

공학석사학위논문

Bayesian Theory 에 기초한 손상탐지 기법

Damage Detection Scheme Based on Bayesian Theory

2003 년 2 월

서울대학교 대학원

지구환경시스템공학부

박 만 우

Bayesian Theory 에 기초한 손상탐지 기법

Damage Detection Scheme Based on Bayesian Theory

지도교수 이 해 성

이 논문을 공학석사학위논문으로 제출함

2002 년 10 월




서울대학교 대학원

지구환경시스템공학부

박 만 우

박만우의 공학석사학위 논문을 인준함

2002 년 12 월

| | | |
|------|-------|---|
| 위원장 | 張 弘 道 |  |
| 부위원장 | 이 해 성 |  |
| 위원 | 高 鎰 武 |  |

초록

기존의 최소 자승오차에 의한 결정론적 SI 기법을 확률론적 관점에서 Bayesian Theory를 통해 재조명 한다. Bayesian Theory에 의하면 SI를 이용한 손상탐지 기법은 임의의 측정값이 주어졌을 때의 강성변수에 대한 조건부 확률분포에서 maximum likelihood에 해당하는 강성변수를 결정하는 과정으로 정의된다. 강성변수의 조건부 확률분포는 측정 오차, 모델링 오차, 그리고 시스템변수에 대한 세 가지 확률분포를 결합하여 구할 수 있다. 시스템변수에 대한 확률분포는 결정론적 관점에서의 정규화와 같은 역할을 한다. 정규분포와 symmetry exponential 분포를 이용함으로써 L_2 -정규화 함수와 L_1 -정규화 함수의 효과를 볼 수가 있다. 측정 오차의 표준편차와 시스템변수의 표준편차의 비가 정규화 계수와 같은 역할을 한다.

구조물의 강성변수는 항상 양수이며, 초기값에 대해 비대칭인 확률분포를 갖는다고 할 수 있다. 이러한 특성을 잘 모사할 수 있는 log-normal 분포를 강성변수의 확률분포로 사용할 경우에 대한 SI 기법을 제시한다.

결정론적 SI 기법에서 적절하게 고려하지 못했던 모델링 오차를 확률론을 도입함으로써 측정 오차와 함께 필터링 하는 방법을 제시한다. 모델링 오차를 실제변위와 계산변위 간의 오차로 표현하고, 이 오차의 확률분포를 정규분포로 가정한다. 모델링 오차는 이 정규분포의 covariance 행렬을 통해서 필터링 된다. 예제를 통해서 제안한 방법들의 타당성과 효율성을 검증한다.

주요어

Bayesian Theory, L_2 -정규화, L_1 -정규화, 정규분포, symmetry exponential 분포, log-normal 분포, 모델링 오차, covariance.

학번 : 2001-21206

목차

| | |
|--|-----|
| 초록..... | i |
| 목차..... | iii |
| 그림목차..... | v |
| | |
| 1. 서론 | 1 |
| | |
| 2. 최소 자승오차에 의한 결정론적 SI 기법 | 5 |
| 2.1. SI의 불안정성..... | 7 |
| 2.1.1 SVD (Singular Value Decomposition) | 7 |
| 2.1.2 해의 비유일성 | 8 |
| 2.1.3 해의 불연속성 | 9 |
| 2.2 정규조건 | 11 |
| 2.3 정규조건의 적용 | 12 |
| 2.3.1 Tikhonov 정규화 | 13 |
| 2.3.2 Truncated Singular Value Decomposition | 16 |
| | |
| 3. 확률론적 관점에서의 SI 기법 | 22 |
| 3.1 Bayesian Theory와 최소 자승오차에 의한 SI 기법 | 22 |
| 3.2 Log-Normal 분포를 갖는 시스템변수의 추정 | 30 |
| 3.3 모델링 오차의 정식화 | 33 |
| | |
| 4. 예제 | 40 |

| | |
|--------------------------------------|----|
| 4.1 Log-Normal 분포를 이용한 정규화의 효과 | 40 |
| 4.1.1 관측점 I | 42 |
| 4.1.2 관측점 II | 45 |
| 4.2 모델링 오차의 필터링 | 47 |
| 4.2.1 경계조건의 모델링 오차 | 48 |
| 4.2.2 하중의 모델링 오차 | 51 |
| 5. 결론 | 55 |
| 참고문헌 | 58 |

그림목차

| | | |
|---------|---|----|
| 그림 3.1 | 정규분포와 symmetry exponential 확률분포 | 28 |
| 그림 3.2 | Log-normal 분포의 형태 | 32 |
| 그림 3.3 | 모델링 오차의 정의 - 경계조건의 차이 | 35 |
| 그림 4.1 | 정사각형 관의 형상과 경계조건 및 하중조건 | 40 |
| 그림 4.2 | 관측점과 요소 그룹 | 41 |
| 그림 4.3 | 알루미늄 함유체 예제의 결과 - 관측점I | 43 |
| 그림 4.4 | 텅스텐 함유체 예제의 결과 - 관측점I | 45 |
| 그림 4.5 | 알루미늄 함유체 예제의 결과 - 관측점II | 46 |
| 그림 4.6 | 텅스텐 함유체 예제의 결과 - 관측점II | 47 |
| 그림 4.7 | 3경간 모델 형상과 관측점 및 손상 위치 | 48 |
| 그림 4.8 | 경계조건의 모델링 오차에 따른 역해석 결과 (측정오차 1%) | 49 |
| 그림 4.9 | 경계조건의 모델링 오차에 따른 역해석 결과 (측정오차 5%) | 50 |
| 그림 4.10 | 하중의 모델링 오차에 따른 역해석 결과 (측정오차 1%) | 52 |
| 그림 4.11 | 하중의 모델링 오차에 따른 역해석 결과 (측정오차 5%) | 54 |

1. 서론

각종 구조물은 설계시 고려하지 못한 공학적 현상이나 과도한 하중 그리고 구조 부재를 이루고 있는 재료의 결함 등에 의하여 사용 기간 중 손상이 발생할 수 있다. 구조물의 일부분에서 국부적으로 발생한 손상이라 할지라도 조기에 발견하여 적절한 보수를 수행하지 않으면 국부적인 손상이 전파하여 구조물 전체의 파괴를 초래할 수 있다. 사회 기반 시설의 경제적이고 안전한 유지 보수를 위하여 이론적으로 잘 정립된 상태 평가 기법이 필수적이다.

SI (System Identification)에 의한 손상 진단 기법이 최근 20 년간 국내외의 여러 연구자에 의하여 진행되어 왔다[1-4]. SI 에 기초한 손상탐지 기법은 역해석 문제이기 때문에 많은 불안정성이 존재하게 되며 이러한 불안정성을 적절한 기법을 통하여 안정화하지 않는 한 실제 문제에 적용하기가 어렵다. 최근 SI 기법에 의한 손상탐지 기법의 수학적 불안정성에 대한 기초적인 연구가 집중적으로 이루어져 불안정성의 원인과 해결책이 제시되었고, 이러한 불안정성의 제거에 관한 연구가 지속적으로 수행되어 많은 새로운 방법이 시도되고 있다.

SI 에 기초한 손상탐지 기법에서는 구조물 응답 측정값과 계산값 간의 차승 오차로 정의되는 오차함수를 최소화하는 강성변수를 추정하여 손상정도를 평가한다. 그러나, SI 문제는 불안정성이 내재된 역해석 문제이기 때문에 잘 정립된 수학적 이론을 통하여 불안정성을 제거하여야 신뢰성 있는 손상탐지가 가능

하게 된다. SI 문제의 대표적인 불안정성으로는 측정값의 빈곤성과 종속성에서 기인하는 해의 비유일성과 측정값에 포함되어 있는 각종 오차에 의하여 발생하는 해의 불연속성을 들 수 있다[5-9].

이러한 SI 문제의 불안정성을 해소하기 위해 SI 문제의 안정화 기법이 제안되었다. 적분식으로 주어지는 해의 정규 조건 (Regularity condition)을 사용하여 해가 존재하는 공간을 정의하고, 주어진 정규조건을 최적화 과정에 추가적인 조건으로 사용하여 안정화 효과를 발현시킨다. 대표적인 안정화 기법으로는 Tikhonov 정규화 기법과 절단 특이치 분해법 (Truncated Singular Value Decomposition Method; TSVD)이 있으며, 구조물에 대한 SI 문제에서는 주로 Tikhonov 정규화 기법이 사용되었다[4,9]. 안정화 효과가 너무 크게 정의되면 물리적으로 의미 없는 해가 구해지고, 그 반대의 경우에는 수치적으로 불안정한 해가 구해지기 때문에, 안정화 효과의 크기를 적절히 조정하여야 한다. 안정화 효과의 크기를 Tikhonov 정규화 기법에서는 정규화 계수로 결정하고, TSVD에서는 절단 번호 (Truncation number)로 조정한다.

기존의 안정화 기법에서 해의 정규조건을 정의하기 위하여 주로 구조물 강성 변수의 L_2 -norm 을 사용해왔다. 그러나, L_2 -norm 을 정규조건으로 사용한 SI 기법에서는 L_2 -norm 의 특성 때문에 해의 분해 성능이 저하되는 단점이 있다. 즉, 정규조건에 의하여 해의 불안정성은 제거되지만 그 대신에 손상부재의 손상도 역시 작게 평가되어 손상부재를 정확히 분리하기가 어려워진다. 이러한 단점

을 제거하기 위하여 최근 박현우에 의하여 강성변수의 L_1 -norm 을 정규조건으로 사용하는 안정화 기법이 제안되었다[10].

오차함수의 최소화를 이용하는 기존의 SI 기법은 주어진 측정값과 강성변수의 정규조건에 의하여 시스템변수를 추정하는 결정론적인 방법이다. 그러나, 하중, 물성치, 변위, 해석 모델 등의 모든 구조시스템의 변수들은 임의의 확률분포를 갖는 확률적 변수이다. 측정값과 강성변수의 확률분포를 알고 있거나 혹은 적절히 가정할 수 있다면, 기존의 결정론적인 SI 기법이 아닌 확률론적인 접근이 보다 합리적일 것이다. 이 연구에서는 지금까지 연구된 최소 자승오차에 의한 SI 문제를 확률론적 관점에서 Bayesian Theory 를 통해 재조명한다.

확률론적 관점에서의 SI 는 임의의 측정값들이 주어졌을 때의 강성변수에 대한 조건부 확률분포에서 maximum likelihood 에 해당하는 강성변수를 결정하는 과정으로 정의된다. 이 강성변수의 조건부 확률분포는 세 가지 확률 분포 - 측정 오차에 대한 확률분포, 이상화된 수치해석 모델과 실제 구조물 간의 차이에서 야기되는 모델링 오차에 대한 확률분포 그리고 시스템변수에 대한 확률분포 - 를 결합하여 구할 수 있다. 이러한 통계적 방법은 각 변수에 대한 확률분포를 독립적으로 정의할 수 있기 때문에 확정론적인 접근 방법에 비하여 실제 상황을 보다 합리적으로 모사할 수 있는 장점이 있다.

위의 세가지 확률분포를 모두 확률분포를 정규분포로 가정하면 최종 조건부 확률의 maximum likelihood 를 구하는 최적화 문제가 L_2 -정규화 함수를 Tikhonov 기법으로 도입한 오차함수의 최소화 문제와 일치하게 되고, 시스템변수의 확률

분포로 symmetry exponential 확률분포를 이용하면, L_1 -정규화 함수를 사용하는 결정론적인 SI 기법과 일치하게 된다. 정규화 효과의 크기는 세 확률분포의 분산값의 조합에 의하여 결정된다.

통계적 관점에서 구조물의 강성변수는 항상 양수의 값이며 손상이 없을 때의 값인 기저값에 대해 비대칭인 확률분포를 갖는다. 이러한 특성을 잘 모사할 수 있는 log-normal 분포를 구조 강성변수의 확률분포로 사용할 경우에 대한 SI 기법을 제시한다. 기존의 결정론적 방법의 SI 에서는, 모델링 오차를 측정 오차의 일부로 생각하여 별도의 필터링 기법이 존재하지 않았다. 그러나, 모델링 오차는 구조시스템의 유기적인 관계를 통해서 발생하는 것이기 때문에, 무작위 오차인 측정 오차와 동일하게 취급하는 것은 부적절하다. 확률론적 이론을 도입하여 모델링 오차를 적절하게 고려하여 필터링 하는 방법을 제시한다. 해석 모델을 통해 계산한 변위와 실제 구조물의 변위 간의 차에 대한 확률분포로 모델링 오차를 표현할 수 있으며, 이 확률분포가 정규분포일 경우 covariance 행렬을 이용하여 모델링 오차의 필터링이 가능해진다. 평면응력 상태의 정사각형 판 예제와 3 경간 들보 예제를 통해서 log-normal 분포를 이용한 정규화 이론과 covariance 행렬을 이용한 모델링 오차의 필터링 이론의 타당성을 검증한다.

2. 최소 자승오차에 의한 결정론적 SI 기법

구조물의 수치해석 모델을 나타내는 평형방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{K}(\mathbf{X})\mathbf{u}_i = \mathbf{P}_i \quad \text{for } i = 1, \dots, nlc \quad (2.1)$$

여기서, \mathbf{K} , \mathbf{X} , \mathbf{u}_i , \mathbf{P}_i , nlc 는 각각 강성행렬, 시스템변수 벡터, i 번째 하중조건에 대한 변위 벡터, 하중 벡터, 그리고 하중단계의 수이다. 시스템변수 벡터는 구조물 각 요소의 강성변수로 구성된다.

선정된 측정점에서의 측정변위가 주어졌을 때, 구조물의 강성변수는 다음과 같이 측정값과 계산값 간의 자승오차를 최소화함으로써 추정한다.

$$\text{Min}_{\mathbf{X}} \Pi_E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nlc} \|\tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{X}) - \bar{\mathbf{u}}_i\|_2^2 \quad \text{subject to } \mathbf{R}(\mathbf{X}) \leq 0 \quad (2.2)$$

여기서 $\tilde{\mathbf{u}}_i$, $\bar{\mathbf{u}}_i$, \mathbf{R} 과 nlc 는 각각 i 번째 하중단계에서의 해석모델에 의한 계산 변위 벡터, 측정변위 벡터, 시스템변수에 대한 구속조건 벡터, 그리고 하중단계의 개수이다. $\|\cdot\|_2$ 는 벡터의 2-norm 벡터이다[11]. 편의를 위해 식 (2.2)에서 정의한 오차함수를 다음과 같이 하나의 벡터 형태로 표현한다.

$$\text{Min}_{\mathbf{X}} \Pi_E = \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{X}) - \bar{\mathbf{U}}\|_2^2 \quad \text{subject to } \mathbf{R}(\mathbf{X}) \leq 0 \quad (2.3)$$

여기서, $\tilde{\mathbf{U}}$ 와 $\bar{\mathbf{U}}$ 는 측정변위 벡터의 norm으로 기준화 하여 하중단계에 대해 행방향으로 정렬한 계산변위 벡터와 측정변위 벡터이다. 시스템변수에 대한 구속조건은, 시스템변수의 물리적 특성을 고려한 상한값과 하한값을 정하여 선형 부등식으로 표현한다.

$$\mathbf{X}_l \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}_u \quad (2.4)$$

여기서, \mathbf{X}_l 와 \mathbf{X}_u 는 각각 시스템변수의 하한값과 상한값이다.

