

공학석사학위논문

아치를 적용한 느슨한 케이블의 안정화된
동적 해석기법

2007 년 6 월

서울대학교 대학원

건설환경공학부

윤 상 훈

초 록

이 논문에서는 이차 Piola-Kirchhoff 응력과 Green 변형도를 고려한 케이블 운동방정식을 재정립하였다. 그리고 느슨한 케이블 해석 시에 발생하는 동적 불안정성을 제거하기 위한 복합 모델을 제안하고, 이 모델의 비선형 동적 특성에 대하여 연구하였다. 강한 인장력을 받는 케이블 지지 교량의 케이블과는 달리 느슨한 케이블에서는 자유진동 및 가진 진동 해석 시 압축력이 발생하게 된다. 이 경우 강성도 행렬이 positive definiteness를 잃어버리게 되고 불안정한 해석 결과를 나타낸다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 기존 연구자들은 비선형 뼈대 요소를 이용하여 해석을 수행하였으나, 뼈대 요소를 사용할 경우 무응력 상태에서 케이블의 형성을 정의할 수 없다는 점과, 장력이 접선방향으로 작용한다는 케이블의 고유 특성을 만족시킬 수 없는 단점이 있었다. 본 연구에서는 케이블의 고유 특성을 만족시키면서 압축력으로 인한 불안정성을 제거하기 위하여 케이블 요소에 휨강성을 가지는 아치 요소를 결합하여 문제점을 해결하였다. 느슨한 케이블에 발생하는 압축력은 아치 요소의 휨 관성이 저항하게 되므로 안정한 해를 도출한다. 복합 모델은 케이블 모델보다 긴 시간 간격에서도 안정한 해를 도출할 수 있다. 본 논문에서는 제안된 모델의 타당성을 검증하기 위한 적용 예제로 새그-경간비 50인 현수 케이블과 경사진 팽팽한 케이블을 사용하였으며, Newton-Raphson 방법에 기초한 Newmark- β 시간 적분법을 사용하여 자유진동 모델의 응답을 비교하였다.

주요어

동적 운동 방정식, 고유진동수, 비선형 해석, 케이블, 안정화, Rayleigh-Ritz, 이차
Piola-Kirchhoff 응력, Green 변형도

학번 : 2005-21163

목 차

초록	iii
목차	v
그림목차	vii
표목차	x
1. 서론	1
2. 케이블의 운동 방정식	4
2.1 운동 방정식 및 변분식	4
2.2 운동 방정식의 선형화 및 이산화	12
3. 안정화 기법	18
3.1 불안정성의 발생 요인	19
3.2 안정화 기법	21
3.3 아치의 이산화	26
4. 수치 해석 예제	30
4.1 시간 영역 해석	30
4.1.1 느슨한 케이블 모델	31
4.1.2 경사진 팽팽한 케이블 모델	37

5. 결론	44
6. 부록	46
A. 아치의 변형도와 변위의 관계 및 변환	46
참고문헌	50

그림 목 차

그림 2.1	탄성현수선 케이블에 대한 좌표계	5
그림 2.2	동적해석을 위한 전체 좌표계와 국부좌표계	6
그림 2.3	케이블 세그먼트의 자유 물체도	8
그림 3.1	아치 요소가 결합된 케이블	22
그림 3.2	아치 요소	24
그림 4.1	해석 예제	31
그림 4.2	경간-새그비 50인 복합 모델의 중앙 수직 진동변위	33
그림 4.3	(Rayleigh-Ritz) 복합 모델과 케이블 모델의 중앙 수직 진동변위 비교	34
그림 4.4	FEM의 복합 모델과 케이블 모델의 중앙 수직 진동변위 비교	34
그림 4.5	경간-새그비 50인 복합 모델의 장력(Rayleigh-Ritz)	35
그림 4.6	경간-새그비 50인 케이블 모델의 장력(Rayleigh-Ritz)	35
그림 4.7	케이블 모델의 시간 간격에 따른 중앙 수직 진동변위	36
그림 4.8	복합 모델의 시간 간격에 따른 중앙 수직 진동변위	37
그림 4.9	실험 구조물의 모델링	38
그림 4.10	이상화 된 하중과 해석에 사용된 하중의 시간에 따른 제거 비교	39
그림 4.11	실측 중앙변위와 케이블 모델링의 중앙변위 비교	40
그림 4.12	실측 중앙 가속도와 케이블 모델의 중앙 가속도 비교	41

그림 4.13 실측 중앙 가속도와 복합 모델의 중앙 가속도 비교	42
그림 4.14 실측 중앙 가속도와 복합 모델($1.45 \times I$)의 중앙 가속도 비교	43

표 목 차

표 4.1	예제로 사용된 케이블의 물성치	31
표 4.2	예제로 사용된 케이블의 물성치	38
표 4.3	Least square error 및 상대오차	43

1. 서 론

케이블은 무게가 가벼우면서도 강한 인장력에도 저항할 수 있기 때문에 장대 교량을 포함하여 해양 구조물이나 전기 분야에서도 많이 사용되고 있다. 케이블은 휨 강성이 작기 때문에 외적 여건의 변화에 따라 쉽게 진동하는 특성이 있으며 자유 진동 특성이 일반적인 뼈대 구조물에서 발견하기 힘든 특이한 현상을 보인다. 최근 들어 케이블 지지 교량의 장대화 추세에 따라 과거에 비하여 긴 케이블이 사용되기 시작하면서 케이블의 진동제어가 케이블 지지 교량의 설계에서 중요한 문제로 부각되기 시작하였다.

케이블의 동적 거동 특성을 파악하기 위하여 최근 30 여 년간 많은 연구가 이루어져왔다. Irvine 등은 수평 케이블을 정적 평형상태에서 포물선 형상을 가진다고 가정하고 선형이론을 사용하여 케이블의 자유진동 특성을 연구하였다 [1]. 또한 Irvine 은 케이블의 새그비-경간비의 변화에 따라 대칭 모드와 비대칭 모드의 진동수가 일치하는 진동수 교차점(cross-over point)가 나타나고, 이 부근에서 동적 장력이 증폭되는 현상을 연구하였다[1,2]. 이러한 현상들은 수치적 [4,7], 실험적[5]으로 검증이 되었다. 그러나 이러한 연구에서는 지배 방정식을 선형화하기 위하여 여러 가지 가정을 도입하였다. 동적 변위는 작다는 가정, 현 방향진동을 무시할 수 있다는 가정 그리고 수평장력은 일정하다는 가정 등이 널리 적용되고 있다[2,3,8]. 그러나 사장교에서 주로 많이 쓰이는 경사 케이블에

서는 경사각이 크지 않으면 어느 정도 신뢰할 수 있는 결과를 구할수 있지만 그렇지 않을 경우에는 해석 결과가 부정확해 진다. 특히 비선형성이 강하게 나타나는 느슨한 케이블에서는 진동 중에 압축력이 발생하는 문제가 발생할 수 있다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 몇몇 연구자들은 케이블을 비선형 뼈대 요소로 모델링하는 방법을 사용하였다[6,9]. 그러나 비선형 뼈대 요소를 사용하는 경우 무응력 상태의 케이블의 형상이 정의되지 않는 케이블의 특성을 표현할 수 없는 문제점이 발생한다.

케이블의 동적 거동을 정확히 해석하기 위해서는 가정을 가능한 적게 적용하는 것이 바람직하다. 그러나 가정을 도입하지 않으면 케이블 운동방정식을 선형화할 수 없거나 혹은 해석적으로 풀 수 없게 된다. 따라서 케이블 거동에 대한 가정을 가능한 한 도입하지 않고 정확히 풀기 위하여 이차 Piola-Kirchhoff 응력(이차 P-K 응력)과 Green 변형도를 고려한 케이블 운동방정식에 대한 가중잔차법과 가상일 원리를 유도했다[19].

이 논문에서는 이차 P-K 응력과 Green 변형도를 고려한 케이블 운동방정식을 이용한 정확한 모델을 제안한다. 이 모델은 힘 강성이 없고, 무응력 상태에서 형상을 유일하게 정의할 수 없으며, 동적 상태에 있는 케이블의 형상으로부터 장력이 정의되고 강성이 발현된다는 가정으로부터 유도될 것이다. 유도된 케이블 모델은 강한 비선형성을 포함하는 모델이므로 해석적인 해를 구하기가 어렵다. 그러므로 Rayleigh-Ritz 방법으로 이산화를 하고, 잘 알려진 시간 적분

방법인 Newmark- β 방법을 이용하여 해를 구한다. 그러나, 유도된 모델은 압축력으로 인하여 모델의 강성도 행렬이 positive definiteness 를 잃어버리므로 해석 결과의 불안정성이 나타나게 된다. 이러한 문제점에 대한 보완책으로 케이블에 휨 강성을 도입하여 모델의 강성도 행렬이 positive definiteness 를 잃어 버리지 않게 될 것이다. 이렇게 개선된 모델을 복합 모델이라고 명명한다.

제안된 모델의 타당성과 효율성을 검증하기 위한 예제로 경간 거리 100m, 경간-새그비 50 인 느슨한 수평케이블을 사용한다. 일정한 초기 변위에 대한 진동형상으로 케이블 모델의 진동 특성을 확인하고 복합 모델의 수치적 안정성과 정확성을 확인한다. 경사진 팽팽한 케이블에 대해서 실험결과와 해석결과의 변위와 가속도를 비교하여 타당성을 검증한다.

2. 케이블의 운동 방정식

이 장에서는 이차 Piola-Kirchhoff 응력(P-K 응력)과 Green 변형도를 고려한 자중 및 외부 하중을 받는 케이블의 동적 운동 방정식을 유도하고 유도된 운동방정식의 변분식을 제시한다. 유도된 운동방정식의 변분식은 케이블 위치에 대한 비선형 방정식이 되므로 Newton-Raphson 방법에 기초한 반복 계산으로 풀기 위한 선형화된 증분식을 유도하고, Rayleigh-Ritz 를 사용하여 이산화한다.

