공학석사학위논문

Element-Free Galerkin 법을 이용한 혼합모드의 피로 균열 성장 해석

Analysis of Mixed-Mode Fatigue Crack Growth Using Element-Free Galerkin Methods

2003 년 2 월

서울대학교 대학원

지구환경시스템공학부

안 남 규

Element-Free Galerkin 법을 이용한

혼합모드의 피로 균열 성장 해석

Analysis of Mixed-Mode Fatigue Crack Growth

Using Element-Free Galerkin Methods

지도교수 이 해 성

이 논문을 공학석사학위논문으로 제출함

2002 년 10 월

서울대학교 대학원

지구환경시스템공학부

안 남 규

안남규의 공학석사학위 논문을 인준함

2002 년 12 월

위 원 장 張 丞 翰

부위원장 이 해 성

위 원 高 鉉 武

초록

이 논문에서는 Element-Free Galerkin (EFG) 법을 사용하여 피로 균열의 성장 경로를 모사하기 위한 반복적인 피로 균열 성장 모델링 기법을 제안한다. EFG 법에서는 균열면을 불연속을 갖는 연속적인 선분으로 표현하고 균열면에 복절점을 배치하여 균열을 모형화 한다. 이때 균열 선단 근처에서는 Diffraction method 를 이용하여 영향 영역을 설정한다. 임의의 절점 배치가 가능하므로 균열 선단 주변에서 점진적인 그물망을 형성하여 쉽게 해의 정확도를 향상시킨다.

피로 균열의 성장량과 성장 방향은 응력확대계수의 함수이고 응력확대계수는 J-integral 로부터 평가할 수 있다. 2 차원과 3 차원에서의 J-integral 를 가상 균열 진전에 대한 총 에너지 방출량의 관점에서 살펴본다. 2 차원의 경우 곡선이나 꺾인 균열에서 J-integral 의 적분 경로에 따른 독립성을 명확히 규명한다.

혼합모드의 피로 균열에서 발생하는 곡선 균열과 꺾인 균열을 직선으로 이산화 하여 모델링 한다. 이 경우 초기 성장량과 성장 방향으로 균열을 진전시키면 실제 균열 경로에서 벗어나게 되고 균열을 진전시킬수록 그 차이는 커지게 된다. 제안된 모델링 기법에서는 균열 성장 경로를 포물선으로 가정하고 반복적으로 균열의 성장량과 성장 방향을 갱신한다. 수치 예제를 통하여 J-integral 을 정확히 평가하고 피로 균열의 성장 경로를 보다 정확히 모사한다.

주요어
Element-Free Galerkin 법, 응력확대계수, J-integral, 피로 균열 성장

학번 : 2001-21221

목차

그림목차

표목차

1. 서론

임의의 피로 균열 성장을 모델링 하고 해석하는 것은 어떠한 공학적 대상물의 수명을 예측하는데 있어 매우 중요한 요소이다. 그럼에도 불구하고 이는 풀리지 않는 문제로 남아 있다. 지금까지는 유한요소법과 경계요소법이 피로 균열 성장을 해석하는데 주로 사용되어 왔지만 이들은 공학적인 문제에 적용시키는데 있어 근본적인 단점들을 가지고 있다. 유한요소법은 해석대상물을 유한개의 작은 요소들로 나누어 해석하는 과정에서 요소와 절점들 간의 규칙성을 항상 만족시켜 주어야 한다. 이러한 제약성은 특이현상이나 응력집중이 발생하는 문제, 기하학적 형상이 계속적으로 변화하여 이에 따라 요소망을 연속적으로 재구성해야만 하는 공학문제 등에 있어서 유한요소법의 사용을 어렵게 만들고 있다. 또 경계요소법은 요소망을 재구성해야 하는 문제는 대부분 피할 수 있지만 편미분 방정식에서 Green 함수를 필요로 하기 때문에 다룰 수 있는 문제들이 한정되어 있다. 이러한 단점들을 보완하는 새로운 수치해석 방법인 무요소 해석법이 최근 Belytschko [1-10]등에 의해 활발히 연구되고 있다. 이 방법은 요소를 배제하고 절점만으로 해석대상을 모델링 할 수 있으므로 균열해석에 있어서 특히 효과적이다.

이 연구에서 사용한 Element-Free Galerkin (EFG) 법은 요소의 개념이 없이 절점과 그 절점을 둘러싸는 영향영역만을 가지고 문제를 해석한다. 따라서 이산

방정식을 세우기 위해서 기하학적 형상과 절점군들만이 필요하기 때문에 균열 성장과 같은 문제들을 모델링 하기가 매우 용이하고, 요소의 찌그러짐으로 인한 해의 정확도 저하가 일어나지 않는다. 그리고 영역내에서 절점들의 위치를 임의로 배치 시킬 수 있기 때문에 균열 선단의 응력 집중을 효과적으로 나타내기 위해서 절점들을 높은 밀도로 분포 시킬 수 있는 장점이 있다. 또 요소가 없으므로 균열의 진행에 따른 균열면의 변화를 경계조건의 변화로 간단히 나타낼 수 있으므로 요소를 재구성하는 번거로움이 없다. 이러한 이유들로 EFG 법은 균열 성장 문제 해석에 있어서 유한요소법을 사용하는 것보다 정확성과 효율성이 우수하다고 알려져 있다. 이 연구에서는 이러한 EFG 법을 이용하여 피로 균열 성장 문제를 해석한다.

피로 균열 문제는 선형탄성파괴역학(LEFM)에 기초하여 해석하려는 연구가 1960 년대 이후 꾸준히 이루어져 왔다. 피로 균열의 성장 방향과 성장률은 응력확대계수[11]의 함수이고 응력확대계수는 J-integral[12-14]로부터 평가할 수 있다. 많은 연구자들에 의해 직선 균열의 J-integral 이 적분경로에 무관하다는 것이 증명되었다. 하지만 혼합모드의 피로 균열은 균열이 꺾이거나 곡선을 이루며 성장하므로 적분 영역이 곡선이나 꺾인 균열을 포함할 경우 J-integral 에 대한 고찰이 필요하다. 또한 곡선이나 꺾인 균열에서 균열을 유한개의 직선으로 이산화하여 모델링할 경우 초기 성장 방향으로 균열을 진전시키면 실제 균열 경로에서 벗어나게 되고 균열을 진전시킬수록 그 차이는 커지게 된다. 따라서 균열 성장 방향과 길이를 반복적으로 보정해 주어야 할 필요성이 있다.

이 연구에서는 EFG 법을 이용하여 임의의 균열을 가진 구조물을 해석하고 여기에 최대 주응력 한계론[15]과 Paris Equation[16]을 도입하여 반복적인 피로 하중에 의한 피로 균열 성장을 해석한다. 이 때 응력확대계수를 정확히 산정하기 위하여 혼합 모드 균열의 경우 J-integral 에 대하여 고찰하고, 피로 균열 성장 경로를 정확히 모사하기 위해서 반복적인 균열 성장 모델링 기법을 제안한다.

2 장에서는 EFG 법의 정식화 과정과 EFG 법에서 매우 중요한 역할을 하는 가중함수와 영향영역의 의미와 결정, 그리고 경계조건 처리 방법, 수치적분 방법 및 최종적인 이산방정식에 대해 기술하였고, EFG 법에서 균열을 보다 효과적으로 해석하기 위한 균열 모형화 방법 및 균열 선단 주변에서의 형상함수와 가중함수의 연속성을 유지시켜주기 위한 Diffraction method 방법을 설명한다. 3 장에서는 가상 균열 진전에 대한 총 에너지 방출량[17,18] 관점에서 J-integral 을 살펴보고, 2 차원 균열 문제에서 J-integral 이 적분 경로에 대하여 독립성을 유지하기 위한 조건을 알아본다. J-integral 을 이용한 2 차원과 3 차원에서의 응력확대계수의 산정법에 대하여 알아보고, 2 차원의 경우 피로 균열의 성장 경로를 정확히 모사하기 위한 반복적인 균열 성장 모델링 기법을 제안한다. 4 장에서는 수치 예제를 통하여 J-integral 의 경로에 따른 독립성을 검증하고, 3 차원 관통 균열 문제로서 균열의 두께 방향으로의 응력확대계수의 변화를 살펴본다. 그리고 제안한 반복적인 균열 성장 모델의 타당성을 입증한다. 마지막으로 5 장에서는 결과를 종합하고 이 논문이 가지는 의의에 대하여 논한다.

2. Element-Free Galerkin 법을 이용한 균열 해석

유한요소법에서는 요소에서 유효한 형상함수를 사용하여 근사 변위함수를 결정한다. 하지만 EFG 법에서는 절점으로부터 일정한 거리 내에 포함되는 점들을 그 절점의 영향영역에 포함되어 있다고 생각하고, 기준점을 자신의 영향영역 내에 포함하는 절점들을 취하여 이동최소제곱보간법[2]에 의해 그 기준점의 형상함수를 결정하고 근사 변위함수를 구한다. 이 과정에서 형상함수는 절점과 기준점 사이의 거리에 의해 결정되기 때문에 요소가 사용되지 않는다.

2.1 이동최소제곱보간법

주어진 영역 $\mathbf{\Omega}$ 의 임의의 점 $\mathbf{x}$ 에서의 변위함수 $u(\mathbf{x})$ 의 이동최소제곱보간에 의한 근사변위 함수는 공간 좌표계의 다항식 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 와 다항식의 각 항들에 대응하는 계수값 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 를 사용하여 다음과 같이 정의된다.

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j}^{m} p_j(\mathbf{x}) a_j(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \mathbf{a}(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

여기서 계수 $a_j(\mathbf{x})$ 는 $\mathbf{x}$ 의 함수이며, 이동최소제곱보간에 의한 변위를 결정해주는 미지값이다. m 은 이동최소제곱보간에서 사용되는 기저의 수이다.

지역 근사(Local approximation)는 다음과 같다.

$$u_L^h(\mathbf{x},\bar{\mathbf{x}})=\sum_j^m p_j(\mathbf{x})a_j(\bar{\mathbf{x}})=\mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) \tag{2.2}$$

임의의 점 $\mathbf{x}$ 에서의 미지값 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 는 $\mathbf{x}$ 를 기준으로 하는 일정한 영향영역 내의 절점의 변위 오차에 대한 가중잔여치, 즉 가중이산형 L_2 norm 을 최소화 시켜 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\pi&=\sum_I^n w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)\left[u_L^h(\mathbf{x}_I,\mathbf{x})-u_I\right]^2\\&=\sum_I^n w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)\left[\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I)\mathbf{a}(\mathbf{x})-u_I\right]^2\end{aligned} \tag{2.3}$$

여기서, $w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)$ 는 $\mathbf{x}$ 와 절점 $\mathbf{x}_I$ 사이의 거리비에 따른 가중함수이다. 절점 $\mathbf{x}_I$ 를 중심으로 일정한 거리 내에 포함되는 점들에서 가중함수는 0 이 아니며 이와 같은 점들을 $\mathbf{x}_I$ 의 영향영역(Domain of influence)내의 점들이라고 부른다. 그리고 n 은 $\mathbf{x}$ 를 자신의 영향영역 내에 포함하는 절점들의 개수이다. 식 (2.3) 은 다음과 같은 행렬식의 형태로 표현된다.

$$\pi=(\mathbf{Pa}-\mathbf{u})^T\mathbf{W}(\mathbf{x})(\mathbf{Pa}-\mathbf{u}) \tag{2.4}$$

여기서,

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\} \tag{2.5a}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \tag{2.5b}$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \tag{2.5c}$$

$\mathbf{a}(\mathbf{x})$에 대해 가중잔차를 최소화시키면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{2.6}$$

여기서,

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x})\mathbf{P} \tag{2.7}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \tag{2.8}$$

따라서, $\mathbf{a}(\mathbf{x})$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \tag{2.9}$$

식 (2.1)과 (2.9)로부터 이동최소제곱보간에 의한 근사 변위함수를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \sum_I^n \Phi_I(\mathbf{x})\mathbf{u}_I \tag{2.10}$$

여기서, 절점 $\mathbf{x}_I$ 의 형상함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\Phi_I(\mathbf{x}) = \sum_j^m p_j(\mathbf{x})(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}))_{jI} \tag{2.11}$$

위에서 언급한 행렬 $\mathbf{A}$ 는 영향영역 내의 절점들의 상대적 위치에 영향을 받으며 $\mathbf{A}^{-1}$ 를 구하기 위해서는 영향영역 내에 포함되는 절점들의 수가 다항식의 항의 수 m 보다 같거나 커야 한다.

2.2 영향영역과 가중함수

EFG 법을 해의 정도를 좌우하는 중요한 요소 중의 하나는 가중함수(Weight function)를 결정하는 일이다. 가중함수는 기준점 $\mathbf{x}$ 를 자신의 영향영역 내에 포함하는 절점이 갖게 되는 가중치를 결정해 주는 함수이다.

가중함수는 기준점 $\mathbf{x}$ 에서 가까운 절점 $\mathbf{x}_I$ 에서는 상대적으로 큰 값을 가지고 반대로 기준점 $\mathbf{x}$ 에서 먼 절점 $\mathbf{x}_I$ 에서는 작은 값을 가진다. 가중함수는 $\mathbf{x}$ 와 $\mathbf{x}_I$ 사이의 거리와 $\mathbf{x}_I$ 의 영향반경의 함수이다. 따라서 다음과 같이 두 점 사이의 거리에 종속되는 가중함수를 고려할 수 있다.

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = w_I(d) \tag{2.12}$$

여기서, $d = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|$ 이며 두 절점 사이의 거리를 나타낸다. $w_I(d)$ 는 d 에 관하여 1 차 미분항까지 연속한 것으로 가정한다. 가중함수의 형태는 여러 가지가 있는데 이 연구에서는 연속한 미분항을 얻기 위하여 Exponential 가중함수를 사용하였다.

$$w_I(d) = \begin{cases} \dfrac{e^{-(d/c)^2} - e^{-(d_{mI}/c)^2}}{(1 - e^{-(d_{mI}/c)^2})}, & d_I \le d_{mI} \\ 0, & d_I > d_{mI} \end{cases} \tag{2.13}$$

여기서 c 는 상대적인 가중치를 조정하는 상수이고, d_{mI} 는 절점 $\mathbf{x}_I$ 의 영향영역의 크기이다. 이 영향영역은 $\mathbf{A}$ 가 Singular 하지 않도록 결정되어야 한다. c 의 정의는 다음과 같다.

$$c = \bar{\alpha} c_I \tag{2.14}$$

여기서, $1 \le \bar{\alpha} \le 2$ 의 값을 사용하였다[1].

$$c_I = \max_{J \in S_J} \|\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_I\| \tag{2.15}$$

여기서, S_J 는 $\mathbf{x}_I$ 를 둘러싸는 다각형을 만들 수 있는 $\mathbf{x}_I$ 주변의 절점들의 최소집합을 의미한다. 만약 절점들이 균일하게 분포되어 있다면 c_I 는 절점사이의 최대 거리가 된다. 절점들이 무작위로 분포되어 있는 경우에는 절점 배치를 고

려하여 적당한 값을 사용하면 되는데, 이 연구에서는 $\mathbf{x}_I$ 에서 3 번째로 가까운 절점까지의 거리를 사용한다. Exponential 가중함수는 c 가 감소하면 $\mathbf{x}$ 에 가까운 절점에서는 더 높은 가중치를, $\mathbf{x}$ 에서 멀리 떨어진 절점에서는 더 낮은 가중치를 얻는다.