식 (2.3)의 최적화 문제는 시스템변수에 대한 비선형 최적화 문제이므로 식 (2.3)을 선형화 한 식 (2.5)의 이차 종속문제를 반복적으로 풀어서 최적해를 구하게 된다.

$$\text{Min}_{\Delta\mathbf{X}} \left[\frac{1}{2} \Delta\mathbf{X}^T \mathbf{H}_{k-1} \Delta\mathbf{X} - \Delta\mathbf{X}^T \mathbf{S}_{k-1}^T \mathbf{U}_{k-1}^r \right] \text{ subject to } \mathbf{R}(\mathbf{X}_{k-1} + \Delta\mathbf{X}) \leq 0 \quad (2.5)$$

$$\mathbf{H}_{k-1} \approx \mathbf{S}_{k-1}^T \mathbf{S}_{k-1} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{U}_{k-1}^r = \bar{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{U}}_{k-1} \quad (2.7)$$

여기서, k 는 반복단계수이고, \mathbf{S}_{k-1} 는 $\tilde{\mathbf{U}}_{k-1}$ 에 대한 민감도 행렬이며, \mathbf{H}_{k-1} 는 오차함수에 대한 헤시안 행렬이다. 헤시안 행렬에는 시스템변수에 대한 오차함수의 이차 미분항이 포함되어 있다. 오차함수의 이차 미분항을 정확히 계산하는 과정에는, 비선형 방정식인 강성도 방정식을 두 번 미분하여 변위의 시스템변

수에 대한 이차 민감도를 계산하여야 하는 어려움이 있다. 따라서 오차함수의 헤시안 행렬을 변위의 일차 민감도만으로 근사하는, Gauss-Newton 행렬을 사용한다[12].

식 (2.5)의 선형 최적조건은 다음과 같다.

$$\mathbf{S}^T \mathbf{S} \Delta \mathbf{X} - \mathbf{S}^T \mathbf{U}^r = 0 \quad (2.8)$$

2.1 SI의 불안정성

식 (2.3)으로 정의되는 SI 문제는 해의 불연속성, 비유일성 등의 불안정한 특성을 갖는다. 측정값에는 오차가 포함되어 있고, 독립적인 측정값의 수가 추정하고자 하는 시스템변수의 수보다 적기 때문이다.

2.1.1 SVD (Singular Value Decomposition)

SI 문제의 불안정한 특성에 대한 접근과 해결을 위해 민감도 행렬 \mathbf{S} 에 대한 SVD를 사용한다. 시스템변수의 수가 n 개이고, 측정값의 수가 m 개 일 경우, $m \times n$ 의 민감도 행렬 \mathbf{S} 는 SVD에 의해 $m \times n$ 행렬 \mathbf{Z} , $n \times n$ 의 대각행렬 $\mathbf{\Omega}$, $n \times n$ 행렬 \mathbf{V} 로 표현된다.

$$\mathbf{S} = \mathbf{Z} \mathbf{\Omega} \mathbf{V}^T \quad (2.9)$$

여기서, 각 행렬 \mathbf{Z} , $\mathbf{\Omega}$, \mathbf{V} 는 다음과 같은 특성을 갖는다.

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} = \mathbf{I}_n, \quad \mathbf{V} \mathbf{V}^T = \mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}_n, \quad \mathbf{\Omega} = \text{diag}(\omega_j) \quad (2.10)$$

여기서 \mathbf{I}_n 은 n 차의 단위 행렬이고, ω_j 는 $\omega_{\max} = \omega_1 \geq \omega_2 \geq \dots \geq \omega_n = \omega_{\min} \geq 0$ 과 같이 내림차순으로 정렬된 민감도 행렬 \mathbf{S} 의 특이치이다. $n > m$ 일 경우, 민감도 행렬 \mathbf{S} 는 rank가 부족하게 되며, $\omega_{m+1} = \dots = \omega_n = 0$ 이 된다.

2.1.2 해의 비유일성

해의 비유일성은 추정하려는 시스템변수의 개수보다 독립적인 측정값의 수가 작을 때 나타난다. 이 경우 민감도 행렬 \mathbf{S} 의 rank가 부족해지고, 무한한 수의 해가 존재하게 된다. 이와 같은 측정값의 빈곤함은 구조시스템의 SI 문제에서 아주 흔하게 나타나는 현상이다. 구조물이 거대해질수록 시스템변수의 수는 많아지는 반면, 설치할 수 있는 측정기기의 수는 한정되어 있기 때문이다. Rank 부족현상은 측정값의 수가 시스템변수의 수보다 많은 경우에도 나타날 수 있는데, 이는 각각의 측정값들이 주는 정보가 항상 독립적인 것만은 아니기 때문이다. 따라서, 단순히 측정값과 시스템변수의 수를 비교함으로써 부족한 rank의 차수를 구할 수는 없으며, rank 부족현상을 정확하게 파악하기 위해서는 2.1.1 장에서의 민감도 행렬에 대한 SVD를 이용해야 한다. Rank가 부족한 경우에, 식 (2.8)의 해는 식 (2.9)를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다[6,13].

$$\Delta \mathbf{X} = \sum_{j=1}^r \mathbf{v}_j \omega_j^{-1} \mathbf{z}_j^T \mathbf{U}^r + \sum_{j=r+1}^n \gamma_j \mathbf{v}_j \quad (2.11)$$

여기서 \mathbf{v}_j , \mathbf{z}_j 는 각각 j 번째 특이치 ω_j 에 대한 \mathbf{V} 와 \mathbf{Z} 의 열벡터이고, γ_j 는 임의의 실계수이다. r 은 확보된 rank 수이다. 식 (2.11)의 첫번째 항은 rank r 에 해당하는 성분으로 항상 일정한 값이며, 두번째 항은 부족한 rank에 해당하는 성분으로 변위 잔차 \mathbf{U}^r 의 영향을 받지 않는 영공간(null space)의 값이다. 여기서 임의의 계수 γ_j 에 따라 해가 달라지므로, 무한한 해가 존재하게 되어 해의 비유일성과 같은 수치적 불안정성이 나타나게 된다.

2.1.3 해의 불연속성

식 (2.8)의 해는 측정값에 포함된 오차로 인해 불연속성을 갖게 된다. 이러한 현상은 SVD를 통해 쉽게 볼 수 있다. 해의 불연속성은 2.1.2장의 비유일성과는 관계없이 독립적으로 발생하는 특성이므로, rank가 충분한 경우에 대해 살펴 보겠다. 식 (2.8)의 rank가 충분하면, 해를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{V} \text{diag}\left(\frac{1}{\omega_j}\right) \mathbf{Z}^T \mathbf{U}^r = \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j \omega_j^{-1} \mathbf{z}_j^T \mathbf{U}^r \quad (2.12)$$

식 (2.12)의 증분해는 순수히 측정변위와 구조물의 해석모델에 의해 구해진 것이며, 그 외의 어떠한 사전 지식도 포함되어 있지 않으므로, 측정 증분해(posteriori solution)라고 정의한다.

측정변위는 이론적으로 식 (2.13)과 같이 실제변위 \mathbf{U} 와 오차 \mathbf{e} 의 합으로 표시할 수 있으며, 이를 이용하면 식 (2.12)의 증분해는 다시 식 (2.14)와 같이 표현된다.

$$\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U} + \mathbf{e} \quad (2.13)$$

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{V} \text{diag} \left(\frac{1}{\omega_j} \right) \mathbf{Z}^T (\mathbf{U} - \tilde{\mathbf{U}}) + \mathbf{V} \text{diag} \left(\frac{1}{\omega_j} \right) \mathbf{Z}^T \mathbf{e} = \Delta \mathbf{X}^f + \Delta \mathbf{X}^e \quad (2.14)$$

여기서, $\Delta \mathbf{X}^f$ 는 측정 오차가 없는 실제변위와 계산변위 간의 차에 의한 증분해 성분이고, $\Delta \mathbf{X}^e$ 는 측정 오차에 의한 증분해 성분이다. 측정 오차가 무시하지 못할 크기이거나 오차 벡터 \mathbf{e} 가 \mathbf{Z} 와 직교하지 않으면 $\Delta \mathbf{X}^e$ 는 0이 되지 않으며, 결국 증분해 $\Delta \mathbf{X}$ 는 $\Delta \mathbf{X}^e$ 에 의해 실제변위에 의한 증분해 $\Delta \mathbf{X}^f$ 로부터 멀어지게 된다. 특히, 작은 특이치들에 의해 $\mathbf{Z}^T \mathbf{e}$ 성분들이 크게 증폭되어 오차가 없는 실제변위에 의한 증분해 $\Delta \mathbf{X}^f$ 로부터 더욱 멀어지게 한다. 아주 작은 오차로 인한 측정변위의 변화도 작은 특이치를 통해 크게 증폭되어 수렴한 해가 물리적인 의미를 잃게 될 수 있다.

이와 같이 측정자료가 서로 간에 거의 연속적이라 생각될 정도로 아주 작은 차이를 보이고 있는 경우에도 매우 작은 특이치로 인한 증폭 효과 때문에, 최종적으로 구한 증분해는 전혀 다른 값을 가질 수 있게 되어 해의 불연속성이 나타나게 된다.

2.2 정규조건

정규조건은 해가 존재하는 적절한 함수의 공간을 정의한다[5,15]. L_p -norm을 이용하는 정규화 방법의 일반적인 추가 구속조건은 다음과 같고, 이러한 추가 구속조건을 L_p -정규조건이라 한다.

$$\|x - x_0\|_p = \left[\int_V |x - x_0|^p dV \right]^{1/p} \quad (2.15)$$

여기서, x 와 x_0 는 각각 추정하려는 시스템변수와 시스템변수의 기저값이다. 식 (2.15)의 정규조건은 함수의 적분가능성을 규정함으로써, 시스템변수의 함수 공간을 한정시켜주는 것이다[15]. p 는 시스템변수의 물리적, 수학적 특성을 고려하여 정한다.

식 (2.15)에서 $p=2$ 인 경우는 실제의 시스템변수가 x_0 부근에서 그 제곱이 적분 가능하다는 것을 나타낸다. 즉, 시스템변수가 *piecewise continuous* 함수들로 구성되는 L_2 공간에 포함된다는 것을 의미한다.

$$\Pi_R = \|x - x_0\|_2^2 = \int_V (x - x_0)^2 dV \quad (2.16)$$

식 (2.16)의 L_2 -정규조건에 의한 시스템변수의 해는 부드러운 곡선모양의 함수의 형태를 갖는다. 따라서, 값이 서서히 변하는 유한체 내부의 물성치를 추정하는 문제에 적합하다.

$p=1$ 인 경우를 L_1 -정규조건이라 하며, 다음과 같이 표현한다.

$$\Pi_R = \|x - x_0\|_1 = \int_V |x - x_0| dV \quad (2.17)$$

식 (2.17)의 L_1 -정규조건으로 한정되는 해공간은 Dirac-delta 함수를 포함하게 된다. L_1 -정규조건은 뚜렷한 경계를 갖고 변하는 시스템변수를 추정할 때에 적합하다. 각 부재마다 독립적인 값을 갖는 뼈대구조물의 물성치를 추정할 때나, 이질적인 함유체를 포함하고 있어서 요소 간에 뚜렷한 경계를 갖는 연속체의 물성치를 추정할 때에 적절한 정규조건이다.

정규조건은 추정하려는 시스템변수에 대한 기지의 정보를 바탕으로 그 특성에 맞게 적절히 선택해야 할 것이다.

2.3 정규조건의 적용

역해석의 불안정성을 줄여주는 수치적 방법으로 두 가지 주요한 기법이 있다. 해의 수렴성과 연속성을 높여주는 Tikhonov 정규화 기법과 해의 비유일성을 해결해주는 truncated singular value decomposition (TSVD)이 있다. 그러나, 두가지 모두 ill-posed 문제에 positive definiteness를 추가하여 well-posed 문제로 바꾸어 준다는 점에서 동등하다고 할 수 있다.

2.3.1 Tikhonov 정규화

Tikhonov 정규화 기법의 개념은 역해석의 불안정성을 극복하기 위해 사용되어 왔고, 다양한 종류의 역해석 문제에 성공적으로 적용되었다. 식 (2.3)의 오차함수를 최소화 하는 문제에서, 목적함수인 오차함수에 정규화 함수를 더해 주는 방법이다.

정규화란 사전 지식에 의한 해와 측정치에 의한 해를 섞어주는 역할을 한다. 이는 시스템변수에 대한 기존의 정보가 반영된 정규화 함수를 오차함수에 더해 줌으로써 이루어진다. L_2 공간의 해를 추정할 경우, 다음과 같은 형태의 정규화 함수를 오차함수에 더한다.

$$\Pi_R = \frac{1}{2} \lambda^2 \int_V (x - x_0)^2 dV \quad (2.18)$$

여기서, λ 는 정규화 계수로서 해공간에 대한 정규화 정도를 조절한다. 정규화 계수를 결정하는 방법으로서 선형 SI 문제에는 LCM (L-Curve Method)[16], GCV(Generalized Cross Validation)[13] 등이 제안되어 있으며, 비선형 SI 문제에 대해서는 GMS(Geometric Mean Scheme)[9] 및 VRFS(Variable Regularization Factor Scheme)[4,8,17] 등이 제안되어 있다. 식 (2.18)은 다음과 같이 이산화 된 형태로 표현된다.

$$\Pi_R = \frac{1}{2} \lambda^2 \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\|_2^2 \quad (2.19)$$

여기에는 \mathbf{X}_0 의 기저값 정보와, 해가 L_2 공간 내의 함수라는 정보가 내포되어 있는 것이다. 이 정규화 함수를 기저값으로 기준화하여 식 (2.3)의 최소화 문제에 더해지면, 다음의 정규화 된 시스템확인 문제가 된다.

$$\text{Min}_{\xi} \Pi = \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{U}}(\xi) - \bar{\mathbf{U}}\|_2^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 \|\xi - \mathbf{1}\|_2^2 \quad \text{subject to } \mathbf{R}(\xi) \leq 0 \quad (2.20)$$

여기서, ξ 은 기준화 된 시스템변수이고, $\mathbf{1}$ 은 모든 요소가 1인 벡터이다. 식 (2.20)의 목적함수를 정규화 된 오차함수라 한다. 식 (2.20)의 이차 종속문제는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{Min}_{\Delta \mathbf{x}} \left[\frac{1}{2} \Delta \xi^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \Delta \xi - \Delta \xi^T \mathbf{S}^T \mathbf{U}^r \right] + \lambda^2 \left[\frac{1}{2} \Delta \xi^T \Delta \xi - \Delta \xi^T (\mathbf{1} - \xi) \right] \quad (2.21)$$

subject to $\mathbf{R}(\xi + \Delta \xi) \leq 0$

정규화의 효과를 보다 분명하게 확인하기 위해서 구속조건이 없는 상황에서 식 (2.28)의 안정성을 조사한다. 정규화 계수도 구속조건이 없는 상태의 문제를 바탕으로 결정하여야 2.1 장에서 설명한 본래의 문제에서의 불안정성을 해소할 수 있다. 구속조건이 없는 문제에 대하여 정규화 계수를 결정한 후, 구속조건과 함께 식 (2.21)의 이차 종속문제를 푼다. 식 (2.21)에서 구속조건이 없을 때의 정규화 된 해는 SVD를 통해 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Delta \xi_u^R = \mathbf{V} \text{diag}(1 - \alpha_j) \text{diag}\left(\frac{1}{\omega_j}\right) \mathbf{Z}^T \mathbf{U}^r + \mathbf{V} \text{diag}(\alpha_j) \mathbf{V}^T (\mathbf{1} - \xi) \quad (2.22)$$

여기서, $\alpha_j = \lambda^2 / (\omega_j^2 + \lambda^2)$ 이다. 식 (2.10)에서 언급한 \mathbf{V} 와 \mathbf{Z} 의 직교 특성을 이용하면, 식 (2.22)를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{V}^T \xi_u^R = \text{diag}(\alpha_j) \mathbf{V}^T \mathbf{1} + \text{diag}(1 - \alpha_j) \mathbf{V}^T \xi_u \quad (2.23)$$

$$\xi_u^R = \xi + \Delta \xi_u^R, \quad \xi_u = \xi + \Delta \xi_u \quad (2.24)$$

식 (2.23)에서, ξ_u^R 는 구속조건이 없는 문제의 정규화 된 해이고, ξ_u 는 구속조건이 없는 문제의 측정해이다. 식 (2.23)은 정규화 된 해를 \mathbf{V} 로 투영시킨 것이 사전 지식에 의한 추정값과 측정해를 \mathbf{V} 로 투영시킨 것들의 평균이라는 것을 보여주고 있다. 여기서, 사전의 지식에 의한 추정으로 구성되는 해 성분을 추정해(priori estimate)라고 정의한다.

