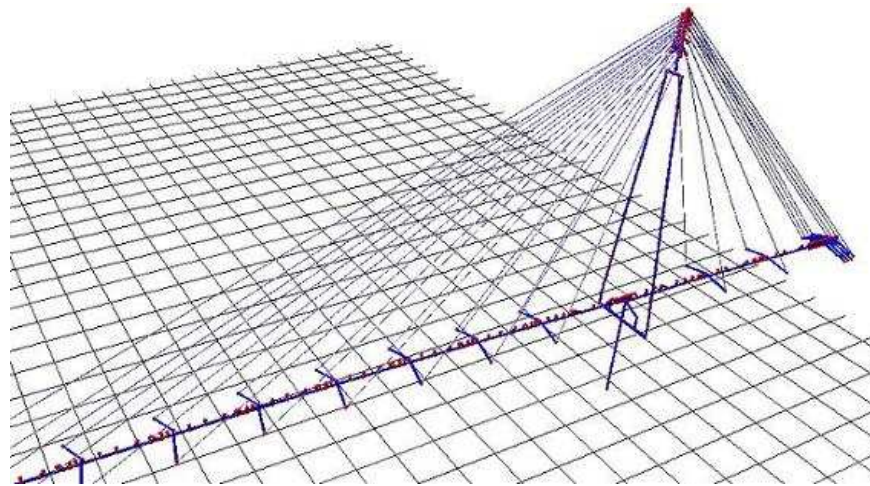


그림 2.4 사장교의 뼈대 요소 모델링

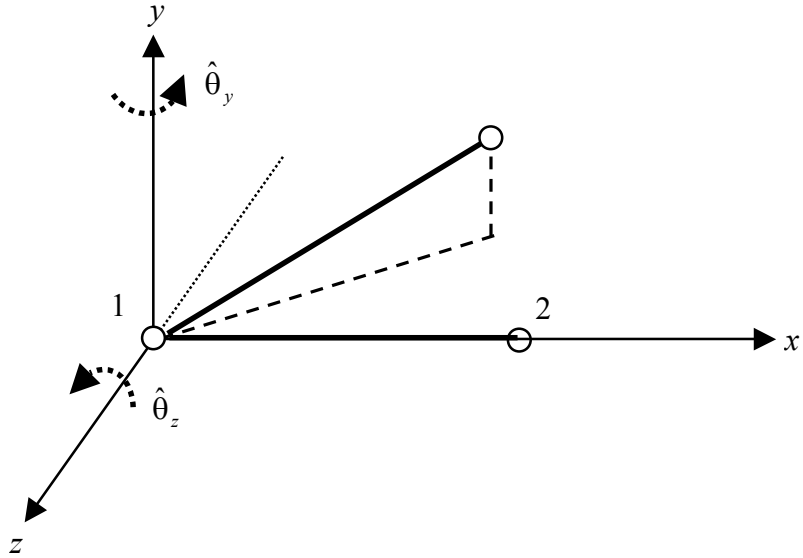


그림 2.5 연결 요소의 강체 회전 변위에 의한 강체 변위

상대 변위는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\hat{u}_{y2}^e = l^e \hat{\theta}_{z1}^e, \quad \hat{u}_{z2}^e = -l^e \hat{\theta}_{y1}^e \quad (2.26)$$

위식에서 l^e 는 연결 요소의 길이이다. 2 번 절점의 변위를 1 번 절점의 변위에 대하여 표시하면 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{u}}_2^e = \begin{pmatrix} \hat{u}_{x2}^e \\ \hat{u}_{y2}^e \\ \hat{u}_{z2}^e \\ \hat{\theta}_{x2}^e \\ \hat{\theta}_{y2}^e \\ \hat{\theta}_{z2}^e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & l^e \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -l^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_{x1}^e \\ \hat{u}_{y1}^e \\ \hat{u}_{z1}^e \\ \hat{\theta}_{x1}^e \\ \hat{\theta}_{y1}^e \\ \hat{\theta}_{z1}^e \end{pmatrix} = \mathbf{c}^e \hat{\mathbf{u}}_1^e \quad (2.27)$$

여기서 $\hat{\mathbf{u}}_1^e, \hat{\mathbf{u}}_2^e$ 는 각각 부재 좌표계에서의 절점 1 과 절점 2 의 절점 변위이고 \mathbf{c}^e 는 강체 운동을 나타내는 행렬이다. 부재 좌표계의 변위를 구조물 좌표계에 대하여 변환시키면 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_2^e = (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{c}^e \mathbf{R}^e \mathbf{u}_1^e \quad (2.28)$$

식 (2.28)은 각 강체 연결요소에 대한 변위 구속 조건으로서 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\left((\mathbf{R}^e)^T \mathbf{c}^e \mathbf{R}^e, -\mathbf{I} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^e \\ \mathbf{u}_2^e \end{pmatrix} = \mathbf{C}^e \mathbf{u}^e = 0 \quad (2.29)$$

3 차원 뼈대 부재, 케이블 부재 그리고 강체 연결 요소로 구성된 케이블 지지 교량의 증분형 강성도 방정식은 식 (2.19), (2.25b) 그리고 (2.29)를 적합조건에 따라 조합하여 구할 수 있다. 각 강체 연결요소에 대한 구속 조건인 식 (2.29)는 라그랑지 계수법에 의하여 최종 강성도 방정식에 포함된다.

$$\mathbf{F}_k + \sum_e^{nc} \mathbf{K}_c^e \Delta \mathbf{u}^e + \sum_e^{nf} \mathbf{K}_F^e \Delta \mathbf{u}^e + \sum_e^{nr} (\mathbf{C}^e)^T \Delta \lambda^e = \mathbf{P} \quad (2.30)$$

$$\sum_e^{nr} \mathbf{C}^e \Delta \mathbf{u}^e = 0$$

여기서 k 는 반복계산 회수를 나타내며, \mathbf{F}_k 는 k 번째 반복계산에서 계산된 구조물 저항력이고, nc, nf, nr 및 $\Delta \lambda^e$ 는 각각 케이블 요소의 수, 뼈대부재의 수,

강체 연결 요소의 수 그리고 강체 연결요소 e 에 대한 라그랑지 계수의 증분이
 다. 식 (2.30) 에서 Σ 는 유한요소법에서의 조합 연산자 (assembly operator)를
 의미한다. 케이블 요소와 뼈대요소의 비선형성 때문에 강성도 관계식이 증분
 형으로 표시되기 때문에 강체 연결 요소의 구속조건인 식 (2.29) 역시 증분형
 구속조건으로 최종적인 강성도 방정식에 포함되었다. 식 (2.30)은 단일 행렬식
 형식으로 표시할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_c + \mathbf{K}_F & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = \mathbf{P} - \mathbf{F}_k = \Delta \mathbf{P} \quad (2.31)$$

식 (2.31)에서 \mathbf{K}_c , \mathbf{K}_F 그리고 \mathbf{C} 는 각각 적합조건에 따라 조합된 케이블
 부재의 강성도 행렬, 뼈대 구조물의 강성도 행렬, 강체연결요소의 구속 조건이
 고, $\Delta \mathbf{u}$, $\Delta \lambda$ 는 구조물의 절점 변위 증분 벡터와 모든 강체연결요소에 대한 라
 그랑지 계수의 증분이다.

3. 초기 평형 상태 해석

대부분의 뼈대 구조물은 무응력 상태에서도 강성을 가지기 때문에 변형 전의 기하형상으로부터 부재의 초기 길이가 결정된다. 그러나 케이블은 장력이 도입되기 전에는 강성이 발생하지 않기 때문에 무응력 상태의 기하형상을 정의할 수 없다. 따라서 케이블 지지 구조물에서는 주어진 설계 조건을 만족시키는 케이블의 장력이나 초기 길이를 결정하는 해석이 필요하며, 이러한 해석을 초기평형상태 해석이라고 정의한다. 초기평형상태 해석에서는 케이블 부재의 자체 비선형성과 케이블의 초기 길이가 미지수가 되면서 발생하는 비선형성을 동시에 고려하여야 하는 복잡한 문제이며 여타의 다양한 해석의 기준이 되는 형상을 결정하는 과정이므로 케이블지지 교량의 설계에 있어서 대단히 중요하다. 이 장에서는 기존의 초기평형상태 해석법을 소개하고 그 문제점을 개선하기 위한 복합적인 초기평형상태 해석법을 제안한다.

3.1 기존의 초기 평형 상태 해석법

케이블 지지 교량의 초기평형상태를 해석하는 방법으로는 일반적으로 시산법 (Trial and Error) [1] 과 순차적 반복 계산법 (Successive iteration method) [2, 3] 이 널리 사용되어 왔으나 해의 정확성을 보장할 수 없거나 수렴성에 문제가 있어 엄밀한 해를 구하는데 한계가 있었다. 이러한 단점을 보완하기 위하여 사

하중 상태에서의 목표 형상 (Target Configuration under Dead Load, TCUD) 을 기하학적 구속 조건으로 취급하여 평형 방정식과 동시에 뉴튼-랩슨 (Newton-Raphson) 방법으로 푸는 초기평형상태 해석 기법이 제안되었다 [4]. 초기평형상태 해석은 케이블의 초기 무응력 길이가 미지수로 추가되어 있으므로 평형 방정식 외에 케이블의 개수만큼 추가의 조건식이 필요하다. 이 방법은 추가의 조건으로서 교량이 사하중 상태에서 이루고 있어야 하는 기하학적 목표 형상을 이용한다. 케이블이 정착되어 있는 절점을 제어 절점으로 정의하고, 기하학적 구속 조건으로서 제어 절점에 대한 변위 구속 조건을 이용하여 평형 방정식과 동시에 풀기 때문에 빠른 수렴성을 보이며 초기치에 상관없이 유일한 해를 구할 수 있다. 그러나 사하중 상태에서의 목표 형상을 이용한 초기평형상태 해석법에서는 목표 형상을 정확히 구현하는 해를 구할 수 있지만 기하학적 구속 조건에 의하여 케이블에 과도한 장력이 걸리거나 구조물에 과도한 모멘트가 발생할 수 있다.

과도한 부재력의 문제점을 보완하기 위하여 사하중 상태에서 뼈대 구조물에 발생하는 휨 모멘트가 최소가 되도록 하는 초기평형상태 해석법이 제안되었다 [5]. 일반적으로 목표 형상은 구조물의 기능성 및 과거의 경험을 토대로 결정되므로, 초기 평형 상태가 구조물의 기능성을 저하시키지 않는 한계 내에서는 목표형상에서 벗어나더라도 교량 각 부재의 부재력을 최소화 할 수 있는 초기 평형상태가 보다 바람직할 수 있다. 부재력을 최소화할 수 있는 초기 평형상태는 구조물의 변형 에너지를 최소화하는 문제로 정의할 수 있으며 평형 방

정식과 최적화 과정을 반복하여 풀 수 있다. 그러나 모멘트 최소화 조건을 사용할 경우에는 사하중 상태에서 구조물의 형상이 목표 형상에서 많이 벗어날 수 있는 케이블의 초기 길이가 계산될 수 있다. 이러한 단점을 개선하기 위하여 사하중 상태에서의 목표 형상과 모멘트 최소화를 동시에 적절히 고려할 수 있는 복합 초기 형상 결정 기법을 이 연구에서 제안한다.

3.2 복합 초기 평형 상태 해석법

기하학적 제한조건을 이용하는 초기 형상 결정법에서는 과도한 부재력이 발생할 수 있고, 모멘트 최소화를 이용하는 방법에서는 교량의 기하학적 목표 형상에서 많이 벗어나는 현상이 발생하는 경우가 있다. 두 방법의 단점을 보완하고 교량의 기하학적 형상과 모멘트 최소화라는 두 가지 목표를 동시에 고려할 수 있는 방법을 제시한다. 새로운 초기 형상 결정기법은 다음과 같은 최적화 문제로 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Min}_{T_i} \Pi = & \frac{1}{2} ((1-\alpha) \sum_{j=1}^{ncons} (u_j^c - \tilde{u}_j)^2 + \alpha \int_V \frac{1}{EI} (M_{self} + \sum_{i=1}^{nc} M_i^0 T_i)^2 dV) \\ & \text{subject to } (T_{\min})_i \leq T_i \leq (T_{\max})_i \end{aligned} \quad (3.1)$$

여기서 \tilde{u}_j 는 목표형상에서 j 번째 제어 절점 좌표이고, $ncons$ 는 제어 절점의 개수, u_j^c 는 주어진 장력에 대하여 발생하는 해석 상의 j 번째 제어 절점에서의 좌표이며 (그림 3.1), α 는 해석변수 (optimization factor) 이다. M_{self} 는 케이블이 없

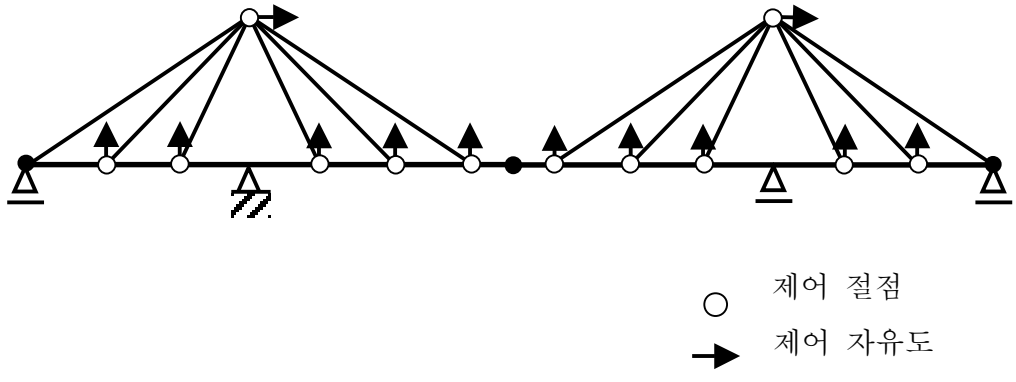


그림 3.1 Fan Type 사장교의 모델링과 제어 절점

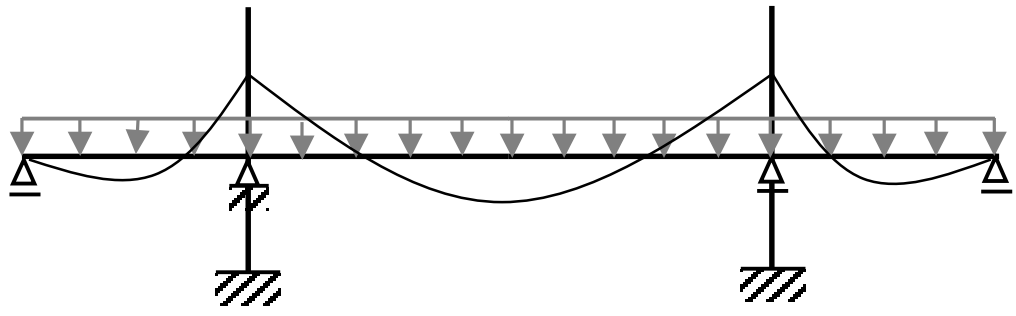


그림 3.2 자중에 의해 발생한 모멘트

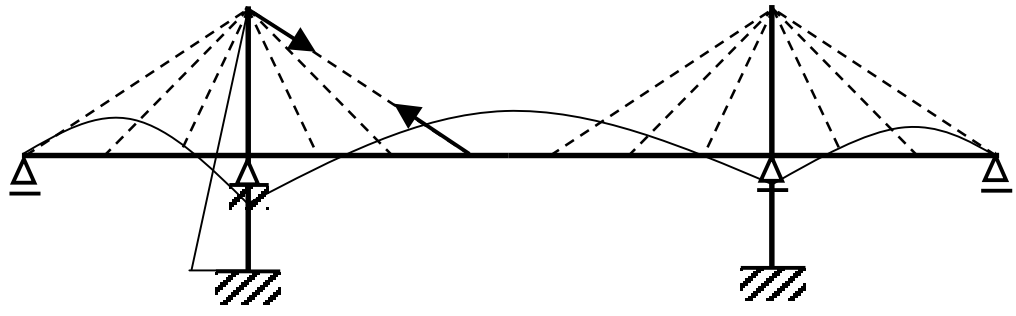


그림 3.3 단위하중에 의해 발생한 모멘트

는 상태에서 뼈대 구조물에 자중에 의하여 발생하는 모멘트이고 (그림 3.2), T_i 는 i 번째 케이블의 장력, M_i^0 는 케이블이 없는 상태에서 i 번째 케이블과 뼈대 구조물의 연결부에 케이블의 접선 방향으로 작용하는 단위하중에 의하여 발생하는 모멘트이다 (그림 3.3). $(T_{\min})_i$ 와 $(T_{\max})_i$ 는 i 번째 케이블의 장력의 하한치와 상한치이다. 사하중 상태에서 구조물에 발생하는 압축력은 좌굴 하중에 비하여 아주 작을 것이므로 식 (3.1)에서 축 방향력에 의한 비선형 효과는 무시하였다. 해석변수 α 는 0 과 1 사이에서 해석자가 지정할 수 있다. 식 (3.1)을 무차원화 하고 α 가 0 과 1 사이에서 어느 한쪽으로 치우치지 않고 합리적인 값을 가질 수 있도록 식 (3.1)의 우변의 첫 번째 항과 두 번째 항을 다음과 같이 표준화 (normalizing) 를 하였다.