가중함수의 선택과 더불어 영향영역의 선택 또한 해의 정도를 결정하는 중요한 요소이다. 영향영역에 의해 이동최소제곱에 의해 근사해를 도출할 때, 몇 개의 주변 절점들을 이용하여 기준점의 변위함수를 결정할 것인지가 결정된다. 기준점에 대한 영향영역은 2차원 해석이 경우는 주로 원형이나 사각형 영역을 사용하고 3차원 영역에서는 구형 영역을 사용한다. 영향영역 내에 적절한 개수의 절점이 포함되도록 해야만 수치해의 정도가 보장되는 동시에 빠른 계산을

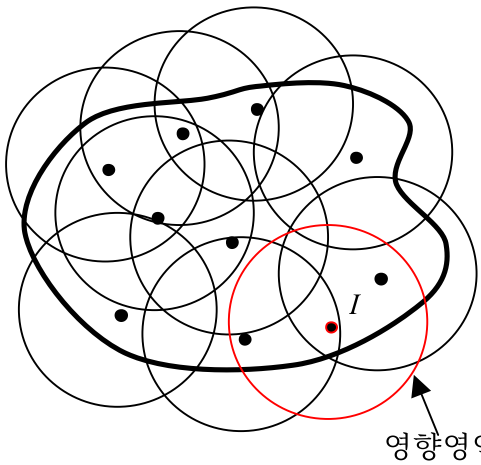


그림 1. 2차원에서의 원형의 영향영역

수행할 수 있다. 그림 1은 2차원에서 각 절점들이 원형 영향영역을 선택한 예를 보여준 것이다.

2.3 Lagrange Multiplier를 이용한 경계조건 처리와 이산방정식

EFG 법에서는 형상함수가 Kronecker delta condition($\Phi_I(\mathbf{x}_J) \neq \delta_{IJ}$)을 만족하지 못한다. 유한요소법에서는 변위 경계조건을 만족하는 형상함수를 사용하므로 변위가 주어진 경계에서 자동적으로 0 이 된다. 하지만 EFG 법에서는 경계상에 있지 않은 절점의 형상함수를 계산할 때 그 영향 영역 내에 필수경계상의 절점이 포함되게 되면 경계상의 절점도 어떤 값을 가지게 되므로 구속조건이나 미리 정의된 경계조건이 완전하게 반영되지 못하게 된다. 마찬가지로 하중 경계조건에서도 어떤 절점에 가해진 하중은 이 절점의 형상함수를 구성하면서 그 영향이 주변의 다른 절점으로 옮겨가게 된다. 하중 경계조건을 처리하기 위해선 먼저 절점들을 경계면에 배치시킨 뒤 이 경계면상에 Gauss 적분점들을 설정하여 절점들에 가해진 하중을 이 적분점들로 분배시킨다[6]. 그 후 각 적분점을 기준으로 영향영역을 설정하여 형상함수를 계산하여 영향영역 내의 점들에 하중들을 다시 분배시킨다[6]. 이 과정에서 이전에 사용했던 영향영역과 가중함수를 그대로 사용한다.

변위 경계 조건을 처리하기 위해서 사용되는 방법으로는 Penalty 방법, 경계 근처에서 FEM 요소를 사용하는 방법[1,3,8]등이 있지만 이 연구에서는 Lagrange multiplier 를 포함하는 구속 조건식을 변분 형식에 추가시켜 구속조건을 강제적으로 만족시키는 방법[1,3]을 사용하였다. 이 방법은 적용이 매우 간단하지만 강성도 행렬이 정치(Positive-definite)가 아니고 구속조건이 늘어날수록 전체 강성도 행렬의 크기가 커져 계산량이 많아지는 단점이 있다.

경계 조건이 Γ로 주어진 영역 Ω 내에서의 평형 방정식은 다음과 같다

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in} \quad \Omega \tag{2.16}$$

경계 조건은 다음과 같이 주어진다.

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on} \quad \Gamma_t \tag{2.17a}$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on} \quad \Gamma_u \tag{2.17b}$$

평형 방정식의 변분형태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \delta(\nabla_s \mathbf{v}^T) : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{v}^T \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma_u} \delta \boldsymbol{\lambda}^T \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{v}^T \cdot \boldsymbol{\lambda} d\Gamma = 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

식(2.18)는 평형방정식과 경계조건을 모두 만족한다. 여기서 오른쪽 두 항이 Lagrange multiplier 를 사용하여 구속 조건의 만족시켜 준 부분이다. Lagrange multiplier $\boldsymbol{\lambda}$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) = N_I(s)\boldsymbol{\lambda}_I \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_u \tag{2.19a}$$

$$\delta\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) = N_I(s)\delta\boldsymbol{\lambda}_I \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_u \tag{2.19b}$$

여기서 $N_I(s)$는 Lagrange interpolant 이고 s는 경계를 따라서의 호의 길이이다. 식 (2.18), (2.19)로부터 최종적인 이산방정식은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \tag{2.20}$$

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_\Omega \mathbf{B}_I^{\mathrm{T}} \mathbf{D} \mathbf{B}_J \, d\Omega \tag{2.21a}$$

$$\mathbf{G}_{IK} = -\int_{\Gamma_u} \Phi_I N_K \, d\Gamma \tag{2.21b}$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Gamma_t} \Phi_I \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_\Omega \Phi_I \mathbf{b} \, d\Omega \tag{2.21c}$$

$$\mathbf{q}_K = -\int_{\Gamma_u} N_K \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma \tag{2.21d}$$

여기서,

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \Phi_{I,x} & 0 \\ 0 & \Phi_{I,y} \\ \Phi_{I,y} & \Phi_{I,x} \end{bmatrix} \tag{2.22a}$$

$$\mathbf{D} = \begin{cases} \dfrac{E}{1-v^2}\begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-v}{2} \end{bmatrix} & \text{for plane stress} \\ \dfrac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)}\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} & \text{for plane strain} \\ \dfrac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)}\begin{bmatrix} 1 & a & a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} & \text{for 3D} \end{cases} \tag{2.22b}$$

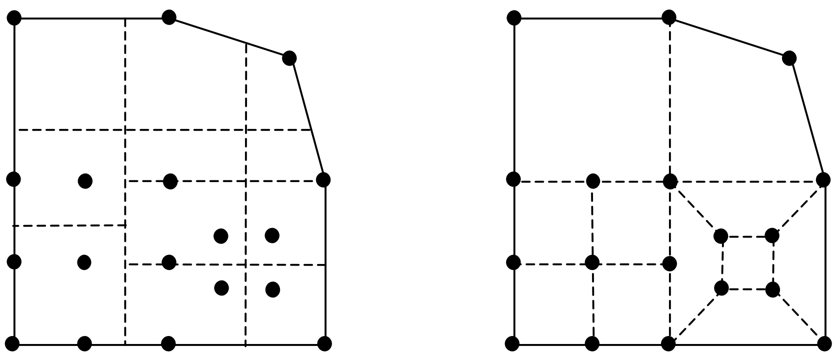
식 (2.22b)의 a와 b는 다음과 같다.

$$a = \frac{v}{1-v}, \quad b = \frac{1-2v}{2(1-v)} \tag{2.23}$$

이산방정식을 풀어 얻게 되는 이동최소자승보간법에 사용한 절점 값 u_I는 $u(\mathbf{x}_I)$와 다른 값이므로 절점 I를 기준으로 하여 영향영역 내에 존재하는 절점들의 u_I 값으로 근사하여 실제 변위값을 재계산해야 한다.

2.4 수치적분

전체 강성도 행렬을 구성하기 위해서는 주어진 전체 영역에 대한 수치적분이 필요하다. EFG 법에서는 요소의 개념을 사용하지 않으나 전체영역에 대한 수치적분을 수행하기 위해서는 대상영역을 임의의 개수의 셀이나 요소로 나눌 필요가 있다. 대표적으로 사용하는 방법에는 그림 2 의 (a)와 같이 배경 셀을 사용하거나 (b)와 같이 유한요소해석에서 사용하는 것과 같은 요소망을 사용하는 방법이 있다. 배경 셀을 사용하는 경우에는 대상의 기하학적 형상과 무관하게 규칙적인 모양의 셀을 사용하므로 복잡한 형태의 대상을 해석하기 위해 요소망을 짜는 번거로움을 피할 수 있는 장점이 있다. 하지만 대상의 경계내에 위치하는 Gauss 적분점을 판별하기 위한 조건식이 필요하게 되는데 이를 위해서 경계를 설정하기 위한 별도의 입력이 필요하며 복잡한 영역에서는 경계내의 유무



(a) 배경 셀(backgraound Shell) (b) 요소망 (element)

그림 2. EFG법에서 적분을 위한 셀 구조

를 판별하는데 한계가 있다는 단점이 있다.

반면에 요소망을 사용하는 방법은 실제 대상의 기하학적 형상과 일치하도록 요소망을 구성해야 하는 어려움이 있지만 보다 명확하게 기하학적 형상을 묘사할 수 있을 뿐 아니라 경계가 정확하게 설정되므로 정확한 적분값을 얻을 수 있는 장점이 있다. 이 요소망은 단순히 적분의 정확성을 위한 것이지 변위를 근사하기 위한 요소가 아니기 때문에, 유한요소에서와 같은 요소와 절점들간의 규칙성을 항상 만족시켜주어야 할 필요가 없다. 따라서 요소망 구성이 유한요소법에 비하여 용이하다. 균열 문제와 같이 높은 특이성을 갖는 문제에서 균열 선단의 응력 집중을 잘 나타내기 위해서는 균열 선단에 많은 절점을 추가해야 한다. 이 때 적분의 정확성을 향상시키기 위해서는 균열 선단에서 적분 셀을 잘게 나누어야 한다. 이런 경우 요소망을 이용할 경우 절점과 요소가 완전히 분리된 배경 셀을 이용할 경우보다 더 정확한 적분값을 얻을 수 있다.

3 차원의 경우는 차원이 하나 늘어나서 적분하는 배경 셀이나 요소망이 사각형이 아닌 육면체의 형태가 되는 것을 제외하고는 2 차원의 경우와 같다.

위의 두 가지 방법에서 적분을 수행하는 방법은 유한요소해석의 수치적분과정과 매우 유사하다. 유한요소법과 다른 점은 각 Gauss 적분점을 기준으로 하여 영향영역 내에 존재하는 절점의 종류와 개수가 다르므로 셀 당 하나의 요소강성도 행렬이 구성되는 것이 아니라 각 가우스 적분점마다 하나의 행렬이 구성된다는 것이다. 이 각각의 행렬을 기준이 되는 가우스 적분점에 해당하는 가중치와 Jacobian 값을 이용하여 전체강성도 행렬로 조합한다.

식 (2.20)에서 강성도 행렬을 구하기 위한 적분은 전체 영역을 $ncel$ 개의 배경 셀로 나누고 각 셀마다 $ngp \times ngp$ Gauss 적분점을 사용할 경우 다음과 같이 수행한다. 3차원의 경우는 셀마다 $ngp \times ngp \times ngp$ Gauss 적분점을 사용한다.

$$\begin{aligned}\int \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{DB}\, d\Omega &= \sum_{e}^{ncel} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{DB}\, d\Omega^e \\ &= \sum_{e}^{ncel} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{k}(\xi,\eta)\bar{J}(\xi,\eta)d\xi\, d\eta \qquad \text{for 2D} \quad (2.24a) \\ &= \sum_{e}^{ncel}\sum_{i}^{ngp}\sum_{j}^{ngp} \mathbf{k}(\xi_i,\eta_j)\,\bar{J}(\xi_i,\eta_j)\,W_iW_j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{DB}\, d\Omega &= \sum_{e}^{ncel} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{DB}\, d\Omega^e \\ &= \sum_{e}^{ncel} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{k}(\xi,\eta,\chi)\bar{J}(\xi,\eta,\chi)d\xi\, d\eta\, d\chi \qquad \text{for 3D} \quad (2.24b) \\ &= \sum_{e}^{ncel}\sum_{i}^{ngp}\sum_{j}^{ngp}\sum_{k}^{ngp} \mathbf{k}(\xi_i,\eta_j,\chi_k)\,\bar{J}(\xi_i,\eta_j,\chi_k)\,W_iW_jW_k\end{aligned}$$

여기서, $\bar{J}(\xi_i,\eta_j)$ 와 $\bar{J}(\xi_i,\eta_j,\chi_k)$ 는 자코비안 값이며 W 는 각 가우스 적분점에 해당하는 가중치이다. 2 차원의 경우 (i,j) 번째 가우스 적분점에서의 강성행렬 $\mathbf{k}(\xi_i,\eta_j)$ 과 3 차원의 경우 (i,j,k) 번째 가우스 적분점에서의 강성행렬 $\mathbf{k}(\xi_i,\eta_j,\chi_k)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{k}(\xi_i,\eta_j) = \mathbf{B}_{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}_{\mathbf{Q}} \qquad \text{for 2D} \quad (2.25a)$$

$$\mathbf{k}(\xi_i, \eta_j, \chi_k) = \mathbf{B}_\mathbf{Q}^\mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{B}_\mathbf{Q} \qquad \text{for 3D} \qquad (2.25b)$$

여기서, $\mathbf{B_Q}$ 는 셀이나 요소에서의 2 차원의 경우 (i, j) 번째, 3 차원의 경우 (i, j, k) 번째 가우스 적분점을 기준점으로 하는 영향영역내의 절점들에 대한 형상함수의 미분형의 행렬이다.

$$\mathbf{B_Q} = \begin{bmatrix} \phi_{1,x} & 0 & \phi_{2,x} & 0 & \cdots & \phi_{n,x} & 0 \\ 0 & \phi_{1,y} & 0 & \phi_{2,y} & \cdots & 0 & \phi_{n,y} \\ \phi_{1,y} & \phi_{1,x} & \phi_{2,y} & \phi_{2,x} & \cdots & \phi_{n,y} & \phi_{n,x} \end{bmatrix} \qquad \text{for 2D} \qquad (2.26a)$$

$$\mathbf{B_Q} = \begin{bmatrix} \phi_{1,x} & 0 & 0 & \cdots & \phi_{n,x} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{1,y} & 0 & \cdots & 0 & \phi_{n,y} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{1,z} & \cdots & 0 & 0 & \phi_{n,z} \\ \phi_{1,y} & \phi_{1,x} & 0 & \cdots & \phi_{n,y} & \phi_{n,x} & 0 \\ \phi_{1,z} & 0 & \phi_{1,x} & \cdots & \phi_{n,z} & 0 & \phi_{n,x} \\ 0 & \phi_{1,z} & \phi_{1,y} & \cdots & 0 & \phi_{n,z} & \phi_{n,y} \end{bmatrix} \qquad \text{for 3D} \qquad (2.26b)$$

여기서, n 은 가우스 적분점을 기준으로 한 영향영역 내의 절점의 개수이다.

배경 셀을 사용할 경우에는 셀 내의 가우스 적분점 중에서 일부만이 대상영역에 포함될 경우, 식 (2.24)에서 i , j 나 i , j , k 에 대해서 합산할 때 대상영역 밖에 있는 적분점에 대한 값을 제외시켜 주어야 하며 이러한 경우에는 해의 정도를 높이기 위해서는 고차의 Gauss 적분점을 사용하는 해야 하는 것으로 알려져 있다. 적분점의 개수는 셀 안의 절점의 개수에 의해 결정되며 일반적으로 m 개의 절점이 있는 셀에서는 2 차원의 경우 $(\sqrt{m}+2)\times(\sqrt{m}+2)$, 3 차원의 경우

$(\sqrt{m}+2)\times(\sqrt{m}+2)\times(\sqrt{m}+2)$ Gauss 적분점이 사용된다[1].