가중치 계수 α_j 는 0과 1 사이의 값으로, 정규화 된 해를 구성하는 추정해와 측정해의 상대적인 비율을 조절한다. 정규화 계수가 작아질수록 가중치 계수는 0에 가까워지며, 정규화 계수가 커질수록 가중치 계수는 1에 가까워진다. 그러므로, 정규화 계수가 커질수록 해는 추정해로 수렴해가며, 작아질수록 측정해에 수렴해간다. 고정된 정규화 계수에 대하여, 특이치가 작을 경우 가중치 계수는 커진다. 따라서, 작은 특이치에 의한 해 성분일수록 추정해의 영향이 커지며, 반대로 큰 특이치에 의한 해 성분일수록 측정해의 영향이 커진다.

식 (2.12)와 달리, 식 (2.22)는 \mathbf{Z} 의 각 벡터들과 변위 잔차 \mathbf{U}^r 간의 직교성이 없어도 0으로의 수렴이 가능하다. 측정해를 오차 성분과 오차가 없는 성분

으로 나누어 적용하면 다음의 식을 구할 수가 있다.

$$\mathbf{V}^T \boldsymbol{\xi}_u^R = \{diag(\alpha_j) \mathbf{V}^T \mathbf{1} + diag(1 - \alpha_j) \mathbf{V}^T \boldsymbol{\xi}_u^f\} + diag(1 - \alpha_j) diag\left(\frac{1}{\omega_j}\right) \mathbf{Z}^T \mathbf{e} \quad (2.25)$$

여기서, $\boldsymbol{\xi}_u^f$ 는 오차 성분이 없는 측정해이다. 모든 특이치에 대하여 가중치 계수가 0에서 1사이의 값이기 때문에, 오차의 영향은 줄어들게 된다. 해의 불안정성을 발생시키는 작은 특이치와 연관된 $\mathbf{Z}^T \mathbf{e}$ 성분은 정규화 효과로 거의 소거된다. 정규화 계수를 적절하게 선정하면 작은 특이치의 가중치 계수가 1이 될 수 있기 때문이다.

2.3.3 Truncated Singular Value Decomposition

Rank가 부족한 문제에는 해가 무한 개 존재하게 된다. Truncated Singular Value Decomposition (TSVD)는 측정값으로부터의 정보 중 오차가 많이 포함되어 있는 부분을 완전히 소거하여 전혀 사용하지 않고, 소거된 부분에 관련된 해 성분은 정규화 함수의 최소화를 통해 복원하여, 소거되지 않은 측정값에 의한 해에 더해줌으로써 시스템변수를 찾는 방법이다. Rank가 부족하여 발생하는 불안정성은 측정값으로부터의 정보가 부족한 부분을 정규화 함수의 최소화 과정을 통해서 보완함으로써 해결하며, 측정 오차에 의한 불안정성은 오차가 큰 성분을 소거함으로써 해결하는 것이다.

L_2 -정규조건에 의한 TSVD 과정을 보겠다.

$$\text{Min}_{\xi} \|\xi - \mathbf{1}\|_2^2 = \text{Min}_{\Delta\xi_u} \|\Delta\xi_u - (\mathbf{1} - \xi_k)\|_2^2 \quad (2.26)$$

식 (2.11)을 식 (2.26)에 대입하면, 식 (2.26)은 γ_j 에 관한 최소화 문제로 바뀐다.

$$\begin{aligned} & \text{Min}_{\Delta\xi_u} \left\| \sum_{j=r+1}^n \gamma_j \mathbf{v}_j + \left\{ \sum_{j=1}^r \mathbf{v}_j \omega_j^{-1} \mathbf{z}_j^T \mathbf{U}^r + (\mathbf{1} - \xi_k) \right\} \right\|_2^2 \\ &= \text{Min}_{\Delta\xi_u} \left[\underbrace{\left\| \sum_{j=1}^r \mathbf{v}_j \omega_j^{-1} \mathbf{z}_j^T \mathbf{U}^r - (\mathbf{1} - \xi_k) \right\|_2^2}_{\text{constant}} + 2 \underbrace{\left(\sum_{j=1}^r \mathbf{v}_j \omega_j^{-1} \mathbf{z}_j^T \mathbf{U}^r \right)^T \left(\sum_{j=r+1}^n \gamma_j \mathbf{v}_j \right)}_0 \right. \\ & \quad \left. + 2 \left(\sum_{i=r+1}^n \gamma_i \mathbf{v}_i \right)^T (\mathbf{1} - \xi_k) + \left\| \sum_{j=r+1}^n \gamma_j \mathbf{v}_j \right\|_2^2 \right] \quad (2.27) \end{aligned}$$

식 (2.27)에서 첫번째 항은 항상 일정한 값이며, 두번째 항은 0이므로 식 (2.27)은 다음과 같이 간추려 진다.

$$\text{Min}_{\gamma_k} \left[\left\| \sum_{j=r+1}^n \gamma_j \mathbf{v}_j \right\|_2^2 + 2 \left(\sum_{i=r+1}^n \gamma_i \mathbf{v}_i \right)^T (\mathbf{1} - \xi_k) \right] \quad (2.28)$$

식 (2.28)의 해는 식 (2.28)을 γ_j 로 미분하여, 그 미분이 0일 때의 식을 이용하여 쉽게 구할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_j} \left[\left\| \sum_{i=r+1}^n \gamma_i \mathbf{v}_i \right\|_2^2 + 2 \left(\sum_{i=r+1}^n \gamma_i \mathbf{v}_i \right)^T (\mathbf{1} - \boldsymbol{\xi}_k) \right] = 2 \mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_j \gamma_j + 2 \mathbf{v}_j^T (\mathbf{1} - \boldsymbol{\xi}_k) = 0 \quad (2.29)$$

여기서, γ_j 는 $\mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_j$ 가 1임을 이용하면, 다음과 같이 표현된다.

$$\gamma_j = \frac{(\mathbf{1} - \boldsymbol{\xi}_k)^T \mathbf{v}_j}{\mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_j} = \mathbf{v}_j^T (\mathbf{1} - \boldsymbol{\xi}_k) \quad (2.30)$$

식 (2.30)을 이용하면, 식 (2.11)의 해를 유일하게 결정할 수 있으며, 그 해는 식 (2.31)과 같다.

$$\Delta \boldsymbol{\xi}_r^{TSVD} = \sum_{j=1}^r \mathbf{v}_j \omega_j^{-1} \mathbf{z}_j^T \mathbf{U}^r + \sum_{j=r+1}^n \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T (\mathbf{1} - \boldsymbol{\xi}_k) \quad (2.31)$$

여기서의 해는 rank r 이 n 보다 작아 부족할 경우에 민감도 행렬의 TSVD를 이용하여 구할 수 있기 때문에 $\Delta \boldsymbol{\xi}_r^{TSVD}$ 로 표기하는 것이다.

L_2 -정규화 함수를 TSVD에 적용했을 때를 보면, Tikhonov 정규화 기법과 달리 식 (2.25)에서의 가중치 계수 α_j 가 0 또는 1의 값만을 갖는다. 측정 오차를 크게 증폭시키는 작은 특이치가 포함된 성분은 α_j 를 1로 하여 완전히 소거시키며, 그 외의 성분들에 대해서는 α_j 를 0으로 하여 그 정보를 100% 사용한다.

TSVD를 이용하여 L_1 -정규화 함수를 적용하는 L_1 -TSVD에 대해 알아보겠다. 식 (2.17)의 정규화 조건을 Tikhonov 정규화 기법을 이용하여 오차함수에 적용

하면, 식 (2.32)와 같이 표현된다.

$$\text{Min}_{\xi} \Pi = \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{U}}(\xi) - \bar{\mathbf{U}}\|_2^2 + \lambda \|\xi - \mathbf{1}\|_1 \quad \text{subject to } \mathbf{R}(\xi) \leq 0 \quad (2.32)$$

이 최적화 문제는 비선형 문제로서 Newton type의 알고리즘들을 이용하여 푼다. 이 알고리즘들에는 목적함수 Π 의 gradient가 필요하다. 그러나, L_1 -정규화 함수는 미분이 불가능하다. 따라서, L_1 -정규화 함수에는 Tikhonov 정규화 기법을 사용할 수가 없다.

L_1 -TSVD에서는 먼저 오차함수의 이차 종속문제를 통해서 증분해를 구한다. 이 증분해의 성분들 중 오차가 많이 포함되거나 증폭되는 성분들을 소거한다. 마지막으로, 정규조건을 이용하여 소거된 성분들을 복원한다. 이 과정을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\text{Min}_{\xi} \|\xi - \mathbf{1}\|_1 \quad \text{subject to } \text{Min}_{\xi} \|\tilde{\mathbf{U}}(\xi) - \bar{\mathbf{U}}\|_2^2 \quad \text{and } \mathbf{R}(\xi) \leq 0 \quad (2.33)$$

오차함수 최소화 of 증분해는 식 (2.11)과 같이 표현된다. 식 (2.11)은 γ_j 의 값과 무관하게 모두 오차함수에 대한 이차 종속문제의 해가 된다. 즉, 무한한 해가 존재하는 것이다. 여기에 정규조건을 적용하여 γ_j 를 결정하게 된다. 작은 특이치에 의한 해의 성분들은 측정 오차를 증폭시켜서 해의 불연속성을 발생시킨다. 이런 불연속성을 제거하고 안정한 해를 얻기 위하여, 오차가 크게

증폭되는 성분들, 즉 임계점 이하의 특이치 $\omega_t (t \leq r)$ 에 의한 성분들을 절단하여 소거한다. 여기서, t 를 절단번호라 하며, 이는 오차 성분들을 여과시키는 중요한 역할을 한다. 절단번호가 너무 작으면 측정치로부터의 유용한 정보를 손실하게 되고, 너무 크면 오차가 많이 포함되어 의미없는 결과를 도출하게 된다[18]. 최적의 절단번호를 결정하는 방법으로는 discrepancy principle[19], bilinear fitting method 등이 있다.

증분해의 절단된 성분들은 소거된 특이치와 관련된 \mathbf{v}_j 들의 선형조합으로 대체한다.

$$\Delta \xi = \sum_{j=1}^l \mathbf{v}_j \omega_j^{-1} \mathbf{z}_j^T \mathbf{U}^r + \sum_{j=r+1}^n \gamma_j \mathbf{v}_j = \Delta \xi_t^{TSVD} + \mathbf{q} \quad (2.34)$$

식 (2.34)를 이용하여, 식 (2.33)의 증분식을 \mathbf{q} 에 관한 식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Min}_{\mathbf{q}} \|\mathbf{q} - (\mathbf{1} - \xi - \Delta \xi)\|_1 \\ & \text{subject to } \mathbf{V}_t^T \mathbf{q} = 0 \text{ and } \xi_l - \xi_{k-1} - \Delta \xi_t^{TSVD} \leq \mathbf{q} \leq \xi_u - \xi_{k-1} - \Delta \xi_t^{TSVD} \end{aligned} \quad (2.35)$$

여기서, $\mathbf{V}_t = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t)$ 이고, ξ_l 와 ξ_u 는 기준화된 시스템변수의 하한값과 상한값이다. 식 (2.35)의 등구속조건은 \mathbf{q} 가 \mathbf{V} 의 절단된 성분들의 선형조합으로 이루어진다는 것을 나타낸다. 식 (2.35)의 선형최적화 문제는 simplex 방법을 이용하여 푼다[20].

\mathbf{q}_{opt} 가 결정되고 나면, 식 (2.34)에 대입하여 증분해를 구한다.

$$\Delta \xi_t^{L_1-TSVD} = \Delta \xi_t^{TSVD} + \mathbf{q}_{\text{opt}} \quad (2.36)$$

3. 확률론적 관점에서의 SI 기법

3.1 Bayesian Theory와 최소 자승오차에 의한 SI 기법

확률론적 관점에서의 SI는 임의의 측정변위가 주어졌을 때의 시스템변수에 대한 확률분포에서 maximum likelihood에 해당하는 시스템변수를 결정하는 과정으로 정의된다. 이 시스템변수의 조건부 확률분포는 Bayes 이론에 의하여 다음과 같이 표현된다.

$$p(\mathbf{X}|\bar{\mathbf{u}}) = \frac{p(\bar{\mathbf{u}}|\mathbf{X})p(\mathbf{X})}{\int p(\bar{\mathbf{u}}|\mathbf{X})p(\mathbf{X})d\mathbf{X}} = c p(\bar{\mathbf{u}}|\mathbf{X})p(\mathbf{X}) \quad (3.1)$$

여기서, c 는 확률을 1로 기준화 시키는 상수이며, 시스템변수의 조건부 확률분포 $p(\mathbf{X}|\bar{\mathbf{u}})$ 를 posterior 확률분포라 한다. 위의 식 (3.1)에서 조건부 확률분포 $p(\bar{\mathbf{u}}|\mathbf{X})$ 는 다음과 같이 두 개의 조건부 확률분포로 나누어 표현할 수 있다 [21].

$$p(\bar{\mathbf{u}}|\mathbf{X}) = \int_U p(\bar{\mathbf{u}}|\mathbf{u})p(\mathbf{u}|\mathbf{X})d\mathbf{u} \quad (3.2)$$

여기서 \mathbf{u} 는 실제의 변위이고, U 는 적합한 모든 변위의 영역을 나타낸다. 식 (3.2)를 식 (3.1)에 대입하여 보면 posterior 확률분포는 다음과 같이 세 확률분포의 조합으로 표현된다.

$$p(\mathbf{X}|\bar{\mathbf{u}}) = c \left[\int_U p(\bar{\mathbf{u}}|\mathbf{u})p(\mathbf{u}|\mathbf{X}) d\mathbf{u} \right] p(\mathbf{X}) \quad (3.3)$$

식 (3.3)에서 첫번째 조건부 확률분포 $p(\bar{\mathbf{u}}|\mathbf{u})$ 는 실제변위가 주어졌을 때의 측정변위에 대한 조건부 확률분포로서 측정 오차에 대한 부분을 나타낸다. 그리고, 두번째 조건부 확률분포 $p(\mathbf{u}|\mathbf{X})$ 는 시스템변수가 주어졌을 때의 실제변위에 대한 조건부 확률분포로서 계산변위와 실제변위 간의 차이인 모델링 오차를 나타낸다. $p(\mathbf{X})$ 는 기존의 지식에 의한 시스템변수의 확률분포로서, 측정 데이터와는 독립적으로 결정되는 확률분포이다. 이와 같이, posterior 확률분포는 측정 오차, 모델링 오차, 선지식에 의한 시스템변수의 분포의 조합으로 결정된다.