2.1 운동방정식 및 변분식

그림 2.1 은 무응력 길이가 l_0 인 2 차원 케이블 구조물의 좌표계를 보이고 있다. 휨 강성이 없는 케이블의 무응력 상태의 형상은 유일하게 결정할 수 없으며, 장력이 케이블에 도입되면 케이블의 형상을 유일하게 결정할 수 있다. 케이블의 변형 후 형상은 무응력 상태의 형상에 무관하게 결정할 수 있다. 이 논문에서는 케이블의 무응력 상태에서 기준 형상을 무응력 상태에서의 원점에 대한 길이로 정의되는 라그랑지 (lagrangian) 좌표 s 에 의하여 직선으로 정의한다. 무응력 상태에서 라그랑지 좌표 s 에 위치하고 있던 케이블의 한 질점은 변형 후에는 카테시안 (cartesian) 좌표계에서 \mathbf{x} 에 위치하게 된다. $p(s)$ 는 원점으로부터 라그랑지 좌표 s 까지의 변형 후 케이블의 길이를 의미하며 다음과

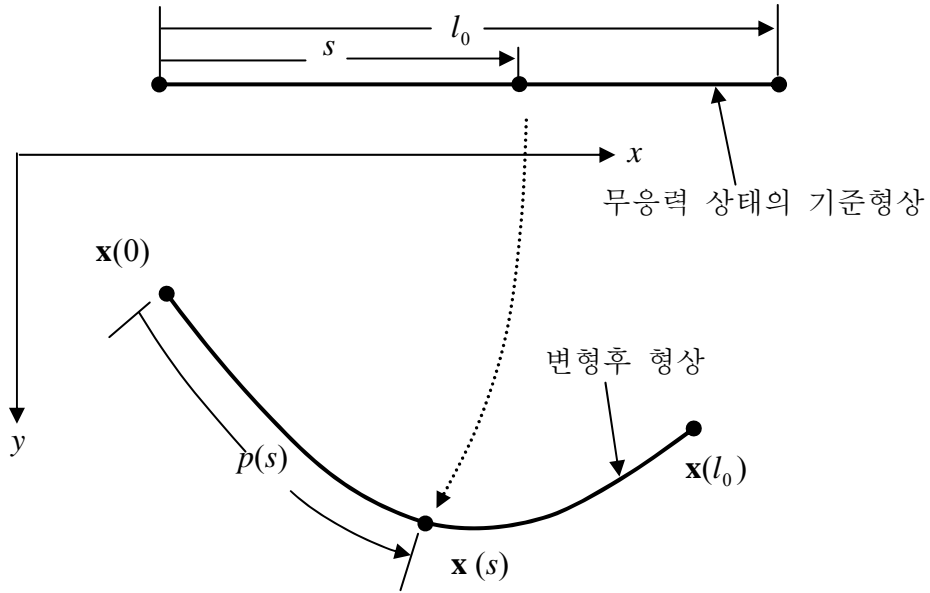


그림 2.1 탄성현수선 케이블에 대한 좌표계

같이 정의된다.

$$p(s) = \int_0^s \left(\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right)^{0.5} ds \quad (2.1)$$

식 (2.2)을 s 에 대하여 미분하여 정리하면 p 와 s 의 관계를 유도할 수 있다.

$$\frac{dp}{ds} = \left(\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right)^{0.5} \quad (2.2)$$

그림 2.2 는 정적 평형상태에서 동적 변위가 발생한 케이블을 보이고 있다. 정식화의 편의를 위하여 정적 평형상태에서 케이블이 놓이게 되는 평면을 x - y 평면으로 정하고 이 평면에 수직인 방향을 왼손 좌표계에서의 z 좌표로 정의한

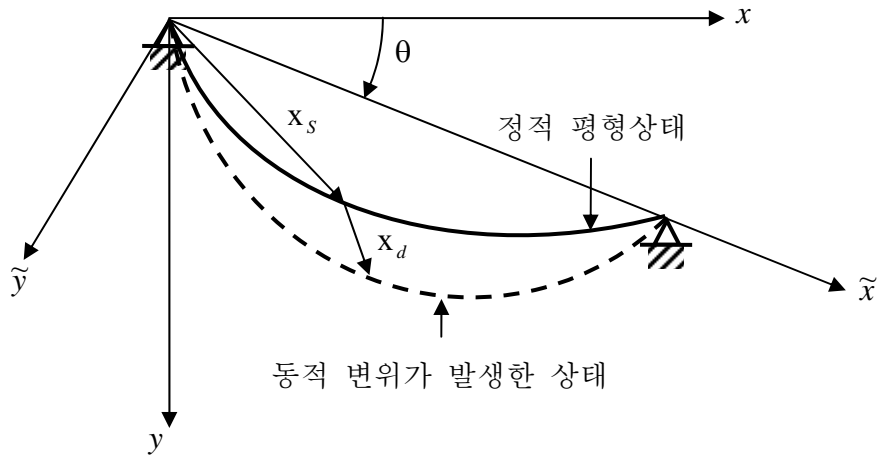


그림 2.2 동적해석을 위한 전체 좌표계와 국부좌표계

다. 이와 같이 좌표계를 정의하면 정적 평형상태에서의 z 방향 재단력이 영이 되어 동적 평형상태에서 x - y 평면내의 진동과 이에 수직한 면외 진동이 분리되어 정식화 과정이 간단해지는 장점이 있다.

동적 평형 상태에서의 라그랑지 좌표 s 에 대한 공간 위치는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} x(s) &= x_s(s) + x_d(s) \\ y(s) &= y_s(s) + y_d(s) \end{aligned} \tag{2.3}$$

여기서 x, y, x_d, y_d 는 각각 라그랑지 좌표 s 에 대한 동적 평형상태에서의 위치 및 정적 평형상태에 대한 동적 변위를 표시한다.

Green 변형도의 정의에 의하여 동적 상태에서의 총 변형도는 다음과 같이 표시된다.

$$\varepsilon = \frac{1}{2}((x')^2 + (y')^2 - 1) = \frac{1}{2}((p')^2 - 1) \quad (2.4)$$

식 (2.4)에서 ε 은 총 변형도이고, $(\prime) = \frac{d(\prime)}{ds}$ 이다. 동적 상태에서의 변형 그래디언트는 식 (2.6)에 의하여 $G = p'$ 로 정의된다. 동적 변위에 의하여 발생한 동적 Green 변형도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_d = \varepsilon - \varepsilon_s &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{dp}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dp_s}{ds}\right)^2\right) \\ &= x'_s x'_d + y'_s y'_d + \frac{1}{2}\left((x'_d)^2 + (y'_d)^2\right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

동적 상태에서의 이차 Piola-Kirchhoff 장력(이차 P-K 장력)은 식 (2.4)과 식 (2.5)를 Hooke의 법칙에 적용하여 표시할 수 있다.

$$\tilde{T} = EA\varepsilon = \frac{EA}{2}((x')^2 + (y')^2 - 1) = \frac{EA}{2}((p')^2 - (p'_s)^2 + (p'_s)^2 - 1) = \tilde{T}_s + \tilde{T}_d \quad (2.6)$$

여기서 E 는 탄성계수 (Young's Modulus) 이고 A 는 변형 전의 케이블 단면적이며 \tilde{T}_s , \tilde{T}_d 는 각각 정적 평형상태의 이차 P-K 장력과 동적 상태에서의 이차 P-K 장력을 의미한다.

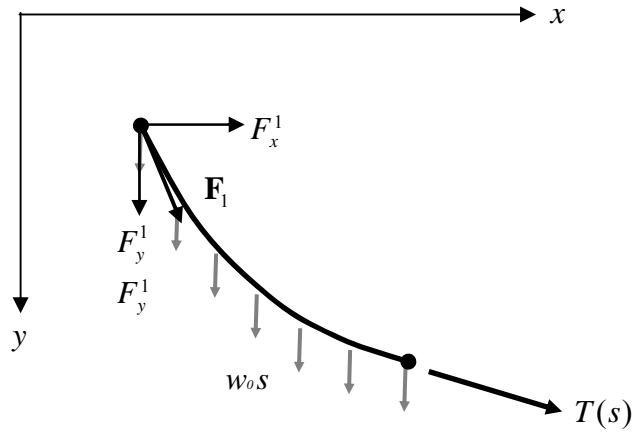


그림 2.3 케이블 세그먼트의 자유 물체도

그림 2.3 은 케이블의 자중만 작용하고 있을 경우 케이블의 왼쪽 지점에서 라그랑지 좌표가 s 인 임의의 점까지의 자유 물체도를 보이고 있다. 케이블에는 인장력만 작용하는 것으로 가정하면 평형방정식은 케이블의 인장력에 대하여 다음과 같이 표시된다

$$\begin{aligned}
 T_s \frac{dx_s}{dp} + F_x^1 &= 0 \\
 T_s \frac{dy_s}{dp} + F_y^1 + w_0 s &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

여기서 T_s 는 정적 평형상태에서 점 $p(s)$ 에서의 Cauchy 장력이고 F_x^1, F_y^1 는 각각 왼쪽 지점에서 각 좌표 방향으로 작용하는 재단력이며 w_0 는 변형 전 케이블의 단위 길이당 무게이다. 식 (2.7)에서 사용된 Cauchy 장력은 정적평형상태를 기준으로 하여 정의된 Cauchy 의 응력을 단면방향으로 적분하여 구한 장력

이다.

동적 평형상태에서의 평형방정식은 정적 평형방정식 (2.7)에 관성력을 고려하여 구성한다.

$$\begin{aligned} T \frac{dx}{dp} + F_x^1 - \int_0^p \rho \ddot{x} dp + \int_0^p f_x dp &= 0 \\ T \frac{dy}{dp} + F_y^1 + \int_0^p w dp - \int_0^p \rho \ddot{y} dp + \int_0^p f_y dp &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

여기서 f_x, f_y 는 케이블에 작용하는 외부 하중이며 w 와 ρ 는 각각 동적상태에서의 단위 길이 당 무게와 중량 그리고 \ddot{x}, \ddot{y} 는 케이블 위 각 질점의 x, y 방향 운동의 시간에 대한 2 차 미분항으로 각 질점에서의 가속도를 의미한다.

동적 상태에서의 Cauchy 장력 $T = \frac{dp}{ds} \tilde{T}$ 이므로, 식 (2.8)를 p 에 대하여 미분하여

표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \left(T \frac{dx}{dp} \right) - \rho \ddot{x} + f_x &= 0 \\ \frac{d}{dp} \left(T \frac{dy}{dp} \right) + w - \rho \ddot{y} + f_y &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

동적 상태에서의 케이블의 단위 길이당 무게 및 중량은 질량보존의 법칙을 이용하여 변형전의 길이 당 무게와 중량으로 표시할 수 있다.

$$\rho = \rho_0 \frac{ds}{dp}, w = w_0 \frac{ds}{dp} \quad (2.10)$$

케이블 운동방정식의 변분식은 식 (2.8)에 미소 가상 동적 변위를 곱하여 적분하면 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_l \delta x_d \left(\frac{d}{dp} \left(T \frac{dx}{dp} \right) - \rho \ddot{x} + f_x \right) dp &= 0 \\ \int_l \delta y_d \left(\frac{d}{dp} \left(T \frac{dy}{dp} \right) - \rho \ddot{y} + w + f_y \right) dp &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

식 (2.10)의 각 방정식의 첫 번째 항을 부분 적분하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\int_l \delta x_d \left(\frac{d}{dp} \left(T \frac{dx}{dp} \right) - \rho \ddot{x} + f_x \right) dp \\ &= -\int_l \rho (\delta x_d) \ddot{x} dp - \int_l \frac{d\delta x_d}{dp} T \frac{dx}{dp} dp + \delta x_d T \frac{dx}{dp} \Big|_0^l + \int_l (\delta x_d) f_x dp = 0 \\ &\int_l \delta y_d \left(\frac{d}{dp} \left(T \frac{dy}{dp} \right) - \rho \ddot{y} + w + f_y \right) dp \\ &= -\int_l \rho (\delta y_d) \ddot{y} dp - \int_l \frac{d\delta y_d}{dp} T \frac{dy}{dp} dp + \delta y_d T \frac{dy}{dp} \Big|_0^l + \int_l (\delta y_d) (w + f_y) dp \end{aligned} \quad (2.12)$$

여기서 l 은 동적 평형상태에서 변형된 케이블의 길이이다. 양단이 고정된 케이블의 양단에서의 동적 가상 변위는 영이므로 식 (2.12)의 경계적분값은 항상 영이다. 있다고 가정하면 양단에서의 가상 위치는 항상 영이 되므로 식 (2.12)에서 경계항은 영이 된다. 식 (2.10)를 식 (2.12)에 대입하고 적분 변수를 라그랑지 좌표 s 에 대하여 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\int_{l_0} \rho_0 (\delta x_d) \ddot{x} ds + \int_{l_0} \frac{d\delta x_d}{ds} \tilde{T} \frac{dx}{ds} ds &= \int_{l_0} \delta x_d f_x ds \\
\int_{l_0} \rho_0 (\delta y_d) \ddot{y} ds + \int_{l_0} \frac{d\delta y_d}{ds} \tilde{T} \frac{dy}{ds} ds &= \int_{l_0} (\delta y_d) (w_0 + f_y) ds
\end{aligned} \tag{2.12}$$

x -방향 및 y -방향의 가상 동적 변위는 서로 독립적이므로 식 (2.12)의 두 식을 더하여 하나의 변분식으로 구성하여 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\int_{l_0} \rho_0 (\delta x_d \ddot{x} + \delta y_d \ddot{y}) ds + \int_{l_0} \tilde{T} \left(\frac{d\delta x_d}{ds} \frac{dx}{ds} + \frac{d\delta y_d}{ds} \frac{dy}{ds} \right) ds \\
&= \int_{l_0} \delta x_d f_x ds + \int_{l_0} (\delta y_d) (w_0 + f_y) ds
\end{aligned} \tag{2.13}$$