2.5 균열의 모형화

EFG 법에서 균열을 모형화 하는 과정에서는 적절히 배치된 절점들만을 이용하여 균열에 의한 불연속성과 특이성을 표현하는 것이 매우 중요한 일이다. 특히 수치적인 기법을 이용하여 균열의 위치를 인식시키고 처리하는 과정의 도입이 필요하며, 또한 균열 성장을 해석하기 위해서는 균열의 성장경로를 따라 생성되는 새로운 균열의 기하학적 형상을 묘사해 주어야 한다[4,7,9].

EFG 법에서 균열의 위치를 규정하기 위하여 연속적인 선분들을 이용하여 표현한다. 이때 균열을 수치적으로 인식하기 위여 선분의 양쪽에 매우 가까운 거리로 복절점을 배치시킨다. 이 복절점들은 균열의 반대편에 서로 위치하고 있기 때문에 서로 간에 영향을 미치지 않아야 하며 영향영역도 균열의 불연속성을 반영하여 결정되어야 한다.

균열 전파에 있어서는 균열이 성장할 경우 새로운 선분이 기존의 균열 선단에 추가되며 새롭게 구해진 균열선단에 절점을 추가시키고 기존의 균열 선단에 있던 절점을 균열면을 중심으로 서로 반대방향으로 나누어 2 개의 절점으로 분리시켜 배치한다.[7,10] 또 수치해의 정도를 향상시키기 위해서 그림 3 에서와 같이 적절한 개수의 절점을 균열 선단 주변에 추가적으로 배치시켜서 자유도를 증가시키는 방법이 사용된다. 일반적으로 균열 선단 주변에 일정간격으로 점진

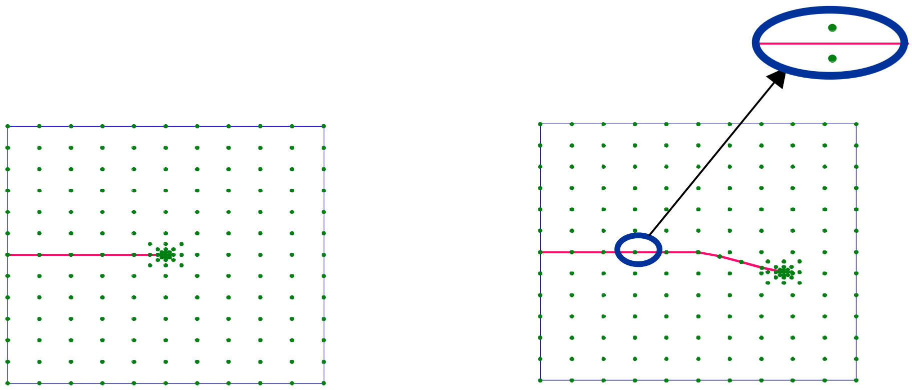


그림 3. 균열의 모형화를 위한 절점배치와 균열 성장에 따른 복절점 배치 예

적인 절점군을 배치시킴으로써 쉽게 해의 정도를 향상시킬 수 있다. 타원 안의 그림은 균열 선상의 절점을 복절점으로 나누어 배치한 예이다.

영향영역은 어떠한 경계도 가로지를 수 없으며 균열문제와 같이 불연속성이 존재하는 문제에 있어서는 어느 기준점으로부터 취하는 영향영역이 불연속 경계부분을 가로질러 가지 않도록 하기 위한 판별 조건식이 추가로 요구된다. EFG 법에서 균열과 같은 불연속선이 있는 곳에서는 영향영역을 결정할 때, 그림 4 와 같이 불연속면을 불투명한 면으로 생각하고 절점과 적분점 사이에 빛이 지나가는 것으로 고려하는 Visibility criterion[3,5]이 주로 사용된다. 이 방법은 그림 4 의 J 절점과 같은 경우에 대해서는 잘 성립되어 변위장과 응력장이 적절히 불연속하도록 해준다. 하지만 I 절점과 같이 균열 선단 근처의 점들에 대

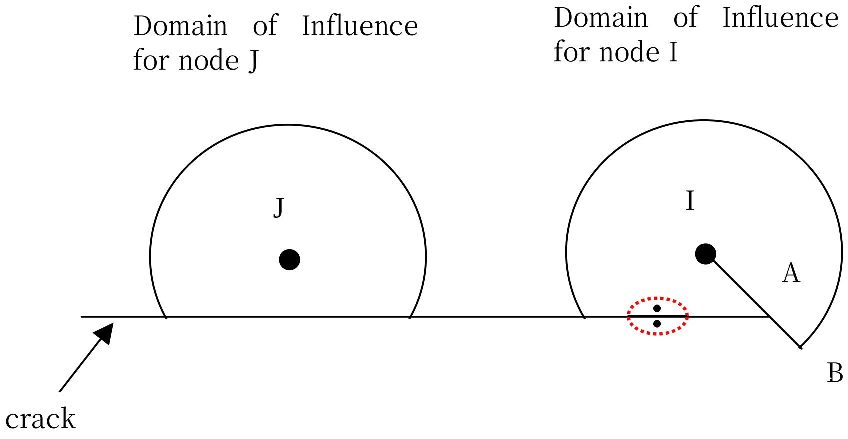


그림 4. 균열 선단 부근에서의 Visibility criterion에 의한 영향영역

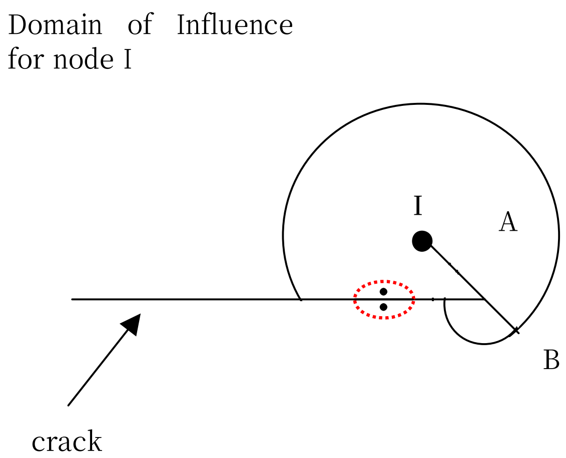


그림 5. 균열 선단 부근에서의 Diffraction method에 의한 영향영역

해서는 A, B 에서 형상함수 뿐 아니라 가중함수에서도 의도하지 않은 불연속이 생기게 된다. 이러한 단점은 해의 정도에 큰 영향을 미친다. 이를 보완하기 위

해서 빛의 회절 원리를 이용한 Diffraction method [3,5]를 사용하여 균열을 포함하는 영향영역에서 EFG 형상함수가 연속성을 유지하도록 할 수 있다. 그림 5와 같이 기준점과 균열 반대편에 위치하는 대상 절점 사이의 거리를 실제보다 서로 더 멀리 떨어져 있는 것으로 생각하여 절점 거리를 증가시켜 주어 균열 반대편에 위치하는 절점의 영향을 덜 받도록 조절하며 가중함수나 형상함수가 일치된 연속성을 유지할 수 있도록 한다. Diffraction method 에서는 절점과 Sampling point 사이를 지나는 선이 균열을 지나가고 절점의 영향반경 내에 균열 선단이 존재할 때 d_I 를 다음과 같이 재정의 한다 .

$$d_I = \left(\frac{d_1 + d_2(x)}{d_0(x)} \right)^{\lambda} d_0(x) \tag{2.27}$$

여기서, $d_1 = \|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_c\|$, $d_2(x) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c\|$, $d_0(x) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|$ 이며 $\mathbf{x}_I$ 는 절점, $\mathbf{x}$ 는 Sampling point, $\mathbf{x}_c$ 는 균열 선단(Crack tip)을 의미한다.

EFG 법에서는 그림 4 와 그림 5 의 점선 안과 같이 균열면 위 아래로 복절점을 배치하고 두 절점 사이의 거리를 산정하여 균열을 표현한다. 균열 위의 점은 절점 I 의 영향영역 안에 포함되므로 형상함수를 결정할 때 절점 I 를 고려하지만 균열 아래의 점은 절점 I 의 영향영역 안에 포함되지 않으므로 형상함수를 결정할 때 절점 I 를 고려하지 않는다. 따라서 균열을 따라 변위나 응력의 불연속이 발생하게 된다.

3. 균열 성장 해석 기법

강 또는 강합성 구조물의 피로 균열 문제는 선형탄성파괴역학(LEFM)에 기초하여 해석하려는 노력이 이루어져 왔다. 피로 균열 성장 예측식은 균열의 진전 접선 방향과 진전 크기를 결정하는 것으로 균열 선단의 응력확대계수(Stress intensity factor) [11]의 함수로 표현된다. 응력확대계수를 결정하는 방법에는 가상 균열 진전법(Virtual crack extension method)[17,19], J-integral[12-14], Crack Opening Displacement(COD)[20,21]법이 있다. 이 연구에서는 응력확대계수를 산정하는데 혼합모드 균열의 경우 비교적 쉽게 응력확대계수를 산정할 수 있는 J-integral 을 사용한다.

이 장에서는 가상 균열 진전에 대한 총 에너지 방출량의 관점에서 J-integral 에 대하여 고찰하고 응력확대계수의 산정법, 그리고 피로 균열 전파 성장각 예측식과 성장량 예측식에 대하여 살펴본다. 마지막 절에서는 혼합모드를 갖는 2 차원 균열에서 균열 성장 곡선을 반복적으로 보정해 주는 모델링 기법을 제안한다.

3.1 J-integral

가상 균열 진전에 대한 총 에너지 방출량의 관점에서 2 차원과 3 차원의 J-integral 에 대해 살펴보고, 2 차원의 경우 곡선이나 꺾인 균열에서 J-integral 의

적분 경로에 따른 독립성에 대해 고찰한다.

3.1.1 2차원의 경우

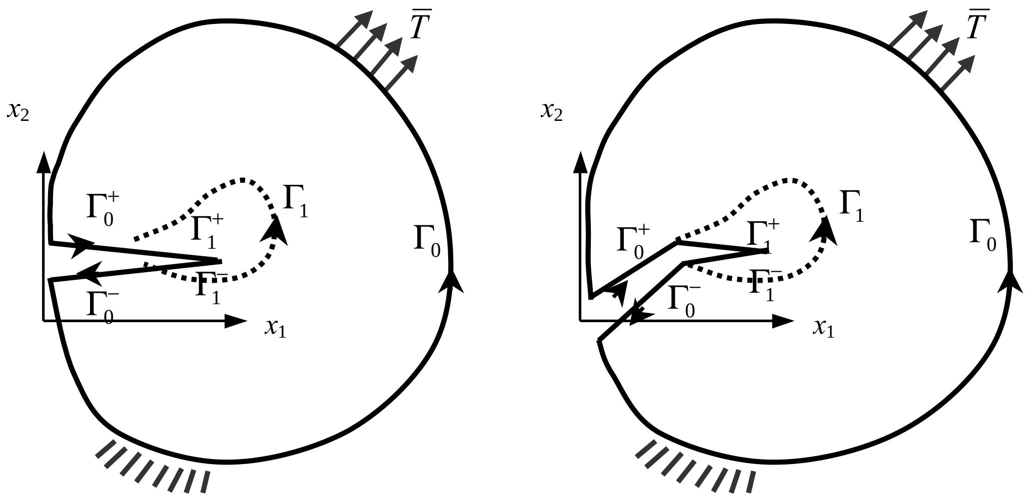
균열 길이가 l 인 구조물의 에너지 방출률 G 은 균열 선단에서 가상 균열 δl 이 진전하였을 때의 총 에너지 변화량과 관계가 있다.

$$G\delta l = -\delta\Pi \tag{3.1}$$

여기서, Π 는 구조물의 탄성 변형 에너지이다. 또한 에너지 방출률 G 은 균열면을 포함하는 구조물의 외부 경계면 Γ 를 따라 적분이 수행된 J-integral(J_1-integral)과 동일하다.

$$G = -\frac{\delta\Pi}{\delta l} = \oint_{\Gamma}(W\alpha_1 - T_i\frac{\partial u_i}{\partial x_1})d\Gamma = J = J_1 \tag{3.2}$$

여기서, W 는 단위 변형 에너지, $\boldsymbol{\alpha}$ 는 적분경로의 외향 법선 벡터이다. 많은 연구자들에 의해 J-integral 이 적분경로에 무관하다는 것이 증명되었다[11]. 그림 6 의 (a)와 같은 직선균열의 경우 균열면 상($\Gamma_0^+, \Gamma_1^+, \Gamma_0^-, \Gamma_1^-$)에서는 J-integral 의 피적분항이 영이 되기 때문에 적분경로에서 균열면을 제외할 수 있다. 그러므로 J-integral 은 균열을 제외한 외부 경계면 Γ_0 에서 적분한 값과 같다. 또한 Cauchy 적분 정리에 의하여 적분 영역을 균열 선단 주변으로 축소 시킨 Γ_1 에서 적분한 값과도 같다.



전체 외부 경계면 $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_0^+ + \Gamma_1^+ + \Gamma_0^- + \Gamma_1^-$

(a) 직선 균열 (b) 곡선이나 꺾인 균열

그림 6. J-integral 에서의 적분 경로

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \oint_{\Gamma} (W\alpha_1 - \sigma_{ij}\alpha_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_0} (W\alpha_1 - \sigma_{ij}\alpha_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_1} (W\alpha_1 - \sigma_{ij}\alpha_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

그러나 그림 6 의 (b)의 외부 경계면 Γ 와 같이 적분경로가 곡선 균열면이나 꺾인 점를 포함하는 경우에는 균열면 상(Γ_0^-, Γ_0^+)에서 피적분항이 0 이 아니기

때문에 균열면에서도 적분을 수행하여야 한다.

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \int_{\Gamma_0+\Gamma_0^{+}+\Gamma_0^{-}} (W\alpha_1 - \sigma_{ij}\alpha_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_1} (W\alpha_1 - \sigma_{ij}\alpha_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

유한요소법이나 EFG 법과 같이 경계에서 균열 경계면에서 선적분을 수행하기 어려운 경우에는 균열 선단과 가까운 직선 부분($\Gamma_1^{-}, \Gamma_1^{+}$)만을 포함하는 적분 영역($\Gamma_1$)을 선정한다. 대신 균열 진전이 매우 작은 경우, 높은 정도의 적분값을 얻기 위해서는 많은 자유도를 사용하여 촘촘한 그물망(Refined mesh)을 구성해야 한다.

앞에서 언급한 J_1-integral 은 균열 선단에서 가상의 단위 균열이 균열 방향으로 진전하였을 때의 에너지 방출률(Energy release rate)과 동일하다. 반면에 J_2-integral[14]은 가상의 단위 균열이 균열의 직각 방향으로 진전되었을 때의 에너지 방출률과 동일한 값이다.

J_2-integral 은 그림 6 의 (a)와 같은 직선균열의 경우에도 균열면 상 ($\Gamma_0^{+}, \Gamma_1^{+}, \Gamma_0^{-}, \Gamma_1^{-}$) 에서는 J_2-integral 의 피적분항이 영이 되지 않기 때문에 적분 경로에서 균열면을 제외할 수 없다. 마찬가지로 적분 경로를 균열 선단으로 축소시키더라도 그 내부 균열면의 적분을 추가해야 한다.