기존의 결정론적 SI 기법에서는 측정 오차와 모델링 오차를 동일하게 취급하였다. 모델링 오차도 측정 오차의 일부라는 가정이 전제되어 있었던 것이다. 그러나, Bayesian Theory 를 이용한 확률론적 관점에서의 SI 에서는 식 (3.3)과 같이 측정 오차와 모델링 오차를 두 개의 확률분포로 나누어 표현하고 있다. 측정 오차는 측정 기기 센서의 민감도에 의해서 발생하거나 측정기기를 잘못 읽는 과정에서 발생하는 무작위 오차로서, 실제 구조물의 변위와 측정변위 간의 차이인 $(\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u})$ 로 표현된다. 측정 오차 $(\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u})$ 의 확률분포가 평균이 0인 정규분포일 경우, 조건부 확률분포 $p(\bar{\mathbf{u}}|\mathbf{u})$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$p(\bar{\mathbf{u}} | \mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det \mathbf{C}_d}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^T \mathbf{C}_d^{-1}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})\right] \quad (3.4)$$

여기서, \mathbf{C}_d 는 측정 오차의 covariance 행렬이고 m 은 측정변위의 개수이다. 측정 오차는 무작위 오차로서 각 측정점에서 모두 독립적으로 발생한다고 볼 수 있고, 이 경우 covariance 행렬은 대각행렬이 된다. 또한, 측정 오차에 대한 특별한 정보가 없으면 모든 측정점에서의 측정 오차의 표준편차가 같다고 가정할 수 있으며, 이 경우 covariance 행렬의 모든 대각항이 같게 되므로, 하나의 상수로 표현할 수 있다. 그 표준편차를 σ_d 라 하면 식 (3.4)는 다음과 같이 표현된다.

$$p(\bar{\mathbf{u}} | \mathbf{u}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_d)^m} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_d^2}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^T(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})\right] \quad (3.5)$$

모델링 오차는 실제 구조물의 변위와 해석모델을 통해 계산된 변위 간의 차이인 $(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))$ 로 표현되며, 실제 구조물을 이상화 하는 과정에서 발생하는 오차이다. 모델링 오차는 측정 오차와는 달리 시스템의 구조적 특성에 따라서 유기적인 관계를 갖고 발생하는 오차이다. 기존의 결정론적 SI 기법에서와 같이 모델링 오차를 별도로 고려하지 않는 경우, 즉 모델링 오차가 없다고 가정할 경우에 모델링 오차를 나타내는 조건부 확률분포 $p(\mathbf{u} | \mathbf{X})$ 는 Dirac-delta 함수로 표현된다.

$$p(\mathbf{u} | \mathbf{X}) = \delta(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X})) \quad (3.6)$$

Bayesian Theory 에 의한 SI 기법에서는 시스템변수에 대한 확률분포 $p(\mathbf{X})$ 가 정규화와 같은 역할을 한다. 확률분포 $p(\mathbf{X})$ 의 종류에 따라서 각각 다른 정규화 효과가 나타난다. 확률분포 $p(\mathbf{X})$ 가 모든 \mathbf{X} 에 대해 일정한 확률분포일 경우는 정규화가 없는 경우와 같다. 확률분포 $p(\mathbf{X})$ 가 측정 오차와 같이 정규분포이면 다음과 같이 표현된다.

$$p(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{C}_X}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^T \mathbf{C}_X^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \right] \quad (3.7)$$

여기서, \mathbf{C}_X 는 시스템변수의 분포에 대한 covariance이고, n 은 시스템변수의 개수이며, \mathbf{X}_0 는 시스템변수의 평균이 되는 기저값이다. 기저값은 그 시스템변수에 대한 기존의 정보를 이용하여 정하며, 보통은 구조물의 초기 물성치를 사용한다. 시스템변수의 확률분포가 측정 오차와 같이 각 요소가 독립적이고, 그 표준편차가 동일하다고 하면, covariance 행렬 \mathbf{C}_X 도 하나의 상수로 표현할 수 있다. 이 표준편차를 σ_X 라 하면, 식 (3.7)은 다음과 같게 된다.

$$p(\mathbf{X}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_X)^n} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_X^2} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^T (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \right] \quad (3.8)$$

위에서 구한 식 (3.5), (3.6), (3.8)을 식 (3.3)에 대입하여 posterior 확률분포를

구하면 다음과 같다.

$$p(\mathbf{X}|\bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_d)^m (\sqrt{2\pi}\sigma_x)^n} \times \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{(\bar{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))^T (\bar{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))}{\sigma_d^2} + \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^T (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)}{\sigma_x^2}\right\}\right] \quad (3.9)$$

이 조건부 확률분포 $p(\mathbf{X}|\bar{\mathbf{u}})$ 를 최대화 하는 시스템변수 \mathbf{X} 는 식 (3.9)의 {}을 최대화 하는 \mathbf{X} 와 같고, 이를 정리하면 다음과 같다.

$$\text{Min}_{\mathbf{X}} \left\{ (\bar{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))^T (\bar{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X})) + \left(\frac{\sigma_d}{\sigma_x}\right)^2 (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^T (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \right\} \quad (3.10)$$

식 (3.10)은 L_2 -정규화를 Tikhonov 방법으로 도입한 경우인 식 (2.20)과 동일한 형태의 식이다. 여기서 σ_d/σ_x 가 정규화 계수 λ 와 같은 역할을 하게 된다. Tikhonov 정규화에서 정규화 계수 λ 는 정규화의 정도를 결정한다. λ 가 커질수록 정규화의 정도가 커지고 측정 변위로부터 얻은 정보의 사용을 줄이게 된다. 측정변위에 오차가 많이 포함되어 있을수록 큰 정규화 계수를 사용하여 정규화 정도를 크게 한다. 이는 식 (3.10)에서의 σ_d/σ_x 의 역할과 일치함을 알 수 있다. 측정 오차가 크다는 것은 곧 표준편차 σ_d 가 크다는 것이고, 결국 정규화 계수 λ 가 커지는 것과 같다. 측정변위로부터 얻는 정보의 신뢰도와 시스템변수에 대한 기존 정보의 신뢰도에 따라 정규화 계수가 결정되는 것이다.

보다 편차가 적고, 신뢰성 있는 정보에 비중을 두게 되는 것이다. σ_x 가 크면
 기저값 \mathbf{X}_0 에 대한 신뢰도와 정규화 계수가 작아지는데, 이는 \mathbf{X}_0 의 신뢰도가
 작은 만큼 정규화 계수도 작아져 정규화 함수의 영향을 줄여주게 되는 것이다.

실제의 문제에서 시스템변수에 대한 표준편차를 재료실험을 통해서 얻고, 측
 정 오차의 표준편차를 측정 기계에 관한 정보와 기존의 측정 변위 자료들을 통
 해서 얻는다면, 정규화 계수는 쉽게 구할 수 있게 된다.

확률분포 $p(\mathbf{X})$ 가 symmetric exponential 분포일 경우를 보겠다. 일반적인
 symmetric exponential 분포의 식은 (3.11)과 같고, 분포 형태를 정규분포와
 비교하여 그림 3.1에 나타냈다.

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma} \exp\left[-\frac{|x-x_0|}{\sigma}\right] \quad (3.11)$$

그림 3.1을 통해 정규분포와 symmetric exponential 분포의 특성을 비교해 볼
 수 있다. symmetric exponential 분포는 정규분포에 비해 평균값 부근에서 큰 밀
 도를 갖고, 평균에서 떨어진 부분에서는 비교적 낮은 밀도를 갖으면서도 보다
 넓게 분포하고 있다. 평균값 부분과 양쪽 끝부분 간의 밀도차가 정규분포에
 비해 큰 것을 볼 수 있는데, 이러한 특성은 시스템변수 추정에 그대로 적용된
 다. L_1 -정규화가 L_2 -정규화에 비해 구조물 내에 존재하는 이질의 물성치를 보
 다 뚜렷하게 구분해 주는 것과 상통하는 부분이다. 평균값 부근의 밀도가 높
 기 때문에, 측정변위에 섞여있는 오차로 인해 시스템변수가 작게 변동하는 부

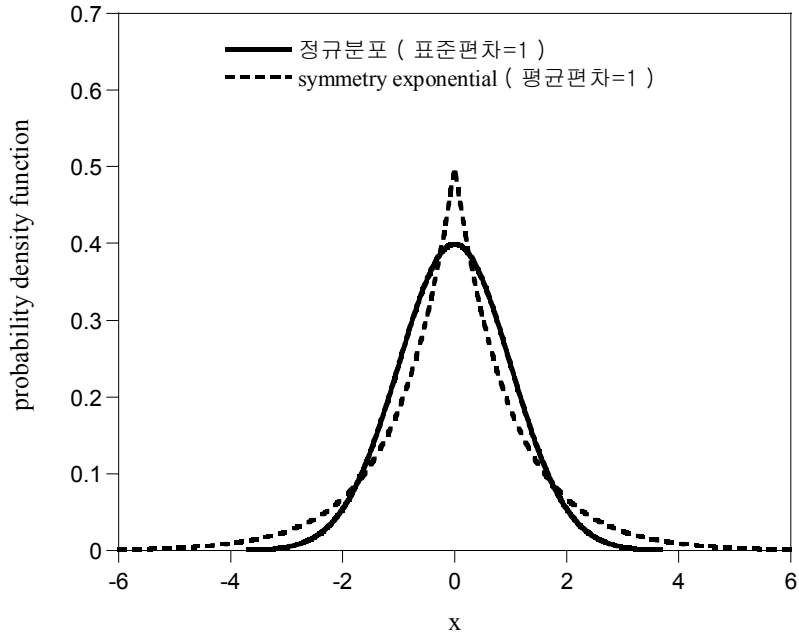


그림 3.1. 정규분포와 symmetry exponential 확률분포

분을 보다 평균값 쪽으로 잡아주는 것이다.

시스템변수의 각 요소들은 각각 독립적인 확률분포를 갖고, 그 편차가 동일하다는 가정 하에서 식 (3.11)을 시스템변수의 확률분포 $p(\mathbf{X})$ 에 적용하면 식 (3.12)와 같고, 이를 다시 식 (3.3)에 대입하여 posterior 확률분포를 구하면 식 (3.13)과 같다.

$$p(\mathbf{X}) = \frac{1}{(2\sigma_{1,X})^n} \exp \left[-\frac{1}{\sigma_{1,X}} \sum_{i=1}^n |x_i - (x_0)_i| \right] \quad (3.12)$$

$$p(\mathbf{X}|\bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_d)^m (2\sigma_{1,X})^n} \times \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(\bar{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))^T (\bar{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))}{\sigma_d^2} - \frac{1}{\sigma_{1,X}} \sum_{i=1}^n |x_i - (x_0)_i|\right] \quad (3.13)$$

여기서, $\sigma_{1,X}$ 는 동일하게 가정한 모든 시스템변수의 평균편차이다. x_i 는 시스템변수 벡터 \mathbf{X} 의 i 번째 요소이고, $(x_0)_i$ 는 x_i 의 기저값, 즉 평균값이다. 정규분포를 적용했을 때와 마찬가지로 식 (3.13)의 조건부 확률분포를 통해 maximum likelihood를 찾는 것은 식 (3.14)의 최적화 식과 같게 된다.

$$\text{Min}_{\mathbf{X}} \left\{ (\bar{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))^T (\bar{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X})) + \frac{2\sigma_d^2}{\sigma_{1,X}} \sum_{i=1}^n |x_i - (x_0)_i| \right\} \quad (3.14)$$

식 (3.14)는 L_1 -정규화를 Tikhonov 방법으로 도입한 경우와 동일한 형태의 식이다. 여기서는 $2\sigma_d^2/\sigma_{1,X}$ 가 정규화 계수 λ 에 해당한다. 정규분포를 적용했을 때와 형태는 다르지만, 편차의 비에 따라 정규화 계수가 달라지는 경향은 같다는 것을 알 수 있다.

일반적으로 구조물의 모델과 하중이 주어지면, 구조물에서 응력, 휨모멘트 등이 가장 크게 발생하는 곳을 알 수 있으며, 이를 바탕으로 손상이 가장 먼저 발생할 부재를 예측하고 손상이 발생할 확률이 큰 부분과 작은 부분을 구분할 수 있을 것이다. 이러한 손상 시나리오를 이용하면, 각 부재마다 다른 값의 포

준편차 σ_x , 평균편차 $\sigma_{1,x}$ 를 적용할 수 있다. 손상이 발생할 확률이 큰 부재의 시스템변수에는 큰 표준편차, 또는 평균편차의 확률분포를 적용하고, 손상 발생 확률이 작은 부재의 시스템변수에는 작은 표준편차, 또는 평균편차의 확률분포를 적용하는 것이다. 이는 모든 시스템변수에 똑같은 정규화를 적용하는 것이 아니라, 시스템변수에 따라 정규화 정도를 다르게 주는 것으로, 손상 발생 확률이 큰 부재일수록 정규화의 정도를 줄여주는 것이다. 이 경우에 정규분포를 적용하면, 식 (3.7)의 행렬 \mathbf{C}_x 가 각기 다른 값으로 구성되는 대각행렬이 된다.

3.2 Log-Normal 분포를 갖는 시스템변수의 추정

실제 구조물의 물성치는 음수가 될 수가 없다. L_1 -정규화 또는 L_2 -정규화를 적용하는 최소 자승오차법의 시스템확인기법에서는 이러한 특성을 시스템변수에 대한 구속조건으로 나타낸다. 이는 확률적인 관점에서 볼 때, 정규분포 또는, symmetric exponential 확률분포의 일정 부분만을 사용하게 되는 것이며, 정해진 확률분포의 정보를 일부 손실한다고 볼 수 있다. 또한, 그 정해진 확률분포가 실제적으로 시스템변수의 특성을 잘 나타내지 못하는 것이라 볼 수 있다.

Log-normal 확률분포는 확률변수가 양수인 영역에서만 정의되는 확률분포이다. 따라서, log-normal 확률분포를 사용할 경우, 별도의 구속조건이 필요없게 된다.

손상 발생의 가능성이 있는 부재의 물성치에 대한 확률분포로는 기저값을 중심으로 대칭인 확률분포보다는 비대칭인 확률분포를 적용하는 것이 적절할 것이다. Log-normal 확률분포는 확률변수가 0 인 쪽으로 치우친 비대칭 분포이므로 대칭분포인 정규분포와는 다른 효과를 기대해 볼 수 있다.