식 (2.5)에서 정의된 동적 변형도의 변분은 동적 변위에 대한 변분을 취하여 구하면 다음과 같다.

$$\delta \varepsilon_d = x'_s \delta x'_d + y'_s \delta y'_d + x'_d \delta x'_d + y'_d \delta y'_d = x'_d \delta x'_d + y'_d \delta y'_d \tag{2.14}$$

식 (2.14)를 식 (2.13)에 대입하면 케이블의 동적 평형방정식에 대한 최종적인 변분식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\int_{l_0} \rho_0 (\delta x_d \ddot{x} + \delta y_d \ddot{y}) ds + \int_{l_0} \tilde{T} \delta \varepsilon_d ds \\
&= \int_{l_0} \delta x_d f_x ds + \int_{l_0} (\delta y_d) (w_0 + f_y) ds
\end{aligned} \tag{2.15}$$

식 (2.15)는 Total Lagrangian description(TLD)에 의하여 표시된 케이블의 동적운동에 대한 가상일 원리를 표시하고 있으며, 관성력에 의한 동적 가상일, 내적

가상일 그리고 외적 가상일의 합이 영이 된다는 것을 의미한다.

2.2 운동 방정식의 선형화 및 이산화

식 (2.6)에서 정의된 것과 같이 이차 P-K 장력은 케이블의 형상 변수 x, y 에 대한 비선형 함수이므로 변분식 (2.15)는 케이블의 동적 변위에 대한 비선형 방정식이다. 시간영역에서의 해는 어떤 시간에서의 비선형 운동방정식 (2.15)를 선형화한 증분식을 Newton-Raphson 방법에 기초하여 반복적으로 풀어 구할 수 있다. 어떤 시간 $t + \Delta t$ 에서 식 (2.15)는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{l_0} \rho_0 (\delta x_d \ddot{x}^{t+\Delta t} + \delta y_d \ddot{y}^{t+\Delta t}) ds + \int_{l_0} \tilde{T}^{t+\Delta t} \delta \varepsilon_d^{t+\Delta t} ds \\ & = \int_{l_0} \delta x_d f_x^{t+\Delta t} ds + \int_{l_0} (\delta y_d) (w_0 + f_y^{t+\Delta t}) ds \end{aligned} \quad (2.16)$$

식 (2.16)을 풀기 위하여 이전 시간 단계 t 에서의 모든 변수는 기지의 값으로 가정한다. 식 (2.16)의 선형화된 증분식을 유도하기 위하여 시간 $t + \Delta t$ 에서의 케이블의 위치를 증분식으로 표시한다.

$$\begin{aligned} x_i^{t+\Delta t} &= x_{i-1}^{t+\Delta t} + \Delta x = \underline{x} + \Delta x \\ y_i^{t+\Delta t} &= y_{i-1}^{t+\Delta t} + \Delta y = \underline{y} + \Delta y \end{aligned} \quad (2.17)$$

위 식에서 i 는 시간 $t + \Delta t$ 에서의 동적 평형상태를 계산하기 위한 반복계산 단계를 의미하고, $(\underline{\quad}) = (\quad)_{i-1}^{t+\Delta t}$ 로 정의하며 전 단계에서 구한 변수 값을 지칭한다.

식 (2.17)를 식 (2.6)에 대입하고 일차 증분항만 포함시켜 이차 P-K 장력의 선형화된 증분식을 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_i^{t+\Delta t} &= \frac{EA}{2} \left(\left(\frac{dp_i^{t+\Delta t}}{ds} \right)^2 - 1 \right) = \frac{EA}{2} \left(\left(\frac{dx_i^{t+\Delta t}}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy_i^{t+\Delta t}}{ds} \right)^2 - 1 \right) \\
&= \frac{EA}{2} \left(\left(\frac{d(x+\Delta x)}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d(y+\Delta y)}{ds} \right)^2 - 1 \right) \\
&\approx \tilde{T} + EA(\underline{x}'\Delta x' + \underline{y}'\Delta y')
\end{aligned} \tag{2.18}$$

식 (2.17) 및 식 (2.18)을 식 (2.16)에 대입하고 이차 이상의 고차 증분항을 무시하면 선형화된 증분식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\int_{l_0} \rho_0 (\delta x_d^{t+\Delta t} \ddot{x}^{t+\Delta t} + \delta y_d^{t+\Delta t} \ddot{y}^{t+\Delta t}) ds + \int_{l_0} \tilde{T}^{t+\Delta t} \delta \varepsilon_d^{t+\Delta t} ds \\
&- \int_{l_0} \delta x_d^{t+\Delta t} f_x^{t+\Delta t} ds - \int_{l_0} (\delta y_d^{t+\Delta t}) (w_0 + f_y^{t+\Delta t}) ds \approx \int_{l_0} \tilde{T} (\underline{x}'\delta x'_d + \underline{y}'\delta y'_d) ds + \\
&\int_{l_0} \tilde{T} (\Delta x'\delta x'_d + \Delta y'\delta y'_d) ds + \int_{l_0} EA(\underline{x}'\Delta x' + \underline{y}'\Delta y') (\underline{x}'\delta x'_d + \underline{y}'\delta y'_d) ds \\
&+ \int_{l_0} \rho_0 (\ddot{x}_d \delta x_d + \ddot{y}_d \delta y_d) ds + \int_{l_0} \rho_0 (\Delta \ddot{x} \delta x_d + \Delta \ddot{y} \delta y_d) ds \\
&- \int_{l_0} \delta x_d f_x^{t+\Delta t} ds - \int_{l_0} (\delta y_d) (w_0 + f_y^{t+\Delta t}) ds = 0
\end{aligned} \tag{2.19}$$

식 (2.19)의 선형화된 증분식에서 기지의 항을 오른쪽으로 이항하여 정리하면 최종적인 증분형 운동방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\int_{l_0} \delta x_d \rho_0 \Delta \ddot{x} ds + \int_{l_0} \delta x'_d ((\tilde{T} + EA(\underline{x}')^2 \Delta x' + \underline{x}'\underline{y}'\Delta y') ds + \\
&\int_{l_0} \delta y_d \rho_0 \Delta \ddot{y} ds + \int_{l_0} \delta y'_d (\underline{x}'\underline{y}'\Delta x' + (\tilde{T} + EA(\underline{y}')^2 \Delta y') ds = \\
&\int_{l_0} \delta x_d f_x^{t+\Delta t} ds + \int_{l_0} (\delta y_d) (w_0 + f_y^{t+\Delta t}) ds - \int_{l_0} \rho_0 (\ddot{x}_d \delta x_d + \ddot{y}_d \delta y_d) ds \\
&- \int_{l_0} \tilde{T} (\underline{x}'\delta x'_d + \underline{y}'\delta y'_d) ds
\end{aligned} \tag{2.20}$$

식 (2.20)을 행렬식 형식으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
& \int_{l_0} (\delta x_d \quad \delta y_d) \rho_0 \begin{pmatrix} \ddot{x}_d \\ \ddot{y}_d \end{pmatrix} ds + \int_{l_0} (\delta x'_d \quad \delta y'_d) \begin{bmatrix} \tilde{T} + EA(\underline{x}')^2 & EA\underline{x}'\underline{y}' \\ EA\underline{x}'\underline{y}' & \tilde{T} + EA(\underline{y}')^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x' \\ \Delta y' \end{pmatrix} ds \\
&= \int_{l_0} (\delta x_d \quad \delta y_d) \begin{pmatrix} f_x^{t+\Delta t} \\ w_0 + f_y^{t+\Delta t} \end{pmatrix} ds - \int_{l_0} (\delta x_d \quad \delta y_d) \rho_0 \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} ds \\
& \quad - \int_{l_0} (\delta x' \quad \delta y') \begin{pmatrix} \tilde{T} \underline{x}' \\ \tilde{T} \underline{y}' \end{pmatrix} ds
\end{aligned} \tag{2.21}$$

식 (2.21)은 전체 좌표계에서 정의되어 있지만, 변위 성분을 가정할 때에는 그림 2.2 에서 정의된 케이블의 현 방향과 현 수직방향에 대하여 정의하는 것이 물리적인 의미를 고려할 수 있어 바람직하다. 그러므로 Rayleigh-Ritz 를 이용하여 현 방향과 현 수직방향의 변위 성분을 기저함수로 가정하여 이산화할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{x}_d &\approx \sum_{i=1}^n \Delta A_{xi} \tilde{\phi}_{xi}(s) \sin \omega t \\
\Delta \tilde{y}_d &\approx \sum_{i=1}^n \Delta A_{yi} \tilde{\phi}_{yi}(s) \sin \omega t
\end{aligned} \tag{2.22}$$

여기서 ω 및 n 은 케이블의 각 진동수와 기저함수의 개수이고, $\Delta \tilde{x}_d, \Delta \tilde{y}_d, \tilde{\phi}_{xi}$ 그리고 $\tilde{\phi}_{yi}$ 는 각각 현 방향 및 현 수직방향에 대한 동적변위와 기저함수이다. 현 방향 및 현 수직방향의 동적 변위에 대하여 동일한 개수의 기저함수를 사용하

였으나, 일반적으로 반드시 동일한 개수의 기저함수를 사용할 필요는 없다. 식 (2.22)에서 정의된 동적변위는 반드시 양단에서 영이 되어야 한다. 이 논문에서는 모든 기저함수가 양단에서의 경계조건을 항상 만족시키는 sine 함수를 기저함수로 사용하였다.

$$\tilde{\phi}_{xi} = \tilde{\phi}_{yi} = \sin \frac{i\pi}{l_0} s \quad (2.23)$$

식 (2.22)에서 정의된 동적 변위를 식 (2.21)에 대입하기 위하여 행렬식 형식으로 표시한다.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta \tilde{x}_d \\ \Delta \tilde{y}_d \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} \Delta A_{xi} \tilde{\phi}_{xi}(s) \\ \Delta A_{yi} \tilde{\phi}_{yi}(s) \end{pmatrix} \sin \omega t = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{x1} & 0 & \cdots & \tilde{\phi}_{xn} & 0 \\ 0 & \tilde{\phi}_{y1} & \cdots & 0 & \tilde{\phi}_{yn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta A_{x1} \\ \Delta A_{y1} \\ \vdots \\ \Delta A_{xn} \\ \Delta A_{yn} \end{pmatrix} \sin \omega t \\ &= \tilde{\mathbf{N}} \cdot \Delta \mathbf{A} \sin \omega t \end{aligned} \quad (2.24)$$

위 식에서 $\tilde{\mathbf{N}}$ 및 $\Delta \mathbf{A}$ 는 각각 기저함수 행렬과 계수 벡터이다. 현 방향 및 현 수직방향의 동적변위는 2 차원 변환행렬을 이용하여 전체 좌표계에서의 x -방향 및 y -방향 변위로 표시할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \Delta x_d \\ \Delta y_d \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \tilde{x}_d \\ \Delta \tilde{y}_d \end{pmatrix} = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{N}} \Delta \mathbf{A} \sin \omega t = \mathbf{N} \Delta \mathbf{A} \sin \omega t \quad (2.25)$$