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \oint_{\Gamma} (W\alpha_2 - \sigma_{ij}\alpha_j \frac{\partial u_i}{\partial x_2}) d\Gamma \\
&= \oint_{\Gamma_0+\Gamma_0^+ +\Gamma_0^- +\Gamma_1^+ +\Gamma_1^-} (W\alpha_2 - \sigma_{ij}\alpha_j \frac{\partial u_i}{\partial x_2}) d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_1+\Gamma_1^+ +\Gamma_1^-} (W\alpha_2 - \sigma_{ij}\alpha_j \frac{\partial u_i}{\partial x_2}) d\Gamma
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

식 (3.5)에서 보는 것과 같이 J_2-integral 은 적분 경로를 어떻게 잡더라도 균열 경계면에서 적분을 제거할 수 없다. 따라서 유한요소법이나 EFG 법과 같이 경계에서 균열 경계면에서 선적분을 수행하기 어려운 경우에는 정확한 J_2 을 얻는데 한계가 있다.

3.1.2 3 차원의 경우

3 차원의 경우 균열 선단선을 따라 에너지 방출하는 정도가 모두 다르다. 따라서 에너지 방출률이 균열 선단선 C 의 점마다 정의 되게 되는데 이것이 Point-wise 에너지 방출률 $G(s)$ [17,18]이다. 여기서 s 는 균열 선단선 C 위의 점이다. 이 개념을 바탕으로 식 (3.1)을 3 차원으로 확장하면 다음과 같다.

$$
\int_C G(s)\delta l(s) ds = -\delta\Pi \tag{3.6}
$$

여기서, $\delta l(s)$ 는 s 에서의 가상 균열 진전량으로서 그 방향은 균열 선단선과는 수직이면서 균열면에는 포함되는 방향이다. 그림 7 을 보면 잘 나타나 있다.

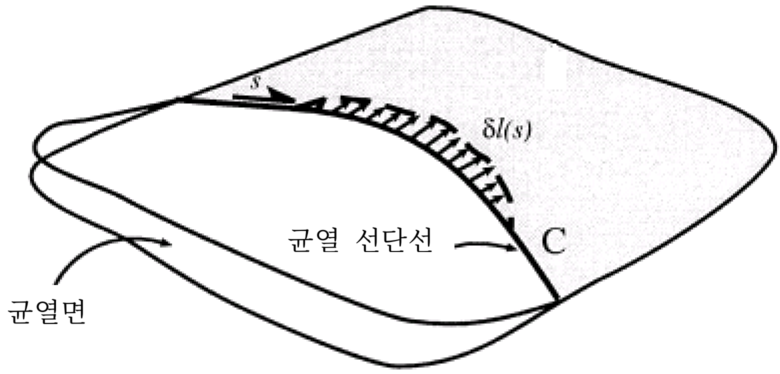


그림 7. 3차원에서의 균열 선단선 C 와 가상 균열 δl

Point-wise 에너지 방출률 $G(s)$ 에 대응하는 개념으로 Point-wise J-integral [17,18], $J(s)$ 이 있고 이 두 값은 적분 경로가 균열 선단 s 로 축소될 때 같은 값을 갖게 된다. 이 때 적분 경로 $\Gamma(s)$ 는 균열 선단 s 에서 균열 선단선 C 에 수직인 평면에 존재한다.

$$G(s) = J(s) = \lim_{\Gamma \to \Gamma_0} \int_{\Gamma(s)} (W\alpha_k n_k - \sigma_{ij}\alpha_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} n_k) d\Gamma \tag{3.7}$$

여기서, Γ_0 는 균열 선단에 충분히 가깝게 축소된 적분 경로, $\boldsymbol{\alpha}$ 는 $\Gamma(s)$ 가 포함되는 평면에서 $\Gamma(s)$ 의 외향 법선벡터이고 $\mathbf{n}$ 은 균열면을 포함하는 평면에서 s 에서의 C 의 외향 법선벡터이다. 결국 식 (3.6)와 (3.7)에서 J-integral 과 총 에너지 방출량과는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\int_C J(s)\delta l(s)ds = -\delta\Pi \tag{3.8}$$

3.2 Domain Integral Method

EFG 법이나 유한요소법과 같이 영역 적분을 기반으로 하는 수치해석 방법에서는 J-integral 을 선적분 하는 것 보다는 Equivalent domain integral method [13,17,18,22]을 사용하여 영역 적분으로 바꾸면 2 차원, 3 차원 문제에서 J-integral 의 값을 보다 편리하고 정확하게 얻을 수 있다고 널리 알려져 있다.

3.2.1 2 차원의 경우

Eshelby 의 Energy momentum tensor[23]를 도입하면 식 (3.2)는 다음과 같다.

$$J = \int_\Gamma (W\delta_{1j} - \sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_1})\alpha_j d\Gamma = \int_\Gamma P_{1j}\alpha_j d\Gamma \tag{3.9}$$

그림 8 에서와 같이 균열면과 만나는 새로운 적분 경로 Γ_1을 설정하고 Γ와 Γ_1 사이의 균열면을 각각 Γ^+, Γ^-라고 하자. 그리고 이 네 개의 경로로 만들어지는 단순 연결된 영역 Ω을 설정하고 그 경계를 Ψ ($=\Gamma_1 + \Gamma^+ - \Gamma + \Gamma^-$)라 하자. 이 경계에서의 외향 법선벡터는 $\boldsymbol{\beta}$ 이다. Γ 에서는 $\boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\alpha}$ 이고 Γ_1 에서는 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}$ 이다. 균열면에 하중이 재하되지 않는 문제에서는 J-integral 의 피적분항이 영이다. 따라서 식 (3.9)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

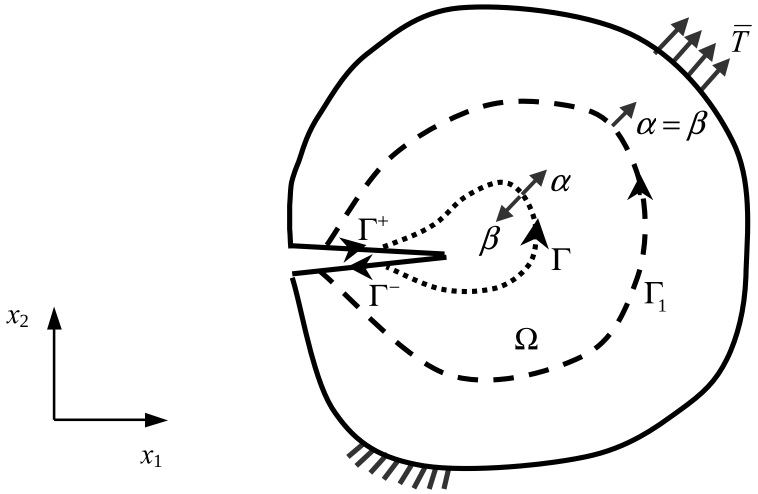


그림 8. 2차원에서의 J-integral 의 적분 영역 Ω

$$
\begin{aligned}
J &= -\int_{\Gamma} P_{1j} q_1 \beta_j d\Gamma = \int_{\Gamma_1+\Gamma^{+}-\Gamma+\Gamma^{-}} P_{1j} q_1 \beta_j d\Gamma \\
&= \int_{\Psi} P_{1j} q_1 \beta_j d\Gamma
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

여기서, q_1 는 Γ 에서는 1, Γ_1 에서는 0 이고 적분영역 Ω 에서 충분히 연속인 임의의 함수이다. 그리고 J-integral 의 값은 q_1 의 형상에 무관하다고 알려져 있다 [22]. 식 (3.10)에 발산 정리를 적용하면 다음과 같다.

$$
J = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (P_{1j} q_1) \right] dA = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial P_{1j}}{\partial x_j} q_1 + P_{1j} \frac{\partial q_1}{\partial x_j} \right] dA \tag{3.11}
$$

그런데 Ω에서 $\partial P_{1j} / \partial x_j = 0$ [23]이기 때문에 최종식은 다음과 같다.

$$J = \int_{\Omega} \left[W\delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] \frac{\partial q_1}{\partial x_j} dA \tag{3.12}$$

3.2.2 3 차원의 경우

식 (3.7)과 식 (3.8)에서 3 차원 문제에서의 가상 균열 진전에 대한 총 에너지 방출량[17,18]은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} -\delta\Pi &= \int_{C} \left[\lim_{\Gamma \to \Gamma_0} \int_{\Gamma(s)} P_{kj} n_k \alpha_j d\Gamma \right] \delta l(s) ds \\ &= \lim_{S \to S_0} \int_{S} P_{kj} n_k \alpha_j \delta l(s) dS \end{aligned} \tag{3.13}$$

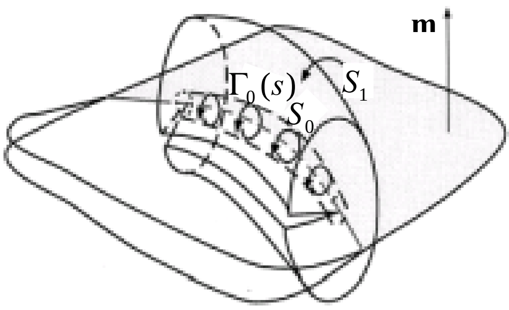
여기서, S_0는 그림 9 의 (a)와 같이 $\Gamma_0(s)$들로 이루어진 곡면이다. 그림 9 를 보면 적분 영역의 설정에 필요한 요소들이 나타나 있다. 그림 9 의 (a)에는 새로운 곡면 S_1, (b)에는 S^+, S^-, S_R, S_L의 면이 볼 수 있다. (a)에서의 $\mathbf{m}$은 균열면의 법선벡터이다. S_0, S_1, S^+, S^-, S_R, S_L으로 둘러싸인 영역을 Ω라고 하고 그 경계면을 Ψ ($= -S_0 + S_1 - S^+ + S^- + S_R + S_L$)라 하자. 이 때 Ψ의 외향 법선벡터가 $\boldsymbol{\beta}$이다. S_0에서 $\boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\alpha}$이고 S_1에서는 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}$이다. 또한 균열면 S^-와 S^+ 에서는 각각 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{m}$, $\boldsymbol{\beta} = -\mathbf{m}$이다. 만약 균열면에서 하중이 재하하지 않

는 문제의 경우 2차원에서와 마찬가지로 식 (3.13)의 피적분항이 S^-와 S^+에서는 0 이 된다. 그리고 S_R과 S_L에서는 $\delta l(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})=0$ 인 가상 균열 진전을 가정하면 식 (3.13)은 다음과 같이 성립한다.

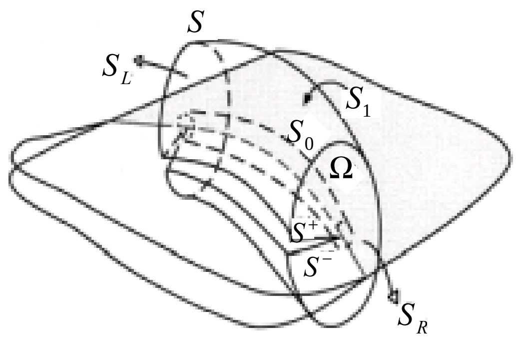
$$
\begin{aligned}
-\delta\Pi &= -\int_{S_0} P_{kj} n_k \beta_j \delta l(s) dS = \int_{-S_0+S_1+S_L+S_R-S^++S^-} P_{kj} n_k \beta_j \delta l(s) dS \\
&= \int_{\Psi} P_{kj} n_k \beta_j \delta l(s) dS
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

그리고 $\mathbf{q}$를 다음과 같이 설정한다.

$$
\mathbf{q} = \begin{cases} \delta l(s)\mathbf{n}(s) & \text{on the crack front} \\ 0 & \text{on } S_1 \\ 0 & \text{on } S_R \cup S_L \\ \mathbf{q}\cdot\mathbf{m} = 0 & \text{on } S^+ \cup S^- \end{cases}
\tag{3.15}
$$



(a) 균열선단선과 S_0, S_1



(b) 적분 영역 Ω

그림 9. 3차원에서의 총 에너지 방출량의 적분 영역 Ω

여기서, 세번째 조건은 S_R과 S_L이 구조물의 경계와 만나지 않을 때만 유효하다. 만약 구조물의 경계와 만나면 경계면에 대한 $\mathbf{q}$의 법선 방향 성분만 0 이 되면 된다. ($\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\beta}=0$) 식 (3.14)과 식 (3.15)에서 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$-\delta\Pi = \int_{\Psi} P_{kj} q_k \beta_j dS \tag{3.16}$$

식 (3.16)에 발산정리를 사용하면 총 에너지 방출량을 다음의 부피 적분으로 나타낼 수 있다.

$$-\delta\Pi = \int_{\Omega} \left[W\delta_{kj} - \sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] \frac{\partial q_k}{\partial x_j} dV \tag{3.17}$$

3 차원의 경우에는 2 차원의 경우와는 달리 에너지 방출률 식 하나 만으로는 균열 선단선을 따라 변하는 Point-wise J-integral 값을 구할 수 없다. 그래서 이산화 과정[17,18]이 필요한데 그것에 관한 그림이 그림 10 에 나타나 있다. 그림에서 보는 봐와 같이 균열을 M 개의 균열 선단 절점과 $M-1$ 개의 균열 선단선으로 이산화 하고 균열 선단 절점의 Point-wise J-integral 값을 미지수로 놓고 균열 선단 절점과 절점 사이는 선형 보간 하였다. 식 (3.8)과 식 (3.17)을 이용하면 하나의 가상 균열 진전 $\delta l(s)$ 에 대하여 하나의 식을 얻을 수 있다. 그런데 구하는 Point-wise J-integral 값이 M 개 이므로 서로 다른 M 개의 가상 균열 진전 $\delta l(s)$ 에 대하여 식 (3.8)과 식 (3.17)을 이용하면 총 M 개의 미지수를 갖는 M

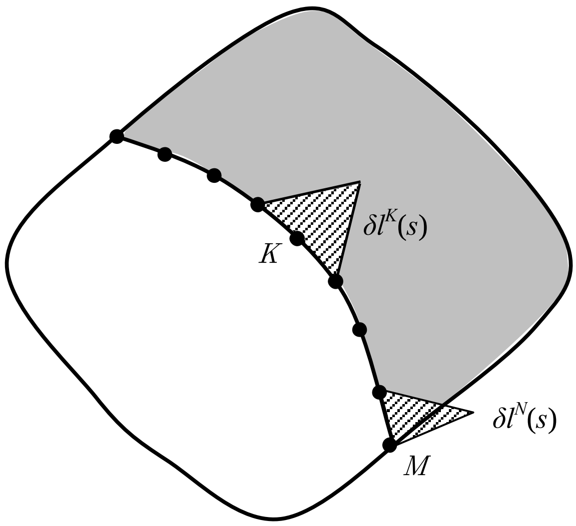


그림 10. 균열의 이산화와 가상 균열 진전 $\delta l(s)$

개의 식을 세울 수 있다. 이 식을 통해 각 균열 선단 절점에서의 Point-wise J-integral 값을 구하고 선형 보간을 통해 균열 선단선을 따라 변하는 J-integral 값을 얻을 수 있다.