식 (3.15)는 log-normal 확률분포를 나타내며 그 분포 형태는 그림 3.2 와 같다.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi sx}} \exp \left[-\frac{1}{2s^2} \left(\ln \frac{x}{x_0} \right)^2 \right] \quad (3.15)$$

여기서 s 는 $\ln x$ 의 표준편차이며, 이 값의 크기에 따라 확률분포의 치우침 정도가 달라진다. 그림 3.2에서 보듯이 s 가 커질수록 확률변수가 0인 방향으로 많이 치우친 형태가 되며, 작아질수록 정규분포와 같은 형태가 된다. 이 확률분포를 시스템변수 \mathbf{X} 에 대한 분포에 적용하여, posterior 확률분포를 구하면

exponential 함수 바깥쪽에 시스템변수 \mathbf{X} 에 관한 항, $\left(\prod_{i=1}^n 1/x_i \right)$ 이 있어서 최

종 최적화 식을 간략화 하기가 어렵다. 이를 해결하기 위해 시스템변수를

$y_i = \ln x_i$ 인 $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 로 치환한다. Log-normal 확률분포의 정의에 의

하여, \mathbf{Y} 는 정규분포를 따르게 된다[21]. \mathbf{X} 와 \mathbf{Y} 는 서로 하나가 정해지면 다

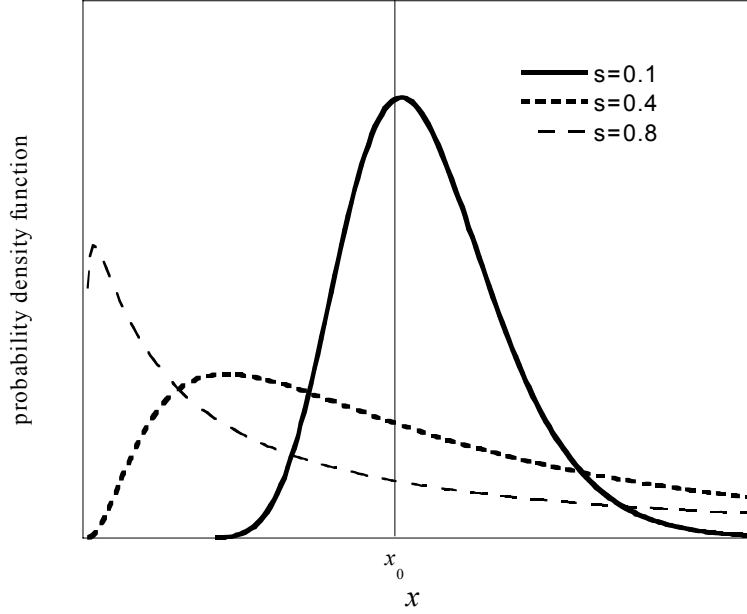


그림 3.2 Log-normal 분포의 형태

른 하나가 정해지는 것이므로 식 (3.16)이 성립하며, \mathbf{Y} 에 대한 조건부 확률분포와 최종 최적화 식은 식 (3.17), (3.18)과 같다.

$$\text{Max}_{\mathbf{X}} p(\mathbf{X} | \bar{\mathbf{u}}) = \text{Max}_{\mathbf{Y}} p(\mathbf{Y} | \bar{\mathbf{u}}) \quad (3.16)$$

$$p(\mathbf{Y} | \bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}s)^n} \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_D)^m} \times \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_D^2} (\bar{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(e^{\mathbf{Y}}))^T (\bar{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(e^{\mathbf{Y}})) - \frac{1}{2s^2} (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)^T (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) \right] \quad (3.17)$$

$$\text{Min}_{\mathbf{Y}} \left[(\bar{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(e^{\mathbf{Y}}))^T (\bar{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(e^{\mathbf{Y}})) + \left(\frac{\sigma_D}{s} \right)^2 (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)^T (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) \right] \quad (3.18)$$

여기서, $e^Y = (e^{y_1}, e^{y_2}, \dots, e^{y_n})$ 이고, $Y_0 = \ln X_0$ 이다. 식 (3.18)에서 두 항의 단위가 다르기 때문에, 각 항을 기준화해야 한다. 첫번째 항은 측정변위 벡터의 norm 으로 기준화 하고, 두번째 항은 시스템변수의 기저 벡터인 Y_0 로 기준화 한다. 이 최적화 문제는 시스템변수에 대한 비선형 최적화 문제이기 때문에, 선형화 하여서 다음과 같은 이차 종속 문제로 바꾸어 푼다.

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\Delta Y} \left[\left(\Delta Y_n^T (\mathbf{H}_Y)_{k-1} \Delta Y_n - 2\Delta Y_n^T (\mathbf{S}_Y)_{k-1}^T \mathbf{U}_{k-1}^r \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{\sigma_D}{s} \right)^2 \left(\Delta Y_n^T \Delta Y_n - 2\Delta Y_n^T (\mathbf{1} - Y_n) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

여기서, Y_n 은 Y 를 Y_0 으로 기준화 한 것이고, $(\mathbf{S}_Y)_{k-1}$ 는 $\tilde{\mathbf{U}}_{k-1}$ 의 Y 에 대한 민감도 행렬이며, $(\mathbf{H}_Y)_{k-1}$ 은 식 (3.18)에서 측정 오차 부분인 첫번째 항의 Hessian 행렬이다. 이 Hessian 행렬은 Gauss-Newton Hessian에 의해 민감도 행렬의 곱 $(\mathbf{S}_Y)_{k-1}^T (\mathbf{S}_Y)_{k-1}$ 로 근사하여 사용한다.

3.3 모델링 오차의 정식화

기존의 결정론적 SI 방법에서는 모델링 오차를 측정 오차의 일부로 생각하여 별도의 필터링 기법이 존재하지 않았다. 그러나, 모델링 오차는 시스템 내부의 유기적인 관계를 갖고 발생하는 것이므로 무작위 오차인 측정 오차와 같이 고

려하는 것은 적절하지 않다. 모델링 오차는 해석을 하기 위해 실제 구조물을 이상화 하여 모델을 만드는 과정에서 발생하는 것으로, 측정 오차보다 큰 오차를 포함할 수 있다.

모델링 오차에 관한 정보는 조건부 확률 $p(\mathbf{u}|\mathbf{X})$ 로 표현된다. 복잡한 모델링 오차를 간단한 확률분포로 정확하게 묘사하기는 힘들지만, 측정 오차와 같이 정규분포일 경우에 대하여 식을 전개해 보겠다. 모델링 오차는 $p(\mathbf{u}|\mathbf{X})$ 에서 실제 구조물의 변위와 모델을 통해 계산한 변위 간의 차이인 $(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))$ 로 정의되며, 그 분포가 정규분포일 경우 다음과 같이 표현된다.

$$p(\mathbf{u}|\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{C}_m}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))^T \mathbf{C}_m^{-1}(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))\right] \quad (3.20)$$

여기서, \mathbf{C}_m 은 모델링 오차의 covariance 행렬이다. 모델링 오차는 측정 오차와 달리 covariance 행렬을 하나의 상수로 간략화 할 수가 없다. 각 변위 요소들 간에는 시스템을 통한 유기적인 관계가 있어서 벡터 $(\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))$ 의 각 성분이 서로 독립적이지 않기 때문이다. 모델링 오차를 시스템변수에 대한 정규분포로 표현할 수 있을 경우, 이 확률분포를 시스템변수와 변위 간의 선형 관계식을 이용하여 변위에 대한 정규분포로 변환할 수 있다.

식 (2.1)에서 모델링 오차가 발생할 수 있는 부분은 강성 \mathbf{K} 와 하중 \mathbf{P}_i 로 나누어 생각할 수 있다. 실제로는 강성의 모델링 오차와 하중의 모델링 오차가

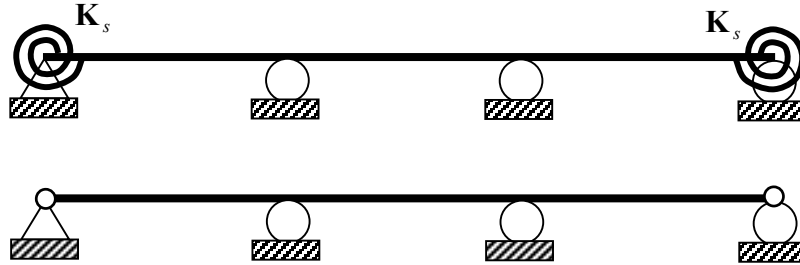


그림 3.3 모델링 오차의 정의 - 경계조건의 차이

동시에 발생하겠지만, 여기서는 각각의 모델링 오차가 독립적으로 발생한다고 가정하여, 하나씩 살펴보겠다.

강성 \mathbf{K} 의 모델링 오차로서 경계조건의 이상화를 생각해 볼 수 있다. 해석 모델에 사용되는 힌지는 실제 구조물에서는 존재하지 않는다. 회전강성이 0 인 지점은 실제로는 없는 것이다. 여기서 모델링 오차가 발생하게 된다. 회전강성이 0 이 아닌 부분을 회전강성이 0 인 힌지로 모델링 함으로써 발생하는 오차인 것이다. 이러한 모델링 오차를 그림 3.3 과 같이 힌지인 지점과 회전스프링이 있는 지점 간의 차이로 정의한다. 그림 3.3 에서 \mathbf{K}_s 는 회전스프링의 강성이다.

계산변위 $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X})$ 는 식 (3.21)과 같이 \mathbf{K}_s 에 대해 선형화할 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \mathbf{S}_s (\mathbf{K}_s - (\mathbf{K}_s)_m) = \mathbf{u} + \mathbf{S}_s \Delta \mathbf{K}_s \quad (3.21)$$

$$\mathbf{e}_m = \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u} = \mathbf{S}_s \Delta \mathbf{K}_s \quad (3.22)$$

여기서, \mathbf{S}_s 는 계산변위에 대한 회전강성 \mathbf{K}_s 의 민감도 행렬이고, $(\mathbf{K}_s)_m$ 는 회전강성에 대한 확률분포의 평균값이다. \mathbf{e}_m 는 계산변위와 실제변위의 차이로서 모델링 오차를 나타내는 벡터이다. 식 (3.20)은 식 (3.22)의 모델링 오차 벡터 \mathbf{e}_m 에 대한 정규분포이므로, \mathbf{C}_m 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_m &= E(\mathbf{e}_m \mathbf{e}_m^T) - E(\mathbf{e}_m)(E(\mathbf{e}))^T = E(\mathbf{e}_m \mathbf{e}_m^T) \\ &= E(\mathbf{S}_s \Delta \mathbf{K}_s \Delta \mathbf{K}_s^T \mathbf{S}_s^T) = \mathbf{S}_s E(\Delta \mathbf{K}_s \Delta \mathbf{K}_s^T) \mathbf{S}_s^T\end{aligned}\quad (3.23)$$

\mathbf{K}_s 의 확률분포가 평균이 $(\mathbf{K}_s)_m$ 인 정규분포일 경우, $\Delta \mathbf{K}_s$ 의 확률분포는 평균이 0 인 정규분포가 된다. 따라서, $\Delta \mathbf{K}_s$ 의 선형함수인 \mathbf{e}_m 의 확률분포도 평균이 0 인 정규분포가 되어 $E(\mathbf{e}_m)$ 은 0 이 된다. 여기서, $\Delta \mathbf{K}_s$ 의 각 성분이 독립적이면, 식 (3.23)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{S}_s \text{diag}(\text{Var}(\Delta k_{s,i})) \mathbf{S}_s^T \quad (3.24)$$

여기서, $\Delta k_{s,i}$ 는 벡터 $\Delta \mathbf{K}_s$ 의 i 번째 요소이다. 각 스프링의 회전강성에 대한 분산값을 알면 식 (3.24)를 통해서 \mathbf{C}_m 을 구할 수 있다.

하중을 모델링 할 때는 하나의 정해진 값만을 사용한다. 그러나, 구조물에 재하되는 실제 하중의 크기는 정확히 알 수가 없기 때문에, 해석 모델에서 사용하는 하중과 실제 하중 간에 오차가 발생하게 된다. 실제 하중의 확률분포

가 정규분포일 경우에 하중의 모델링 오차를 정식화 하기 위하여, covariance 행렬 \mathbf{C}_m 을 구하는 과정을 보겠다.

실제 하중 \mathbf{P} 는 다음과 같이 두 개의 하중으로 나눌 수 있다.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_m + \mathbf{P}_e \quad (3.25)$$

여기서, \mathbf{P}_m 는 하중의 평균값으로 모델에 사용하는 하중이고 \mathbf{P}_e 는 모델링 오차를 발생시키는 실제 하중과 모델 하중 간의 차이이다. 이 경우 모델링 오차를 나타내는 \mathbf{e}_m 은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{e}_m = \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u} = -\mathbf{AK}^{-1}\mathbf{P}_e \quad (3.26)$$

여기서, \mathbf{A} 는 모든 자유도에 대한 변위 벡터를 측정된 자유도에 대한 변위 벡터로 변환해주는 행렬이다. 식 (3.26)을 이용하여 \mathbf{C}_m 을 구하면 식 (3.27)과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_m &= E(\mathbf{e}_m \mathbf{e}_m^T) - E(\mathbf{e}_m) \{E(\mathbf{e}_m)\}^T = E(\mathbf{e}_m \mathbf{e}_m^T) \\ &= \mathbf{AK}^{-1} E(\mathbf{P}_e \mathbf{P}_e^T) (\mathbf{K}^{-1})^T \mathbf{A}^T = \mathbf{AK}^{-1} \text{diag}(\text{Var}(p_{e,i})) (\mathbf{K}^{-1})^T \mathbf{A}^T \end{aligned} \quad (3.27)$$

여기서, $p_{e,i}$ 는 \mathbf{P}_e 의 i 번째 요소이며, 각 요소는 서로 독립적이라는 가정이 전제되어 있다.

경계조건의 모델링 오차와 하중의 모델링 오차를 $(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))$ 의 정규분포로 나타내고, 그 covariance 행렬의 정식화 과정을 보았다. 식 (3.20)의 정규분포에 식 (3.24) 또는 (3.27)의 covariance 행렬 \mathbf{C}_m 을 적용하고, 측정 오차를 나타내는 조건부 확률분포 $p(\bar{\mathbf{u}}|\mathbf{u})$ 와 시스템변수의 확률분포 $p(\mathbf{X})$ 를 모두 정규분포로 가정할 경우, 식 (3.3)의 posterior 확률분포를 구하면 식 (3.28)과 같다.

$$p(\mathbf{X}|\bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det \mathbf{C}_m}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det \mathbf{C}_d} (\sqrt{2\pi} \sigma_x)^n} \times \exp \left[-\frac{1}{2} (\bar{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))^T \mathbf{C}_D^{-1} (\bar{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X})) - \frac{1}{2\sigma_x^2} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^T (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \right] \quad (3.28)$$

여기서, $\mathbf{C}_D = \mathbf{C}_d + \mathbf{C}_m$ 이다[21]. 식 (3.28)에서는 정규화 정도를 정규화 계수로 표현하지 못한다. σ_x 와 \mathbf{C}_D^{-1} 을 통해서 정규화 정도가 결정된다. 측정 오차는 σ_x 와 \mathbf{C}_d 에 의해서 필터링 되고, 모델링 오차는 σ_x 와 \mathbf{C}_m 에 의해서 필터링 되는 것이다. 식 (3.28)의 조건부 확률분포를 최대화 하는 문제는 다음과 같은 최적화 문제로 간략화 된다.

$$\text{Min}_{\mathbf{X}} \left\{ (\bar{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))^T \mathbf{C}_D^{-1} (\bar{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X})) + \frac{1}{\sigma_x^2} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^T (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \right\} \quad (3.29)$$

이 최적화 문제는 비선형 최적화 문제이므로, 다음과 같이 선형화 한 이차 종속 문제로 바꾸어서 푼다.

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mathbf{X}} \left[(\Delta \mathbf{X}^T \mathbf{S}_{k-1}^T \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{S}_{k-1} \Delta \mathbf{X} - 2 \Delta \mathbf{X}^T \mathbf{S}_{k-1}^T \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{u}_{k-1}^r) \right. \\ \left. + \{ \Delta \mathbf{X}^T \mathbf{C}_X^{-1} \Delta \mathbf{X} - 2 \Delta \mathbf{X}^T \mathbf{C}_X^{-1} (\mathbf{X}_0 - \mathbf{X})^T \} \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

여기서, $\mathbf{u}_{k-1}^r = \tilde{\mathbf{u}}_{k-1} - \bar{\mathbf{u}}_{k-1}$ 이다. 식 (3.30)의 최적화에서는 변위와 시스템변수에 대한 별도의 기준화가 필요하지 않다. 목적함수의 첫번째 항인 오차함수에 대한 부분은 \mathbf{C}_D^{-1} 에 의해 기준화가 되고 있고, 두번째 항인 시스템변수에 대한 부분은 \mathbf{C}_X^{-1} 에 의해 기준화가 되고 있는 것이기 때문이다.