$$\text{Min}_{T_i} \Pi = \frac{(1-\alpha)}{2} \frac{1}{u_{op}^2} \sum_{j=1}^{ncons} (u_j^c - \tilde{u}_j)^2 + \frac{\alpha}{2} \frac{1}{M_{op}^2} \int_V \frac{1}{EI} (M_{self} + \sum_{i=1}^{nc} M_i^0 T_i)^2 dV \quad (3.2)$$

subject to $(T_{\min})_i \leq T_i \leq (T_{\max})_i$

여기서 u_{op} 와 M_{op} 는 표준화를 위한 상수로서 다음과 같이 정의된다.

$$u_{op}^2 = \sum_{j=1}^{ncons} ((u_j^c)^{op} - \tilde{u}_j)^2 \quad (3.3)$$

$$M_{op}^2 = \int_V \frac{1}{EI} (M_{self} + \sum_{i=1}^{nc} M_i^{op} T_i^{op})^2 dV$$

$(u_j^c)^{op}$ 는 모멘트 최소화에 의한 초기평형상태 해석으로부터 결정된 j 번째 제어

절점의 좌표이며 T_i^{op} 와 M_i^{op} 는 각각 모멘트 최소화에 의한 초기평형상태 해석으로부터 결정된 i 번째 케이블의 장력과 i 번째 케이블과 뼈대 구조물의 연결부에 케이블의 접선 방향으로 단위하중이 작용할 경우 발생하는 모멘트이다.

평형 방정식과 최적화 조건을 동시에 푸는 방법은 복잡한 비선형 방정식을 구성하게 되므로 대단히 비효율적이다. 이 연구에서는 평형 방정식과 최적화 문제를 분리하여 독립적으로 풀고 반복 계산에 의하여 두 방정식을 동시에 만족시키는 해를 구한다. 즉, 먼저 각 케이블의 장력 혹은 무응력장 길이를 가정하고 평형방정식 (2.31)을 만족하는 해를 구한다. 평형 방정식을 만족하는 해에 의하여 각 케이블의 장력 방향을 산정할 수 있으므로 M_i^0 를 계산하고, 케이블 장력의 방향을 고정시킨 상태에서 식 (3.2)에서 정의된 최적화 과정을 수행한다. 각 케이블의 장력이 결정되면 무응력 길이는 식 (2.11)에 의하여 쉽게 계산할 수 있으므로 새로 계산된 케이블의 초기 무응력 길이에 대해 다시 평형 방정식을 풀고 최적화 문제를 푸는 과정을 되풀이하여 해가 수렴될 때까지 반복한다.

식 (3.2)에서 첫째 항은 TCUD 해석의 기하학적 제한 조건을 이용한 초기평형상태 해석방법의 목적함수 부분이며, 둘째 항은 에너지를 최소화하는 초기평형상태 해석방법의 목적함수를 나타낸다. 즉, α 값이 1 이면 첫 번째 항을 최적화 하여 에너지를 최소화하는 초기평형상태 해석방법으로 초기평형상태 해석을 수행할 것이며, α 값이 0 이면 두 번째 항을 최적화하여 기하학적인 제한 조

건을 이용한 초기평형상태 해석 방법으로서 초기평형상태 해석을 수행하게 된다. 따라서 α 값을 적절히 조정하면 기하학적 제한 조건을 만족시키는 초기평형상태와 에너지의 최소화를 만족시키는 초기평형상태 사이에서 적절한 초기평형상태를 계산할 수 있게 된다. 수식 전개 과정을 단순화시키기 위하여 식 (3.2)에서 정의한 최적화 문제의 목적함수를 행렬식 형태로 표시한다.

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mathbf{T}} \Pi = & \frac{1-\alpha}{2} \frac{1}{u_{op}^2} (\mathbf{u}^c - \tilde{\mathbf{u}})^T (\mathbf{u}^c - \tilde{\mathbf{u}}) \\ & + \frac{\alpha}{2} \frac{1}{M_{op}^2} \int_V \frac{1}{EI} (M_{self} + (\mathbf{M}^0)^T \mathbf{T})^T (M_{self} + (\mathbf{M}^0)^T \mathbf{T}) dV \end{aligned} \quad (3.4)$$

subject to $\mathbf{T}_{\min} \leq \mathbf{T} \leq \mathbf{T}_{\max}$

위 식에서 \mathbf{u}^c , $\tilde{\mathbf{u}}$ 그리고 \mathbf{M}^0 는 각각 u_j^c , \tilde{u}_j 그리고 M_i^0 를 열 벡터 형식으로 표시한 변수이다.

주어진 케이블의 무응력 길이에 대한 평형상태를 강성도 방정식 (2.31)을 풀어 구하였다면, 케이블 지지 구조물의 평형방정식은 그림 3.4 와 같이 케이블 부재의 장력을 뼈대 구조물에 작용하는 외력으로 치환하여 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\mathbf{K}_F \mathbf{u} + \sum_e T_e \mathbf{t}_e = \mathbf{K}_F \mathbf{u} + \mathbf{tT} = \mathbf{P} \quad (3.5)$$

여기서 \mathbf{t}_e 는 구조물 자유도 차수의 벡터로서 케이블 e 가 연결되어 있는 절점

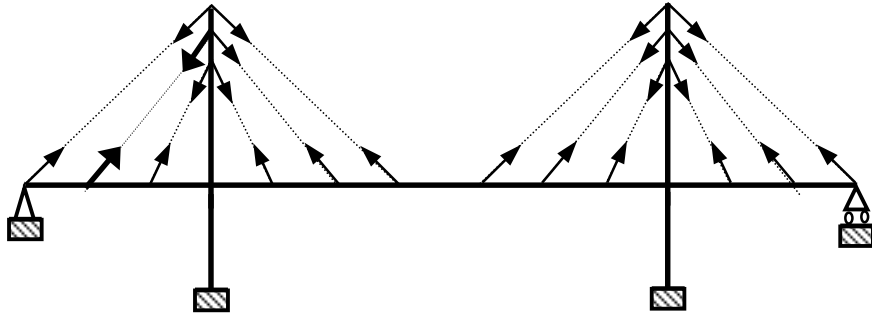


그림 3.4 케이블 지지 교량의 평형 상태

의 병진 자유도에 해당하는 요소에 케이블 e 의 처짐 곡선의 접선 벡터 성분이 배치되고 나머지 부분은 0 으로 구성된다. 케이블 e 의 처짐 곡선의 접선 벡터 성분은 식 (2.9)에 의하여 계산할 수 있다. 식 (3.5)에서 \mathbf{T} 는 케이블 장력 벡터이고, \mathbf{t} 는 각 열이 \mathbf{t}_e 벡터로 구성된 행렬이다.

$$\mathbf{t} = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_{nc}) \quad (3.6)$$

식 (3.5)를 변위에 대하여 풀면 다음과 같이 케이블의 장력에 대한 식이 유도된다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{P} - \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{t} \mathbf{T} = \mathbf{u}^F + \mathbf{Q} \mathbf{T} \quad (3.7)$$

여기서 \mathbf{u}^F 는 케이블이 없을 경우 뼈대구조물의 처짐을 의미한다. 제어 절점의 해석상의 좌표 벡터는 전체 자유도 위치에 대하여 불리안 행렬 (Boolean

Matrix) $\tilde{\mathbf{B}}$ 를 사용하여 표시할 수 있다.

$$\mathbf{u}^c = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{u}^F + \mathbf{Q}\mathbf{T}) \quad (3.8)$$

식 (3.8)을 식 (3.4)에 대입하여 정리하면 케이블 장력에 대한 2 차 최적화 문제를 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mathbf{T}} \Pi = & \frac{1-\alpha}{2} \frac{1}{u_{op}^2} (\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{u}^F + \mathbf{Q}\mathbf{T}) - \tilde{\mathbf{u}})^T (\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{u}^F + \mathbf{Q}\mathbf{T}) - \tilde{\mathbf{u}}) \\ & + \frac{\alpha}{2} \frac{1}{M_{op}^2} \int_V \frac{1}{EI} (M_{self} + (\mathbf{M}^0)^T \mathbf{T})^T (M_{self} + (\mathbf{M}^0)^T \mathbf{T}) dV \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\text{subject to } \mathbf{T}_{\min} \leq \mathbf{T} \leq \mathbf{T}_{\max}$$

식 (3.9)에서 정의된 2 차 최적화 문제의 1 차 필요조건은 목적함수를 케이블 장력에 대하여 미분하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{T}} = & \frac{1-\alpha}{u_{op}^2} \mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{B}}^T (\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{u}^F + \mathbf{Q}\mathbf{T}) - \tilde{\mathbf{u}}) + \frac{\alpha}{M_{op}^2} \int_V \frac{1}{EI} \mathbf{M}^0 (M_{self} + (\mathbf{M}^0)^T \mathbf{T}) dV \\ = & \left(\frac{1-\alpha}{u_{op}^2} \mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{Q} + \frac{\alpha}{M_{op}^2} \int_V \frac{1}{EI} \mathbf{M}^0 (\mathbf{M}^0)^T dV \right) \mathbf{T} \\ & + \frac{1-\alpha}{u_{op}^2} \mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{B}}^T (\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}^F - \tilde{\mathbf{u}}) + \frac{\alpha}{M_{op}^2} \int_V \frac{1}{EI} \mathbf{M}^0 M_{self} dV = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\text{subject to } \mathbf{T}_{\min} \leq \mathbf{T} \leq \mathbf{T}_{\max}$$

식 (3.9)의 부등형 구속조건을 고려하기 위하여 활성 구속조건 기법 (Active set strategy) [6] 을 사용한다. 식 (3.9)에서 구한 각 케이블의 장력은 평형 방정식을

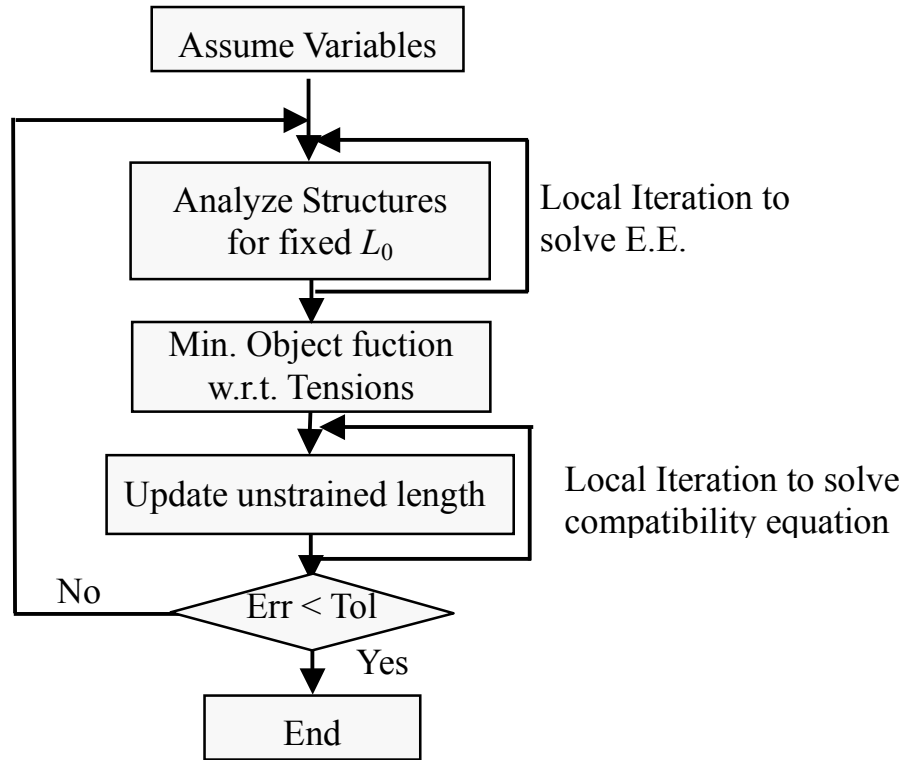


그림 3.5 복합 초기 형상 결정법 순서도

만족시키지 못하므로 식 (3.9)에서 계산된 장력을 이용하여 각 케이블의 무응력 길이를 계산하고 다시 평형 방정식을 푸는 과정을 해가 수렴할 때까지 반복적으로 수행한다. 이 반복 계산을 위한 초기값으로는 모멘트 최소화를 만족하는 해를 사용한다. 이 반복 계산 과정을 그림 3.5에 도시하였다.

4. 형상 관리를 위한 역해석 기법

사장교와 같은 장대 케이블지지 구조물은 엄격한 시공 관리 하에 가설 작업이 진행되더라도 설계시 고려하지 못한 현장 상황, 사하중의 불확실성 및 각 부재의 제작오차 등으로 인하여 설계에서 제시한 물리량 (케이블 장력, 단면 제상수 값 등) 이 정확히 도입될 수 없다. 따라서 각 시공 단계를 완료한 후 구조물의 형상을 측정하여 각 시공 단계 별로 도입된 실제적인 물리량을 추정하고 장력을 지속적으로 보정하여야 한다. 시공 단계에서 구조물은 일반적으로 탄성 상태에 있기 때문에 이론적으로는 각각의 시공 단계에서 목표 형상을 만족시키면 최종 단계에서 목표 형상이 만족되며, 각 시공 단계에서 장력을 보정하지 않고 최종 완성계 상태에서 한꺼번에 장력을 보정하여 목표 형상을 만족시킬 수 있다. 즉, 시공 단계별로 보정해야 하는 장력의 크기와 최종 완성계 상태에서 보정하는 장력의 크기는 같으므로 이 연구에서는 최종 완성계 상태에서 역해석을 수행하여 교량의 형상을 관리하기 위한 방법을 제안한다.