K 번째 가상 균열 진전에 대한 총 에너지 방출량은 식 (3.8)과 식 (3.17)으로부터 구할 수 있다.

$$-\delta\Pi^K = \int_C J(s)\delta l^K(s)ds \tag{3.18}$$

$$-\delta\Pi^K = \int_\Omega \left[W\delta_{kj} - \sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] \frac{\partial q_k^K}{\partial x_j} dV \tag{3.19}$$

식 (3.18)을 정식화하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
-\delta\Pi^K &= \int_C J(s)\delta l^K(s)ds \\
&= \sum_j^{M-1}\left\{\int_{-1}^{1} N_L(\eta)\left\langle \delta l_L^K \right\rangle_j N_P(\eta)\langle J_P\rangle_j \bar{J}(\eta)\,d\eta\right\} \\
&= \sum_j^{M-1}\left\langle \delta l_L^K \right\rangle_j^T \left\{\int_{-1}^{1} N_L^T(\eta)N_P(\eta)\bar{J}(\eta)d\eta\right\}\langle J_P\rangle_j \\
&= \sum_j^{M-1}\left\langle \delta l_L^K \right\rangle_j \sum_i^{N_Q}\left\{N_L^T(\eta_i)N_P(\eta_i)\bar{J}(\eta)W_i(\eta)\right\}\langle J_P\rangle_j
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

여기서, N 은 형상함수, $\left\langle l_L^K \right\rangle$는 K 번째 가상 균열 진전에 대한 균열 선단 절점 L 의 가상 균열 진전량, $\left\langle J_P \right\rangle$ 는 균열 선단 절점 P 의 J-integral, L =1,2, P =1,2 이다. 그리고 N_Q 는 가우스 적분점의 개수, $\bar{J}(\eta)$ 는 Jacobian 값이며 W 는 각 가우스 적분점에 해당하는 가중치이다.

최종적으로 식 (3.19)과 식 (3.20)을 가지고 각 가상 균열 진전에 대한 M 개의 식을 세울 수 있다.

3.3 응력확대계수의 산정

균열전파의 방향과 피로균열의 성장량을 결정하기 위해서는 응력확대계수를 구해야 한다. 혼합모드의 응력확대계수를 평가하는 대표적인 방법으로는 J_k-integral 법[14], 균열 선단의 해석해를 이용하는 Interaction energy integral method [12,24] 등이 있다.

3.3.1 2 차원의 경우

이 연구에서는 EFG 법을 이용하였는데 EFG 법은 균열면 경계에서 적분값을 정확히 얻기 어렵기 때문에 균열면상에서 선적분이 필요없는 Interaction energy integral method 을 사용한다. 이 때 적분 영역은 균열 선단에서 가까운 직선면만을 포함한다. 그리고 이를 Equivalent Domain Integral[13,17,18,22]을 이용하여 선적분을 면적분으로 변환하여 계산한다.

J-integral 에서 J 는 다음과 같이 응력확대계수로 표현될 수 있다.

$$J = \alpha({K_{\mathrm{I}}}^2 + {K_{\mathrm{II}}}^2) \tag{3.21}$$

$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{E} & \text{for plane stress} \\ \dfrac{1-v^2}{E} & \text{for plane strain} \end{cases} \tag{3.22}$$

여기서 E 는 물질의 탄성계수, v 는 포아송 비이다.

두개의 독립적인 평형상태에 대해서 생각해 보면 1 과 2 로 표현되는 두 가지 평형상태에서의 값을 중첩시켜 새로운 평형상태의 J 값을 구할 수 있다.

$$J^{(0)} = J^{(1)} + J^{(2)} + M^{(1,2)} \tag{3.23}$$

여기서,

$$M^{(1,2)} = \int_{\Gamma}\left(W^{(1,2)}dy - \left[T_i^{(1)}\frac{\partial {u_i}^{(2)}}{\partial x} + T_i^{(2)}\frac{\partial {u_i}^{(1)}}{\partial x} \right] ds \right) \tag{3.24}$$

식 (3.21)의 관계를 이용하면 다음과 같다.

$$J^{(0)} = \alpha([K_{\mathrm{I}}{}^{(1)} + K_{\mathrm{I}}{}^{(2)}]^2 + [K_{\mathrm{II}}{}^{(1)} + K_{\mathrm{II}}{}^{(2)}]^2) \tag{3.25}$$

이를 정리하면,

$$J^{(0)} = J^{(1)} + J^{(2)} + 2\alpha(K_{\mathrm{I}}{}^{(1)}K_{\mathrm{I}}{}^{(2)} + K_{\mathrm{II}}{}^{(1)}K_{\mathrm{II}}{}^{(2)}) \tag{3.26}$$

식 (3.23)와 (3.26)로부터

$$M^{(1,2)} = 2\alpha(K_{\mathrm{I}}{}^{(1)}K_{\mathrm{I}}{}^{(2)} + K_{\mathrm{II}}{}^{(1)}K_{\mathrm{II}}{}^{(2)}) \tag{3.27}$$

결국 식 (3.24)과 식 (3.27)의 식을 통해서 응력확대계수를 구할 수 있다. 즉, 식 (3.27)에 각각 $K_{\mathrm{I}}{}^{(2)} = 1, K_{\mathrm{II}}{}^{(2)} = 0$ 인 경우와 $K_{\mathrm{I}}{}^{(2)} = 0, K_{\mathrm{II}}{}^{(2)} = 1$ 인 상태의 응력분포를 대입하여 실제 구하고자 하는 모드 1 과 모드 2 의 응력확대계수를 산정한다. 이 때 식 (3.24)의 경계적분을 정확히 수행하기 어렵기 때문에 3.2 절에서와 마찬가지로 여기에 Equivalent domain integral method 를 사용하여 면적분으로 변환하면 다음과 같다.

$$M^{(1,2)} = \int_{\Omega} \left[(\sigma_{ij}{}^{(1)} \frac{\partial u_i{}^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}{}^{(2)} \frac{\partial u_i{}^{(1)}}{\partial x_1}) - W^{(1,2)}\delta_{1j} \right] \frac{\partial q_1}{\partial x_j} dA \tag{3.28}$$

3.3.2 3차원의 경우

3 차원 균열문제에서 해석해를 이용하여 응력확대계수의 모드 분리[24]하는 방법을 사용하였다. 3 차원 균열 문제의 경우 균열이 모드 1,2 뿐만 아니라 모드 3의 균열도 존재하게 된다. 따라서 K_{III}에 관한 항들이 추가되게 된다. 3.3.1 절에서와 같은 방식으로 식을 유도해 가면 결국 다음의 두식을 얻게 된다.

$$M^{(1,2)} = \frac{2(1-\nu^2)}{E}\left(K_{\mathrm{I}}^{(1)}K_{\mathrm{I}}^{(2)} + K_{\mathrm{II}}^{(1)}K_{\mathrm{II}}^{(2)}\right) + \frac{2(1+\nu)}{E}K_{\mathrm{III}}^{(1)}K_{\mathrm{III}}^{(2)} \quad (3.29)$$

$$M^{(1,2)} = \int_{\Omega}\left[W^{(1,2)}\delta_{kj} - \sigma_{mj}^{(1)}u_{m,k}^{(2)} - \sigma_{m,j}^{(2)}u_{m,k}^{(1)}\right]\frac{\partial q_k}{\partial x_j}dV \quad (3.30)$$

식 (3.29)과 식 (3.30)를 이용하여 $K_{\mathrm{I}}^{(2)} = 1, K_{\mathrm{II}}^{(2)} = 0, K_{\mathrm{III}}^{(2)} = 0$ 인 경우, $K_{\mathrm{I}}^{(2)} = 0, K_{\mathrm{II}}^{(2)} = 1, K_{\mathrm{III}}^{(2)} = 0$ 인 경우, $K_{\mathrm{I}}^{(2)} = 0, K_{\mathrm{II}}^{(2)} = 0, K_{\mathrm{III}}^{(2)} = 1$ 인 경우 모두 세가지 경우에 각각의 응력분포를 대입하여 실제 구하고자 하는 모드 1 과 모드 2, 모드 3 의 응력확대계수를 산정한다.

3.4 균열 성장 방향 예측

균열 전파를 모형화하기 위해서는 균열의 성장 방향을 예측해야 한다. 균열 전파 방향을 예측하는 식으로 몇 가지가 제안되어 있다[15,16,21]. 이 중에서 가장 많이 사용되는 식으로는 최소 변형에너지 밀도 기준식과 최대 주응력 방향식을

들 수 있다. 이 두 가지의 기준에서는 균열은 기존의 균열 선단의 접면에 수직한 면을 따라 전파한다고 가정하며 전파 방향을 다음과 같은 식으로 결정한다.

$$\mathbf{v}^p = \mathbf{v}^p(\mathbf{n},\mathbf{b},\mathbf{t}) = (\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta_{cr}}}, \frac{\tan\theta_{cr}}{\sqrt{1+\tan^2\theta_{cr}}}, 0) \qquad (3.31)$$

여기서 $\mathbf{v}^p$ 는 균열의 진행 방향이며 $\mathbf{t}$ 는 균열 선단의 접면 방향 벡터, $\mathbf{n}$ 은 법선 방향 벡터 그리고 $\mathbf{b}$ 는 $\mathbf{n}$ 과 $\mathbf{t}$ 에 수직한 방향 벡터이다. 균열 전파각 θ_{cr} 는 각 전파 방향 예측 기준에 따라 결정된다. 최소 변형 에너지 밀도 기준에서는 변형에너지 밀도를 최소화 하는 방향으로 전파각을 결정하며, 최대 주응력 방향 기준에서는 전파각을 균열 선단에서의 주응력 방향과 일치하도록 결정한다. 이 연구에서는 최대주응력한계론 (Maximum principal stress criterion) [15]

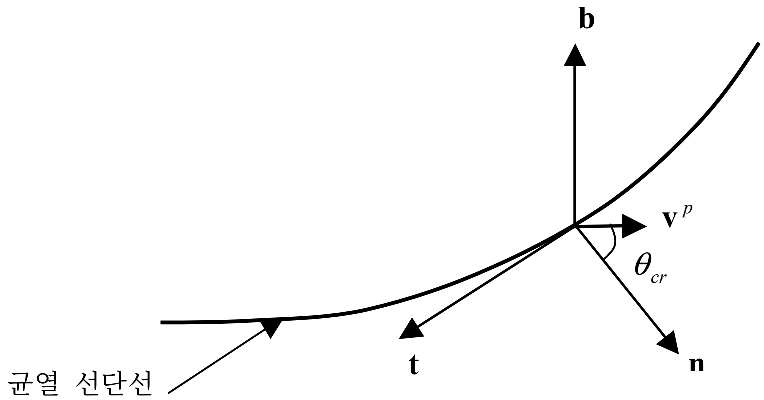


그림 11. 3차원에서의 균열 전파 벡터 형상

을 사용하였다.

2 차원에서의 균열 진전각은 다음과 같은 방법으로 계산할 수 있다. 균열 선단 주변에서 응력은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \times \begin{bmatrix} K_{\mathrm{I}}(1+\sin^2\frac{\theta}{2}) + K_{\mathrm{II}}(\frac{3}{2}\sin\theta - 2\tan\frac{\theta}{2}) \\ K_{\mathrm{I}}\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}K_{\mathrm{II}}\sin\theta \\ \frac{1}{2}K_{\mathrm{I}}\sin\theta + \frac{1}{2}K_{\mathrm{II}}(3\cos\theta - 1) \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

최대 주응력 방향은 전단응력이 0 이 되는 방향으로서 다음식을 이용하여 계산할 수 있다.

$$K_{\mathrm{I}}\sin\theta_{cr} + K_{\mathrm{II}}(3\cos\theta_{cr} - 1) = 0 \tag{3.33}$$

여기서, θ_{cr} 은 균열 진전각이다.

3차원의 경우는 모드 I 과 모드 III의 응력확대계수를 조합하여 구한 등가응력확대계수를 이용하여 구할 수 있다.[21]

$$K_{eq} = K_{\mathrm{I}} + B|K_{\mathrm{III}}| \tag{3.34}$$

여기서, B 는 실험적으로 구한 지수이다.

진전각 θ_{cr} 는 다음과 같은 식으로 구한다.

$$\theta_{cr} = 2\tan^{-1}\left[\frac{K_{eq}}{4K_{\mathrm{II}}} \pm \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{K_{eq}}{K_{\mathrm{II}}}\right)^2 + 8} \right] \tag{3.35}$$

식 (3.35)에서 부호는 K_{II}의 부호에 의해서 결정된다. K_{II}가 음수인 경우는 (+)이고 K_{II}가 양수인 경우는 (–)이다.

3.5 피로 균열 성장량 계산

일정진폭의 주기하중에 대해 피로균열 성장비는 하중의 크기보다는 균열 선단의 응력확대계수 범위의 영향을 더 많이 받는다. Paris 는 이를 관찰하여 거시적인 관점에서 파괴역학 파라미터의 함수들로 피로균열성장에 대한 경험적인 식을 제안하였는데 이는 다음과 같다[16].

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \tag{3.36}$$

여기서, a는 균열의 길이, N은 피로하중 재하 횟수, $\Delta K\,(K_{\max} - K_{\min})$는 피로하중에 대한 응력확대계수 범위인데 주로 등가응력확대계수를 사용한다. C와 m은 재료와 관련된 상수이다. 2 차원 문제에서는 Yan 등[25]이 다음과 같은 등가 응력확대계수를 제안하였다.

$$\Delta K_{\mathrm{eq}} = \frac{1}{2}\cos\frac{\theta_{cr}}{2}\cdot\left\{\Delta K_{\mathrm{I}}\,(1+\cos\theta_{cr}) - 3\Delta K_{\mathrm{II}}\sin\theta_{cr}\right\} \tag{3.37}$$

3차원의 경우 Gerstle [21]가 제안한 등가 응력확대계수는 다음과 같다.

$$K_{eq}^2 = \left(K_{\mathrm{I}} + B\left|K_{\mathrm{III}}\right|\right)^2 + 2K_{\mathrm{II}}{}^2 \tag{3.38}$$

ΔK 가 균열 길이의 함수이므로 식 (3.36)는 비선형 방정식이 된다. 이 연구에서는 일정한 피로하중 횟수에 따른 균열 진전량을 계산하기 위해서 다음과 같은 반복계산법을 사용하였다.

$$\Delta a_i = C\left(\frac{(\Delta K_i^1)^m + (\Delta K_i^j)^m}{2}\right) \times \Delta N \tag{3.39}$$

여기서, 밑 첨자 i 는 균열 진전 횟수이고, 윗 첨자 j 는 i 번째 균열 진전을 위한 반복계산 횟수이다.

3.6 피로 균열의 반복적인 균열 성장 모델링

혼합모드의 2 차원 피로균열 문제에서는 균열이 한쪽 방향으로 나아가기 보다는 꺾이거나 곡선을 이루게 된다. 이때 균열을 유한한 크기의 접선 방향으로 진전시킬 경우 실제 균열 경로에서 벗어나게 되고 균열이 진전할수록 그 차이는 커지게 된다. 따라서 균열 방향과 크기를 반복적으로 갱신해 주어야만 좀 더 정확히 균열 진전을 모사할 수 있다. Portela 등[20]은 진전 후의 성장 방향을 이용하여 진전하기 전의 균열 성장 방향을 반복적으로 보정하였고, Mogilevskaya [26]는 해석적인 방법으로 응력확대계수를 평가하고 균열 진전을

원호로 가정하였다. 그러나 대부분의 연구에서는 균열의 진전을 초기 진전율과 접선방향으로 균열을 진전 시키는 방법을 사용해 왔다. 이 연구에서는 2 차원 균열 문제에서 적용할 수 있는 다음과 같은 균열 성장 곡선을 반복적으로 보정해 주는 모델링 기법을 제안한다.

균열 곡선을 포물선으로 가정하고, 균열 선단에서 가정한 기하 곡선의 접선 방향과 해석적으로 구한 균열 진전각이 같다는 가정에 의해 균열의 회전각을 연속으로 유지할 수 있다.