4. 예제

4.1 Log-Normal 분포를 이용한 정규화의 효과

시스템변수에 대한 확률분포로 log-normal 확률분포를 적용했을 때의 결과를 평면응력 상태의 2차원 판 예제를 통하여 살펴보겠다.

측정된 변위 자료를 이용하여 판의 탄성계수를 추정하는 문제이다. 해석은 유한요소법을 이용하였고, 각 요소 그룹의 탄성계수를 시스템변수로 정하였다. L_2 -정규화 함수를 Tikhonov 정규화 기법으로 적용하고, 정규화 계수를

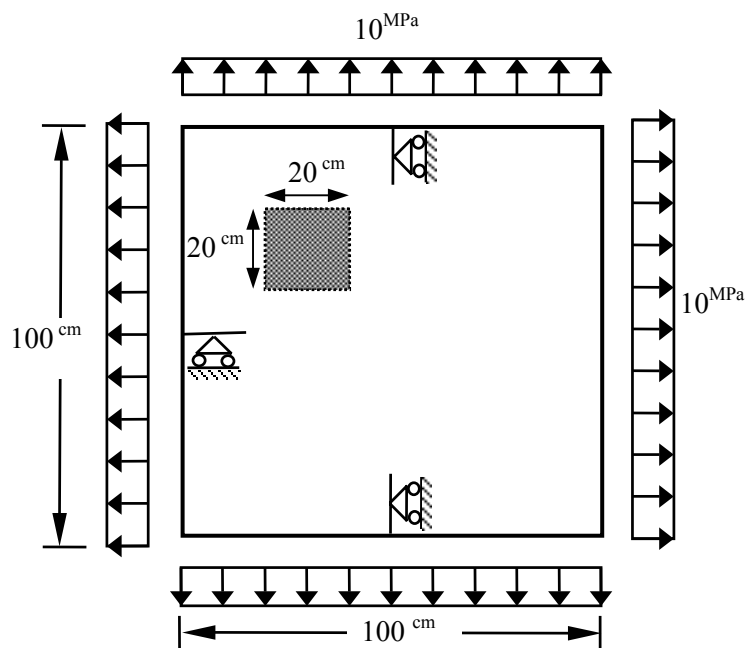


그림 4.1 정사각형 판의 형상과 경계조건 및 하중조건

GMS로 결정했을 때의 결과와 비교하였고, 이 과정에서 사용한 구속조건은 다음과 같다.

$$0.1 \text{ GPa} \leq x \leq 630 \text{ GPa} \quad (4.1)$$

Log-normal 분포를 적용할 때, 식 (3.19)에서의 $(\sigma_D/s)^2$ 는 GMS를 이용하여 구하였다.

모델 형상과 하중조건, 경계조건 등은 그림 4.1과 같다. 어두운 정사각형 부분이 함유체를 나타낸다. 정사각형 판의 탄성계수로는 강재의 탄성계수인 210 GPa을 이용하였고, 함유체가 알루미늄(70GPa)일 때와 텅스텐(380GPa)일 때의 두 가지 경우를 고려한다.

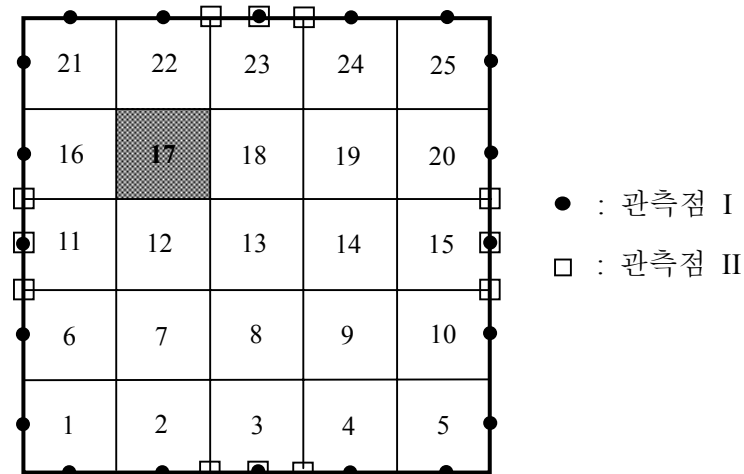


그림 4.2 관측점과 요소 그룹

경계에 있는 관측점에서 변위를 측정하며, 그림 4.2에서의 검은색 점에 해당하는 관측점 I과 작은 정사각형에 해당하는 관측점 II의 두 가지 관측점을 고려한다. 각 관측점에서 x 방향과 y 방향의 변위를 모두 측정한다고 가정하며, x 방향 인장 하중과 y 방향 인장 하중의 두 가지 하중조건에 대해서 측정한다. 따라서, 관측점 개수의 4배 만큼의 측정값이 주어진다. 유한요소법으로 해석한 결과인 계산변위에 인위적으로 측정 오차를 더함으로써 측정변위를 만들어 사용한다. 관측점 I 에 대해서는 5%, 관측점 II 에 대해서는 1% 크기의 측정 오차를 이용한다.

유한요소 모델은 100개의 8절점 요소로 구성되고, 그림 4.2와 같이 25개의 요소 그룹으로 이루어져 있다. 따라서, 25개의 탄성계수를 추정하는 문제가 된다.

4.1.1 관측점 I

판의 각 경계면에 일정한 간격으로 배치된 5 개의 관측점을 두어 총 20 곳의 관측점을 이용하였다. 각 관측점에서 x 방향과 y 방향, 두 개의 변위를 측정하고, 두 개의 하중조건에 대해 측정하므로 총 80 개의 측정변위를 사용하는 것이다.

그림 4.3 은 함유체가 알루미늄일 때의 결과이다. 시스템변수의 확률분포로 log-normal 확률분포를 적용했을 때의 결과와 GMS 로 정규화 계수를 결정한 L_2 -정규화에 의한 결과를 비교하였다. 즉, 기존 지식에 의한 시스템변수의 확률분포로 log-normal 분포와 정규분포를 사용했을 때의 결과를 비교한 것이다. 그

림 4.3 에서 정규분포에 의한 결과가 log-normal 분포에 의한 결과보다 더 좋다는 것을 직관적으로 알 수 있다. log-normal 분포에 의한 결과에서 함유체의 위치와 탄성계수의 값은 잘 추정되고 있으나, 함유체 이외의 부분에서 탄성계수 값이 측정 오차에 의해 비교적 크게 진동하고 있음을 볼 수 있다.

이 시뮬레이션에 이용된 측정 오차의 표준편차와 GMS 로 결정된 $(\sigma_D/s)^2$ 의 값을 알고 있으므로, 시스템변수의 표준편차를 역으로 구할 수가 있다. 정규분포를 사용했을 경우, 기저값 \mathbf{X}_0 로 기준화 한 시스템변수의 표준편차는 반복 단계별로 3.08, 0.73, 0.80, 0.79, 0.79 이다. 또한, log-normal 분포를 적용했을 경

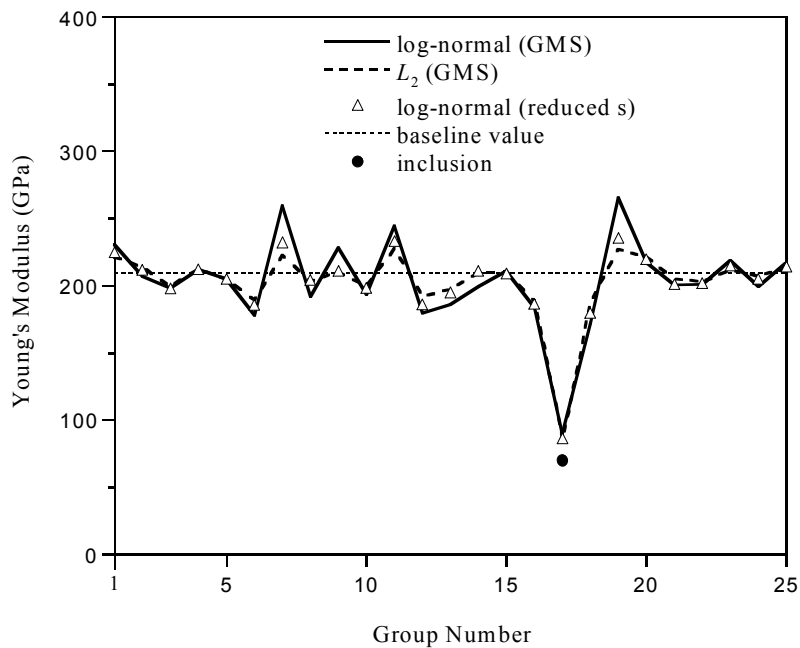


그림 4.3 알루미늄 함유체 예제의 결과 - 관측점 I

우, Y_0 로 기준화 한 시스템변수 Y 의 표준편차 s 는 반복단계별로 3.09, 0.71, 0.71, 0.72이다. s 값을 줄여가면, 그림 4.3에서와 같이 정규분포의 결과와 거의 비슷한 결과를 도출한다. 이때의 기준화 된 Y 의 표준편차는 0.34, 0.28, 0.29, 0.28, 0.29, 0.28, 0.28, 0.28이다. s 값이 줄어들면, log-normal 분포의 형상은 표준편차가 매우 작은 정규분포의 형상을 갖게 된다. 따라서, 값이 줄어들면 그 결과가 정규분포의 결과와 비슷해지는 것이다. 비선형 문제를 선형화 하는 과정에서 발생하는 오차의 변화로 인해 GMS 값이 반복단계 별로 달라지게 되며, 첫 번째 단계에서 크게 변화한 후로는 거의 일정한 값을 유지한다.

함유체가 텅스텐일 때의 결과는 그림 4.4와 같다. 알루미늄 함유체와는 달리, log-normal 분포에 의한 결과가 더 좋다는 것을 직관적으로 알 수가 있다. 함유체인 텅스텐의 탄성계수 값을 보다 정확하게 추정하고 있다. GMS로 표준편차의 비를 결정했을 때의 기준화 된 시스템변수의 표준편차는, 정규분포의 경우 반복단계별로 2.29, 1.13, 1.54, 1.40, 1.45, 1.44, 1.44이고, log-normal 분포의 경우에는 2.91, 0.98, 1.02, 1.02, 1.02이다. 알루미늄 함유체의 경우에 비해 log-normal 분포의 s 값이 큰 것을 알 수 있고, 이는 시스템변수가 0에 가까운 방향으로 많이 치우친 형태의 확률분포일 때, 큰 탄성계수의 함유체를 잘 식별해 내고 있음을 알 수가 있다.

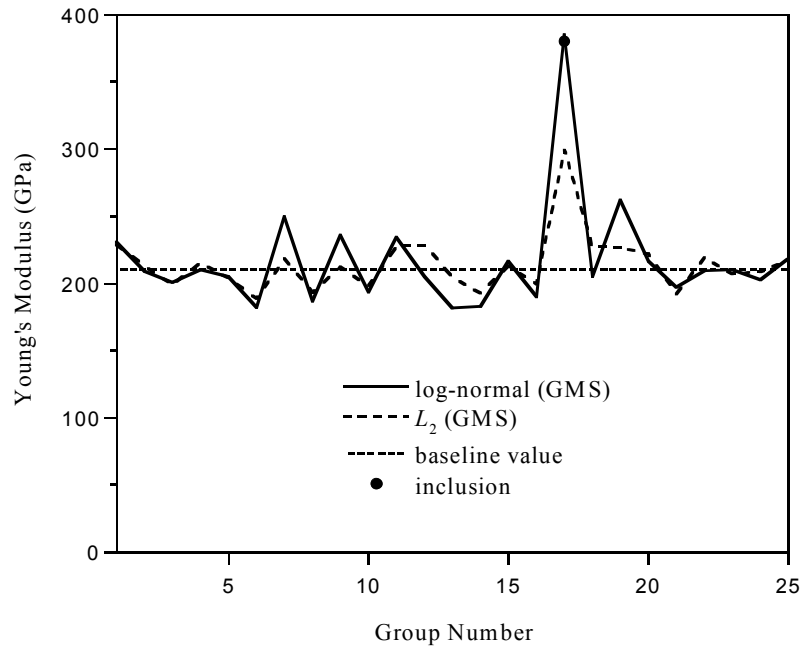


그림 4.4 텅스텐 함유체 예제의 결과 - 관측점 I

4.1.2 관측점 II

관측점 I 에 비해서 관측점의 수가 8개 줄었으며, 전체적으로 측정변위가 32 개 줄었다. 또한 관측점들이 서로 모여있는 형태이기 때문에, 관측점 I에 비해 각각의 측정변위가 주는 정보들의 독립성이 줄어들게 된다.

그림 4.5 는 함유체가 알루미늄일 때의 결과이다. 측정치의 부족에도 불구하고 모두 함유체의 위치와 탄성계수의 크기를 비교적 정확하게 추정하고 있다. log-normal 에 의한 결과가 L_2 에 의한 결과보다 함유체가 아닌 부분에서 기저값을 중심으로 진동하는 현상이 더 크게 나타나고 있으나, 그 차이가 관측점 I의

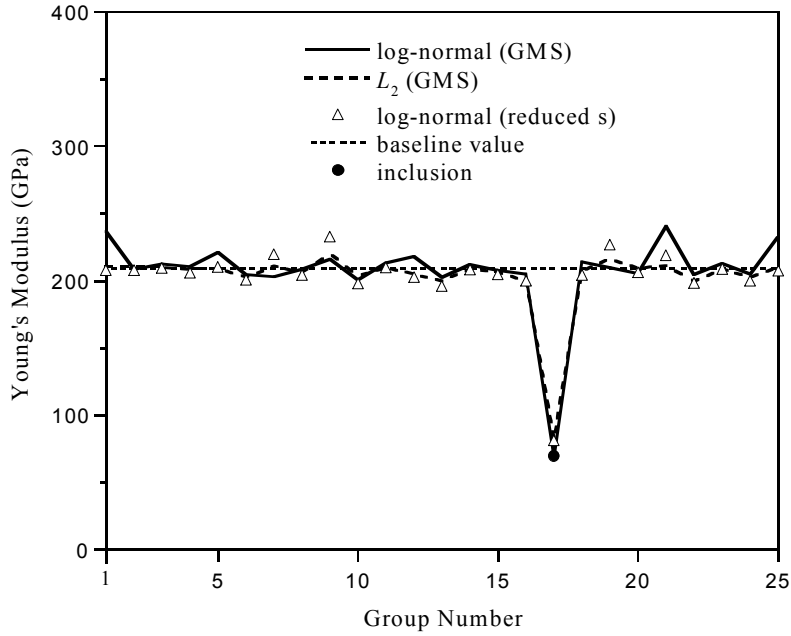


그림 4.5 알루미늄 함유체 예제의 결과 - 관측점 II

결과에 비하여 작아졌음을 볼 수 있다. GMS 에 의해 결정된 정규분포의 표준편차는 1.68, 0.26, 0.26, 0.26 이고, log-normal 분포의 s 는 1.68, 0.25, 0.25, 0.25 이다. 그리고, s 를 줄여서 0.15, 0.13, 0.14, 0.13, 0.13, 0.13 가 되었을 때, 정규분포와 거의 같은 결과를 보이고 있다.