4.1 설계변수의 결정

역해석 문제에서 미지수로 사용할 물리량을 결정하는 것은 중요한 문제이다. 케이블 지지 구조물의 거동에 큰 영향을 미치는 물리량으로는 주탑 및 보의 휨강성, 지지 케이블의 장력 등을 생각해 볼 수 있다. 먼저 주탑 및 보의

휨강성이 설계 변수로 적절한지 판단하기 위하여 변위의 휨 강성에 대한 민감도를 계산하여 그 가능성을 확인한다. 변위의 민감도는 케이블 지지 구조물의 평형 방정식을 직접 미분하여 구할 수 있다. 케이블 지지 구조물의 평형 방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_F \mathbf{u} + \sum_e \mathbf{F}_c^e(L_0^e, \mathbf{u}^e(L_0^e)) = \mathbf{P} \quad (4.1)$$

여기서 \mathbf{F}_c^e 는 케이블 부재 e 의 장력이며, 식 (2.11) 에서 주어진 탄성현수선 방정식에 의하여 정의된다. 식 (4.1)의 강성도 방정식을 휨강성에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{EI}} + \frac{\partial \mathbf{K}_F}{\partial \mathbf{EI}} \mathbf{u} + \sum_e \frac{\partial \mathbf{F}_c^e}{\partial \mathbf{EI}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{EI}} = 0 \quad (4.2)$$

여기서 \mathbf{EI} 는 휨강성이다. 케이블 부재의 장력의 휨강성에 대한 민감도를 구하기 위하여 식 (2.14)의 적합 조건식을 휨강성에 대하여 미분한다.

$$\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial \mathbf{EI}} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \frac{\partial \mathbf{F}_1^e}{\partial \mathbf{EI}} \quad (4.3)$$

식 (4.3)을 장력의 휨강성에 대한 민감도에 대하여 표시하고, 케이블 부재의 외적 평형방정식인 식 (2.15)를 휨강성에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1^e}{\partial EI} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \right)^{-1} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial EI} = \mathbf{k}_c^e \left(\frac{\partial \mathbf{u}_2^e}{\partial EI} - \frac{\partial \mathbf{u}_1^e}{\partial EI} \right) \quad (4.4a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_2^e}{\partial EI} = \frac{\partial (-\mathbf{F}_1^e - \mathbf{w}_c L_0^e)}{\partial EI} = -\mathbf{k}_c^e \left(\frac{\partial \mathbf{u}_2^e}{\partial EI} - \frac{\partial \mathbf{u}_1^e}{\partial EI} \right) \quad (4.4b)$$

식 (4.4)를 다음과 같은 단일 행렬식으로 표시할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{F}_c^e}{\partial EI} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_c^e & \mathbf{k}_c^e \\ \mathbf{k}_c^e & -\mathbf{k}_c^e \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial EI} = \mathbf{K}_c^e \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial EI} \quad (4.5)$$

식 (4.5)를 식 (4.2)에 대입하여 전체 구조물에 대한 민감도 식으로 조합하면 변위의 보의 휨강성에 대한 민감도 관계식을 구할 수 있다.

$$\mathbf{K}_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial EI} + \frac{\partial \mathbf{K}_F}{\partial EI} \mathbf{u} + \sum_e \mathbf{K}_c^e \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial EI} = \mathbf{K}_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial EI} + \frac{\partial \mathbf{K}_F}{\partial EI} \mathbf{u} + \mathbf{K}_c \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial EI} = 0 \quad (4.6)$$

식 (4.6)을 풀어 변위의 보의 휨강성에 대한 민감도를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial EI} = -(\mathbf{K}_F + \mathbf{K}_c)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{K}_F}{\partial EI} \mathbf{u} \right) \quad (4.7)$$

부록 B에 제시되어 있는 제 2 진도대교의 거더 휨강성에 대한 변위의 민감도를 계산하여 표 4.1에 제시하였다. 표에서 보이는 바와 같이 변위의 거더 휨강성도에 대한 민감도가 매우 작은 것을 알 수 있다. 이는 케이블지지 구조

표 4.1 사장교에서 거더의 휨강성에 대한 변위의 민감도 최대값

	중앙 경간	측 경간
변위 민감도 최대값	3.918×10^{-10}	1.914×10^{-9}

물의 특성으로 판단되며 거더의 휨강성 변화에 따라 추가적으로 발생하는 수직 변위의 상당부분을 케이블의 장력 변화로 상쇄시키기 때문에 거더의 휨강성이 변화하더라도 구조물의 변위에는 거의 영향을 끼치지 못하는 것으로 생각된다. 사장교와 같은 케이블 지지 구조물은 보의 휨강성에 대한 변위의 민감도가 매우 둔감하므로, 이처럼 작은 민감도를 가지는 경우에는 수치 연산시 발생하는 유효자리 숫자 손실 및 역해석 문제의 불안정성이 극심하게 발현되어 공학적으로 의미 있는 해를 역해석에 의하여 추정할 수 없게 된다. 따라서 거더의 휨강성은 역해석을 위한 설계변수로 부적절한 것으로 판단된다.

일반적으로 사장교와 같은 케이블 지지 구조물은 케이블의 장력에 의해서 주로 지지되는 구조물로서 케이블의 장력이 구조계 전체에 큰 영향을 미치게 된다. 케이블의 장력에 대한 변위 민감도를 계산하여 역해석을 위한 설계변수로서의 적절성 여부를 판단한다. 식 (3.7)을 장력에 대하여 미분하면 장력에 대한 변위 민감도를 구할 수 있다. 계산된 결과를 표 4.2에 제시하였다. 표에서 보이듯이 케이블의 장력에 대한 변위 민감도가 휨강성에 대한 민감도에 비하여 상당히 크게 계산되고 있다. 즉 케이블의 장력이 케이블지지 교량의 거동에 미치는 영향이 크다고 할 수 있으며 이는 역해석에 의하여 공학적으로 의

표 4.2 사장교에서 케이블의 장력에 대한 변위의 민감도 최대값

	중앙 경간	측 경간
변위 민감도 최대값	5.834×10^{-4}	7.778×10^{-3}

미 있는 해가 도출될 수 있는 것을 의미한다. 그런데 케이블의 장력은 케이블의 초기 무응력 길이와 강성으로부터 결정이 된다. 케이블의 초기 무응력 길이는 사장교 시공에 있어 대단히 중요하기 때문에 제작 시 정확하게 재단 된다고 볼 수 있으므로 장력에 변화를 주는 요인은 케이블의 강성이라고 생각할 수 있다. 이 연구에서는 역해석을 통하여 추정하고자 하는 실제 물리량으로 케이블의 강성을 선택한다. 측정점에서의 측정 변위와 수치해석 모델에서의 해석 변위의 차의 norm 으로 정의되는 오차함수를 최소화하여 케이블의 실제 강성을 추정하고 추정된 강성으로 수치해석 모델을 수정하여 목표형상을 구현하기 위한 케이블 길이의 보정량을 계산하는 형상 관리 시스템을 구성한다.

4.2 역해석 문제의 정의

사장교의 구조계의 특성은 다음과 같이 최적화 형태로 정의되는 역해석 문제를 풀어 결정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Min}_{T_i} \Pi &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{ncons} (u_j^c - \bar{u}_j^m)^2 + \lambda \sum_{i=1}^{nc} (T_i - \tilde{T}_i)^2 \right) \\ &\text{subject to } (T_{\min})_i \leq T_i \leq (T_{\max})_i \end{aligned} \quad (4.8)$$

여기서 \bar{u}_j^m 는 실제로 측정한 형상 제어점의 좌표를 나타내고 \tilde{T}_i 는 목표장력을 나타내며 λ 는 정규화 계수이다. 실제로 역해석을 통해 추정하고자 하는 물리량은 케이블의 강성이지만 장력에 대한 최소화를 수행하는 이유는 복합 초기평형상태 해석법의 알고리즘을 그대로 사용할 수 있다는 장점이 있고 장력에 대한 1 차 필요조건이 선형 방정식으로 구성이 되므로 쉽게 풀 수 있다는 장점이 있기 때문이다.

식 (4.8)의 첫 번째 항은 오차함수이고 두 번째 항은 Tikhonov 정규화 함수이다. 원래의 역해석 문제는 오차 함수에 의하여 정의된다. 그러나 오차 함수만을 사용하여 역해석을 수행하게 되면 계측치에 포함되어 있는 계측 오차 및 대상 구조물의 수학적 모델의 오차로 인하여 해가 하나만 존재하는 것이 아니라 동일한 응답을 만들어낼 수 있는 해의 조합이 무수히 많이 존재하게 된다. 또한 수없이 많은 해가 연속적으로 분포하고 있기 때문에 최적화 과정에서 수렴성이 느려지거나 발산하는 등의 문제를 야기할 수 있다 [7, 8]. 이러한 불안정성을 제거하기 위하여 추가적으로 적절한 안정화 기법이 필요하며 이 연구에서는 Tikhonov 정규화기법을 적용한다.

시스템 변수 추정에 있어서 정규화 함수가 최적화 과정에 미치는 영향은 정규화 계수에 의해 결정된다. 정규화계수가 너무 작으면 정규화 효과가 작아져서 본래의 수치적인 불안정성을 극복할 수 없게 되고, 반대로 정규화계수가 너무 크게 되면 최적화 과정에서 오차함수보다 정규화함수가 지배적인 영향을

끼치게 되어 해를 제대로 추정해 낼 수 없게 된다. 정규화 계수의 크기는 전체적인 역해석 해의 정확도 및 안정성에 중요한 영향을 미치기 때문에 최적의 정규화 계수를 결정하는 것은 물리적으로 의미 있는 해를 구하는데 있어서 대단히 중요하다.

선형 역해석 문제에서 최적의 정규화계수를 결정하는 방법은 L-curve method [9], the cross validation method [10], the Bayesian theory 에 기초한 통계적 접근법 [11], VRFS (variable regularization factor method) [12], GMS (geometric mean scheme) [13], bi-linear fitting method 등 여러 가지가 제안되어 있으나 이 연구에서는 GMS 방법을 이용하여 정규화 계수를 결정한다. GMS 방법은 헤시안 (Hessian) 행렬의 특이치 분해 (singular value decomposition) 를 통해 가장 큰 특이치 (singular value) 와 0 이 아닌 가장 작은 특이치의 곱의 기하평균으로 정규화 계수를 결정하는 방법이다.

$$\lambda = \sqrt{S_{\max} \cdot S_{\min}} \quad (4.9)$$

여기서, S_{\max} 는 가장 큰 특이치, S_{\min} 은 0 이 아닌 가장 작은 특이치를 나타낸다 [14].

식 (4.8) 에서 정의된 목적함수의 첫 번째 항과 두 번째 항의 물리적 차원이 다르기 때문에 첫 번째 항은 제어 절점의 변위 측정치 \bar{u}_j^m 의 norm 으로 나누어 주고 두 번째 항에서는 각 항을 목표 장력 \tilde{T}_i 로 나누어 주어 무차원화

한다.

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\xi_i} \Pi &= \frac{1}{2} \frac{1}{\|\bar{\mathbf{u}}_j^m\|^2} \sum_{j=1}^{ncons} (\mathbf{u}_j^c - \bar{\mathbf{u}}_j^m)^2 + \frac{1}{2} \lambda \sum_{i=1}^{nc} (\xi_i - 1)^2 \\ &\text{subject to } (\xi_{\min})_i \leq \xi_i \leq (\xi_{\max})_i \end{aligned} \quad (4.9)$$

$\|\bar{\mathbf{u}}_j^m\|^2$ 는 현 시공 상태의 제어 절점 변위 벡터의 Euclidean norm 이며 ξ_i 는 T_i / \tilde{T}_i 이다. 식 (4.8)의 장력 T_i 에 대한 최적화 문제가 식 (4.9)와 같이 무차원화된 변수 ξ_i 에 대한 최적화 문제로 나타내어진다. 수식 전개 과정을 단순화하기 위해 다음과 같이 행렬식 형태로 표시한다.

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\xi} \Pi &= \frac{1}{2} \frac{1}{\|\bar{\mathbf{u}}^m\|^2} (\mathbf{u}^c - \bar{\mathbf{u}}^m)^T (\mathbf{u}^c - \bar{\mathbf{u}}^m) + \frac{1}{2} \lambda (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{1})^T (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{1}) \\ &\text{subject to } \xi_{\min} \leq \boldsymbol{\xi} \leq \xi_{\max} \end{aligned} \quad (4.10)$$

여기서 $\bar{\mathbf{u}}^m$ 는 $\bar{\mathbf{u}}_j^m$ 를 열 벡터 형식으로 표시한 변수이며, $\mathbf{1}$ 은 단위 숫자 1 로 구성된 열 벡터이다. 식 (4.10)에서 정의된 2 차 최적화 문제의 1 차 필요조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\xi}} &= \left(\frac{1}{\|\bar{\mathbf{u}}^m\|^2} \tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{T}} + \lambda \mathbf{I} \right) \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{\|\bar{\mathbf{u}}^m\|^2} \tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{B}}^T (\tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u}^F - \bar{\mathbf{u}}^m) - \lambda \mathbf{1} = 0 \\ &\text{subject to } \xi_{\min} \leq \boldsymbol{\xi} \leq \xi_{\max} \end{aligned} \quad (4.11)$$

여기서 $\tilde{\mathbf{T}}$ 는 대각요소가 목표 장력이고 나머지는 0 으로 구성된 행렬이며 \mathbf{I} 는 단위 행렬이다. 식 (4.11)의 최적화 문제를 풀어 장력을 구하고 케이블의 길이가 고정된 상태에서 식 (2.11)의 탄성현수선 방정식으로부터 케이블의 강성을 계산한다. 계산된 케이블의 강성에 대해서 평형방정식을 다시 풀고, 최적화 문제를 푸는 반복 계산을 수행한다. 복합 초기평형상태 해석법과 동일한 방법을 사용하며, 마찬가지로 부등형 구속조건을 고려하기 위하여 활성 구속조건 기법을 사용한다.

수치 해석 모델의 케이블 강성을 추정된 실제 케이블의 강성으로 수정하여 다시 초기평형상태 해석을 수행하게 되면 현 상태에서 교량의 목표형상 구현을 위한 케이블의 초기 무응력 길이를 구할 수 있다. 계산된 길이만큼 케이블을 보정하면 설계에서 원하는 목표형상에 근접해질 수 있을 것이다.

5. 폐합 시공 단계 해석

캔틸레버 공법으로 시공되는 사장교의 시공단계에서는 사장교의 중앙부에서 거더가 폐합되기 전까지는 타워를 중심으로 두개의 독립적인 구조계가 구성되고 폐합단면에서 단면력이 존재하지 않기 때문에 폐합단면에서 처짐과 처짐각이 일치하지 못하게 된다. 완성계에서 작용하고 있는 폐합단면에서의 단면력을 양측 구조물의 폐합단면에 재하 하여야만 폐합단면에서 구조물의 변위 및 처짐각이 일치하게 된다. 그러나, 실제 시공단계에서 완성계 폐합단면에 작용하는 단면력을 재하하는 것은 거의 불가능하기 때문에 시공 중에 재하할 수 있는 외력에 의하여 적합조건을 만족시켜야 한다. 실제 시공 중에 폐합단면에서의 처짐을 조정할 수 있는 힘은 최종 키 세그먼트를 인양하는 데릭 크레인의 인양력이 있다. 처짐은 데릭 크레인의 인양력을 통하여 맞출 수 있지만 처짐각을 맞추는 것은 힘들기 때문에 대부분 폐합 시공 단계에서 양쪽의 처짐각을 측정 한 후에 그에 맞게 키 세그먼트를 제작하여 폐합하는 방법이 일반적으로 사용되었다. 이러한 폐합 시공 방법은 공기가 길어질 뿐만 아니라 그로 인해 공비도 많이 발생하는 문제점이 있다. 따라서 양쪽 구조물의 처짐각을 일치시킬 수 있는 외력이 도입된다면 키 세그먼트를 미리 제작하여 폐합하는 시공이 가능해질 것이다. 또한 현장에서의 시공자의 경험에 의존하지 않고 적합조건을 만족하는 외력이 정확히 계산 된다면 효율적인 시공을 수행할 수 있을 것이다.