여기에서 균열 곡선을 포물선으로 사용한 이유는 다음과 같다. 그림 12 를 보면 균열이 성장하기 전 P_i 에서 좌표와 균열 접선각을 알고 있고, 가정한 곡선으로 균열을 진전시킨 뒤 P_{i+1} 에서 해석을 통해 새로운 균열 접선각을 알기 때

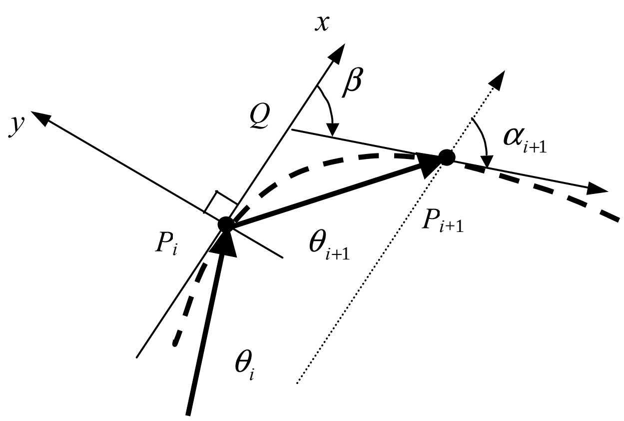


그림 12. 포물선을 이용한 곡선 균열의 이산화

문에 총 3 개의 조건이 있다. 이 3 개의 조건으로 유일하게 결정되는 다항식이 포물선이기 때문에 이 연구에서는 포물선을 사용하였다.

다음은 균열을 포물선으로 가정할 경우 균열 선단을 결정하는 방법이다.

1) 기존의 균열에서 정해석을 통해 균열의 접선 방향과 성장 길이를 구하고 그 방향으로 균열을 진전시킨다(Q 결정). 그리고 균열이 성장하기 전의 위치를 원점으로 하고 성장 접선방향을 x 축으로 하는 지역 좌표계를 설정한다.

2) 균열 곡선을 포물선으로 가정할 경우 균열이 P_i 를 지나고 또한 P_i 에서 1)에서 구한 접선방향으로 균열이 성장하여야 하기 때문에 지역좌표계에 접해야 한다. 결국 포물선은 $y = bx^2$ 의 형태가 된다. 균열 선단 Q 에서 정해석을 통하여 진전각(β)과 새로운 성장 길이(Δa_i) 구한다. 이때 식 (3.39)를 이용한다.

3) b 를 결정하기 위해서는 하나의 조건이 필요한데 초기치로서 진전각(β)을 사용한다. $x = \Delta a_i$ 에서 포물선의 기울기와 진전각(β)이 같도록 b 를 결정한다.

$$b = \left(\frac{\tan(\beta)}{2\Delta a_i} \right) \tag{3.40}$$

그리고 균열 선단 $P_{i+1}(x_1, y_1)$은 다음의 식을 이용하여 결정한다.

$$\Delta a_i = \int_0^{x_1} \sqrt{1+4b^2x^2}\,dx \cong \int_0^{x_1} (1+2b^2x^2)dx = x_1 + \frac{2}{3}b^2x_1^3 \tag{3.41a}$$

$$y_1 = bx_1^2 \tag{3.41b}$$

그리고 P_i 와 P_{i+1}를 이용하여 균열 성장각(θ_{i+1})을 결정한다.

4) 기존의 균열 성장각(θ_{i+1})과 균열 선단 P_{i+1} 에서 정해석을 통하여 새로운 진전각(α_{i+1})을 구하고 식 (3.39)을 이용하여 균열 성장 길이($\Delta a_i^{'}$)를 구한다.

5) 균열 선단 P_{i+1} 에서 포물선의 기울기와 새로운 진전각(α_{i+1})이 같도록 b 를 다음의 식을 이용하여 수정한다.

$$b = \left(\frac{\tan(\alpha_{i+1})}{2x_1} \right) \tag{3.42}$$

그리고 수정된 포물선 식을 가지고 균열 선단 $P_{i+1}(x_1, y_1)$을 식 (3.41)을 이용하여 수정한다. 그리고 P_i 와 수정된 P_{i+1} 를 이용하여 새로운 균열 성장각($\theta_{i+1}^{'}$)을 결정한다.

6) 기존의 균열 성장각(θ_{i+1})과 새로운 균열 성장각($\theta_{i+1}^{'}$)으로 각의 수렴성을, 그리고 기존의 균열 성장 길이(Δa_i)와 새로운 균열 성장 길이($\Delta a_i^{'}$)로 부터 길이의 수렴성을 조사한다. 수렴하지 않을 경우 균열 성장각은

$\theta_{i+1} = \theta_{i+1}^{'}$ 으로, 균열 성장 길이는 $\Delta a_i = \Delta a_i^{'}$ 로 수정하고 성장각과 성장 길이가 수렴할 때까지 4), 5)의 과정을 반복한다.

7) 수렴 조건을 만족하면 균열 곡선을 확정(P_{i+1} 를 확정)하고 1), 2), 3), 4), 5), 6)의 과정을 통해 새로운 균열을 성장시킨다.

4. 예제

이 연구에서 사용한 EFG 법의 수치적 정확성을 검증하고 균열 모형화 및 해석의 편이성을 확인하고 피로 균열 성장을 해석해 보기 위해서 세 가지 예제를 수행해 보았다.

첫번째 예제는 전단을 받은 2 차원 균열 문제로서 J-integral 를 통해 얻은 모드 I 과 모드 II 에 대한 응력확대계수를 적분 경로에 따라 비교하여 J-integral 의 적분 경로에 대한 독립성을 보이고 해석의 정확성을 검증한다. 두번째 예제는 인장을 받는 3 차원 관통 균열 문제로서 균열의 두께 방향으로의 응력확대계수의 변화를 살펴본다. 세번째 예제는 인장을 받는 2 차원 경사 균열 문제로서 3.6 절에서 제안한 피로 균열의 반복적인 균열 성장 모델의 타당성을 검증한다.

4.1 적분 경로에 따른 J-integral의 독립성 예제

혼합모드 상태의 균열문제를 다루기 위하여 그림 13 과 같이 편측균열이 있는 직사각형의 판에 전단 응력을 가하였다. 이 때 적분 경로를 변화시켜 가면서 J-integral 을 수행하고 이를 이용하여 응력확대계수를 산정하였다. 7cm×16cm 의 직사각형 판으로서 좌변 중앙에 3.5cm 의 균열이 있고 구조물의 윗 변에 σ_{xy} = 1.0 kN/cm^2 의 전단을 받고 있다. 판은 강철로 생각하고 물성치는 탄성계수가 210×10^2 kN/cm^2 이고 포아송비는 0.3 로 가정한다.

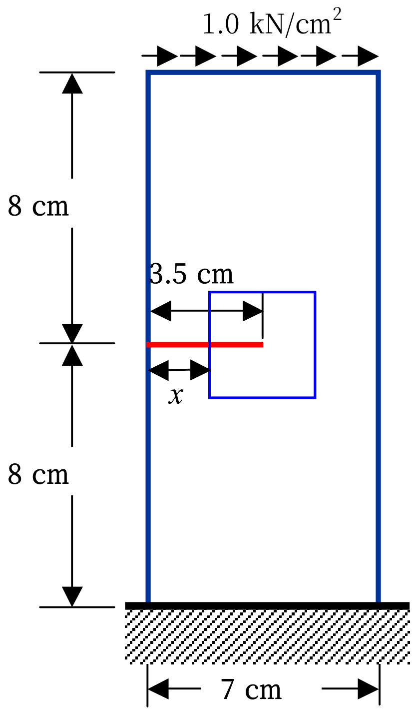


그림 13. 전단응력을 받는 편측 균열 (예제 1)

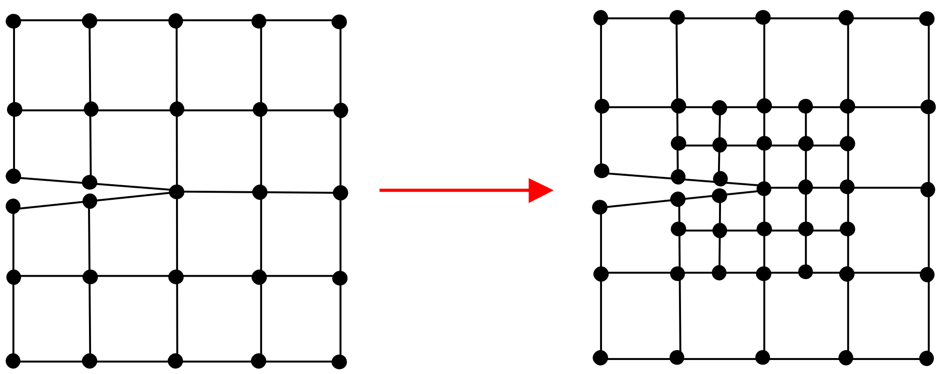


그림 14. 균열 선단 주변의 절점 배치 방법

그림 14 은 균열 선단에서 절점을 추가하는 방식에 대하여 설명해 주고 있다. 그림 14 의 왼쪽 그림은 균열 선단 주변의 절점의 배치와 적분을 위한 요소망을 나타내고 있다. 각각의 사각형은 적분을 위한 하나의 요소망이고 균열을 기준으로 절점을 위 아래로 나누어 복절점으로 나누었다. 오른쪽 그림은 균열 선단에서 절점을 추가하는 알고리즘을 설명하고 있다. 균열 선단 주변의 하나의 사각형 요소망을 네 개의 사각형 요소망으로 나누고 격자점마다 절점을 추가한다. 물론 적분을 위한 요소망도 하나에서 네 개로 나누어짐으로써 적분의 정확성을 유지하였고 절점과 절점이 겹쳐서 생기는 불안정성도 피할 수 있다. 이 알고리즘을 이용하여 기본적으로 정방으로 절점을 배치하고 균열 선단에서 절점을 추가로 배치하였다. 예제 1 의 절점 배치는 그림 15 에서 볼 수 있다. 기본 15×33 의 배치에 균열 선단에서 위의 방식으로 절점을 추가하여 총 절점 수가 908 개이고, 적분을 위한 요소망은 784 개이다. 적분은 모든 요소망에서 4×4 Gauss 적분점을 사용하였다.

그림 13 과 15 의 가운데 직사각형 영역이 J-integral 의 적분 영역이다. 여기서 x 는 구조물의 왼쪽 변과 J-integral 적분 경로의 왼쪽 변 사이의 거리이다. 직선 균열이므로 J-integral 의 균열면에서 적분할 필요가 없고 선적분을 Equivalent domain integral method 를 이용하여 면적분으로 치환하였다. 혼합모드의 응력확대계수를 얻는 방법은 Interaction energy integral method 를 사용하였다. x 를 늘려가면서 적분 영역도 균열 선단을 중심으로 줄이면서 J-integral 을 수행하고 이를

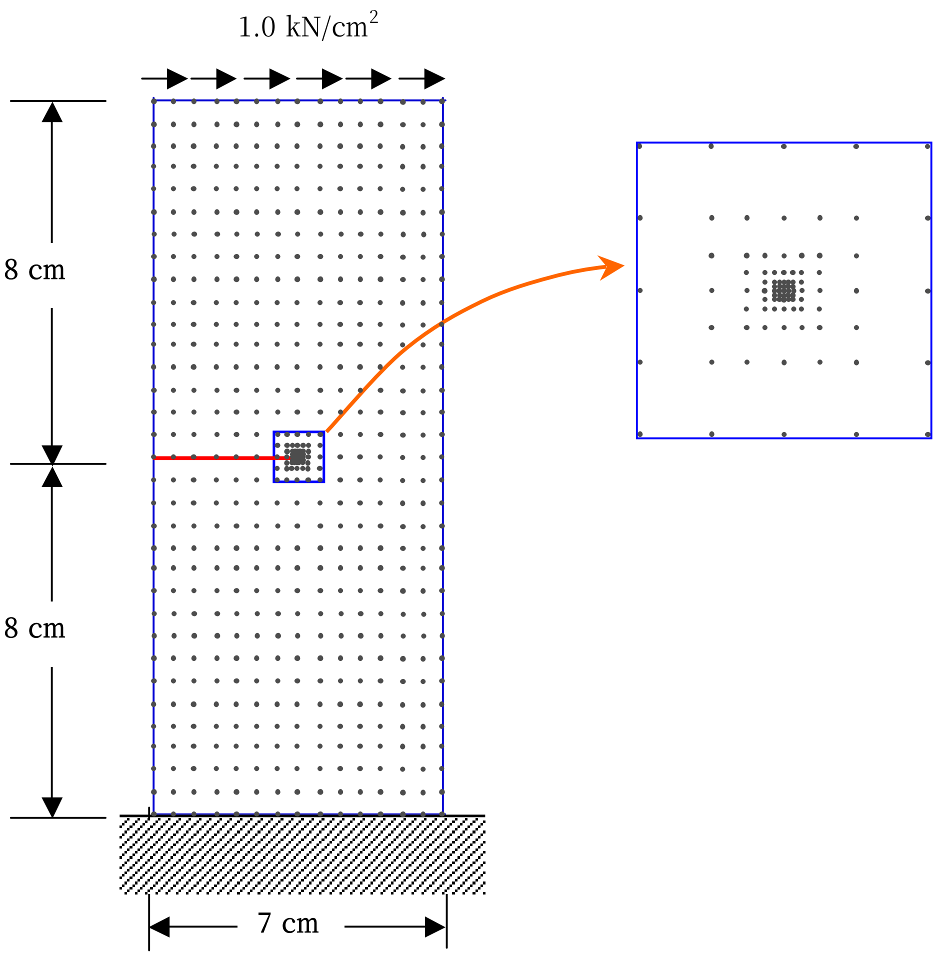


그림 15. 예제 1의 절점 배치와 J-integral의 적분 영역

이용하여 응력확대계수를 산정하였다. Wilson 이 1969 년에 Boundary collocation method[12]를 통해 구한 이론해는 K_{I} =34.00 KN/cm$^{3/2}$, K_{II} =4.55 KN/cm$^{3/2}$ 이다.