여기서 \mathbf{R} 은 변환행렬이며, \mathbf{N} 은 전체좌표계에서의 기저함수 행렬로서 다음과

같이 정의 된다.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{x1} \cos \theta & -\tilde{\phi}_{y1} \sin \theta & \cdots & \tilde{\phi}_{xn} \cos \theta & -\tilde{\phi}_{yn} \sin \theta \\ \tilde{\phi}_{x1} \sin \theta & \tilde{\phi}_{y1} \cos \theta & \cdots & \tilde{\phi}_{xn} \sin \theta & \tilde{\phi}_{yn} \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

식 (2.25)를 식 (2.21)에 대입하면 케이블의 이산화된 증분형 동적운동방정식을 구할 수 있다.

$$\int_{l_0} \mathbf{N}^T \rho_0 \mathbf{N} ds \Delta \ddot{\mathbf{A}} + \int_{l_0} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} ds \Delta \mathbf{A} = \Delta \mathbf{f} \quad (2.27)$$

위 식에서 사용된 기호는 다음과 같다.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \tilde{T} + EA(x')^2 & EAx'y' \\ EAx'y' & \tilde{T} + EA(y')^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}'_{x1} \cos \theta & -\tilde{\phi}'_{y1} \sin \theta & \cdots & \tilde{\phi}'_{xn} \cos \theta & -\tilde{\phi}'_{yn} \sin \theta \\ \tilde{\phi}'_{x1} \sin \theta & \tilde{\phi}'_{y1} \cos \theta & \cdots & \tilde{\phi}'_{xn} \sin \theta & \tilde{\phi}'_{yn} \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\Delta \mathbf{f} = \int_{l_0} \mathbf{N}^T \begin{pmatrix} f_x^{t+\Delta t} \\ w_0 + f_y^{t+\Delta t} \end{pmatrix} ds - \int_{l_0} \mathbf{N}^T \rho_0 \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} ds - \int_{l_0} \mathbf{B}^T \begin{pmatrix} \tilde{T} x' \\ \tilde{T} y' \end{pmatrix} ds$$

$$\mathbf{M}_c = \int_{l_0} \mathbf{N}^T \rho_0 \mathbf{N} ds \quad (2.29a)$$

$$\mathbf{K}_c = \int_{l_0} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} ds \quad (2.29b)$$

$$\Delta \mathbf{f} = \int_{l_0} \mathbf{N}^T \begin{pmatrix} f_x^{t+\Delta t} \\ w_0 + f_y^{t+\Delta t} \end{pmatrix} ds - \int_{l_0} \mathbf{N}^T \rho_0 \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} ds - \int_{l_0} \mathbf{B}^T \begin{pmatrix} \tilde{T} x' \\ \tilde{T} y' \end{pmatrix} ds \quad (2.29c)$$

$\mathbf{M}_c, \mathbf{K}_c$, 그리고 $\Delta \mathbf{f}$ 는 각각 케이블의 질량행렬, 접선 강성도 행렬 그리고 불평형력으로서 다음과 같이 정의된다.

식 (2.27)에 대한 시간 적분을 위하여 평균가속도법($\gamma = 0.5, \beta = 0.25$)을 적용한 Newmark- β 법과 같은 수치적분을 사용한다. 각 시간 단계에서 해가 수렴할 때까지 식 (2.27)를 반복적으로 풀어 각 시간 단계에서의 위치의 변화량을 계산할 수 있다.

3. 안정화 기법

2 장에서 정의한 케이블 요소를 이용한 동적 해석 결과에서 볼 수 있듯이 팽팽한 케이블의 경우에는 케이블의 정적 상태에서의 장력이 크고 진폭도 작기 때문에 음의 장력(압축력)이 발생할 가능성이 거의 없다. 하지만 느슨한 케이블의 경우에는 장력이 작기 때문에 케이블의 강성도가 작아지게 되어 상대적으로 큰 진폭이 발생할 수 있다. 운동 상태에 있는 케이블의 경우 정적 평형상태를 기준으로 케이블이 아래쪽에 위치하면 변형이 커지기 때문에 더 적은 장력이 발생할 것이다. 따라서 새그-경간비가 큰 느슨한 케이블에서 케이블이 정적 평형 상태보다 위 쪽에 위치할 경우 압축력이 발생하는 구간이 발생할 수 있다.

케이블 부재에 음의 장력이 발생하게 되면 식 (2.29b)에서 정의된 케이블 강성도 행렬의 *positive definiteness* 가 상실되면서 케이블 평형방정식의 *ellipticity* 역시 상실된다. 이에 따라서 가상일 원리와 같이 Galerkin 방법에 기초한 에너지 법에 의하여 해석을 수행하면 극심한 해의 진동과 발산 현상을 동반하는 수치적 불안정성이 발생하게 된다. 이러한 불안정성을 해결하기 위한 방법으로 두 가지 접근법을 생각할 수 있다. 그 첫 번째 방법으로는 케이블에 음의 장력이 도입될 수 있다는 가정 하에서 쌍선곡형 미분방정식을 안정적으로 풀 수 있는 Petrov-Galerkin 방법에 기초한 가중잔차법 혹은 가상일 원리를 적용하는 것이다. 이 접근법을 적용하기 위하여 케이블의 동적 평형 방정식에 대한 가중함

수 혹은 가중 변위를 실제 변위와 다른 함수 공간에서 정의 하여야 하는데 그러한 함수 공간을 정의하는 것이 쉽지 않고, 실제 변위가 가상 변위 중의 하나로 정의된다는 물리적인 사실에도 위배된다. 또한, 케이블의 장력이 양수일 때와 음수일 때 다른 종류의 가중잔차식을 적용하여야 하는 어려움도 따른다. 두 번째 방법은 첫 번째 방법에 비하여 보다 직관적이고 물리적인 접근법이다. 즉 케이블은 압축력에 대하여는 강성이 아주 작기 때문에 압축력을 받을 수 없고 케이블에 압축력을 유발하는 외력에는 케이블의 휨 강성에 의하여 발생하는 전단력으로 저항한다고 생각하는 것이다. 팽팽한 케이블의 경우와 같이 큰 장력이 케이블에 도입되면 케이블의 휨 강성의 역할이 상대적으로 중요한 역할을 할 수 있다. 이러한 논리에 기초하여 휨에 대하여 저항할 수 있는 아치 요소를 케이블 모델에 결합함으로써 압축력의 발생으로 인한 강성의 손실을 보완하여 안정적인 해석 결과를 얻을 수 있다.

3.1 불안정성의 발생 요인

케이블은 장력이 도입되기 전에는 강성이 발생하지 않기 때문에 케이블의 형상을 정의할 수 없다. 따라서 케이블의 형상의 특징을 나타낼 수 있는 변수를 정의하면 케이블에 걸린 장력의 크기를 비교할 수 있다. 케이블 형상의 특징을 나타내는 변수로 새그-경간비를 정의한다. 케이블 새그-경간비는 정적 평형상태에서의 케이블 중앙에서의 위치를 이용하여 다음과 같이 정의한다.

$$S = \frac{(x_s^2(L_0/2) + y_s^2(L_0/2))^{0.5}}{L_{span}} \quad (3.1)$$

여기서 S 는 새그-경간비를 의미하고, x_s, y_s 그리고 L_0 는 각각 정적 평형상태에
 서의 중앙위치와 무응력 길이 그리고 L_{span} 은 케이블의 양 지점간의 거리를 의
 미한다.

케이블의 형상은 운동 중에 계속 변한다. 팽팽한 케이블의 경우 큰 장력이
 케이블에 도입되면 케이블의 휨강성 케이블의 장력에 의하여 발생하는 강성도
 에 비하여 무시할 수 있을 정도로 작을 것이다. 그러나 케이블의 휨 강성의 절
 대값은 작더라도 케이블에 도입되는 장력이 작아지게 되면 케이블의 휨 강성의
 역할이 상대적으로 중요한 역할을 할 수 있다. 따라서 느슨한 케이블의 경우
 정적 평형 상태보다 아래 쪽에 위치할 경우 새그-경간비는 커지고 정적 평형상
 태의 장력보다 더 큰 장력이 걸릴 것이고, 위쪽에 위치하면 새그-경간비는 작아
 지면서 더 작은 장력이 걸릴 것이다. 그러므로 느슨한 케이블에서 케이블이 정
 적 평형상태보다 위쪽에 위치할 경우 압축력이 발생하는 구간이 발생하게 된다.

2 장에서 구한 케이블의 운동 방정식은 케이블이 인장력을 받을 때 강성이
 발현된다는 가정으로부터 정의되어있다. 그러나 케이블이 압축력을 받게 되면
 케이블의 강성이 사라지게 되므로 더 이상 위의 가정은 성립할 수가 없다. 식
 (2.29b)는 케이블의 접선 강성 행렬이다. 이 식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \tilde{T} + EA\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 & EA\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} \\ EA\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} & \tilde{T} + EA\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

위 식을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \tilde{T} + EA \cos^2 \theta \left(\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right) & EA \cos \theta \sin \theta \left(\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right) \\ EA \cos \theta \sin \theta \left(\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right) & \tilde{T} + EA \sin^2 \theta \left(\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

θ 는 케이블 상의 한 질점에서 접선이 이루는 각이다. 일반적으로 케이블의 축방향 강성인 EA 는 장력에 비하여 매우 큰 값을 가지지만 $\cos \theta$, 또는 $\sin \theta$ 가 영에 가까워지면 장력의 값이 음이 될 경우에 접선 강성 행렬의 대각 요소가 음수가 될 수 있다. 따라서, 접선 강성 행렬의 대각 요소가 음수가 되면 접선 강성 행렬의 **positive definiteness**가 상실된다.

다음 절에서는 느슨한 케이블의 안정된 해석 결과를 얻을 수 있는 안정화 기법을 제시한다.

3.2 안정화 기법

운동 중에 압축력으로 인하여 강성도 행렬이 **positive definiteness**를 잃어버리는 것으로 볼 수 있다. 이러한 현상은 실제 케이블의 거동을 케이블 모델이 정확히 묘사하지 못하기 때문이다. 실제 케이블은 이상화된 케이블 모델과는 달리 약간의 휨 강성을 가지고 있다. 따라서 케이블이 인장력을 받을 때는 휨 강성이 케이블의 거동에 아무런 영향을 주지 못하지만 압축력을 받을 경우에는 케이블이 휨에 의한 저항하게 된다. 이상화된 케이블 모델은 휨 강성이 정의 되

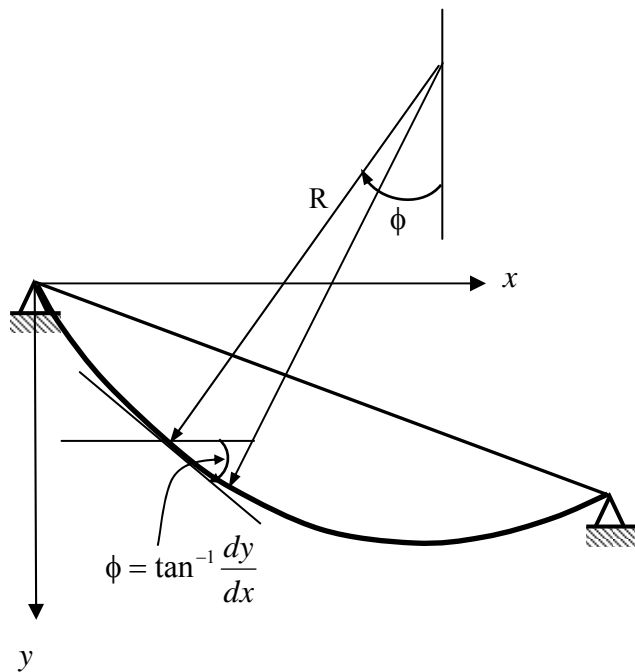


그림 3.1 아치 요소가 결합된 케이블

어 있지 않으므로 압축력이 발생할 경우에 휨에 의한 저항을 전혀 모사하지 못하므로 강성을 잃어버리게 되는 것이다. 그러므로 이상화된 케이블 모델에 휨 강성을 도입하면 부족한 강성을 보완할 수 있다. 이상화된 케이블 모델에 휨에 의한 거동을 추가하기 위하여 이 논문에서는 그림 3.2 에서 보듯이 케이블과 형상이 같은 아치 요소를 결합한다.