관측점 I 에 대한 결과와 같이 log-normal 분포는 텅스텐 함유체의 문제에서 보다 좋은 결과를 보여주고 있다. GMS 로 표준편차의 비를 결정하였을 경우, 정규분포의 표준편차는 1.53, 0.44, 0.50, 0.48, 0.49 이고, log-normal 분포의 s 는 1.53, 0.40, 0.40 이다. 그림 4.6 를 보면, log-normal 분포를 적용했을 때 텅스텐의 탄성계수를 보다 정확하게 추정하고 있음을 볼 수 있다.

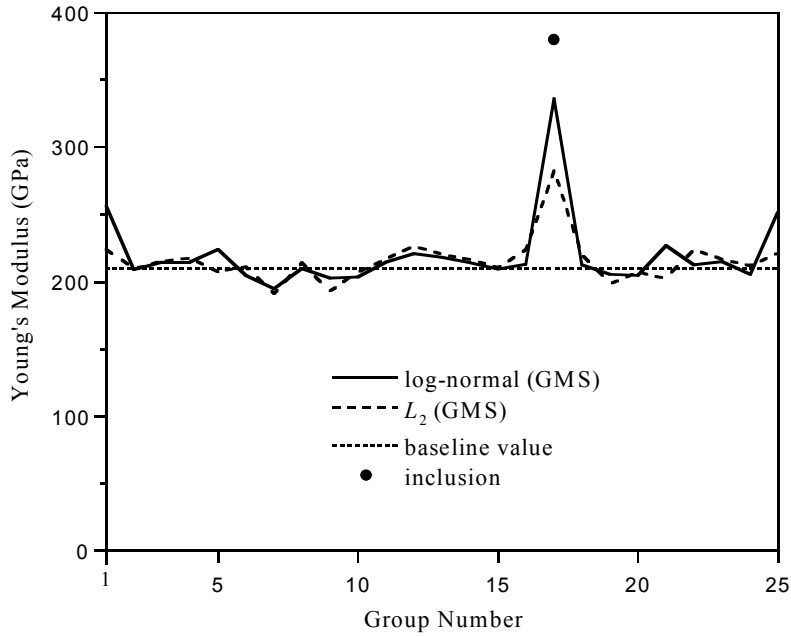
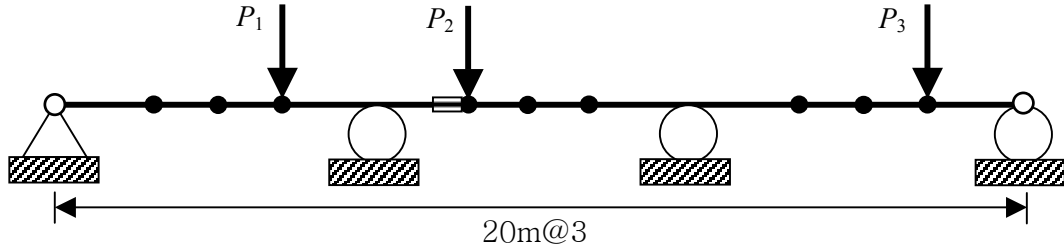


그림 4.6 텅스텐 함유체 예제의 결과 - 관측점 II

4.2 모델링 오차의 필터링

측정 오차와 함께 모델링 오차도 고려하는 예제를 보겠다. 그림 4.7 의 3 경간 들보를 예제 모델로 사용하였다. 한 경간의 길이는 20m 이고, 각 경간은 10 개의 부재로 모델링 하였다. 관측점은 한 경간에 3 개씩, 총 9 개의 관측점을 두었고, 각 관측점에서의 수직변위만을 이용하였다. 들보의 휨강성인 EI 값을 시스템변수로 정하여 추정하였다. 손상이 없는 부재의 EI 값은 $420 (10^6 \text{ kN}\cdot\text{m}^2)$, 손상이 있는 부재는 EI 값은 $140 (10^6 \text{ kN}\cdot\text{m}^2)$ 으로 하였다.



≡ : 손상된 부재(13번 부재) ● : 관측점

그림 4.7 3경간 모델 형상과 관측점 및 손상 위치

4.2.1 경계조건의 모델링 오차

그림 4.7의 모델에서 양쪽 끝의 지점들은 모두 힌지에 해당한다. 힌지로 이상화 하는 과정에서 발생하는 모델링 오차를 식 (3.24)의 C_m 을 식 (3.28)에 적용하여 필터링 한다. 양 끝단 지점의 회전강성이 0 이 아닐 때의 측정변위가 주어졌을 때, 모든 부재의 휨강성 EI 를 양 끝단의 지점의 회전강성이 0인 힌지 모델을 이용하여 추정하는 문제이다.

하중 P_1, P_2, P_3 은 모두 5kN으로 하였고, 측정 오차가 1%인 경우와 5%인 경우에 대하여 수행하였다. 시스템변수의 확률분포 $p(\mathbf{X})$ 의 표준편차 σ_x 는 휨강성 기저값의 10%인 42 ($10^6 \text{ kN}\cdot\text{m}$)로 정하였다. 회전강성에 대한 정규분포의 평균인 $(\mathbf{K}_s)_m$ 도 마찬가지로 기저값의 10%인 42 ($10^6 \text{ kN}\cdot\text{m}$)로 하였고, 표준편차 σ_s 는 4.2 ($10^6 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$)로 하였다. 측정변위는 스프링 강성이 평균값으로부터 표

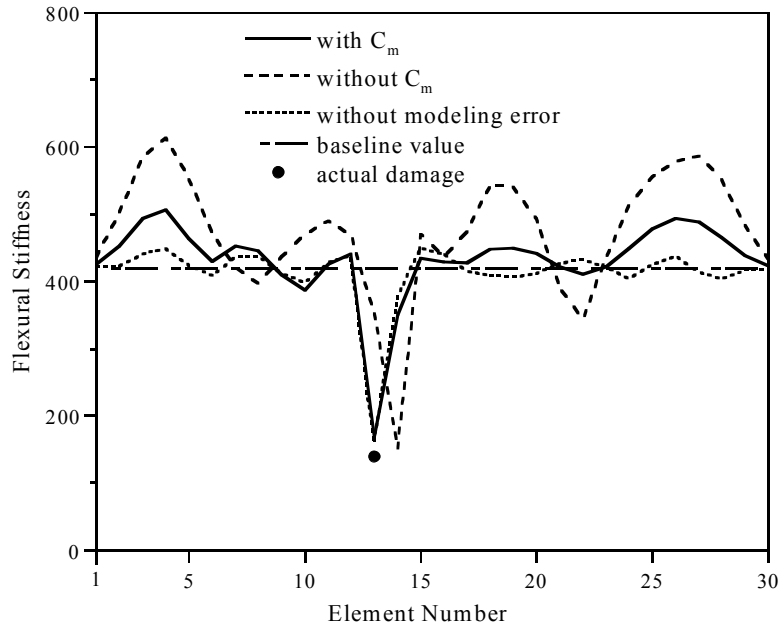


그림 4.8 경계조건의 모델링 오차에 따른 역해석 결과 (측정오차 1%)

준편차 만큼 떨어져 있는 값인 $(\mathbf{K}_s)_m - \sigma_s$ 일 때의 모델로부터 계산된 변위에 인위적으로 오차를 더한 값으로 시뮬레이션 하였다. 이는 역해석의 결과에서 강성이 실제보다 작게 평가되는 효과를 나타내게 된다. 역해석 과정에서는 회전스프링이 없는 힌지의 모델을 그대로 사용하였다.

그림 4.8 과 4.9 는 각각 측정오차가 각각 1%, 5%일 때의 역해석 결과이다. C_m 을 이용하지 않은 경우의 결과에서 손상이 없는 부재들의 휨강성 값들이 기저값을 중심으로 매우 크게 진동하고 있는 것을 볼 수 있다. 이 진동 현상은 C_m 을 고려한 결과에서 많이 사라지고 있다. 모델링 오차가 없는 경우의

결과는 역해석을 할 때에도 측정치를 만들 때 사용한 모델과 같은 모델을 이용한 결과이다. 즉, $(\mathbf{K}_s)_m - \sigma_s$ 의 회전강성을 갖는 회전스프링이 양쪽 끝 지점에 있는 모델을 이용한 결과로서 L_2 -정규화로부터 얻을 수 있는 최상의 결과이다. 즉, 지점의 회전강성을 정확하게 알고 있을 경우로서 측정 오차만 포함되어 있는 결과이다. 이와 비교해 보면, \mathbf{C}_m 을 고려하여도, 손상이 없는 부재에서 불안정하게 진동하는 현상이 모델링 오차가 없는 경우의 결과보다는 크게 나타나고 있다. 그러나, 분명한 것은 \mathbf{C}_m 을 고려하지 않았을 때의 결과는 측정 오차보다 모델링 오차의 영향이 지배적이며, 이 모델링 오차에 의한 불안정성은 \mathbf{C}_m

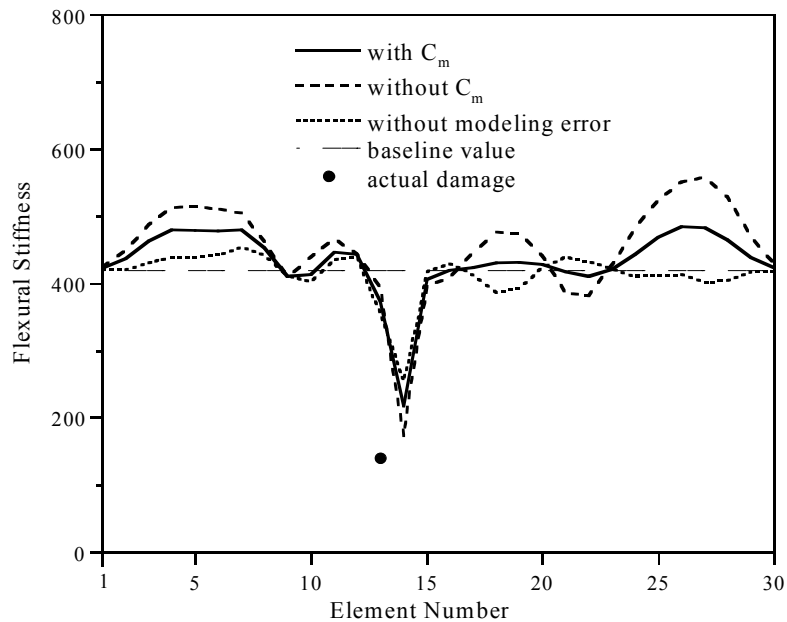


그림 4.9 경계조건의 모델링 오차에 따른 역해석 결과 (측정오차 5%)

을 고려함으로써 현저하게 줄어들어 측정 오차만이 남아있는 결과와 가까워졌다는 것이다. 회전강성의 표준편차에 대한 정보를 포함하고 있는 C_m 을 통해서 모델링 오차가 필터링 되어 보다 향상된 결과를 도출하고 있음을 알 수 있다.

L_1 -정규화를 이용하면 손상부분을 보다 뚜렷하게 찾아주고 손상이 없는 부분의 진동 현상을 줄여주는 효과를 볼 수 있을 것이며, 신뢰성 있는 손상 시나리오가 있을 경우, 그것을 바탕으로 각 시스템변수의 표준편차를 다르게 부여함으로써 보다 좋은 결과를 도출할 수 있을 것이다.

4.2.2 하중의 모델링 오차

하중의 모델링 오차에 관한 예제를 보겠다. 식 (3.27)의 C_m 을 식 (3.28)에 적용하여 하중의 모델링 오차를 필터링 한다.

그림 4.7 의 3 개 모델 하중에 대한 확률분포의 평균은 5kN, 표준편차는 0.5kN 으로 하였다. 모델 하중으로는 평균값을 이용하였고, 측정변위는 하중이 4.5kN 일 때의 모델로부터 계산된 변위에 인위적으로 오차를 더해준 값으로 시뮬레이션 하였다. 즉, 하중을 세 개의 5kN 집중하중으로 모델링 하였는데, 실제의 하중은 4.5kN 일 때의 역해석 결과를 보는 것이다. 이와 같이 실제 하중이 P_e 가 -0.5kN 일 때인 4.5kN 의 하중으로 시뮬레이션한 것은 역해석의 결과에서 강성이 크게 평가되는 효과를 보기 위한 것으로 4.2.1 절의 예제와 반대의

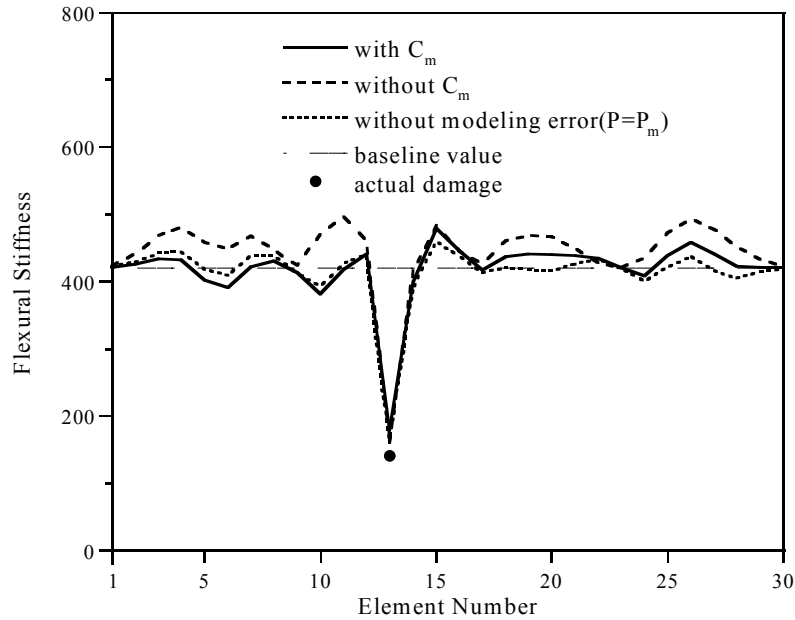


그림 4.10 하중의 모델링 오차에 따른 역해석 결과 (측정오차 1%)

효과를 볼 수 있게 된다. 시스템변수의 확률분포 $p(\mathbf{X})$ 의 표준편차 σ_x 는 손상이 없을 때의 값인 기저값의 10%로 정하였으며, 측정오차가 1%, 5%인 경우에 대해 실행하였다.

그림 4.10 과 4.11 는 각각 측정오차가 1%, 5%일 때의 역해석 결과이다. 측정오차가 1%일 때의 결과를 보면, 손상부재의 위치와 휨강성 값은 C_m 를 고려했을 때와 고려하지 않았을 때의 결과가 모두 비슷하다. 그러나 C_m 을 고려하지 않은 경우의 결과에서는 손상이 없는 부재들의 휨강성 값들이 기저값의 위쪽으로 치우쳐져 있는 것을 볼 수 있다. 이 현상은 하중의 모델링 오차에 의한 것

으로 앞에서 예상했던 바와 같이 측정변위를 발생시키는 실제 하중이 모델 하중보다 작기 때문에, 강성이 크게 평가되고 있는 것이다. C_m 을 고려하지 않았을 때 손상이 없는 부분의 휨강성 값들이 기저값보다 크게 나타났던 현상은 C_m 을 고려한 결과에서 현저하게 줄어들고 있다. 손상이 없는 부분에서 나타났던 불안정성이 줄어들어 모델링 오차가 없는 경우의 결과와 가까워지고 있는 것이다. C_m 을 고려하지 않은 경우의 결과는 모델링 오차의 영향이 지배적인 상태의 결과이고, C_m 을 이용했을 때의 결과는 모델링 오차가 필터링 되어 측정오차의 영향이 지배적인 상태의 결과라 할 수 있다.