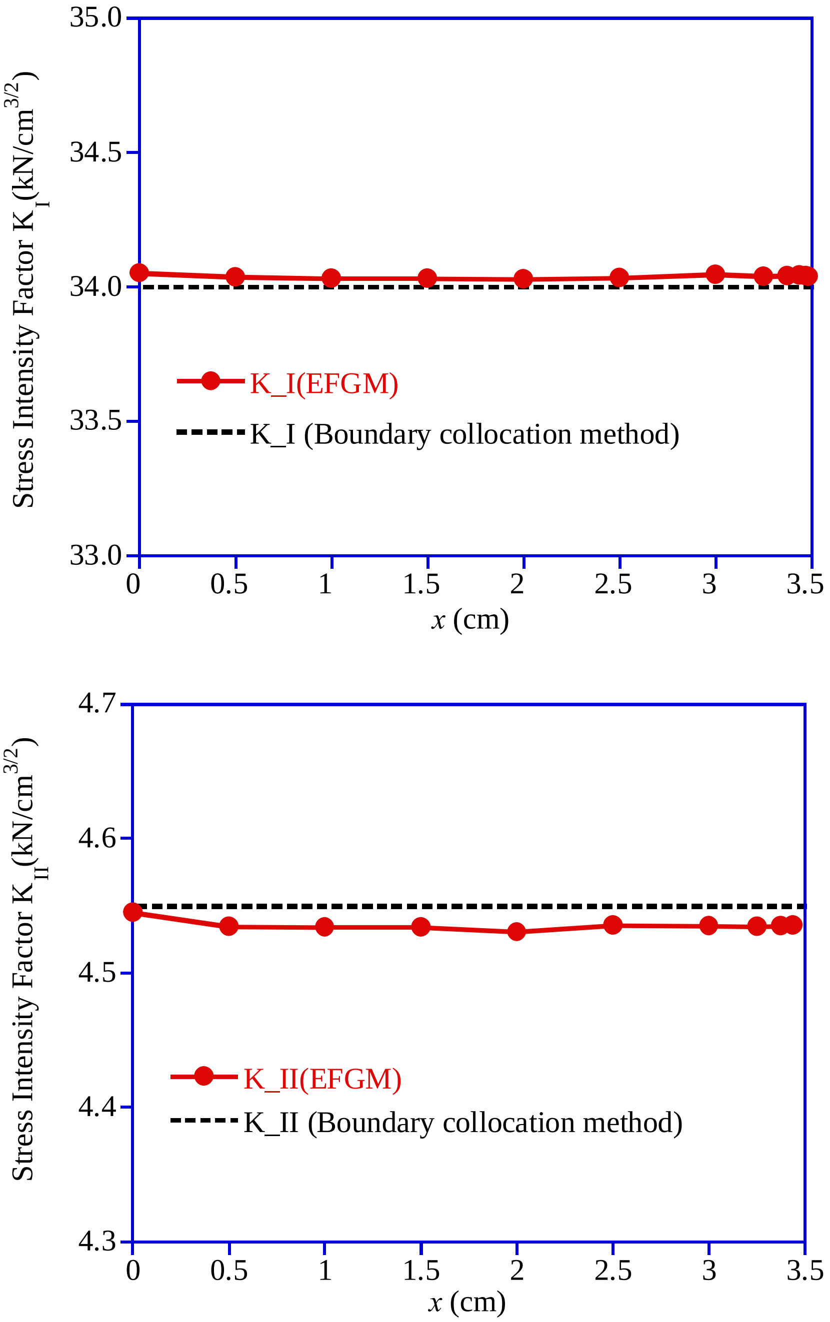


그림 16. J-integral 영역 변화에 따른 응력확대계수의 변화

그림 16 을 보면 J-integral 영역 변화에 따른 응력확대계수의 값들을 보여주고 있다. 그림에서 보는 봐와 같이 적분 영역의 변화에 따라 K_{I} 과 K_{II} 가 영역의 크기에 관계없이 일정한 값을 갖는 것을 볼 수 있다. 그리고 참고해와 비교해도 거의 차이가 나지 않는다. 오차가 큰 경우가 약 0.5%정도이다.

이 예제를 통하여 J-integral 의 적분 경로에 대한 독립성과 영역 적분의 타당성, 해석의 정확성 등을 검증하였다.

4.2 3차원 응력확대계수의 변화 예제

3 차원 균열 문제를 다루기 위해서 그림 17 과 같이 두께가 t 인 편측 관통 균열이 있는 구조물에 인장 응력을 가하였다. 먼저 t =1cm 일 경우에 응력확대계수의 값을 구해보고 이 값을 2 차원 평면응력상태의 해와 비교해 보았다. 그리고 t =10cm 일 경우에 두께 방향으로의 응력확대계수의 변화를 살펴보았다. 그림 17 를 보면 예제에 쓰인 구조물의 기하 형상과 하중조건을 볼 수 있다. 가운데의 빗금친 면이 균열을 나타내고 인장하중이 20kN/cm^2 작용하고 있다. 재료는 강철로서 물성치는 탄성계수가 210×10^2 kN/cm^2 이고 포아송비는 0.3 으로 가정한다.

표 1 은 t =1cm 일 경우에 포아송비가 0.0, 0.3 일 때의 모드 1 의 응력확대계수를 나타내고 있다. 이때 총 절점 462 개, 요소망 200 개를 사용하였다. 모드 2 와 모드 3 의 응력확대계수는 모든 경우에 0 이기 때문에 논의에서 제외하겠다. 그

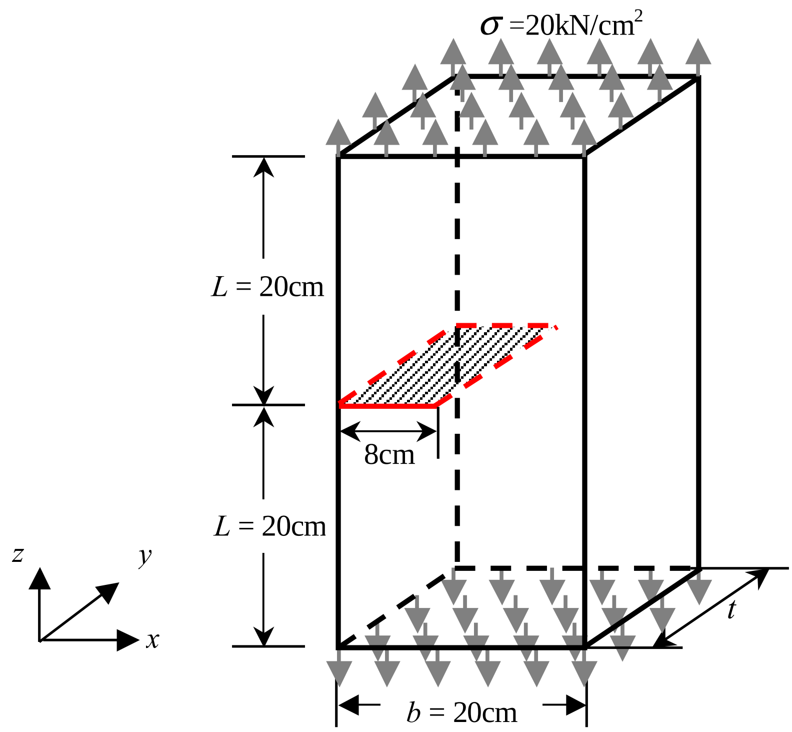


그림 17. 인장을 받는 3차원 편측 균열 문제 (예제 2)

표 1 t =1cm 일 때 응력 확대 계수

단위 : KN/cm$^{3/2}$

	2차원 평면응력상태	3차원
ν = 0.0	184.70	184.70
ν = 0.3	187.43	191.72

리고 3 차원의 경우 두께 방향으로 응력확대계수가 거의 일정한 값이 나와서 그 대표값을 사용하였다. 결과를 보면 포아송비가 0.0 일 때는 3 차원의 응력확대계수와 2 차원의 평면응력상태의 응력확대계수가 모두 같은 값을 갖고 포아송비가 0.3 일 경우에는 3 차원의 응력확대계수가 2 차원 평면응력상태의 응력확대계수보다 약간 큰 것을 볼 수 있다. 이는 z 축 방향의 인장이 y 방향으로의 압축 효과를 나타내기 때문에 두께 방향을 고려할 경우에 응력 집중이 더 심해지기 때문에 나타나는 현상이다. 그리고 같은 2 차원 문제에서 포아송비가 0.3 인 경우에 응력확대계수의 값이 더 큰 것은 x 축방향으로의 압축 효과이다.

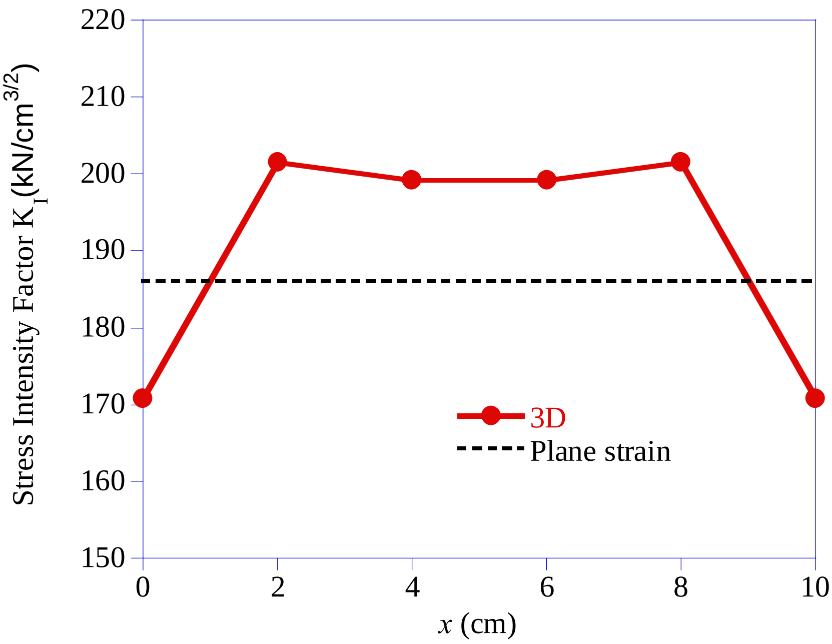


그림 18. t=10cm 일 때의 두께 방향으로의 응력확대계수

그림 18 은 t=10cm 일 때의 두께 방향으로의 모드 1 의 응력확대계수의 변화를 나타낸다. 이 때 총 절점 1410 개, 요소망 1000 개를 사용하였다. 당연히 모드 2 와 모드 3 의 응력확대계수는 0 이다. 그림을 보면 응력확대계수가 중앙부와 그 근처에서는 어느 정도 일정한 값을 갖다가 경계로 가면 그 값이 줄어드는 것을 볼 수 있다. 이는 전단 응력은 경계면으로 갈수록 증가하지만 수직 응력은 감소하게 되는데 수직 응력의 감소가 전단 응력의 증가보다 크기 때문이다. 반면에 경계에서 가까운 y=2cm, 8cm 인 부분에서 중앙부보다 응력확대계수의 값이 조금 큰 것은 이 부분에서 전단 응력은 중앙부에 비하여 증가했는데 아직 수직 응력은 감소하지 않았기 때문인 것으로 생각된다. 2 차원 평면변형상태의 해와 비교해 보면 중앙부는 약 7%의 증가를, 경계부는 9%의 감소가 있다. 이렇듯 두께 방향으로 이렇듯 응력 집중 현상이 조금씩 변화하기 때문에 실제 3 차원 구조물을 2 차원 구조물로 이상화하여 해석할 경우에 중앙부도 안전측에 들 수 있도록 해석치에 10%정도의 증가 계수를 두는 등의 조치가 필요할 것이다.

4.3 혼합모드의 피로 균열 성장 예제

세 번째 예제는 인장을 받는 2 차원 편측 경사 균열 문제로서, 피로하중이 가해졌을 때 균열 성장을 예측하는 예제이다. 그림 19 는 편측 경사 균열이 있는 강판의 기하형상과 하중조건을 보여준다. 물성치는 탄성계수가 210×10^2 kN/cm^2

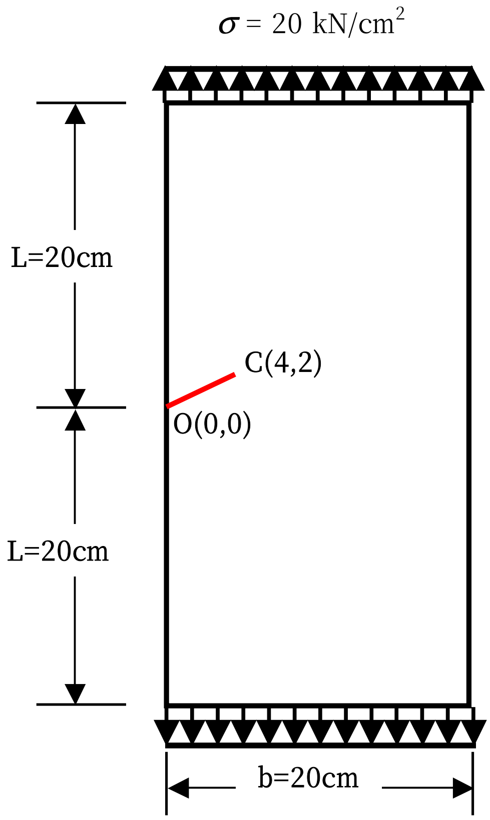


그림 19. 혼합모드의 피로 균열 성장 문제(예제3)

재료의 특성 C 와 m 은 각각 0.32186×10^{-8} , 2.25 이다[11]. 최소 하중 $\sigma_{min}=0$ kN/cm² 와 최대 하 중 $\sigma_{max}=5$ kN/cm² 이 반복적으로 작용한다고 가정한다. 반복적인 균열 성장 모델은 하중 재하 횟수를 $\Delta N=5000$ 과 $\Delta N=50000$ 두 가지 경우에 대해 해석하였다. 또한 반복 계산을 하지 않을 경우도 $\Delta N=5000$ 과 $\Delta N=50000$ 에 대하여 균열 성장을 해석해 보았다. 모두 $N=500000$ 될 때까지

수행하였다. 실제 Paris 방정식은 식 (3.36)와 같이 연속적인 식인데 균열 성장 길이를 구할 때는 식 (3.39)와 같이 증분식을 사용하였으므로 ΔN 이 작은 경우가 ΔN 이 큰 경우보단 보다 정확한 해라고 할 수 있다. 균열 성장 곡선을 결정하기 위한 반복 계산 과정에서 성장길이의 상대오차가 0.1% 보다 작고, 균열 성장각의 절대 오차가 0.00175 rad (또는 $K_{\mathrm{II}} / K_{\mathrm{I}}$ 의 절대 오차가 0.1%)보다 작으면 수렴한 것으로 판단하였다.

$$\left| \frac{\Delta a_i' - \Delta a_i}{\Delta a_i'} \right| \le 10^{-3} \tag{4.1a}$$

$$\left| \theta_{i+1}' - \theta_{i+1} \right| \le 1.75 \times 10^{-3} \tag{4.1b}$$

균열 선단에서는 응력집중이 집중되므로 선단 부근에서 예제 1)에서와 같이 기본 정방 배치를 기준으로 요소망을 점진적으로 분할하고 이에 따라 추가적인 절점들을 조밀하게 분포 시켰다. 초기 균열 상태에서 총 1372 개의 절점과 1160 개의 요소망을 사용하였다. 균열이 한 단계 성장할 때마다 기본 정방 배치를 기준으로 균열 선단을 중심으로 계속적으로 요소망을 분할하고 절점을 추가하는 방식을 선택하였다.

그림 20 는 피로 균열 진전을 보여주는데, 전체적인 구조물 크기에서는 균열 성장 형상이 거의 차이가 나지 않는다. 하지만 균열 선단 부분의 확대한 오른

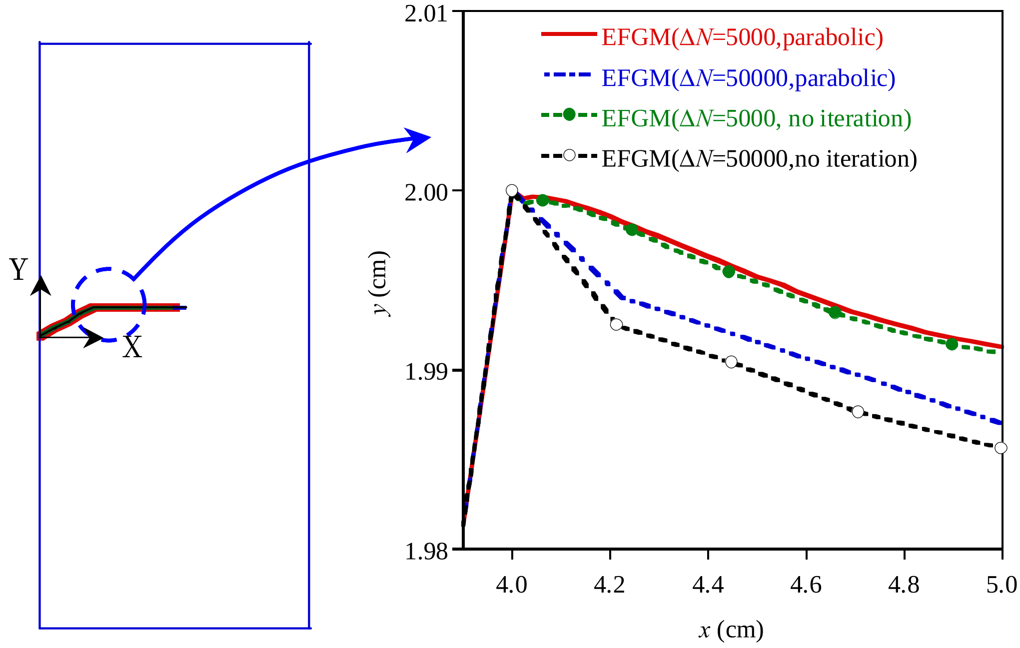


그림 20. 예제 3의 피로 균열 성장 형상

쪽 그림을 보면 그 차이를 볼 수 있다. ΔN 이 작으면 균열을 반복적으로 계산하지 않아도 그 차이가 거의 없지만 ΔN 이 크면 균열의 형상이 반복 계산을 할 경우와 하지 않을 경우에 차이가 나는 것을 볼 수 있다. ΔN =50000 일 포물선을 이용하여 반복 계산을 한 경우가 ΔN =5000 에 보다 가까운 것을 볼 수 있다.