안정화된 케이블의 동적 해석 결과를 얻기 위해 추가된 아치 요소의 기하학적 성질은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\frac{dx}{ds} = -F_x^1 \left(\frac{1}{EA} + \frac{1}{((F_x^1)^2 + (F_z^1 + ws)^2)^{0.5}} \right) = -F_x^1 \left(\frac{1}{EA} + \frac{1}{T} \right) \quad (3.4a)$$

$$\frac{dz}{ds} = -(F_z^1 + ws) \left(\frac{1}{EA} + \frac{1}{((F_x^1)^2 + (F_z^1 + ws)^2)^{0.5}} \right) = -(F_z^1 + ws) \left(\frac{1}{EA} + \frac{1}{T} \right)$$

$$\tan \phi = \frac{dz}{dx} = \frac{dz/ds}{dx/ds} = \frac{F_z^1 + ws}{F_x^1}$$

$$\cos \phi = \frac{F_x^1}{((F_x^1)^2 + (F_z^1 + ws)^2)^{0.5}} = -\frac{F_x^1}{T} \quad (3.4b)$$

$$\sec^2 \phi \frac{d\phi}{dp_s} = \frac{w}{F_x^1} \frac{ds}{dp_s}$$

$$\frac{d\phi}{dp_s} = \frac{w}{F_x^1} \cos^2 \theta \frac{ds}{dp_s} = \frac{wF_x^1}{T^2} \frac{ds}{dp_s}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{d\phi}{dp_s} = \frac{wF_x^1}{T^2} \frac{ds}{dp_s}, \quad \frac{d}{dp_s} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{d^2\phi}{dp_s^2} = -\frac{R'}{R^2} \quad (3.4c)$$

여기서, R 은 아치의 곡률반경이고, w 는 아치의 단위길이당 질량 그리고 ϕ 는 아치의 곡률각이다. 아치의 단위 길이 당 질량은 케이블의 단위 질량과 동일하다. 아치의 변위와 접선 변형도의 관계는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{d}{dp_s} \left(\frac{R+z}{R} u - z \frac{dv}{dp_s} \right) + \frac{v}{R} = \frac{du}{dp_s} + \frac{v}{R} + z \left(\frac{d}{dp_s} \left(\frac{u}{R} \right) - \frac{d^2v}{dp_s^2} \right) \\ &= \frac{du}{dp_s} + \frac{v}{R} + z \left(\frac{1}{R} \frac{du}{dp_s} - \frac{u}{R^2} R' - \frac{d^2v}{dp_s^2} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

여기서 ε_s 는 정적 평형상태에서의 접선 변형도 그림 3.2 에서 u 와 v 는 각각 극좌표계에서 s -방향의 접선 변위, z -방향의 곡률반경의 변위이다. 그리고 z 는

중립축에서 임의의 점까지의 거리이다.

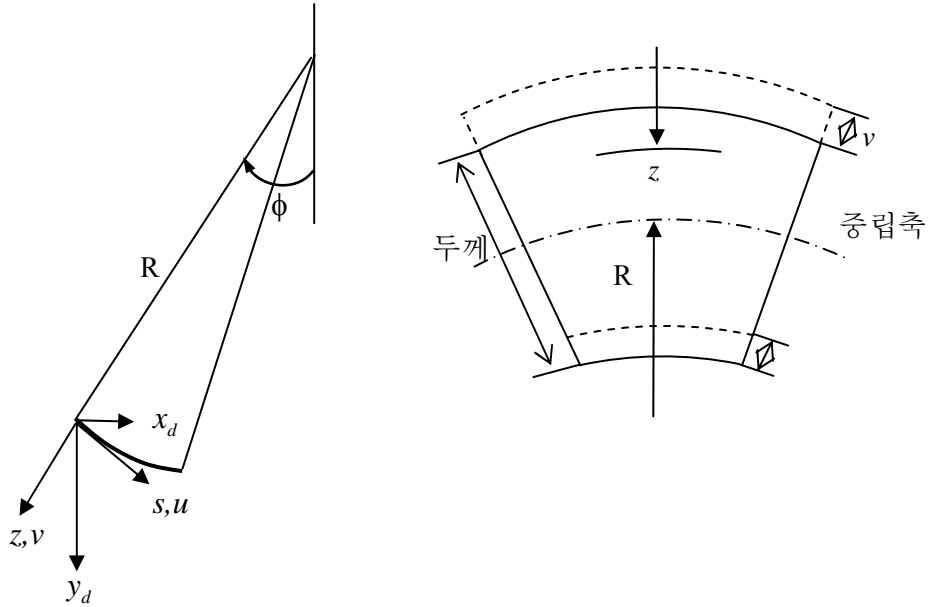


그림 3.2 아치 요소

아치의 Total Potential Energy 는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\Pi = \frac{1}{2} \int (\int \varepsilon_s E \varepsilon_s dA) dp_s - \int_l (uq_\theta + vq_r) dp_s \quad (3.6)$$

여기서 E 는 탄성계수(Young's Modulus)이고 q_θ 와 q_r 는 각각 극좌표계에서 s-방향, z-방향의 외력이다. 식 (3.5)를 식 (3.6)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\Pi = \frac{1}{2} \int (EA \left(\frac{du}{dp_s} + \frac{v}{R} \right)^2 + EI \left(\frac{d}{dp_s} \left(\frac{u}{R} \right) - \frac{d^2 v}{dp_s^2} \right)^2) dp_s - \int_l (uq_\theta + vq_r) dp_s \quad (3.7)$$

여기서 A 는 아치의 단면적이고, I 는 아치의 단면 2 차 모멘트이다. 아치의 단면 2 차 모멘트는 케이블의 전체 단면이 유효하고 강체로 거동하는 것으로 가정하

여 계산을 한다. 식 (3.7)을 행렬식으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{1}{2} \int (EA(\frac{du}{dp_s} + \frac{v}{R})^2 + EI(\frac{d}{dp_s}(\frac{u}{R}) - \frac{d^2v}{dp_s^2})^2) dp_s - \int_l (uq_\theta + vq_r) dp_s \\
&= \frac{1}{2} \int \left(\frac{du}{dp_s} + \frac{v}{R}, \frac{d}{dp_s}(\frac{u}{R}) - \frac{d^2v}{dp_s^2} \right) \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du}{dp_s} + \frac{v}{R} \\ \frac{d}{dp_s}(\frac{u}{R}) - \frac{d^2v}{dp_s^2} \end{bmatrix} dp_s \\
&\quad - \int_l (u, v) \begin{pmatrix} q_\theta \\ q_r \end{pmatrix} dp_s
\end{aligned} \tag{3.8}$$

극좌표계에서 정의된 아치의 변형도와 변위의 관계를 직각좌표계로 변환하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dp_s} + \frac{v}{R} \\ \frac{d}{dp_s}(\frac{u}{R}) - \frac{d^2v}{dp_s^2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dp_s} & \frac{d\phi}{dp_s} \\ \frac{d\phi}{dp_s} \frac{d}{dp_s} + \frac{d^2\phi}{dp_s^2} & -\frac{d^2}{dp_s^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{L}_p \mathbf{u}_p \tag{3.9a}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \end{pmatrix} = \mathbf{\Gamma}_c \mathbf{x}_d \tag{3.9b}$$

여기서 $\mathbf{\Gamma}_c$ 는 아치의 임의의 한 점에서 점선이 이루는 각의 회전 변환 행렬이고 \mathbf{x}_d 는 $(x_d \ y_d)^T$ 이다. 식 (3.9b)를 식 (3.9a)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 표시된다.

$$\mathbf{L}_p \mathbf{u}_p = \begin{bmatrix} \frac{d}{dp_s} & \frac{d\phi}{dp_s} \\ \frac{d\phi}{dp_s} \frac{d}{dp_s} + \frac{d^2\phi}{dp_s^2} & -\frac{d^2}{dp_s^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \end{pmatrix} = \mathbf{L}_c \mathbf{x}_d \tag{3.10}$$

여기서 \mathbf{L}_C 는 L_p 에 회전 변환 행렬을 곱한 것이고, \mathbf{x}_d 는 $(x_d \ y_d)^T$ 이다. 극좌표계에서 정의된 External Potential Energy 를 직각좌표계로 변환하여 표시할 수 있다.

$$\int_l (uq_\theta + vq_r) dp_s = \int_l (u \ v) \begin{pmatrix} q_\theta \\ q_r \end{pmatrix} dp_s \quad (3.11)$$

$$\begin{pmatrix} q_\theta \\ q_r \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} = \mathbf{\Gamma}_C \mathbf{q}_C$$

여기서 \mathbf{q}_C 는 $(q_x \ q_y)^T$ 이다.

3.3 아치의 이산화

아치의 이산화는 케이블의 경우와 같이 Rayleigh-Ritz 방법을 사용하여 현 방향과 현 수직 방향의 변위 성분을 기저함수로 가정하여 이산화할 수 있다.

$$\tilde{x}_d \approx \sum_{i=1}^n A_{xi} g_{xi}(s) \sin \omega t \quad (3.12)$$

$$\tilde{y}_d \approx \sum_{i=1}^n A_{yi} g_{yi}(s) \sin \omega t$$

여기서 ω 및 n 은 케이블의 각 진동수와 기저함수의 개수이고, $\Delta \tilde{x}_d, \Delta \tilde{y}_d, g_{xi}$ 그리고 g_{yi} 는 각각 현 방향 및 현 수직방향에 대한 동적변위와 기저함수이다. 케이블의 경우와 같이 기저함수는 양단 경계조건을 항상 만족시키는 sine 함수를 사용하였다.

$$g_{xi} = g_{yi} = \sin \frac{i\pi}{l_0} s \quad (3.13)$$

식 (3.12)에서 정의된 동적변위를 행렬식 형식으로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{x}_d \\ \tilde{y}_d \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} A_{xi} g_{xi}(s) \\ A_{yi} g_{yi}(s) \end{pmatrix} \sin \omega t = \begin{bmatrix} g_{x1} & 0 & \cdots & g_{xn} & 0 \\ 0 & g_{y1} & \cdots & 0 & g_{yn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_{x1} \\ A_{y1} \\ \vdots \\ A_{xn} \\ A_{yn} \end{pmatrix} \sin \omega t \\ &= \tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{A} \sin \omega t \end{aligned} \quad (3.14)$$

위 식에서 $\tilde{\mathbf{N}}$ 및 \mathbf{A} 는 각각 기저함수 행렬과 계수 벡터이다. 현 방향 및 현 수직방향의 동적변위는 2 차원 변환행렬을 이용하여 전체 좌표계에서의 x -방향 및 y -방향 변위로 표시할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} x_d \\ y_d \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_d \\ \tilde{y}_d \end{pmatrix} = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{N}} \mathbf{A} \sin \omega t = \mathbf{N} \mathbf{A} \sin \omega t \quad (3.15)$$

여기서 \mathbf{R} 은 변환행렬이며, \mathbf{N} 은 전체좌표계에서의 기저함수 행렬로서 다음과 같이 정의 된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} g_{x1} \cos \theta & -g_{y1} \sin \theta & \cdots & g_{xn} \cos \theta & -g_{yn} \sin \theta \\ g_{x1} \sin \theta & g_{y1} \cos \theta & \cdots & g_{xn} \sin \theta & g_{yn} \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.16)$$

식 (3.11)와 식 (3.15)을 식 (3.8)에 대입하여 최종 이산화된 Potential Energy 를

구할 수 있다.