측정오차가 5%일 때의 결과를 보면, 세 가지의 결과가 모두 손상부재의 휨강성 값을 크게 과소평가하고 있다. 이는 σ_x 에 의한 정규화 효과에 의한 것이다. 손상이 없는 부재들의 휨강성 값이 측정오차에 의해 진동하는 현상을 기저값에 가깝게 잡아주기 위해 도입된 정규화의 효과가 너무 커서 손상부재의 휨강성 값까지 기저값 쪽으로 크게 줄어든 것이다. 그러나 분명한 것은 C_m 을 고려함으로써 모델링 오차의 영향이 필터링 되고 있다는 것이다. 손상이 없는 부재의 휨강성 값들이 보다 기저값에 가깝게 접근했음을 볼 수 있다.

여기서도 마찬가지로 L_1 -정규화, 즉 symmetry exponential 분포인 $p(\mathbf{X})$ 를 이용하면, 손상 부재의 위치와 휨강성 값을 보다 뚜렷하게 보여주는 효과까지도 볼 수 있을 것이며, 손상 시나리오를 통하여 각 시스템변수마다 서로 다른 표준편

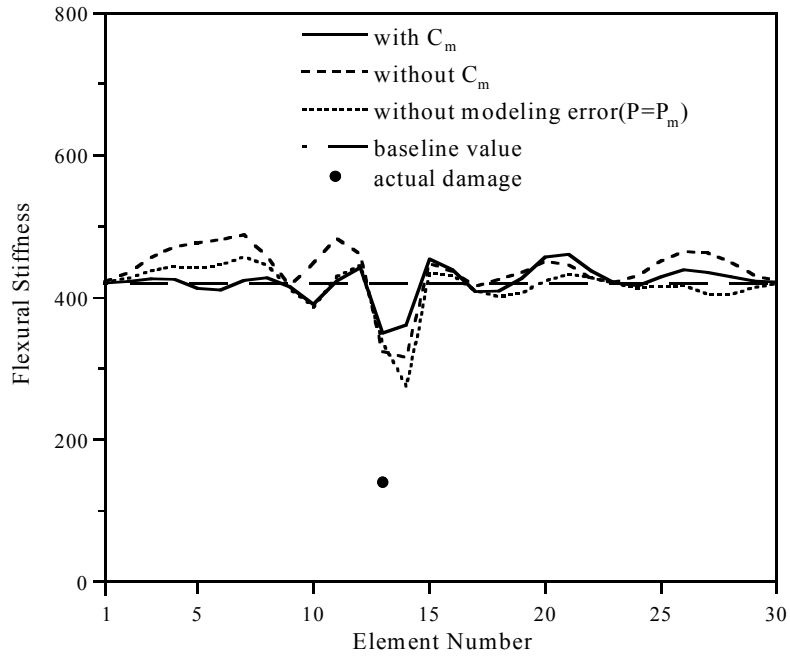


그림 4.11 하중의 모델링 오차에 따른 역해석 결과 (측정오차 5%)

차 값을 적절하게 정해줌으로써 정규화에 의해 손상 부재의 휨강성까지 과소평
가 되는 현상을 제거할 수 있을 것이다.

5. 결론

이 연구에서는 신뢰성 높은 구조물의 손상탐지를 위하여, 확률론적 관점에서 구조물의 손상 탐지를 위한 SI 기법의 안정화 기법을 제시하였다. 기존 SI 문제의 안정화 기법을 분석하고, Bayesian Theory 를 도입하여 SI 기법의 통계적 접근을 시도하였다. 이러한 통계적 접근에 의하여 모델링 오차를 고려할 수 있는 일반적인 기법을 제안하였고, 구조 강성변수가 정규분포를 따르지 않는 경우에 대한 SI 기법을 제시하였다.

기존의 SI 과정과 정규화 기법에 대한 전반적인 내용을 Bayesian Theory 를 적용하여 확률론적 관점에서 재정립하였고, 기존의 SI 기법에서 고려하지 못하였던 구조 강성변수의 비대칭 분포와 모델링 오차를 고려할 수 있는 기법을 제안하였다. 확률론적 관점에서의 SI 를 임의의 측정치가 주어졌을 때의 강성변수에 대한 조건부 확률분포에서 maximum likelihood 에 해당하는 강성변수를 결정하는 과정으로 정의하였다. Bayesian Theory 를 이용하여, 측정변위가 주어졌을 때 강성변수의 조건부 확률분포를 측정 오차, 모델링 오차 그리고 강성변수에 대한 확률분포의 결합으로 유도하였다. 전술한 세 종류의 확률 분포가 모두 정규분포일 경우 기존의 Tikhonov 정규화 기법을 적용하는 SI 문제와 동일하게 되고, 시스템변수의 확률분포로 symmetry exponential 확률분포를 이용하면, L_1 -정규화 함수를 사용하는 결정론적인 SI 기법과 일치하게 되는 것을 보였다.

기존의 결정론적인 SI 기법의 정규화 함수는 해 공간을 정의하는 역할을 하였기 때문에 기저값에 대하여 대칭인 함수를 사용할 수밖에 없었다. 그러나 통계적인 접근 방법에서는 정규화 함수가 강성변수의 확률분포를 정의하는 항이기 때문에 비대칭 확률분포를 도입할 수 있다. 통계적 관점에서 구조물의 강성변수는 항상 양수의 값이며, 기저값에 대해 비대칭인 확률분포를 갖는다고 할 수 있다. 이러한 특성을 잘 모사할 수 있는 log-normal 분포를 구조 강성변수의 확률분포로 사용할 경우에 대한 SI 기법을 제시하였다. 제안된 방법을 2차원 정사각형 판 예제에 적용하여 그 효과를 검증하였다. 강성변수의 확률분포로 log-normal 분포를 사용하여, 함유체의 물성치가 기저값보다 큰 경우의 예제인 텅스텐 함유체 예제에서 뚜렷하게 향상된 결과를 얻을 수 있었다.

기존의 SI 과정에서는 모델링 오차를 적절하게 고려하지 못하였다. 확률론적 관점을 통해서 새롭게 모델링 오차에 대한 해결 방향을 제시하였다. 모델링 오차는 실제 구조물과 수치적 해석모델 간의 차이에서 발생하므로 해석모델에서 고려하지 못한 실제 구조물의 시스템변수에 관한 확률분포로 표시하였고, 모델링 오차를 발생시키는 시스템변수와 변위 간의 관계식을 통해서 시스템변수의 확률분포를 측정변위와 계산변위 간의 오차 확률분포로 변환하였다. 이 확률분포의 covariance 행렬에 모델링 오차에 관한 정보가 포함되며, covariance 행렬을 통해서 모델링 오차의 필터링 효과가 도입된다. 3 경간 연속 들보의 예제를 통해서 경계조건의 모델링 오차와 하중의 모델링 오차가 발현시키는 불안

정성이 모델링 오차를 표시하는 covariance 행렬을 사용함으로써 현저하게 줄어드는 것을 확인할 수 있었다.

참고문헌

1. Doebling, S. W., Farrar, C. R., Prime, M. B., and Shevitz, D. W. (1996). "Damage identification and health monitoring of structural and mechanical system from changes in their vibration characteristics: a literature review," *Los alamos National Laboratory Report LA-13070-MS*, Engineering Science and Application Division Engineering Analysis Group, Los Alamos National Laboratory, New Mexico.
2. Hjelmstad, K. D., Shin, S. (1996). "Damage detection and assessment of structures from static response," *J. of Engineering Mechanics*, ASCE, 123(6), 568-576
3. Sanayei, M., and Onipede, O. (1991). "Damage assessment of structures using static test data," *AIAA J.*, 29(7), 1174-1179.
4. Yeo, I. H., Shin, S., Lee, H. S. and Chang, S. P. (2000). "Statistical damage assessment of framed structures from static response," *J. of Engineering Mechanics*, ASCE, 126(14), 414-421.
5. Bui, H. D. (1994). *Inverse problem in the mechanics of materials: An introduction*, CRC Press, Boca Raton.
6. Hansen, P. C. (1998). *Rank-deficient and discrete ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion*, SIAM, Philadelphia.
7. Hjelmstad, K. D. (1996). "On the uniqueness of modal parameter estimation" *J. of Sound and Vibration*, 192(2), 581-598.

8. Lee, H. S., Kim, Y. H., Park, C. J., and Park, H. W. (1999). "A new spatial regularization scheme for the identification of geometric shapes of inclusions in finite bodies," *International J. for Numerical Methods in Engineering*, 46(7), 973-992.
9. Park, H. W., Shin, S. B., and Lee, H. S. (2001). "Determination of an optimal regularization factor in system identification with Tikhonov function for linear elastic continua," *International J. for Numerical Methods in Engineering*, 51(10), 1211-1230.
10. 박현우 (2002), "구조물의 손상진단을 위한 SI 기법에서의 정규화 기법", 서울대학교 토목공학과.
11. Watson, G. A. (1980). *Approximation Theory and Numerical Methods*, Wiley, Chichester.
12. 안병규 (2002), "PP-TSVD 에 의한 유한체 내부영역의 물성치 결정을 위한 시스템확인기법", 서울대학교 지구환경시스템공학부.
13. Golub, G. H., and Van Loan, C. F. (1996). *Matrix computations*, 3rd ed., The Johns Hopkins University Press, London.
14. Johnson, C. (1987). *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Methods*, Cambridge University Press, New York.
15. Oden, J. T. (1979). *Applied Functional Analysis: A First Course for Students of Mechanics and Engineering Science*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
16. Hansen, P. C. (1992). "Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve," *SIAM review*, 34(4), 561-580.
17. Lee, H. S., Park, C. J., and Park, H. W. (2000). "Identification of geometric shapes and material properties of inclusions in two dimensional finite bodies by boundary

- parameterization," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181(1-3), 1-20.
18. Vogel, C. R. (1986). "Optimal choice of a truncation level for the truncated SVD solution of linear first kind integral equations when data are noisy," *SIAM J. of Numerical Analysis*, 23(1), 109-117.
 19. Morozov, V. A. (1993). *Regularization methods for ill-posed problems*, M. Stessin, translator, CRC Press, Boca Raton.
 20. Barrondale, I., and Roberts, F. D. K. (1973). "An improved algorithm for discrete l_1 linear approximation," *SIAM J. Numerical Analysis*, 10(5), 839-848.
 21. Tarantola, A. (1987). *Inverse Problem Theory - Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation*, Elsevier Science Publisher B. V., New York.

ABSTRACT

Deterministic SI based on a least square method is investigated from the viewpoint of Bayesian theory. SI based on a least square method is interpreted in terms of the maximum likelihood of the conditional probability of system parameters under given measurements. The conditional probability distribution is calculated by combining three probability distributions associated with measurement error, modeling error and system parameter. The probability distribution of system parameter in Bayesian theory is equivalent to the regularization function which is usually adopted to alleviate ill-posedness of deterministic inverse problems. The regularizing effects of L_1 and L_2 -regularization functions are realized by applying normal distribution and symmetry exponential distribution to the probability distribution of system parameters, respectively. The ratio of standard deviation of measurement error to standard deviation of system parameter is represented by the regularization factor of regularization technique.

Stiffness properties are positive in any case and assumed to have asymmetric probability distribution. Log-normal distribution representing the asymmetric probability is proposed to impose the distribution characteristics of stiffness properties upon SI. The method of filtering modeling error that deterministic SI scheme couldn't consider appropriately is proposed introducing probability concepts. Modeling errors are represented by the difference between actual displacements and calculated displacements and assumed to be normal. Modeling errors are filtered out through the covariance matrix of the normal distribution. The validity of the proposed method is demonstrated through some examples.

Key Word

Bayesian Theory, L_2 -regularization, L_1 -regularization, normal distribution, symmetry
exponential distribution, log-normal distribution, modeling error, covariance.

Student Number : 2001-21206

감사의 글

2년의 대학원 생활이 끝나가고 있습니다. 수업을 듣고 숙제와 시험을 준비하며 나름대로 열심히 공부하던 1학년 때와 이 논문을 위해 연구를 하던 2학년 때 모두 많은 분들의 도움을 받았습니다. 그 모든 분들께 감사드립니다.

먼저 2년 동안 모든 방면에 대해 아낌없는 가르침을 주신 이해성 선생님께 감사드립니다. 끊임없는 조언과 꾸지람을 통해 정말 많은 것을 배우고 깨닫게 해주셔서 감사합니다. 그리고 학부 때부터 많은 가르침을 주신 장승필 교수님, 고현무 교수님, 오병환 교수님, 김재관 교수님께도 깊은 감사드립니다.

항상 제 논문을 걱정해주시고, 졸업을 걱정해주신 현우형에게 진심으로 감사드립니다. 저의 궁금증을 항상 말끔하게 풀어주시고, 말 안 듣는다고 꾸중도 하셨죠. 먼 곳에 있으면서도 항상 큰 힘이 되어주셨습니다.

연구실의 모든 문제를 꼼꼼하고 세심하게 해결해주고 식사비를 절감하게 해준 기석이 형, 모든 수업과 최적화의 과외 선생님이었던 편안한 선배 양광이 형, 작은 부탁을 하시면서도 매우 미안해 하시고 저의 별명을 힘겹게 불러주시는 턴턴원 누나, 오랜 세월 함께 하면서 때로는 친구처럼 편하게 지내면서 때로는 선배로서 챙겨주기도 해준 투덜이 남규 형, 저와 가장 비슷한 상황에 많이 처해져서 서로 이해해 주고 위안이 되어 주기도 한 영곤이 형께 감사드립니다.

1년이라는 짧은 기간이었지만 즐거운 연구실 분위기를 만들어 준 정희, 항상 저의 부탁을 불만 없이 잘 들어주고 도와줬으며 연구실에 활기를 넣어주는 제 형이 형, 창현이 형, 호영이, 승근이 모두 고맙습니다. 올 한 해 보람차게 보내고 좋은 결실 맺길 바랍니다.

학사 논문 쓸 때의 엄하셨던 모습을 지금은 찾아볼 수 없는 용한이 형, 1학년 한 해 동안 가장 편하고 따뜻하게 느껴졌던 주성이 형, SI에 입문하게 해 주고 졸업 후에도 저의 질문에 친절히 답해준 병규 형, 학교에 비교적 자주 나타나서 항상 밝은 웃음을 보여주는 정진이 형, 대학원 생활과 회사 생활에 대한 많은 조언을 해준 유부남 규철이 형에게도 감사합니다.

학교 밖에서도 항상 연구실을 걱정해주는 천종이 형, 경남이 누나, 윤석이 형, 대환이 형, 문성이 형, 종명이 형, 종승이 형, 한도 형, 문구 형, 인호 형께도 감사드립니다.

힘들 때 항상 위로가 되어주고 힘이 되어주었고 함께 놀아준 광민이, 준영이, 진호, 멀리서도 나를 걱정해 주는 필원이, 왠지 모르게 생각만 해도 열심히 해야겠다는 다짐을 하게 만들어 주시는 윤섭이 형에게 고마움을 전합니다. 이외에도 학부시절부터 오랜 세월 함께 해준 지구환경시스템 공학부와 구정고등학교 동문회의 선배님들, 동기들, 후배들, 그리고 사랑하는 Bravo611 친구들 모두 고맙습니다.

마지막으로 인생 선배로서 은근히 큰 힘이 되어주는 형, 항상 늦은 밤까지 저를 기다려 주시고 갖은 투정 모두 받아주시며 때로는 따끔한 충고와 조언을

주시는 부모님께 진심으로 감사드립니다. 언제나 저에게 따뜻한 보금자리가
되어주는 사랑하는 가족들에게 이 논문을 바칩니다.