그림 21 은 피로 하중 재하 횟수에 대한 균열 성장량을 보여준다. 제안된 방법은 균열 진전을 정확하게 모사할 수 있기 때문에, 균열의 진전량이 커지더라도 비교적 정확하게 잔존 수명을 예측할 수 있다. ΔN=50000 이고 반복계산을 하

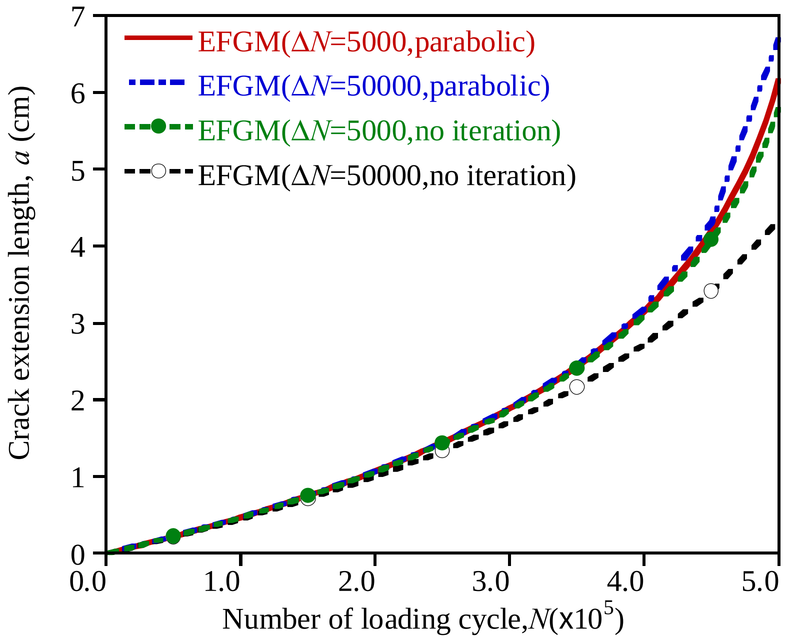


그림 21. 예제 3의 피로 하중 횟수에 대한 균열 성장량

표 2 $N = 450{,}000$ 일 때의 균열 진전량

단위 : cm

ΔN =5000		ΔN =50000	
No itr.	Para.	No itr.	Para.
4.20	4.20	4.30	3.41

지 않은 경우만 그래프가 벗어나는 것을 볼 수 있다. 표 2 는 N =450,000 회 일 때의 균열 진전량을 나타내고 있다. ΔN =50000 이고 포물선을 이용하여 반복계산하면 ΔN =5000 에 비하여 약 2%가 과대평가되고 있지만 반복계산을 하지 않으면 약 19%가 과소평가되는 것을 볼 수 있다. 이렇듯 ΔN 이 큰 경우에 반복계산을 하지 않으면 구조물의 수명을 과대 평가하게 된다는 것을 알 수 있다.

이 예제를 통하여 피로 균열을 반복적으로 성장각과 성장 길이를 보정해 주는 방법이 ΔN 이 큰 경우에 균열을 그냥 진전시키는 방법보다 더욱 효과적임을 알 수 있다.

5. 결론

이 논문에서는 EFG 법에 대해서 소개하고 이를 정식화하여 균열 문제에 대해 적용하였다. 또 혼합모드 균열에서의 J-integral 에 대하여 고찰하였고, 피로 균열의 반복적인 균열 성장 모델링 기법을 제안하고 이 방법에 대한 타당성과 효율성에 대해 검증하여 보았다.

EFG 법은 요소의 개념이 없이 절점들과 구조물의 기하학적 형태만으로 문제를 해석한다. 균열을 불연속을 갖는 연속적인 선분으로 표현하고 Diffraction method 를 이용한 영향 영역의 설정, 그리고 균열면에서의 복절점 배치를 이용하여 균열을 모형화 하였다. 절점 배치가 요소의 연결에 따른 규칙성이나 제약성에 크게 구애 받지 않기 때문에 균열 선단 주변에서 점진적인 그물망을 형성하여 비교적 쉽게 해의 정확도를 향상시킬 수 있었다.

2 차원과 3 차원에서의 J-integral 을 가상 균열 진전에 대한 총 에너지 방출량의 관점에서 살펴보았고 2 차원의 경우 곡선이나 꺾인 균열에서 J-integral 의 적분 경로에 따른 독립성을 명확히 규명하고 검증하였다. J-integral 을 이용하여 2 차원과 3 차원의 혼합모드의 응력확대계수를 정확히 산정하였고 여기에 최대 주응력 한계론과 Paris Equation 을 도입하여 반복적인 피로 하중에 의한 피로 균열 성장을 해석하였다. 이를 토대로 2 차원 균열 문제에서 균열 성장각과 성장량을 반복적으로 갱신해 주는 알고리즘을 추가함으로써 보다 정확하게 피로

균열의 성장 거동과 잔존 수명을 예측할 수 있었다. 이 연구에서 제안한 반복적인 균열 성장 모델은 일단 프로그램화가 쉽고, 비단 EFG 법에만 적용되는 것이 아니라 BEM 이나 DBEM 등 다른 해석법에도 쉽게 적용될 수 있어 이식성에도 뛰어나다.

EFG 법은 그 계산과정이 유한요소법에 비해 다소 복잡하지만 균열 문제와 같이 국부적으로 높은 정확도를 얻어야 하는 공학문제에 효과적으로 적용될 수 있을 것으로 보인다. 본 연구에서 제시한 EFG 법을 이용한 반복적인 피로 균열 성장 모델이 3 차원으로 발전되면 균열이 발생한 강 구조물의 피로 균열 성장에 따른 보수나 보강의 필요성 여부나 시기를 결정하는데 유용하게 활용될 수 있을 것으로 사료된다.

참고문헌

[1] T. Belytschko, Y. Y. Lu, L. Gu, “Element-free Galerkin Methods”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 229-256, 1994.

[2] P. Lancaster, K. Salkauskas, “Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods”, *Mathematics of Computation*, Vol. 37, No. 155, pp. 141-158, 1981.

[3] T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming , P. Krysl, ”Meshless methods: An overview and recent developments”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 3-47, 1996.

[4] T. Belytschko, Y.Y. Lu, L. Gu, “Crack Propagation by Element-Free Galerkin Methods”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 51, No. 2, pp. 295-315, 1995.

[5] M. Fleming, Y.A. Chu, B. Moran, T. Belytschko, “Enriched Element-Free Galerkin Methods for Crack Tip Fields”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 1483-1504, 1997.

[6] P. Zuohui, “Treatment of Point Loads in Element-Free Galerkin Method (EFGM)”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 16, pp. 335-341, 2000.

[7] T. Belytschko, Y.Y. Lu, L. Gu, M. Tabbara, “Element-Free Galerkin Methods for Static and Dynamic Fracture”, *International Journal of Solids Structures*, Vol. 32, No. 17/18, pp. 2547-2570, 1995.

[8] T. Belytschko, Y. Krongauz, “Enforcement of Essential Boundary Conditions in Meshless Approximations Using Finite Elements”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 131, pp. 133-145, 1996.

[9] T. Belytschko, M. Tabbara, "Dynamic Fracture Using Element-Free Galerkin Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, pp. 923-938, 1996.

[10] 안정진, Element-Free Galerkin 법을 이용한 균열 전파 해석, 석사학위논문, 서울대학교, 2002.

[11] M. F. Kanninen, C. H. Popelar, Advanced Fracture Mechanics, Oxford University Press, New York, 1985.

[12] J.F. Yau, S.S. Wang, H.T. Corten, "A Mixed-Mode Crack Analysis of Isotropic Solids Using Conservation Laws of Elasticity", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, pp. 335-341, 1980.

[13] B. Morgan, C.F. Shih, "Crack Tip and Associated Domain Integrals from Momentum and Energy Balance", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 27, No.6, pp. 615-642, 1987.

[14] J. W. Eischen, "An improved method for computing the J_2 integral", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 26, No. 5, pp. 691-700, 1987.

[15] E. E. Gdoutos, Fracture Mechanics Criteria and Applications, Kluwer Academic Publishers, 1990.

[16] J.M. Barsom and S. T. Rolfe, Fracture and fatigue control in structures, 3rd Ed., Book News, 1999.

[17] F.Z. Li, C.F. Shih, A. Needleman, "A Comparison of Methods for Calculating Energy Release Rates", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 21, No. 2, pp. 405-421, 1985.

[18] H. Rajaram, S. Sccrate, D.M. Parks, "Application of domain integral methods using tetrahedral elements to the determination of stress intensity factors", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 66, pp. 455-482, 2000.

[19] R.B. Haber, H.M. Koh, "Explicit Expressions for Energy Release Rates Using Virtual Crack Extensions", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol. 21, pp. 301-315, 1985.

[20] A. Portela, M.H. Aliabadi, and D.P. Rooke, "Dual boundary element incremental analysis of crack propagation", *Computers & Structures*, Vol. 46, No. 2, pp. 237-247, 1993.

[21] D.N. dell'Erba and M.H. Aliabadi, "Three-dimensional thermo-mechanical fatigue rack growth using BEM", *International Journal of Fatigue*, Vol.22, pp.261-273, 2000.

[22] Carlos Cueto-Felgueroso, "Implementation of Domain Integral Approach for J Integral Evaluations", *Transations*, SMiRT 16, Washington DC, August 2001, Paper #1355.

[23] JD. Eshelby, "Energy relations and the energy-momentum tensor in continuum mechanics.", In: Kannien MF. Adler WF, Rosenfield AR, Jaffee RI, editors. Inelastic behavior of solids. New York: McGraw Hill, pp. 77-115, 1970.

[24] M. Gosz, B. Moran, "An interaction energy integral method for computation of mixed-mode stress intensity factors along non-planar crack fronts in three dimensions," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 69, pp. 299-319, 2002.

[25] J. Qian, A. Fatemi, "Mixed mode fatigue crack growth: A literature survey", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 55, No. 6, pp. 969-990, 1996.

[26] S. G. Mogilevskaya, "Numerical modeling of 2-D smooth crack growth", *International journal of fracture*, Vol. 87, pp. 389-405, 1997.

ABSTRACT

This paper presents an iterative modeling scheme of mixed-mode fatigue crack growth using Element-Free Galerkin (EFG) methods. In EFG methods, a crack is modeled by piecewise continuous lines expressing discontinuities, and double nodes are placed on both sides of the crack surface. The domain of influence near the crack tip is determined by the diffraction method. An accurate solution of the crack growth can be easily obtained by mesh refinement near the crack tip since it is possible to arrange the nodes arbitrarily.

The increment and the direction of the fatigue crack growth are calculated based on stress intensity factors, which are estimated from the J-integral. The 2-dimensional and the 3-dimensional J-integral are studied considering the decrease in total potential energy for a virtual crack extension. In 2-dimension the path independency of J-integral in the curved or kinked crack is investigated.

The path of fatigue crack growth as well as initial geometry of kinked or curved crack is discretized using straight lines. The calculated crack increment and direction may be deviated from those of the actual crack if the crack is assumed to grow to the initial increment and direction. In the proposed modeling scheme, the path of the fatigue crack growth is supposed to be a parabola and the increment and direction of that are updated iteratively. Through numerical examples, J-integral is calculated exactly and the fatigue crack growth is simulated more accurately.

Key Word

Element-Free Galerkin Method, Stress intensity factors, J-integral, fatigue crack growth

Student number : 2001-21221

감사의 글

2년이라는 짧은 시간이 지나고 어느덧 대학원 생활의 마지막에 와 있습니다. 무언가 마무리 한다는 것이 조금 서운한 감도 있지만 매우 보람찬 것 같습니다. 그 동안 힘들 때도 있었지만 정말 많은 분들의 도움을 받으며 한 편의 부끄러운 논문을 완성하였습니다.

먼저 대학원 생활 동안 저에게 끊임없는 가르침과 조언, 그리고 채찍질을 해주신 이해성 선생님께 깊이 감사 드립니다. 그리고 여러 방면에 걸쳐서 많은 가르침을 주신 장승필 교수님, 고현무 교수님, 오병환 교수님, 김재관 교수님께도 깊은 감사 드립니다.

저와 함께 균열을 같이 연구하며 연구실의 방장으로서 살림을 도맡아 했던 기석이 형, 지금은 연구실에 없지만 항상 정신적 지주로서 무엇을 물어봐도 관심 있게 대답해 주던 현우 형, 관심 있는 일에는 항상 열심히 하는 양광이, 힘든 외국 생활에도 열심히 공부하시는 틴틴윈 누나에게 감사 드립니다. 2 년 동안 대학원 생활을 함께 하며 후배에서 어느덧 동기가 되어버린 만우, 동기이면서도 형으로서 모습을 보여준 영곤이 형, 작년에 졸업하고 지금은 열심히 회사에 다니고 있는 학부 동기들 정진, 규철, 병규에게도 고맙다는 말을 전합니다. 1 년 동안 연구실에서 같이 보내며 동고동락했던 정희, 용한이 형, 주성이 형, 언제나 터프하고 멋진 천종이 형, 문성이 형, 경남이 누나, 한도 형, 항상 따뜻

한 인호 형, 대환이 형, 윤석이 형, 종승이 형, 종명이 형, 문구 형에게도 감사의 말을 전합니다. 부족한 선배이기에 항상 미안한 재형이 형, 창현, 호영, 승근이에게도 미안하다는 말과 함께 열심히 공부하라고 얘기해 주고 싶습니다.

삶에 지칠 때면 한잔의 술로 서로의 고민을 얘기하고 어려움을 함께 했던 경진, 병수, 성배, 종찬, 신웅이, 준영이를 비롯한 나의 친구들, 그리고 교통연구실에서 같이 생활했던 기한이, 성봉이 형에게도 진심으로 고맙다는 말을 전하고 싶습니다. 그리고 저의 정신적인 위안이 되어준 지나에게도 깊은 사랑과 고마움을 전합니다.

언제나 저를 아껴주신 친지 여러분, 그리고 언제나 저를 사랑해 준 누나에게도 감사 드립니다. 마지막으로 언제나 아들의 건강과 미래를 걱정하시며 저를 보살펴 주신 아버지, 어머니께 진심으로 감사 드리며 이 논문을 바칩니다.