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{A}^T \int \mathbf{B}_C^T \mathbf{D} \mathbf{B}_C dp_s \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \int_l \mathbf{N}^T \mathbf{q}_C dp_s = \frac{1}{2} \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{f} \quad (3.17)$$

위에서 사용된 기호는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_C &= (\mathbf{L}_C^0 + \mathbf{L}_C^1 + \mathbf{L}_C^2) \mathbf{N} = (\mathbf{B}_C^0 + \mathbf{B}_C^1 + \mathbf{B}_C^2) \\ \mathbf{f} &= \int_l \mathbf{N}^T \mathbf{q}_C dp_s \end{aligned} \quad (3.18)$$

직각 좌표계에서 표시된 아치 요소의 강성도 행렬을 식 (2.27)에서 정의된 케이블 모델에 대한 운동방정식에 더하면 휨 거동을 포함한 케이블의 이산화된 운동방정식을 구할 수 있다.

$$\mathbf{M}_c \Delta \ddot{\mathbf{A}}^{t+\Delta t} + (\mathbf{K}_c + \mathbf{K}_a) \Delta \mathbf{A}^{t+\Delta t} = \Delta \mathbf{f} \quad (3.19)$$

여기서, \mathbf{K}_a 는 강성도 행렬이다. 식 (3.17)은 시간에 대한 미분항이 포함되어 있으므로 시간에 대한 이산화를 해야만 이산화된 시간에 대하여 Newton-Raphson 방법에 기초한 반복계산으로 방정식을 풀 수 있다. 평균가속도법이 적용된 Newmark- β 방법으로 시간에 대한 이산화를 수행한다. 이산화된 시간 $t + \Delta t$ 에서 재단 변위와 속도의 계수벡터는 다음과 같이 정의된다.

$$\Delta \mathbf{A} = (\Delta t) \dot{\mathbf{A}} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{\mathbf{A}} + \beta (\Delta t)^2 \Delta \ddot{\mathbf{A}} \quad (3.20a)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{A}} = (\Delta t) \ddot{\mathbf{A}} + (\gamma \Delta t) \Delta \ddot{\mathbf{A}} \quad (3.20b)$$

식 (3.21a)는 식 (3.20a)를 가속도의 증분에 대하여 정리한 식이고, 식 (3.21a)를 식 (3.20b)에 대입하면 속도의 증분이 변위의 증분에 의한 함수로 정의된 식 (3.21b)를 얻을 수 있다.

$$\Delta\ddot{\mathbf{A}} = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \Delta\dot{\mathbf{A}} - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{A}} - \frac{1}{2\beta} \ddot{\mathbf{A}} \quad (3.21a)$$

$$\Delta\dot{\mathbf{A}} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \Delta\mathbf{A} - \frac{\gamma}{\beta} \dot{\mathbf{A}} + (\Delta t)\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{\mathbf{A}} \quad (3.21b)$$

식 (3.21a), (3.21b)를 식 (3.19)에 대입하면 다음과 같이 시간과 공간에 대하여 이산화된 증분형 운동 방정식을 얻는다.

$$\hat{\mathbf{K}}\Delta\mathbf{A} = \Delta\hat{\mathbf{F}} \quad (3.22)$$

여기서 $\hat{\mathbf{K}}$, $\Delta\hat{\mathbf{F}}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{\mathbf{K}} = (\mathbf{K}_c + \mathbf{K}_a) + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \mathbf{M}_c \quad (3.23a)$$

$$\Delta\hat{\mathbf{F}} = \Delta\mathbf{F} + \left[\frac{1}{\beta\Delta t} \mathbf{M}_c\right] \dot{\mathbf{A}} + \left[\frac{1}{2\beta} \mathbf{M}_c\right] \ddot{\mathbf{A}} \quad (3.23b)$$

설명의 편의를 위하여 2 장에서 정의한 모델을 케이블 모델, 그리고 3 장에서 정의한 케이블 모델에 아치 요소가 추가된 모델을 복합 모델이라고 앞으로 명명한다.

4. 수치 해석 예제

4 장에서는 3 장에서 구한 복합 모델을 이용하여 새그-경간 비가 1/50 인 느슨한 케이블 모델에 적용하여 시간 영역에서의 응답 특성을 파악한다. 그리고 약 1/300 인 팽팽한 경사케이블모델과 복합모델을 사용하여 시간 영역해석을 수행하여 실험에서 구한 변위와 가속도를 비교한다. 본 논문에서 제시된 모든 예제는 사다리꼴 적분(적분구간 1000 개), 현 방향 및 현 수직방향 기저함수는 각각 20 개를 사용하였다.

4.1 시간 영역 해석 예제

본 논문에서의 시간 영역 해석은 자유 진동 해석을 수행하였다. 제안된 모델의 정당성을 확인하기 위하여 경간-새그 비가 50 인 느슨한 수평케이블을 대상으로 하여 해석을 수행한다. 자유진동해석의 경우에는 이 논문에서 제안하는 케이블 모델을 이용한 해석의 정확도와, 해석 시간 간격에 따른 해의 안정성을 평가한다. 또한 진동으로 인한 케이블 현상의 변화에 따른 고유진동수 변화를 파악하고 FFT 해석을 통하여 주어진 예제의 지배적인 진동수를 구한다. 자유진동해석을 위한 예제는 중앙에서의 초기 변위를 0.5m 로 정하였다. 그리고 팽팽한 경사 케이블의 경우에는 중앙에 재하된 집중하중 100kg 을 갑자기 제거하여 발생하는 자유진동에 대하여 시간 영역 해석을 수행하고 실험에서 얻은 변

위와 가속도를 본 논문에서 제안한 케이블의 모델의 응답과 비교한다.

4.1.1 느슨한 케이블 모델

예제는 그림 4.1 과 같은 경간이 100m 인 수평 케이블이다. 케이블의 주요 물성치를 표 4.1 에 제시하였다.

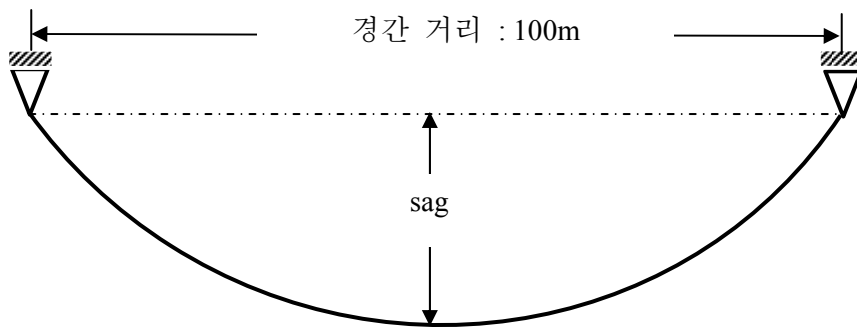


그림 4.1 해석 예제

표 4.1 예제로 사용된 케이블의 물성치

종류	단위 길이당 자중	탄성 계수	단면적	관성 모멘트
크기	$3.223 \times 10^3 \text{ N/m}$	$2.067 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	$4.199 \times 10^{-2} \text{ m}^2$	$2.2452 \times 10^{-3} \text{ m}^4$

시간 간격을 1/500 초로 총 4000 초간 해석을 수행했을때 경간-새그비가 50 인 느슨한 복합 모델의 중앙 수직 진동 변위를 그림 4.2 에 도시하였다. 직 변위를 도시하였다. 경간-새그비가 50 인 경우 케이블의 응답을 살펴보면 아래쪽

꼭지점들은 초기 변위인 0.5m 부근에서 형성되지만 위 쪽 꼭지점들은 대부분 초기 변위보다 더 큰 변위 값을 보인다. 그 이유는 정적 평형 상태에서의 장력이 동적 장력에 비하여 상대적으로 작으므로 진동 중에 케이블이 정적 평형상태보다 위 쪽에 위치하게 되면 케이블의 강성이 상대적으로 많이 약해지므로 변위가 더 크게 발생한다. 복합 모델로 구한 해의 정확성을 평가하기 위하여 두 모델로 해석한 중앙절점에서의 진동형상을 그림 4.3 에 도시하였다. 이차 P-K 와 Green 변형도를 고려하지 않고 유한요소법을 이용한 해석 결과는 그림 4.4 에 도시하였다. 그림 4.3 과 그림 4.4 를 비교해보면 유한요소법의 변위가 약간 크게 나온 이유는 이차 P-K 와 Green 변형도를 고려하지 않았기 때문이다. 그리고 Rayleigh-Ritz 방법을 이용한 복합 모델로 해석한 장력 결과를 그림 4.5 에, 케이블 모델로 해석한 장력 결과를 그림 4.6 에서 비교 하였다. 케이블 모델의 경우 장력이 음의 영역으로 들어가면서부터 매우 불안정한 보이지만 복합 모델은 전 시간 구간에 걸쳐서 상대적으로 안정된 해석 결과를 보이므로 케이블의 형상에 변화에 따른 장력 변화를 복합 모델이 좀 더 정확하게 평가한다고 볼 수 있다.

느슨한 케이블에서는 장력 변화로 인한 강성의 변화가 크기 때문에 진동 중에 고유진동수 또한 일정하다고 볼 수 없다.[12] 복합 모델의 정적 평형 상태에서 고유치 해석으로 구한 1, 2 차 고유진동수는 1.1Hz, 1.2Hz 이다. 중앙에서의 진동 변위를 FFT 해석을 하여 구한 지배적인 진동수는 약 1.22 Hz 로 평가되었다.

케이블 모델은 시간 간격이 1/50 초로 늘어나면 Newton-Raphson 방법의 특징인 quadratic 한 수렴성을 보이지 못하고 결국 그림 4.7 과 같이 해가 발산하는 결과를 보인다. 그러나 그림 4.8 은 복합 모델의 수치적 안정성을 증명하는 그래프이다. 복합 모델은 시간 간격을 1/50 초까지 늘이더라도 정확한 해석 결과를 보인다. 그러나 그러므로 복합 모델이 케이블 모델에 비하여 수치적으로 안정한 모델임을 알 수 있다.