폐합 시공 단계에서 데릭 크레인의 인양력과 함께 사장 케이블의 장력을 도입한다면 폐합 단면에서의 처짐과 처짐각을 변화시킬 수 있을 것이다. 사장 케이블의 장력은 케이블의 길이를 조정하여 변화시킬 수 있다. 이 연구에서는 시공단계에서 폐합단면의 수직 처짐과 회전각에 대한 적합 조건을 만족시킬 수 있는 케이블의 초기 무응력 길이와 데릭 크레인의 인양력을 뉴턴-랩슨 (Newton-Raphson) 방법에 의하여 구하는 방법을 제안하고 방정식을 풀기 위하여 필요한 변위의 민감도를 구하는 방법을 제시한다.

5.1 사장교의 폐합을 위한 적합 조건식

그림 5.1 에는 폐합 시공 단계에서의 사장교의 구조 시스템을 보이고 있다. 폐합 시공은 먼저 키 세그먼트 (Key Segment) 를 왼쪽 구조물에 가설하고 오른쪽 구조물에 설치된 데릭 크레인이 키 세그먼트를 인양하여 폐합단면에서의 변위 및 처짐각을 일치시켜 두 구조물을 폐합하는 것으로 가정한다. 이때 데릭

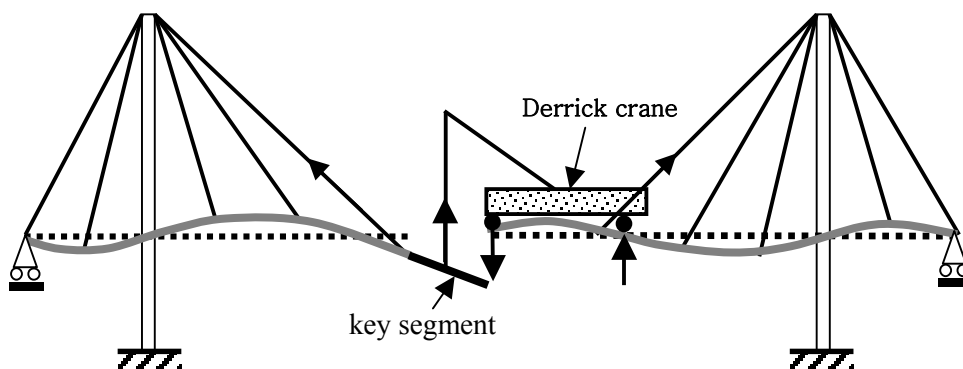


그림 5.1 사장교 폐합 과정

크레인에 적절한 인양력을 가하면 양쪽 구조물의 폐합단면에서의 처짐을 일치시킬 수 있다. 그러나 인양력의 조정만으로는 처짐각을 일치시킬 수 없기 때문에 추가로 사장 케이블의 장력을 조정하여야 한다.

양쪽 구조물이 폐합단면에서 만족시켜야 하는 적합조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\delta^L(\mathbf{L}_0^L, P) &= \delta^R(\mathbf{L}_0^R, P) \\ \theta^L(\mathbf{L}_0^L, P) - \theta^R(\mathbf{L}_0^R, P) &= \varepsilon\end{aligned}\tag{5.1}$$

여기서 δ^L , δ^R , θ^L 그리고 θ^R 은 각각 폐합 시공 직전의 왼쪽 구조물과 오른쪽 구조물의 처짐 및 처짐각이며, \mathbf{L}_0^L , \mathbf{L}_0^R 그리고 P 는 각각 왼쪽 구조물과 오른쪽 구조물에 설치된 사장 케이블의 무응력장 길이와 크레인의 인양력이다. 식 (5.1)에서 ε 은 처짐각의 시공 허용 오차를 나타낸다. 케이블 지지 교량은 비선형 거동을 하기 때문에 Newton-Raphson 방법에 의한 반복계산에 의하여 식 (5.1)에서 정의된 적합조건을 만족시키는 인양력과 케이블의 초기 길이를 구할 수 있다. 식 (5.1)을 1 차항까지를 포함하는 Taylor 급수로 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\delta_k^L + \frac{\partial \delta_k^L}{\partial \mathbf{L}_0^L} \Delta \mathbf{L}_0^L + \frac{\partial \delta_k^L}{\partial P} \Delta P &= \delta_k^R + \frac{\partial \delta_k^R}{\partial \mathbf{L}_k^R} \Delta \mathbf{L}_k^R + \frac{\partial \delta_k^R}{\partial P} \Delta P \\ \theta_k^L + \frac{\partial \theta_k^L}{\partial \mathbf{L}_0^L} \Delta \mathbf{L}_0^L + \frac{\partial \theta_k^L}{\partial P} \Delta P - \left(\theta_k^R + \frac{\partial \theta_k^R}{\partial \mathbf{L}_k^R} \Delta \mathbf{L}_k^R + \frac{\partial \theta_k^R}{\partial P} \Delta P \right) &= \varepsilon\end{aligned}\tag{5.2}$$

여기서 아래 첨자 k 는 반복 계산 회수를 나타낸다. 식 (5.2)에는 조건식의 개수 보다 많은 수의 미지수가 포함되어 있기 때문에 식 (5.2)를 풀기 위하여는 추가의 조건식이 필요하다. 이러한 추가의 조건으로 장력을 조정할 케이블을 미리 결정하여 미지수의 개수를 줄일 수 있다. 일반적으로 사장교에서는 폐합 단면에 가장 가까이 설치된 케이블이 폐합 단면의 처짐에 가장 민감한 영향을 미치기 때문에 중앙 경간 가장 바깥쪽에 설치된 케이블을 길이를 조정하고, 대칭사장교에서는 왼쪽과 오른쪽 구조물의 케이블 조절량이 같다고 가정하여 미지수를 2 개로 줄일 수 있다. 이러한 추가의 조건은 문제에 따라 달라지게 되기 때문에 일반적으로 정의할 수 없지만, 문제에 따라 적절한 적합조건과 미지수를 선택할 수 있을 것으로 판단된다.

5.2 변위 민감도의 계산

식 (5.2)에는 케이블의 초기 길이 및 데릭 크레인 인양력에 대한 민감도가 포함되어 있다. 변위의 민감도는 케이블 지지 구조물의 강성도 방정식 (4.1)을 직접 미분하여 구할 수 있다. 식 (4.1)을 케이블의 초기 길이에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{L}_0} + \sum_e \frac{\partial \mathbf{F}_c^e}{\partial L_0^e} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{L}_0} = 0 \quad (5.3)$$

외부하중은 케이블의 무응력 길이에겐 무관하기 때문에 하중에 대한 미분

항은 영이다. 케이블 부재의 장력의 초기 길이에 대한 민감도를 구하기 위하여 식 (2.14)에 정의된 적합조건식을 이용한다. 식 (2.14)를 케이블의 무응력 길이에 대하여 미분하여 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial L_0^e} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^e}{\partial L_0^e} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \frac{\partial \mathbf{F}_1^e}{\partial L_0^e} \quad (5.4)$$

식 (5.4)를 장력의 초기 길이에 대한 민감도에 대하여 표시하고, 케이블 부재의 외적 평형방정식인 식 (2.15)를 케이블의 무응력장 길이에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1^e}{\partial L_0^e} = - \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \right)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^e}{\partial L_0^e} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \right)^{-1} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial L_0^e} = \mathbf{k}_g^e + \mathbf{k}_c^e \left(\frac{\partial \mathbf{u}_2^e}{\partial L_0^e} - \frac{\partial \mathbf{u}_1^e}{\partial L_0^e} \right) \quad (5.5a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_2^e}{\partial L_0^e} = \frac{\partial (-\mathbf{F}_1^e - \mathbf{w}L_0^e)}{\partial L_0^e} = -(\mathbf{k}_g^e + \mathbf{w}) - \mathbf{k}_c^e \left(\frac{\partial \mathbf{u}_2^e}{\partial L_0^e} - \frac{\partial \mathbf{u}_1^e}{\partial L_0^e} \right) \quad (5.5b)$$

식 (5.5)를 다음과 같은 단일 행렬식으로 표시할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{F}_c^e}{\partial L_0^e} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_c^e & \mathbf{k}_c^e \\ \mathbf{k}_c^e & -\mathbf{k}_c^e \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial L_0^e} + \begin{pmatrix} \mathbf{k}_g^e \\ -\mathbf{k}_g^e - \mathbf{w} \end{pmatrix} = \mathbf{K}_c^e \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial L_0^e} + \mathbf{K}_g^e \quad (5.6)$$

식 (5.6)을 식 (5.3)에 대입하여 전제 구조물에 대한 민감도 식으로 조합하면 변위의 케이블의 무응력 길이에 대한 민감도 관계식을 구할 수 있다.

$$\mathbf{K}_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{L}_0} + \sum_e (\mathbf{K}_c^e \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial L_0^e} + \mathbf{K}_g^e) = \mathbf{K}_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{L}_0} + \mathbf{K}_c \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{L}_0} + \mathbf{K}_g = 0 \quad (5.7)$$

식 (5.7)을 풀어 변위의 케이블 무응력 길이에 대한 민감도를 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{L}_0} = -(\mathbf{K}_F + \mathbf{K}_c)^{-1} \mathbf{K}_g \quad (5.8)$$

전술한 방법과 유사한 방법으로 데릭 크레인의 인양력에 대한 변위 민감도를 계산할 수 있다. 식 (4.1)을 데릭 크레인의 인양력에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P} + \sum_e \frac{\partial \mathbf{F}_c^e}{\partial P} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial P} = \mathbf{I}_d \quad (5.9)$$

여기서 \mathbf{I}_d 는 크레인의 인양력이 작용하고 있는 자유도에 1 이 위치하고 나머지 부분은 모두 0 인 벡터이다. 식 (2.14) 를 데릭 크레인의 인양력 P 에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial P} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \frac{\partial \mathbf{F}_1^e}{\partial P} \quad (5.10)$$

식 (5.10)을 데릭 크레인의 인양력에 대한 케이블 장력의 민감도에 대하여 정리하고, 식 (2.15)를 크레인의 인양력에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1^e}{\partial P} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^e}{\partial \mathbf{F}_1^e} \right)^{-1} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial P} = \mathbf{k}_c^e \left(\frac{\partial \mathbf{u}_2^e}{\partial P} - \frac{\partial \mathbf{u}_2^e}{\partial P} \right) \quad (5.11a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_2^e}{\partial P} = \frac{\partial (-\mathbf{F}_1^e - \mathbf{w}L_0^e)}{\partial P} = -\mathbf{k}_c^e \left(\frac{\partial \mathbf{u}_2^e}{\partial P} - \frac{\partial \mathbf{u}_2^e}{\partial P} \right) \quad (5.11b)$$

식 (5.11)을 단일 행렬식으로 표시하고 식 (5.9)에 대입하여 최종적인 변위의 크레인 인양력에 대한 민감도 관계식을 구할 수 있다.

$$\mathbf{K}_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P} + \sum_e \frac{\partial \mathbf{F}_c^e}{\partial P} = \mathbf{K}_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P} + \mathbf{K}_c \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P} = \mathbf{I}_d \quad (5.12)$$

식 (5.12)를 풀어 변위의 인양력에 대한 민감도를 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial P} = (\mathbf{K}_F + \mathbf{K}_c)^{-1} \mathbf{I}_d \quad (5.13)$$

식 (5.8)과 식 (5.13)의 변위 민감도를 이용하여 식 (5.2)를 반복 계산에 의하여 풀면 데릭 크레인의 인양력과 케이블의 초기 무응력 길이의 조정량을 결정할 수 있다.

6. 해석 예제

6.1 제 2 진도대교 초기 평형 상태 해석 예제

이 연구에서 제안된 방법에 의하여 제 2 진도대교 (그림 6.1) 에 대한 초기 평형상태 해석을 수행한다. 제 2 진도대교는 전남 진도군 군내면와 해남군 문내면을 연결하는 연륙교로서 중앙 경간과 측 경간 길이가 각각 344m 와 70m 인 3 경간 연속 사장교이다. 제 2 진도 대교의 주탑 높이는 89.0m 이고 설계하중은 DB-24 와 DL-24 하중을 사용한다. 제 2 진도대교의 자세한 제원은 부록 B-1 에 주어져 있다.

삐대 구조물의 초기 형상으로는 모멘트 최소화에 의한 초기평형상태 해석을 통하여 결정된 형상을 사용한다. 복합 초기평형상태 해석 수행 시 사용하는 수렴 조건은 다음과 같다.

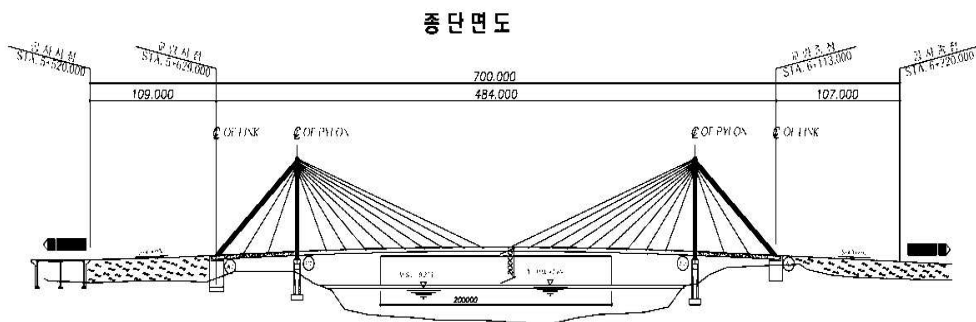


그림 6.1 제 2 진도대교 종단면도

기하학적 제한조건 방법과 에너지 최소화 방법을 동시에 적용하는 복합 초기형상 결정법을 제 2 진도대교에 적용하여 해석을 수행한다. 그림 6.2 ~ 6.6 은 거더의 제어 절점 44 개의 변위와 주탑의 제어 절점 16 개의 변위를 모두 구속하여 복합 초기 평형상태 해석을 수행한 결과이다. 즉 케이블 개수와 동일한 수의 제어 절점을 선택한 경우이다. 장력에 대한 구속 조건은 적용하지 않았다. α 값이 0 일 때는 기하학적 제한조건에 의한 초기평형상태 해석을 수행하게 되므로 TCUD 와 동일한 결과가 나오며 α 값이 1 일 때는 에너지 최소화에 의한 초기평형상태 해석을 수행하게 되므로 에너지 최소화 방법과 동일한 결과가 나온다. α 값을 증가 시키면서 최적화를 수행한 결과 α 값이 커지면 에너지를 최소로 하는 초기평형상태의 결과와 근접해 지는 것을 볼 수 있다. 다만 α 값이 1 일 때를 제외하고 거더의 형상은 거의 TCUD 의 결과와 비슷한데 이는 거더와 주탑의 모든 제어 절점의 변위를 구속하였기 때문이다. 따라서 모든 제어 절점에 대하여 구속조건을 주고 적절한 α 값을 선정하면 과도한 장력을 피하면서 목표형상에 근접한 최적형상을 찾을 수 있을 것이다.

몇 개의 제어 절점에 대한 구속조건을 풀어 주게 되면 그 절점에서는 위치가 구속되지 않고 자유롭게 움직이면서 최적의 형상을 찾아갈 것이다. 그림 6.6 ~ 6.10 은 거더의 제어 절점에 대한 구속조건을 16 개로 줄이고 주탑의 제어 절점에 대한 구속조건은 그대로 두어 복합 초기평형 상태 해석을 수행한 결과이다. 그림 6.7 에서 구속조건을 풀어준 제어 절점에서는 변위가 발생하는 것을 확인할 수 있다. 그림 6.1 과 그림 6.6 을 비교해보면 동일한 α 값을 주더라도

도 구속조건의 수와 그 위치에 따라 장력이 달라짐을 볼 수 있다. 거더의 구속조건을 줄여준 경우에 대한 장력은 거더의 구속조건을 모두 준 경우에 비하여 에너지 최소화에 근접한 결과를 보이고 있다. 또한 거더의 구속조건은 풀어주었지만 주탑의 구속조건은 그대로 두었기 때문에 주탑의 변위는 크게 발생하지 않았다. 그러므로 거더의 목표형상과 주탑의 목표형상 중 어느 쪽이 더 중요한지에 따라서 거더의 제어 절점과 주탑의 제어 절점에 대한 구속조건의 수를 선정할 수 있을 것이다.