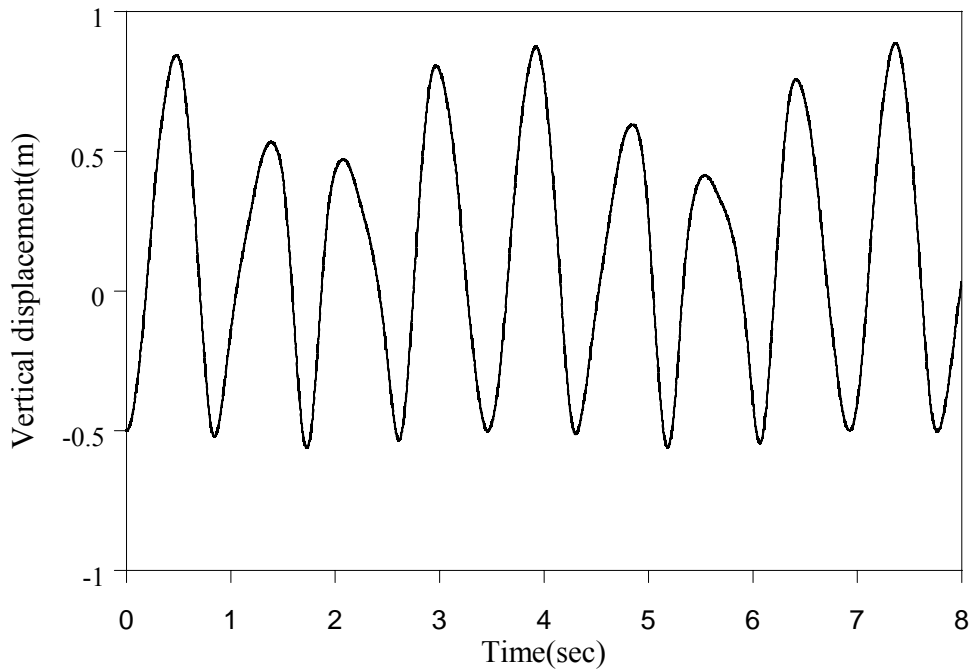


그림 4.2 경간-새그비 50 인 복합 모델의 중앙 수직 진동변위

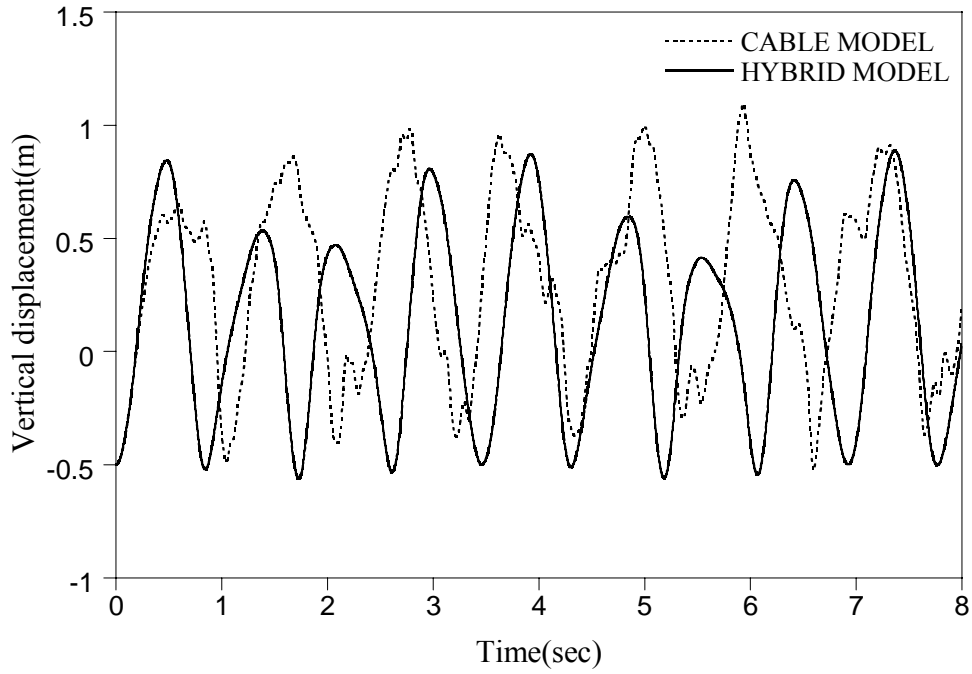


그림 4.3 (Rayleigh-Ritz)복합 모델과 케이블 모델의 중앙 수직 진동변위 비교

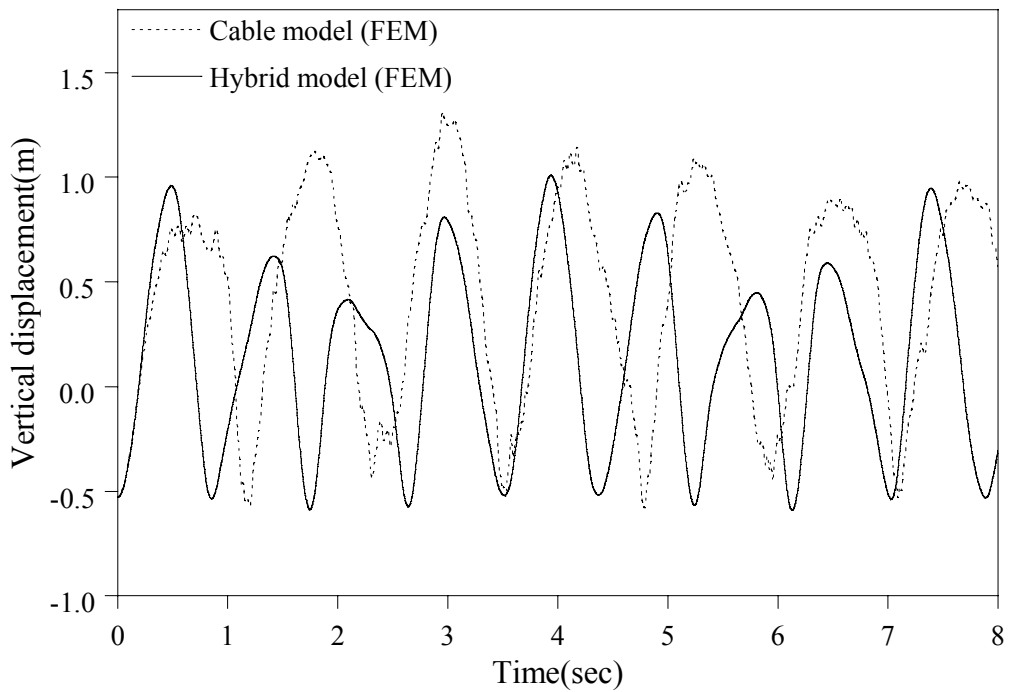


그림 4.4 FEM의 복합 모델과 케이블 모델의 중앙 수직 진동변위 비교

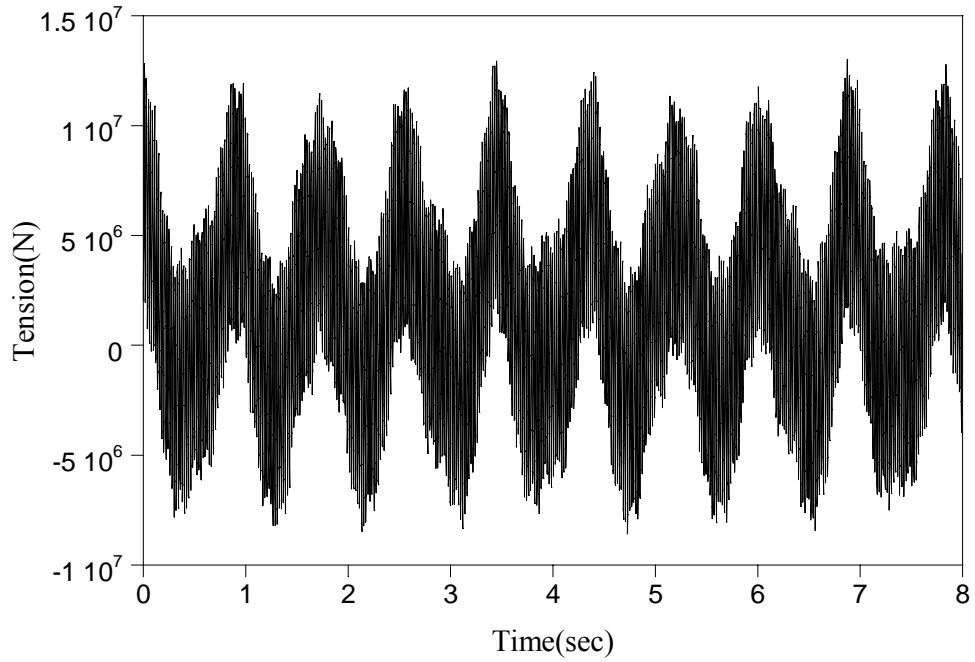


그림 4.5 경간-새그비 50 인 복합 모델의 장력(Rayleigh-Ritz)

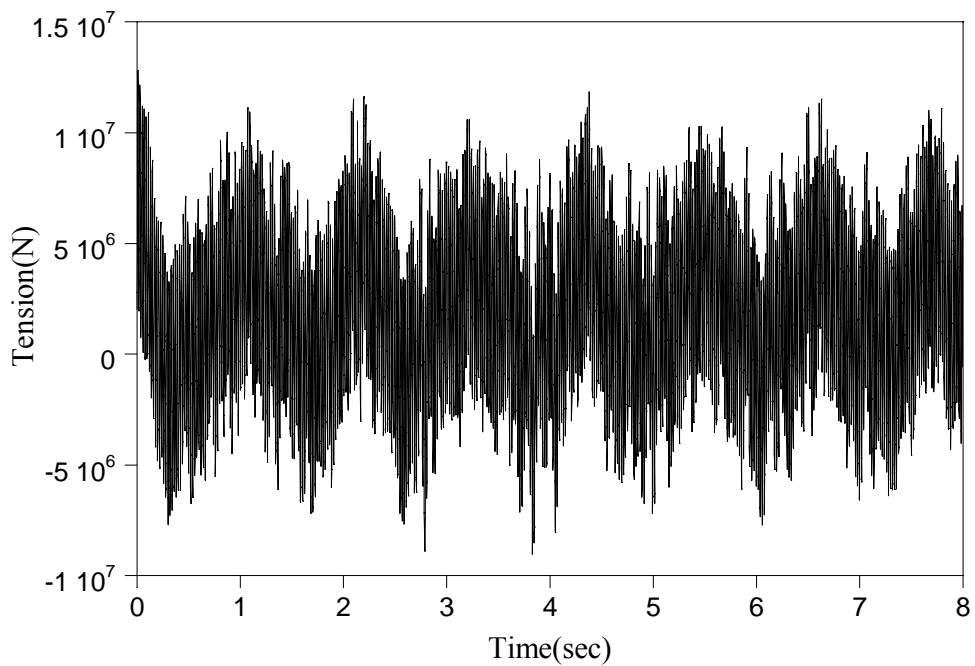


그림 4.6 경간-새그비 50 인 케이블 모델의 장력(Rayleigh-Ritz)