따라서 해석자는 시공 오차의 한계, 교량 부재의 허용 응력, 그리고 케이블의 허용 인장력 등 시공 조건을 고려하여 구속조건을 가하는 절점의 위치와 개수, 그리고 α 값을 선정하면 목적에 맞는 최적 초기형상을 결정할 수 있을 것이다.

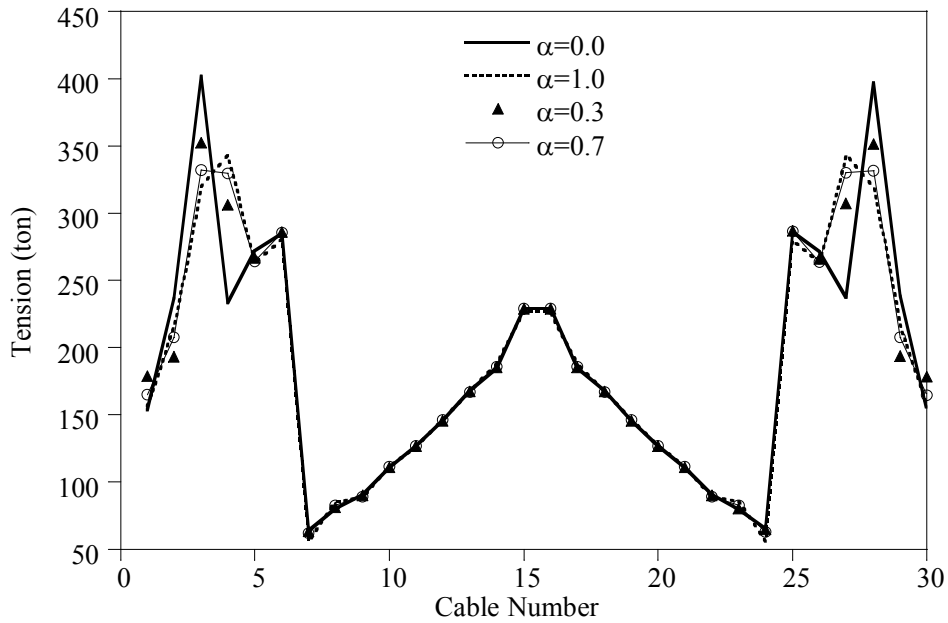


그림 6.2 케이블 장력 (모든 구속조건에 대한 복합 초기형상 결정법)

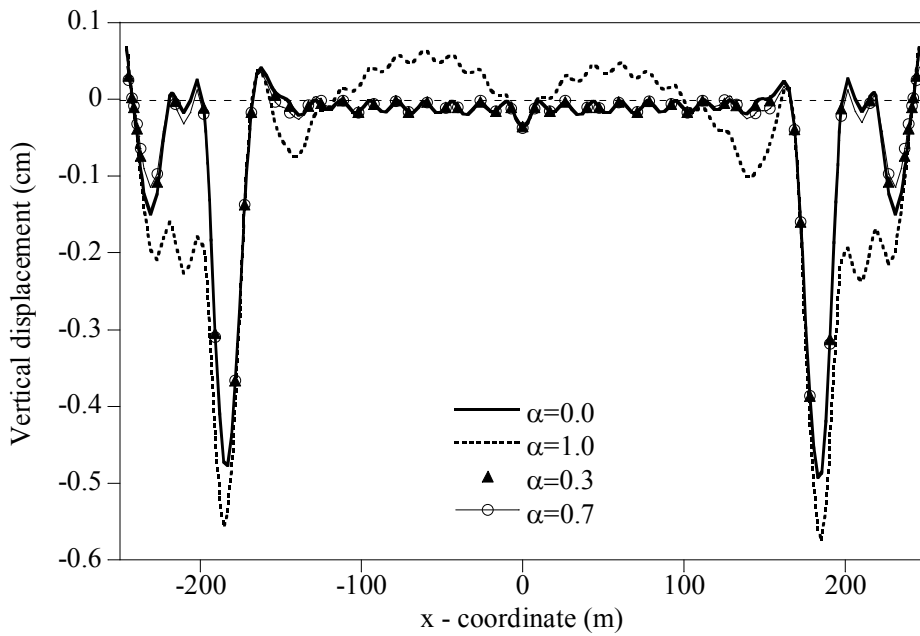


그림 6.3 거더 변위 (모든 구속조건에 대한 복합 초기형상 결정법)

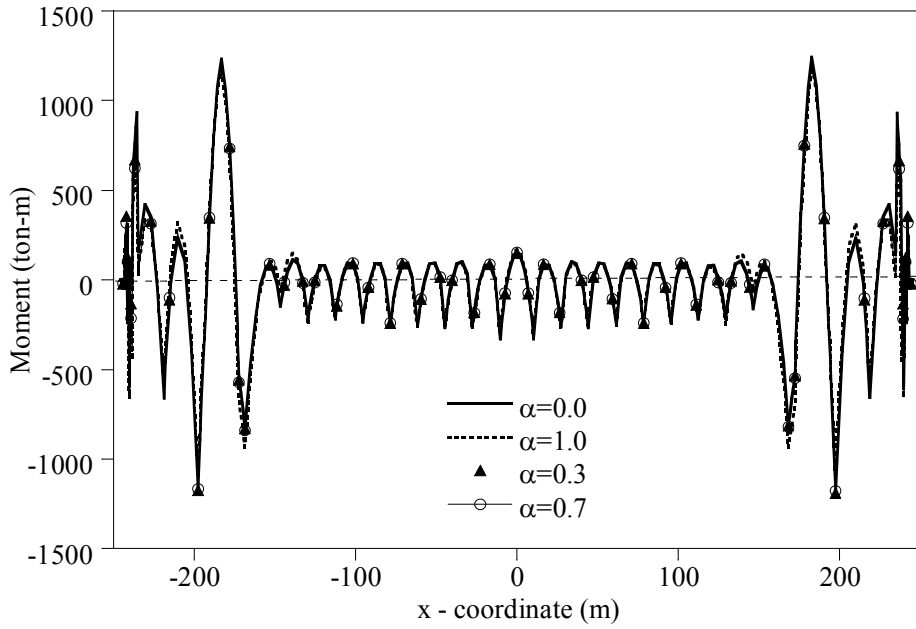


그림 6.4 거더 모멘트 (모든 구속조건에 대한 복합 초기형상 결정법)

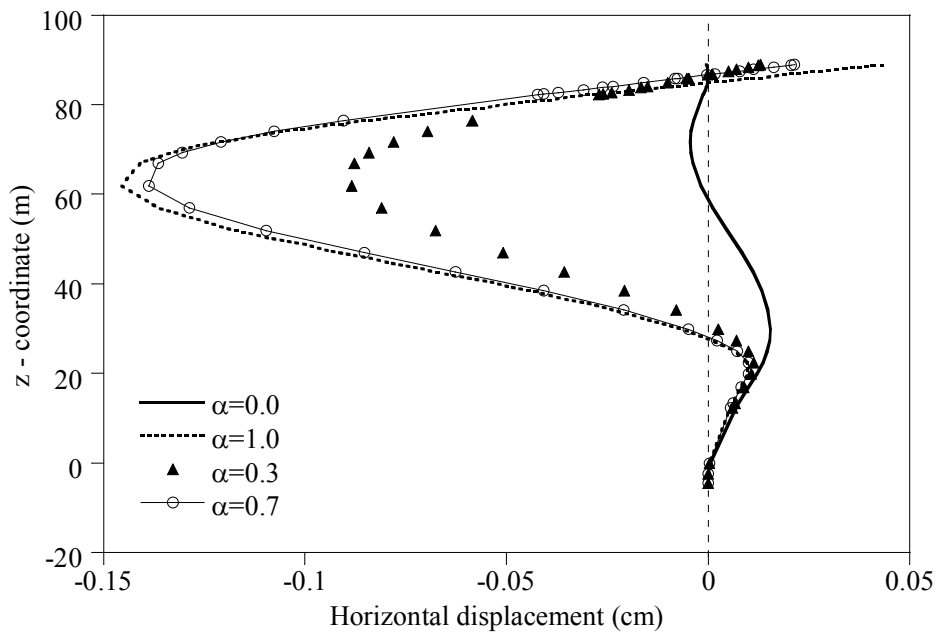


그림 6.5 주탑 형상 (모든 구속조건에 대한 복합 초기형상 결정법)

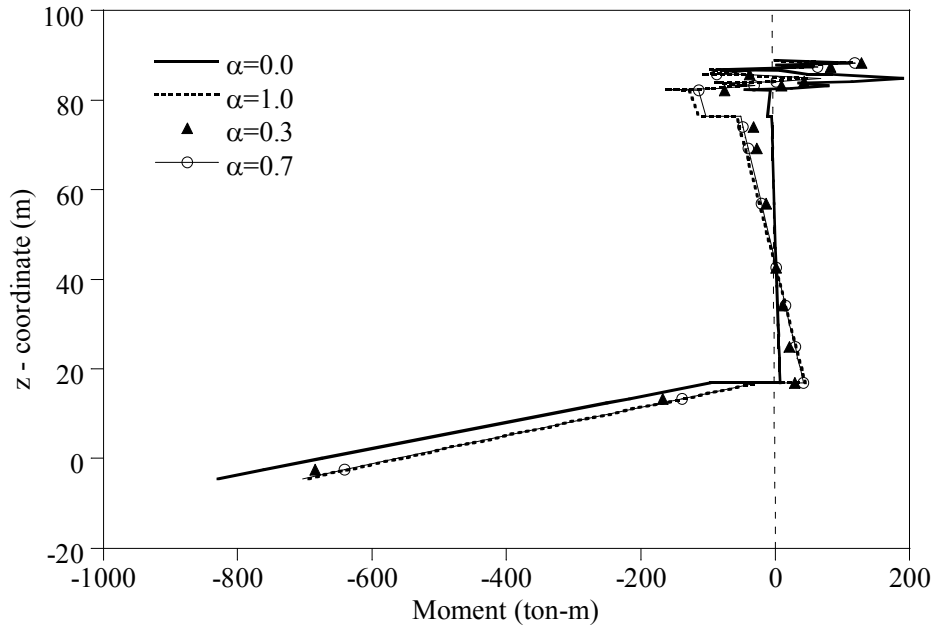


그림 6.6 주탑 모멘트 (모든 구속조건에 대한 복합 초기 형상결정법)

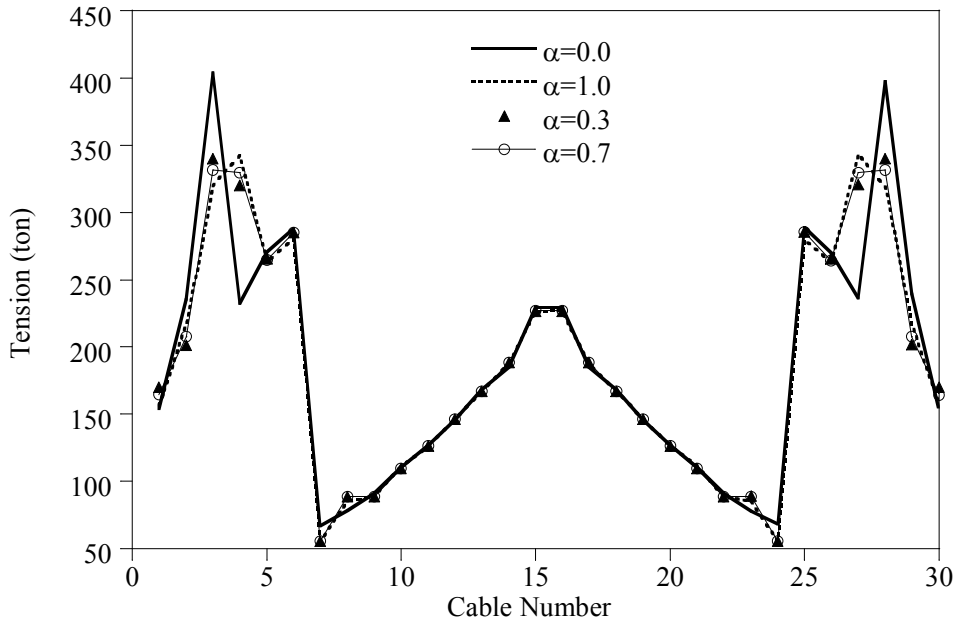


그림 6.7 케이블 장력 (부분 구속조건에 대한 복합 초기형상 결정법)

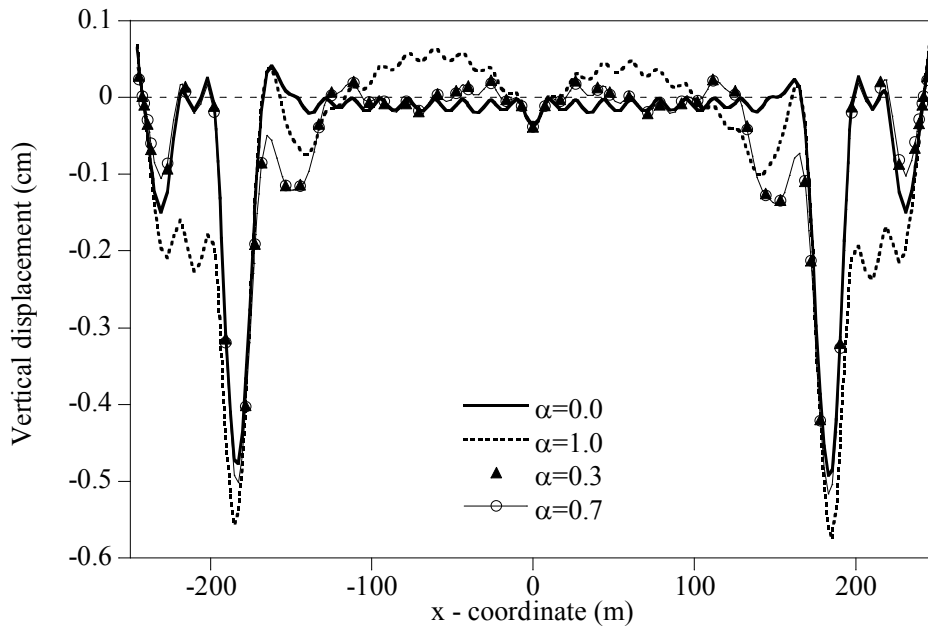


그림 6.8 거더 형상 (부분 구속조건에 대한 복합 초기형상 결정법)

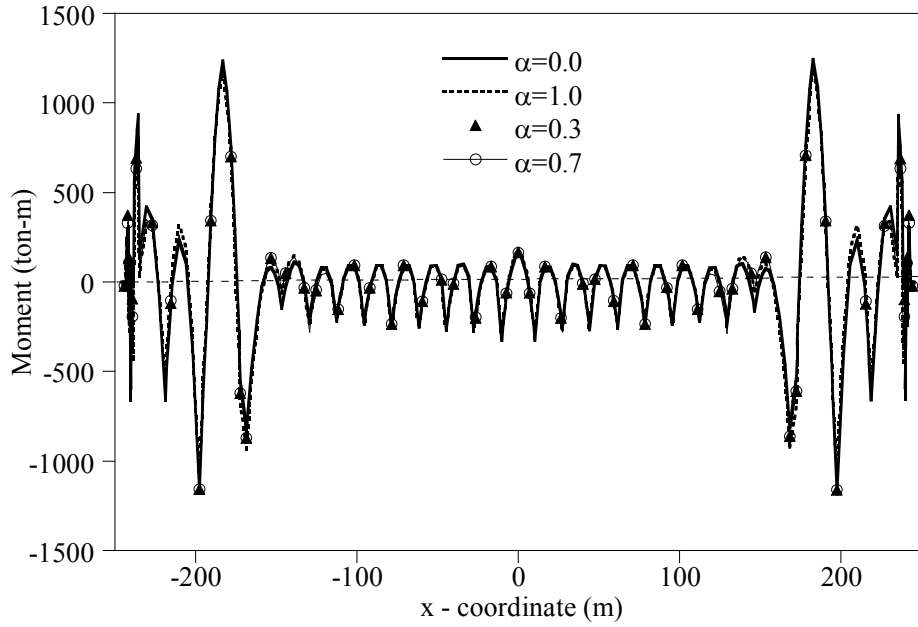


그림 6.9 거더 모멘트 (부분 구속조건에 대한 복합 초기형상 결정법)

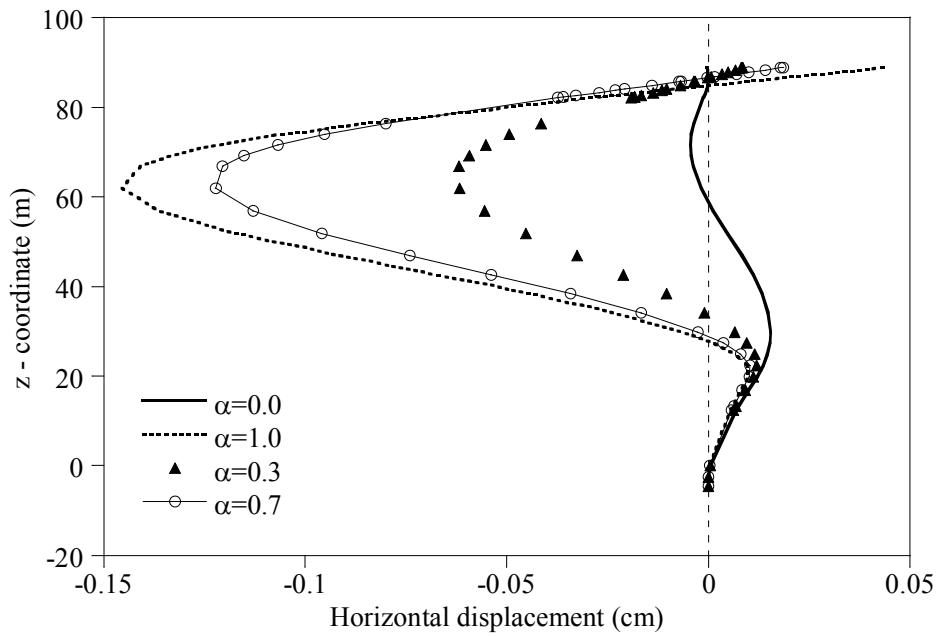


그림 6.10 주탑 형상 (부분 구속조건에 대한 복합 초기형상 결정법)

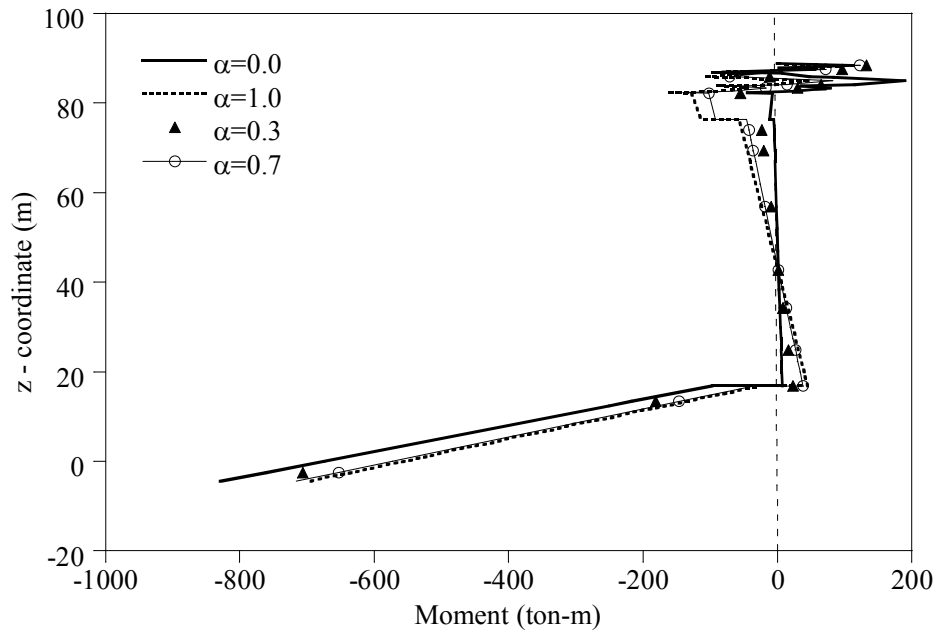


그림 6.11 주탑 모멘트 (부분 구속조건에 대한 복합 초기형상 결정법)

6.2 제 2 진도대교 형상 관리 예제

이 연구에서 제안한 형상 관리를 위한 역해석 기법을 제 2 진도대교의 시공에 적용한다. 현재 구조물의 상태는 케이블의 강성에 최대 10%의 범위 내에서 무작위로 오차가 발생한 것으로 가정하였다. 제어 절점의 변위 측정치에는 발생한 변위의 50%의 범위 내에서 무작위로 오차를 발생시키고 최대치에 대하여 다시 50%의 범위 내에서 무작위로 오차를 발생시킨 값을 추가하였다. 측정치에 노이즈 (noise) 를 추가시킨 이유는 측정 시 발생하는 계측기나 측정자의 오차를 반영하기 위해서이다.

역해석을 수행하여 추정된 결과를 그림 6.12 ~ 6.14 에 보이고 있다. 그림 6.12 에서 Exact Disp.는 케이블 강성의 오차에 의해서 발생한 제어 절점에서의 실제 변위이고 Measured Disp.는 제어 절점의 측정 변위이다. Case I 은 GMS 에 의한 정규화 계수를 사용한 경우이고 Case II 는 GMS 에 의하여 결정된 정규화 계수에 0.1 배 해주어 사용한 경우이다. 측정치에 노이즈가 포함되어 있기 때문에 역해석 결과가 측정치를 정확히 맞추지는 못하지만 구조물이 만들어낼 수 있는 변위 조합 중에서 측정치와의 차이를 최소로 할 수 있는 결과를 보이고 있으며 실제의 변위를 잘 따라가는 결과를 보였다. 그림 6.13 은 추정된 장력을 보이고 있다. Exact Tension 은 케이블 강성에 오차가 발생한 상태의 장력이다. 역해석 결과 Case I 이 실제 장력을 잘 추정하고 있다. Case II 와 같이 정규화 계수가 작아지면 정규화 효과가 줄어들어 측정치의 노이즈의 영향이 커지

므로 실제 장력과는 차이가 있는 결과를 보이고 있다. 그림 6.14 는 추정된 장력으로 부터 계산된 케이블의 강성을 수치 해석 모델상의 설계 케이블 강성으로 나누어 나타내었다. 그래프에서 Exact 는 오차가 발생한 케이블 강성과 설계 케이블 강성과의 비를 나타낸다. Case I 의 결과가 Case II 의 결과에 비해 실제 값의 경향을 따라가고 있기는 하지만 실제 케이블의 강성을 정확히 맞추지는 못한다. 이는 측정치에 오차가 포함되었기 때문이다.

수치 해석 모델을 추정된 케이블의 강성으로 수정하여 다시 초기평형상태 해석을 수행하면 목표형상을 맞추기 위한 케이블의 초기 길이를 구할 수 있다. 현 상태의 케이블의 초기 길이와 계산된 케이블의 초기 길이의 차만큼 보정해 주게 되면 케이블 강성의 오차로 인해 벗어나 있던 형상이 목표형상으로 돌아 오게 될 것이다. 정규화 계수에 따른 케이블 조정 길이는 그림 6.15 에 나타나 있고 케이블의 길이를 보정하여 형상 관리를 수행한 후의 거더의 변위는 그림 6.16 에 나타나 있다. 그림 6.16 에서 Before Adjustment 는 케이블 강성의 오차로 인해 발생한 거더의 변위를 나타내며 최대 2.33cm 정도의 변위가 발생하였다. Case I 의 경우에 케이블 조정 길이의 최대값은 1.7cm 였으며 보정 결과 거더의 변위는 최대 0.34cm 정도로 줄게 되어 원래 발생한 변위의 14.6% 수준으로 줄 일 수 있다. 측정 오차가 작아진다면 목표 형상에 더욱 근접한 결과를 얻을 수 있을 것이다.

측정 오차에 따른 케이블 조정량의 범위를 구하기 위하여 몬테 카를로 모사를 30 회 시행하였다. 몬테 카를로 모사 결과는 시공자에게 형상 관리를 위

해 참고가 되는 값을 제시해줄 뿐만 아니라 케이블을 제작하는데 있어서도 여유분을 결정하는데 고려될 수 있다. 표 6.1 에는 각 케이블 조정량의 평균과 신뢰도 구간에 따른 범위를 나타내었다. 중앙 경간 쪽의 케이블 길이의 보정량의 편차가 측 경간의 그것보다 큰 결과를 보이고 있으며 신뢰도 99%의 수준에서 최대 3.4cm 정도까지의 범위를 보이고 있다. 따라서 케이블을 제작할 때 보정 길이의 범위를 고려하여 여유를 두어 재단해야 할 것이며 시공자는 미리 케이블의 조정 길이를 예측하여 측정 시 발생할 수 있는 오차에 대비하여야 할 것이다.

실제 케이블지지 교량에는 케이블의 강성 뿐만 아니라 측정오차와 하중의 오차 등 많은 불확실성이 내재해 있다. 이 연구에서는 대표적인 것으로 케이블의 강성을 선정하여 역해석을 수행하였으며 따라서 실제 구조물의 상태를 정확히 맞추는 것은 힘들다. 그러나 최종 목적은 목표형상 구현을 위한 장력의 보정량을 계산하는 것이므로 실제 구조물의 상태와 근접한 상태를 케이블의 강성으로 대표하여 역해석을 수행하여 형상을 보정하는 것에 의미가 있다고 생각되며 실제로 보정 결과는 발생한 오차를 많이 줄인 결과를 나타내었다. 그림 6.12 ~ 6.16 의 역해석 결과와 형상 관리 결과는 GMS 에 의한 정규화 계수가 적절함을 보여주고 있다. 그러나 측정 오차나 시스템에 발생한 오차의 크기 등에 따라서 최적의 정규화 계수는 달라질 수 있다. 시공자는 GMS 에 의한 정규화 계수를 기준으로 하여 시공조건에 따라 판단하여 정규화 계수를 조정할 수 있을 것이다.

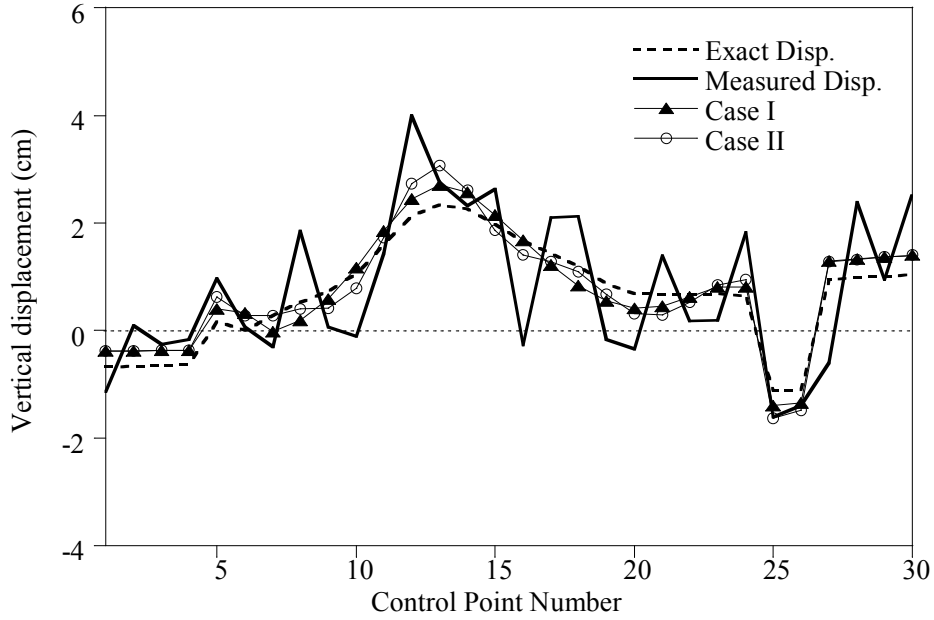


그림 6.12 제어 절점에서의 변위 (정규화 계수에 따른 역해석)

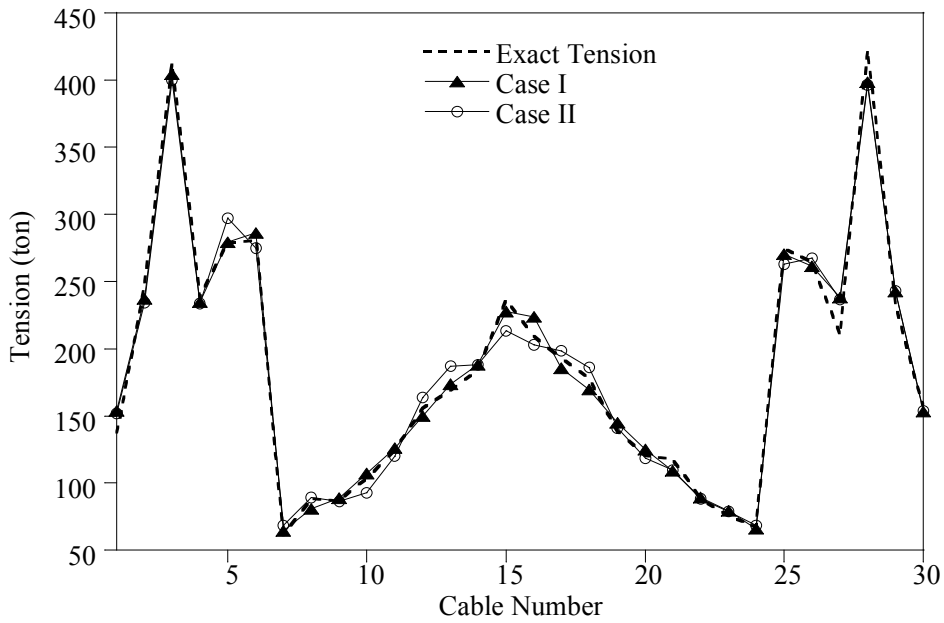


그림 6.13 케이블 장력 (정규화 계수에 따른 역해석)

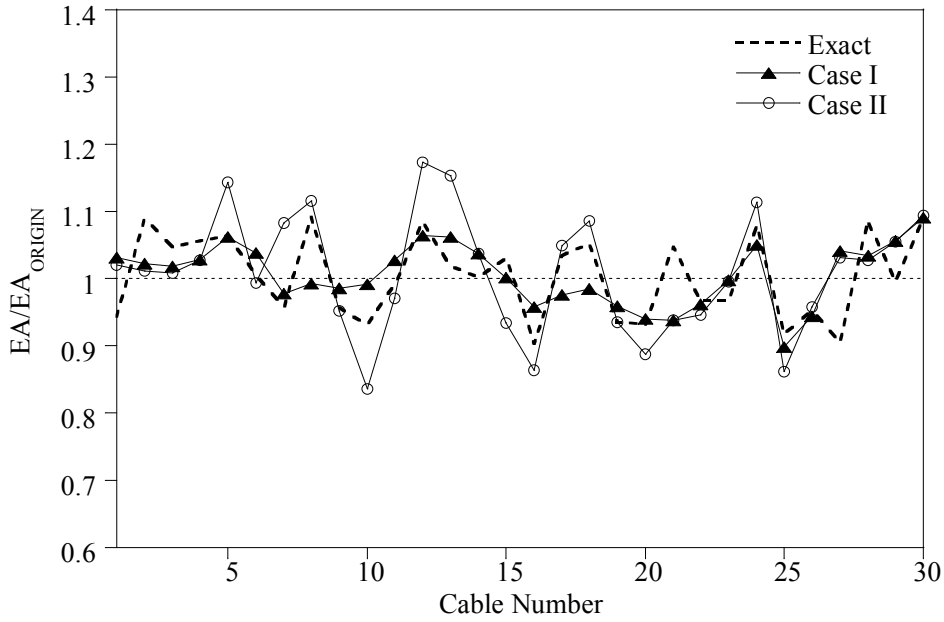


그림 6.14 케이블 강성의 설계치에 대한 비 (정규화 계수에 따른 역해석)

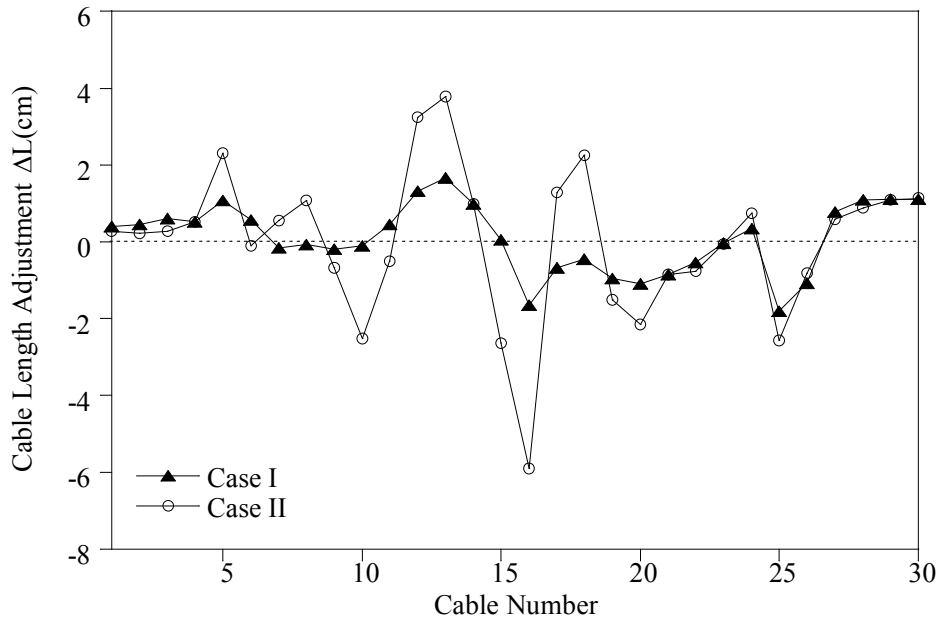


그림 6.15 케이블의 보정 길이 (정규화 계수에 따른 형상관리)

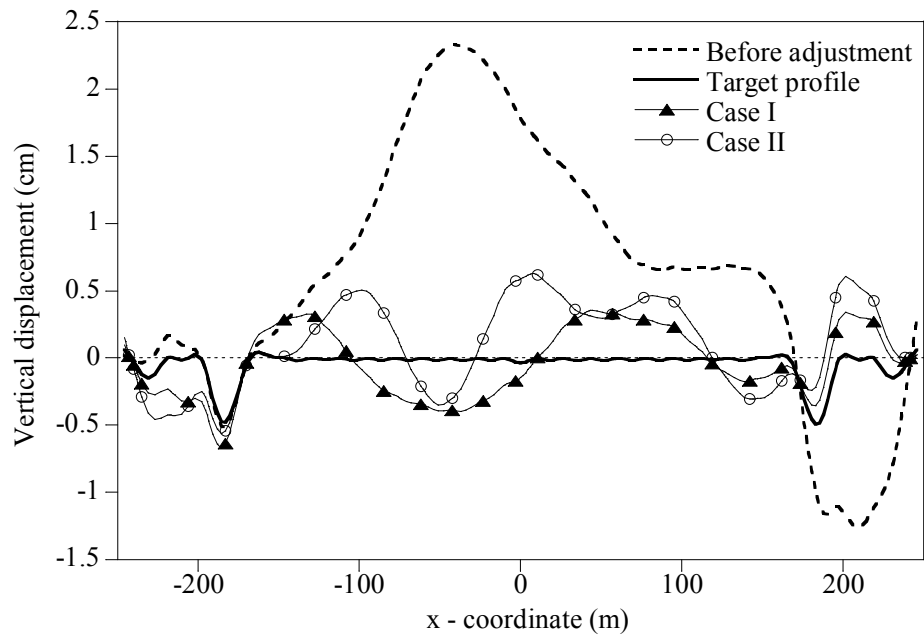


그림 6.16 장력 보정 후 거더 변위 (정규화 계수에 따른 형상관리)

표 6.1 케이블의 강성 오차 최대 10% 발생시 케이블 보정량

No.	평균 (cm)	95% 신뢰도 구간 (cm)	99% 신뢰도 구간 (cm)	No.	평균 (cm)	95% 신뢰도 구간 (cm)	99% 신뢰도 구간 (cm)
1	0.597	0.144 ~ 1.051	0.00 ~ 1.19	16	-0.549	-2.729 ~ 1.630	-3.418 ~ 2.320
2	0.625	0.116 ~ 1.134	-0.04 ~ 1.30	17	-0.417	-1.783 ~ 0.949	-2.214 ~ 1.381
3	0.745	0.034 ~ 1.456	-0.19 ~ 1.68	18	-0.300	-1.867 ~ 1.267	-2.363 ~ 1.763
4	0.622	0.218 ~ 1.026	0.09 ~ 1.15	19	-0.285	-1.668 ~ 1.098	-2.106 ~ 1.535
5	0.615	-0.279 ~ 1.508	-0.56 ~ 1.79	20	-0.349	-1.586 ~ 0.888	-1.977 ~ 1.280
6	0.299	-0.473 ~ 1.070	0.717 ~ 1.314	21	-0.353	-1.533 ~ 0.826	-1.906 ~ 1.200
7	-0.115	-0.867 ~ 0.637	-1.105 ~ 0.875	22	-0.278	-1.522 ~ 0.966	-1.916 ~ 1.360
8	-0.080	-1.273 ~ -1.112	-1.650 ~ 1.490	23	-0.059	-1.171 ~ 1.053	-1.523 ~ 1.404
9	0.021	-1.209 ~ 1.250	-1.598 ~ 1.639	24	0.164	-0.553 ~ 0.881	-0.780 ~ 1.108
10	0.196	-0.748 ~ 1.139	-1.046 ~ 1.438	25	-1.146	-1.862 ~ -0.429	-2.089 ~ -0.202
11	0.350	-0.716 ~ 1.416	-1.053 ~ 1.754	26	-0.800	-1.414 ~ -0.186	-1.608 ~ 0.008
12	0.452	-1.129 ~ 2.033	-1.629 ~ 2.533	27	0.628	-0.053 ~ 1.310	-0.269 ~ 1.525
13	0.469	-1.236 ~ 2.173	-1.775 ~ 2.712	28	0.918	0.021 ~ 1.815	-0.263 ~ 2.099
14	0.326	-0.823 ~ 1.476	-1.186 ~ 1.839	29	0.861	0.114 ~ 1.607	-0.122 ~ 1.844
15	0.166	-1.877 ~ 2.208	-2.523 ~ 2.854	30	0.844	0.128 ~ 1.561	-0.099 ~ 1.788

6.3 제 2 진도대교 폐합 시공 단계 해석 예제

이 연구에서 제안한 폐합 단계 해석법을 제 2 진도대교의 폐합 시공에 적용한다. 그림 5.1 과 같이 진도 측에 키 세그먼트를 접합한 후, 해남 측에 설치된 데릭 크레인에 의하여 키 세그먼트를 인양하는 순서로 폐합 시공이 진행된다. 중앙 경간의 최외측에 설치된 케이블의 장력을 조정하였으며, 대칭 사장교이므로 진도측과 해남측의 케이블 조정량은 같다고 가정하여 추가의 조건으로 주었다. 표 6.2 에는 시공 허용 처짐각에 따른 해석 결과를 보이고 있다. 제안된 방법은 각각의 경우에 대하여 적합조건을 정확히 만족시키는 해를 계산하였으며 빠른 수렴성을 보였다. 표 6.2 에서 보이듯이 허용 각 오차가 커질수록 케이블의 길이 조정량이 감소한다.

사장교와 같은 장대 케이블 지지 구조물은 아무리 정밀한 시공을 하더라도 설계시 고려하지 못하였던 현장 조건 및 여러가지 불확실성으로 인하여 실제 시공에서는 오차가 발생할 수 있다. 따라서 시공 중의 불확실성을 고려하여 장력이나 데릭 크레인의 인양력의 범위를 결정하여 미리 준비해야 한다. 또한 해석 모델에 대한 폐합 해석 결과를 실제 시공에 적용했을 때 발생하는 오차가 허용 오차 범위 이내로 들어오는지 확인도 필요하다. 만약 허용 오차 범위 이내로 들어온다면 해석 결과를 그대로 적용해도 될 것이다.

이 연구에서는 몬테 카를로 모사를 수행하여 시공 오차를 예측하였다. 먼저 교량 부재의 물성치에 최대 10% 까지 임의로 오차를 발생시킬 경우 폐합

해석 결과의 변화를 추정하였다. 허용각 오차 0 rad 인 경우에 대해 30 번 폐합 해석을 하여 평균과 표준편차를 구하여 신뢰도 범위를 구한다. 표 6.3 은 각각 95% 신뢰도, 99% 신뢰도에 따라 해가 어느 정도 범위 내에 있는지를 보여준다. 실제 시공에서는 각 신뢰도 구간에 따른 범위만큼 케이블 길이 조정량의 여유분을 준비하여 발생할 수 있는 오차에 대비할 수 있다.

표 6.4 는 해석에 의하여 구해진 해를 그대로 적용했을 때 물성치 오차에 의해 발생하는 처짐과 처짐각 오차를 보여준다. 각각 95% 신뢰도, 99% 신뢰도에 따라 처짐과 처짐각 오차 범위를 나타내는지 보여주고 있다. 표 6.4 에서 보이듯이 물성치 오차에 따른 폐합 오차는 그리 크지 않음을 알 수 있다. 95% 신뢰도 수준에서 처짐 오차는 최대 2 mm 정도 발생하고 처짐각 오차는 최대 1×10^{-4} rad 정도로 발생하므로 허용오차 범위 이내로 들어온다고 생각할 수 있다.

다음은 폐합 직전 양단의 처짐과 처짐각을 측정할 때 오차가 최대 5% 까지 임의로 발생할 경우 폐합해석 결과가 어떻게 달라지는지 확인한다. 물성치 오차에 대한 몬테카를로 시뮬레이션과 마찬가지로 허용각 오차는 0 rad 인 경우이고 30 번 폐합해석을 수행한다. 표 6.5 에서 보이듯이 측정치 오차의 영향이 물성치 오차의 영향보다 더 큰 것을 확인할 수 있다. 따라서 폐합 직전 측정시 정밀한 측정이 요구되며 케이블의 조절 길이의 여유분을 미리 준비하여 대비해야 한다. 표 6.6 에서 보이듯이 단차는 최대 5mm 정도 발생하고 처짐각 차이는 최대 2×10^{-4} rad 정도로 발생하므로 역시 허용오차 범위 이내로 들어온

다고 생각할 수 있다.

표 6.2 폐합 해석 결과

		허용오차			
		폐합전	0 rad	1/400 rad	1/200 rad
데릭하중 (tonf)		-	13.174	14.472	15.764
케이블장력 (tonf)	진도측	204.759	228.735	211.995	195.229
	해남측	190.868	233.827	218.988	204.064
케이블 조절 길이 (cm)	진도측	-	-10.254	-5.424	-0.563
	해남측	-	-10.254	-5.424	-0.563
처짐 (cm)	진도측	-10.797	14.194	7.186	0.196
	해남측	7.626	14.194	7.186	0.196
처짐각 ($\times 10^{-3}$ rad)	진도측	3.281	-0.705	0.416	1.537
	해남측	-2.098	-0.705	-2.084	-3.463

표 6.3 물성치 오차 최대 10% 발생시 폐합해석 결과

	허용오차		
	해석해	95% 신뢰도 구간	99% 신뢰도 구간
케이블 조절 길이 (cm)	-10.254	-10.430 ~ -10.079	-10.486 ~ -10.023
데릭 크레인의 인양력 (tonf)	13.174	12.984 ~ 13.373	12.923 ~ 13.435

표 6.4 물성치 오차 최대 10% 발생시 처짐과 처짐각 오차

	95% 신뢰도 구간	99% 신뢰도 구간
처짐 오차 (cm)	-0.214 ~ 0.204	-0.280 ~ -0.270
처짐각 오차 ($\times 10^{-3}$ rad)	-0.091 ~ 0.092	-0.120 ~ 0.121

표 6.5 측정치 오차 최대 5% 발생시 폐합해석 결과

	해석해	95% 신뢰도 구간	99% 신뢰도 구간
케이블 조절 길이 (cm)	-10.254	-10.605 ~ -9.882	-10.781 ~ -9.759
데릭 크레인의 인양력 (tonf)	13.174	12.687 ~ 13.651	12.534 ~ 13.804

표 6.6 측정치 오차 최대 5% 발생시 처짐과 처짐각 오차

	95% 신뢰도 구간	99% 신뢰도 구간
처짐 오차 (cm)	-0.545 ~ 0.549	-0.718 ~ 0.722
처짐각 오차 ($\times 10^{-3}$ rad)	-0.211 ~ 0.191	-0.275 ~ 0.255

그림 6.17 에는 폐합 시공 전, 폐합 시공 중, 그리고 폐합 시공 후의 거더 변위를 보이고 있다. 폐합 시공 전에는 표 6.1 에 나타나 있듯이 단차와 처짐각 차이가 발생하였고 적합조건을 만족하도록 데릭 크레인의 인양력과 케이블의 장력을 도입하게 되면 양쪽의 처짐과 처짐각이 일치하게 된다. 폐합 시공을 완료하여 두 개의 독립되어 있던 구조물이 하나의 완성 상태가 되더라도 적

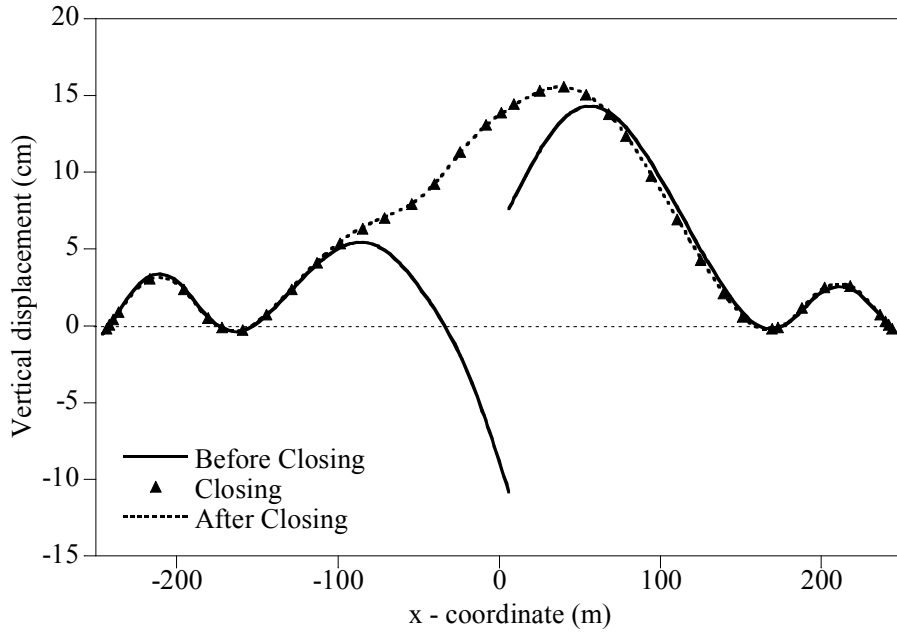


그림 6.17 폐합 시공 전, 폐합 시공 중 그리고 폐합 시공 후의 거더 변위

합조건은 그대로 만족되고 있음을 보이고 있다. 따라서 폐합 시공을 완료한 후 가설하중과 장비를 제거하게 되면 거더의 변위는 정확히 원하는 목표선형을 이루게 될 것이다.

7. 결론

이 연구에서는 대표적인 케이블 지지 교량인 사장교의 시공 중 형상 관리에 관련한 다양한 해석 기법을 제시하였다. 케이블 부재에 대한 강성도 행렬을 구성하고 3 차원 구조물을 선 요소로 모델링하기 위하여 필요한 강체 요소를 제안하여 사용하였으며, 압축력을 고려한 해석법을 정립하였다. 기존의 초기평형상태 해석 방법 중 목표형상을 이용하는 방법과 모멘트 최소화를 이용하는 방법을 동시에 사용하는 복합 초기평형상태 해석법을 제안하였다. 해석자는 해석변수 α 와 기하학적 구속조건을 가하는 제어 절점의 수와 위치를 설계 조건에 따라 적절히 결정하여 해석을 수행할 수 있을 것이다. 시공 상태 파악을 위한 역해석 기법을 제시하였으며, 역해석에 대한 설계 변수로서 케이블의 강성이 적절하다는 것을 밝혔다. 역해석 문제의 불안정성을 제거하기 위하여 정규화 함수를 도입하였으며 정규화 계수는 GMS 에 의하여 결정하였다. 추정된 케이블의 물성치를 토대로 형상을 관리하는 알고리즘을 제시하였으며 오차에 따른 케이블 조정량의 범위를 구하기 위해 몬테 카를로 모사를 시행하였다. 형상 관리의 가장 마지막 단계인 폐합 시공을 위하여 폐합 해석법을 제시하였다. 제안된 방법은 주어진 적합조건을 정확히 만족하고 빠른 수렴성을 보였다. 시공 중에 발생하는 불확실성에 의한 시공 오차를 추정하기 위하여 몬테 카를로 모사법을 제안하였다. 또한, 사장교에서 고려할 수 있는 거의 모든 설계 변

수에 대한 변위의 민감도를 구하는 방법을 제시하여 시공 중 형상 관리를 위하여 다양한 방법으로 활용할 수 있도록 하였다.

이 연구에서 제안된 방법으로 교량의 초기 형상 결정부터 폐합 시공 마무리까지 전 시공 단계에 대하여 형상 관리를 위한 다양한 해석을 수행할 수 있을 것으로 판단된다.

부록 A 연성도 및 강성도 행렬

A-1 탄성 현수선 케이블 요소의 연성도 행렬

식 (2.17)의 자세한 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_x^e}{\partial F_x} &= -\frac{L_0^e}{EA} - \frac{1}{w} \ln \left(\frac{F_z + wL_0^e + T_2}{F_z + T_1} \right) - \frac{F_x^2}{w} \left\{ \frac{1}{T_2(F_z + wL_0^e + T_2)} - \frac{1}{T_1(F_z + T_1)} \right\} \\ \frac{\partial \phi_x^e}{\partial F_y} &= -\frac{F_x F_y}{w} \left\{ \frac{1}{T_2(F_z + wL_0^e + T_2)} - \frac{1}{T_1(F_z + T_1)} \right\} \\ \frac{\partial \phi_x^e}{\partial F_z} &= -\frac{F_x}{w} \left\{ \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right\} \\ \frac{\partial \phi_y^e}{\partial F_x} &= -\frac{F_x F_y}{w} \left\{ \frac{1}{T_2(F_z + wL_0^e + T_2)} - \frac{1}{T_1(F_z + T_1)} \right\} \\ \frac{\partial \phi_y^e}{\partial F_y} &= -\frac{L_0^e}{EA} - \frac{1}{w} \ln \left(\frac{F_z + wL_0^e + T_2}{F_z + T_1} \right) - \frac{F_y^2}{w} \left\{ \frac{1}{T_2(F_z + wL_0^e + T_2)} - \frac{1}{T_1(F_z + T_1)} \right\} \\ \frac{\partial \phi_y^e}{\partial F_z} &= -\frac{F_y}{w} \left\{ \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right\} \\ \frac{\partial \phi_z^e}{\partial F_x} &= -\frac{F_x}{w} \left\{ \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right\} \\ \frac{\partial \phi_z^e}{\partial F_y} &= -\frac{F_y}{w} \left\{ \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right\} \\ \frac{\partial \phi_z^e}{\partial F_z} &= -\frac{L_0^e}{EA} - \frac{1}{w} \left\{ \frac{F_z + wL_0^e}{T_2} - \frac{F_z}{T_1} \right\} \end{aligned}$$

여기서 $T_1 = \|\mathbf{F}_1^e\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ 이고 $T_2 = \|\mathbf{F}_2^e\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + (F_z + wL_0^e)^2}$

이다.

A-2 압축력을 고려한 뼈대 부재의 비선형 강성도 행렬

식 (2.20)의 압축력에 의한 모멘트 증폭 효과를 고려한 뼈대 부재의 강성도

행렬 \mathbf{k}_G^e 은 다음과 같다 [14].

$$\frac{F_{x2}}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_p}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{I_p}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{2L^2}{15} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{L^2}{30} & 0 \\ 0 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{L}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{I_p}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_p}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & -\frac{L^2}{30} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & \frac{2L^2}{15} & 0 \\ 0 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix}$$

부록 B 해석예제 문제의 재원

해석 예제로 사용된 제 2 진도대교의 재원은 다음과 같다.

교량명 : 제 2 진도대교

위 치 : 전남 진도군 군내면 ~ 해남군 문내면

L (총경간장) = 484m (70+344+70)

규 모 : B (너비) = 12.55m

H (탑정높이) = EL.+89.0m

형 식 : 3경간 연속 강사장교 (1 등급교 DB-24, DL-24)

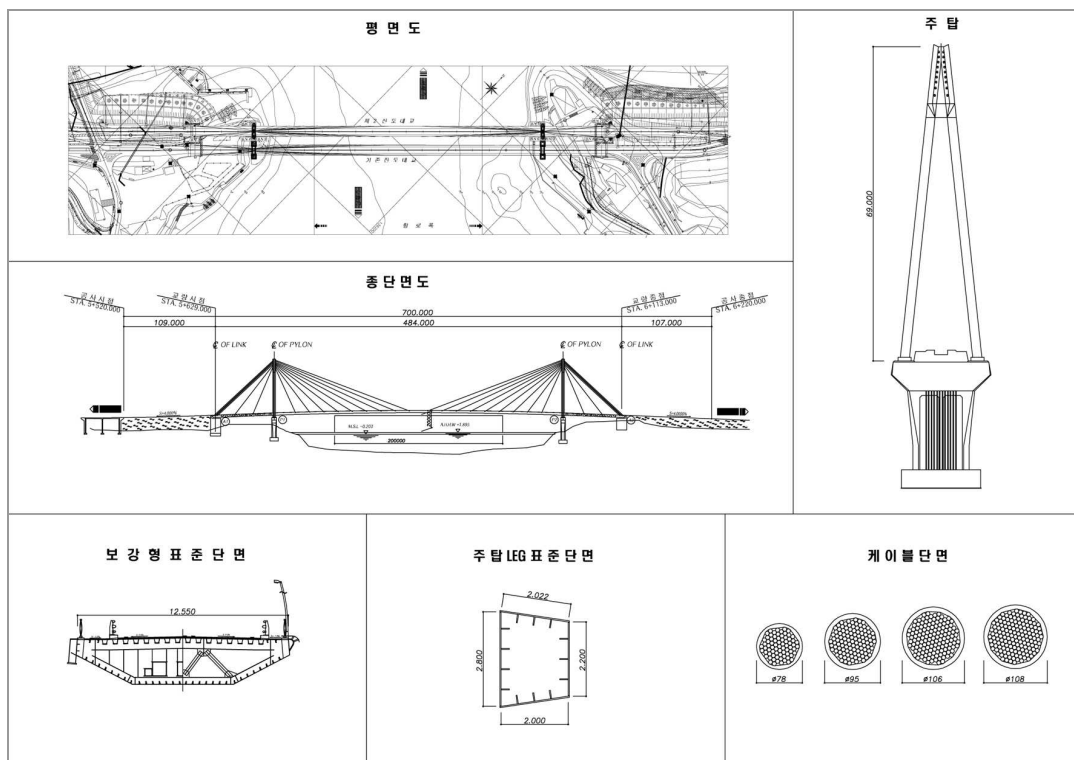


그림 B-1 제 2 진도대교 주요 단면도

표 B-1 제 2 진도대교 구조 요소별 주요 제원

부재	E $tonf / m^2$	A m^2	I_y m^4	I_z m^4	J m^4	w $tonf / m$
측 경간 거더	2.1×10^7	0.589	1.107	7.000	8.736	7.322
중앙 경간 거더	2.1×10^7	0.462	0.596	6.283	6.842	5.650
측 경간 케이블	2.0×10^7	0.006	-	-	-	0.048
중앙 경간 케이블	2.0×10^7	0.004	-	-	-	0.034
주탑 (0~20m)	2.5×10^6	46.370	109.237	594.824	606.700	-
주탑 (20~89m)	2.0×10^7	3.205	0.226	0.339	0.537	0.225



그림 B-2 제 2 진도대교 전경

참고문헌

- [1] 김윤섭. (1998). 역방향 해석을 이용한 강사장교 초기 긴장력 결정에 관한 연구, 공학석사학위논문, 서울대학교.
- [2] 김호경. (1993). 시공상태를 고려한 현수교의 3 차원 해석, 공학박사학위논문, 서울대학교.
- [3] 안상섭. (1991). 탄성현수선 케이블요소를 이용한 3 차원 케이블망의 정적 및 동적 비선형 해석, 공학석사학위논문, 서울대학교
- [4] Kim, K.S. and Lee, H.S. (2001). "Analysis of target configurations under dead loads for cable-supported bridges", *Journal of Computers and Structures*, Vol. 79, Issue 29-30, pp. 2681-2692.
- [5] 김창현. (2004). 에너지 최소화를 이용한 사장교의 초기평형상태 해석 기법 및 최적 형상 구현, 공학석사학위논문, 서울대학교.
- [6] 박현우. (2002). *Regularization Techniques in System Identification for Damage Assessment of Structures*, 공학박사학위논문, 서울대학교.
- [7] Hjelmstad, K.D. (1996). On the uniqueness of modal parameter estimation. *Journal of Sounds and Vibration*, Vol. 192(2), pp. 581-598.
- [8] Bui, H. D. (1994). *Inverse problems in the mechanics of materials: An introduction*, CRC Press, Boca Raton.
- [9] Hansen, P. C. (1992). "Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve", *SIAM review*, Vol. 34, No. 4, pp. 561-580.
- [10] Golub, G. H., Heath, M. and Wahba, G.. (1978). "Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter," *Technometrics*, Vol. 21, pp. 215-223.

- [11] Maniatty, A. M. (1994). "Investigation of regularization parameters and error estimating in inverse elastic problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, 1035-1052.
- [12] Lee, H.S., Kim, Y.H., Park C.J., and Park, H.W. (1999). "A new spatial regularization scheme for the identification of geometric shapes of inclusions in finite bodies.", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46.
- [13] Park, H.W., Shin, S.B., Lee, H.S. (2001). "Determination of an optimal regularization factor in system identification with Tikhonov regularization for linear elastic continua." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 51, No.10, pp.1211-1230.
- [14] McGuire, W., Gallagher, R.H., Ziemian, R.D. (2000). *Matirx Structural Analysis*, second edition, pp.257.

ABSTRACT

The undeformed geometric configuration of cable-stayed structures cannot be defined because the lateral stiffness of a cable is developed from applied tensions. Therefore, either the unstrained length or the tension of cable must be calculated from the given design deformed geometry. Determining either unstrained length or tension that satisfies the given geometry in equilibrium is defined as an initial equilibrium state analysis. Initial equilibrium state that determines standard geometry for the other live loads and dynamic analysis is very important. Initial equilibrium state analyses by geometric constraints and by minimizing moments guarantee uniqueness of solution and draw the exact solution. But a method by geometric constraints has a problem of developing excessive cable tensions and by minimizing moments can be got configuration out of target profile. So this paper presents a new analysis, hybrid TCUD analysis which is based on both the method by geometric constraints and by minimizing moments for overcoming these demerits.

Correction of target configuration is very important in construction for cable-stayed bridges. However slender structures like cable-stayed bridges are difficult to construct with accurate design values because of construction conditions, uncertainty of loads, and manufacturing errors of each members. Therefore, correction procedure should be performed estimating the current state of structures. This study presents inverse analysis for cable-stayed bridges by determination of a design value and the regularization method for removing instability. Geometric configuration adjustment is presented by adjusting cable lengths based on estimated actual variables using Monte Carlo simulation.

Cable-stayed bridges that constructed by free cantilever method do not satisfy compatibility condition because two independent structure systems are made up and no forces are on the closing section before closing the girders. Thus, pull-up force of derrick crane and cable tensions are added to satisfy compatibility of displacements. This study presents the method of calculating displacement sensitivity and solving nonlinear compatibility equation including sensitivities by Newton-Raphson method. Monte Carlo simulation is employed to estimate errors during construction stages.

The example of second Jido Bridge is performed to demonstrate the validity and the effectiveness of the proposed methods for geometric configuration adjustment.

Key Word

Hybrid TCUD analysis, Inverse analysis, Closing analysis, Regularization, Sensitivity

Student Number : 2003-21341

감사의 글

미흡하나마 한 권의 논문을 완성하기까지 많은 분들의 도움이 있었습니다. 짧은 지면이지만 감사의 뜻을 전합니다. 먼저 지도 교수님이신 이해성 교수님께 감사 드립니다. 선생님의 열정적인 가르침과 꾸지람이 있었기에 이 논문을 완성할 수 있었습니다. 그리고 많은 가르침을 주신 장승필 교수님, 오병환 교수님, 고현무 교수님, 김재관 교수님에게도 감사의 말씀을 드립니다.

박사 논문 준비로 바쁜 와중에도 이것저것 꼼꼼히 챙겨주신 기석이형, 연구실에 합류하자마자 폐합 멤버가 되어 많은 도움을 주신 주성이형, 취직한 뒤에도 전화로 요청하면 언제나 연구실로 달려와준 창현이형, 그리고 많은 업무를 덜어주었던 새 방장 승근이형에게도 깊은 감사를 드립니다.

앞으로 케이블 연구를 이어서 할 연철이형, 사실상 신앙 관리인이었던 재웅이, 그리고 프로그램 개발의 임무를 받은 세건이형에게는 열심히 준비해서 좋은 논문 쓰라는 말을 전합니다. 새로 들어와 제대로 얘기도 못 나뉘본 종현이형, 호진이형, 그리고 2년차 신입생 길제에게는 적응 잘하고 2년 동안 공부 열심히 하기를 바란다는 말을 전합니다.

대학원 2년 동안 힘들고 지칠 때마다 힘이 되어준 여자친구 현지에게 고맙다는 말을 전합니다. 마지막으로 언제나 저를 위해 기도해주시고 지원해주신 사랑하는 부모님께 감사 드리며 이 논문을 바칩니다.