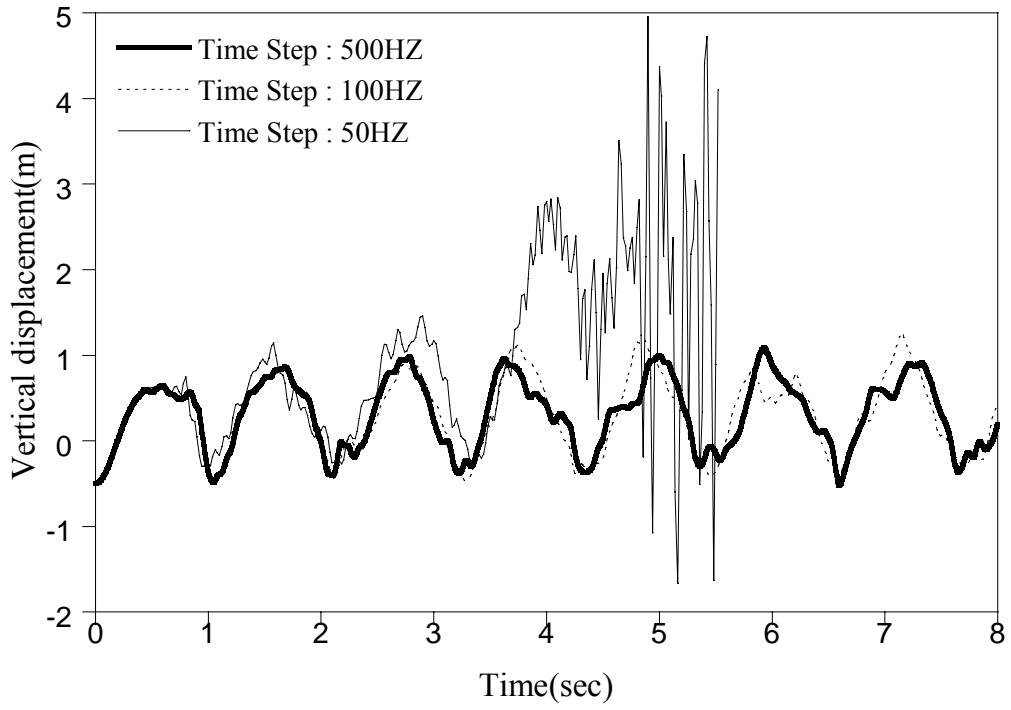


그림 4.7 케이블 모델의 시간 간격에 따른 중앙 수직 진동변위

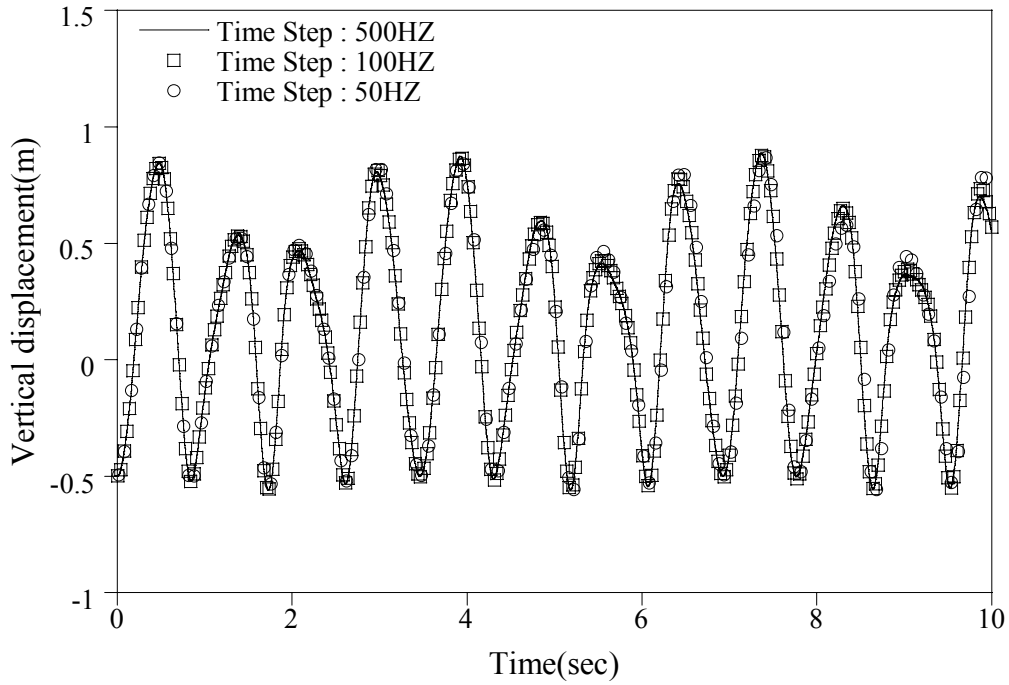


그림 4.8 복합 모델의 시간 간격에 따른 중앙 수직 진동변위

4.1.2 경사진 팽팽한 케이블 모델

실험 케이블 구조물을 모델링 하면 그림 4.9 과 같다. 경간이 43.366m 이고 높이가 6.43m 인 경사 케이블이다. 케이블의 주요 물성치를 표 4.2 에 제시하였다. 실측한 가속도와 변위는 시간 간격을 1/100 초마다 측정하였다. 그러나 케이블 모델링은 시간 간격을 1/500 초로 수행하였다.

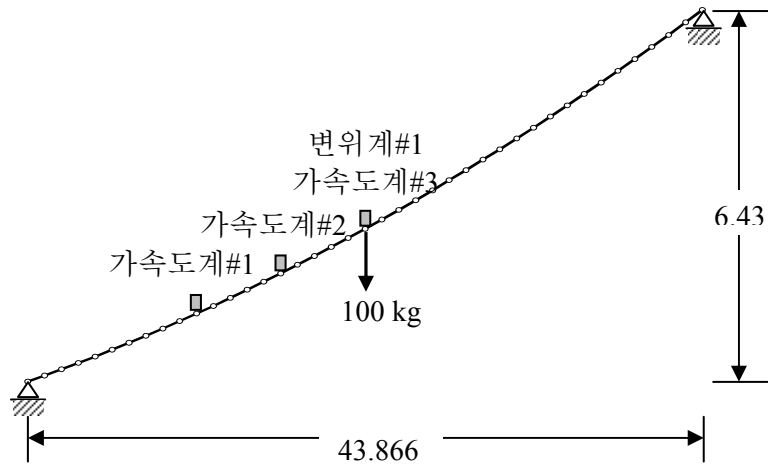


그림 4.9 실험 구조물의 모델링

표 4.2 예제로 사용된 케이블의 물성치

종류	단위 길이당 자중	탄성 계수	유효 단면적	무응력길이
크기	198.94 N/m	2.0×10^{11} N/m ²	2.348×10^{-3} m ²	44.304m

단면 2 차 모멘트인 I 값은 유효단면적을 이용하여 단순 계산하면 (케이블내의

강선들의 미끄러짐이 없다고 가정):
$$I_0 = \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{\pi}{4} r^4 = \frac{\pi A^2}{4 \pi^2} = \frac{A^2}{4\pi} = 0.43871 \times$$

10^{-6} m⁴ 이다. 케이블 구조물의 중앙에 100kg 을 갑자기 제거하여 변위와 가속도를 측정하였다. 그러나 실험 구조물을 모델링 할 때 순간적으로 하중을 제거하는 것이 불가능 하기 때문에 다음과 같은 식을 이용하여 하중을 제거하였다.

$$h(t) = P_0 e^{-at^2} \quad (4.1)$$

여기서 P_0 는 외부하중이고, a 는 하중을 제거하는 시간과 관계 있는 변수로 a 값의 크기가 클수록 하중이 제거되는 시간이 짧아진다. 본 논문에서는 시간 간격을 1/500 초 $a=2500\pi$ 일 경우 그림 4.10 과 같이 나타난다. 따라서 해석에 사용된 하중은 약 0.05 초가 되면 모두 제거가 되고 시간 간격이 0.002 초로 해석하였기 때문에 하중이 제거되는 동안 시간 간격은 25 번 포함된다.

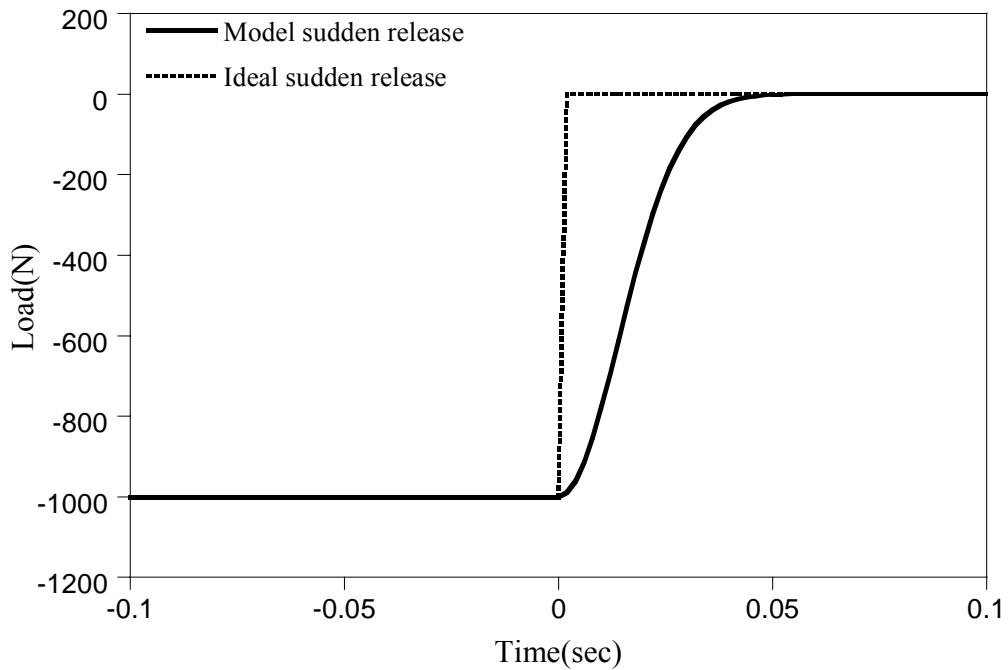


그림 4.10 이상화 된 하중과 해석에 사용된 하중의 시간에 따른 제거 비교

실측치의 중앙 변위와 케이블 모델링의 중앙 변위를 비교하면 그림 4.11 과 같

다. 변위는 이번 논문에서 제안한 케이블 모델만을 이용해도 일치한다.

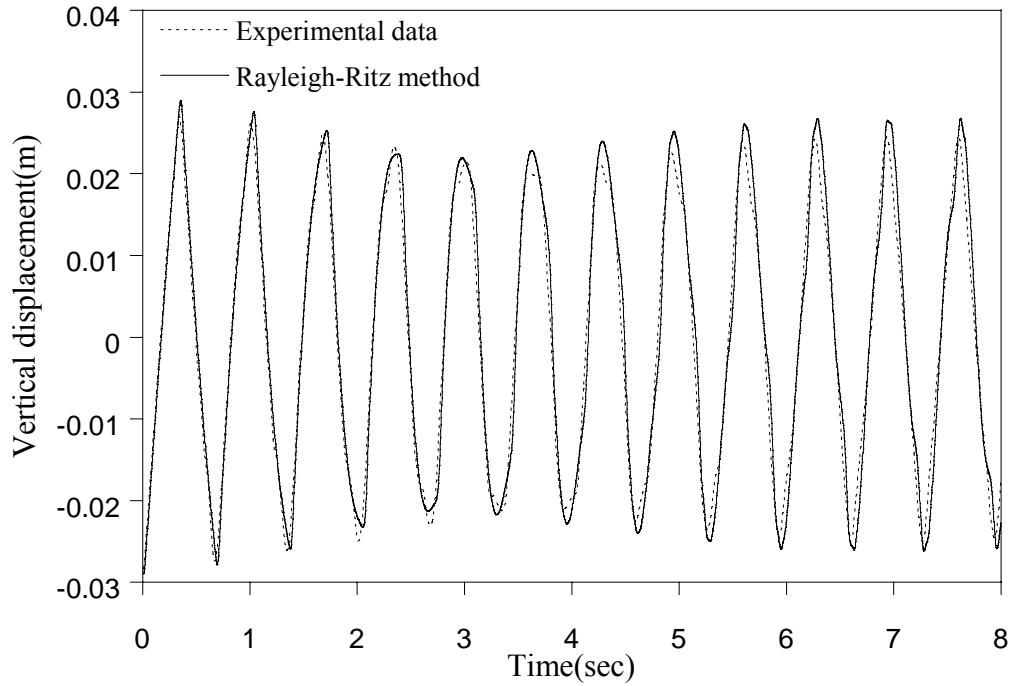


그림 4.11 실측 중앙변위와 케이블 모델링의 중앙변위 비교

그러나 가속도의 경우에는 그림 4.12 와 같이 케이블 모델만을 이용하여 해석을 수행한 결과 실측된 가속도와 상이하게 나타난다.

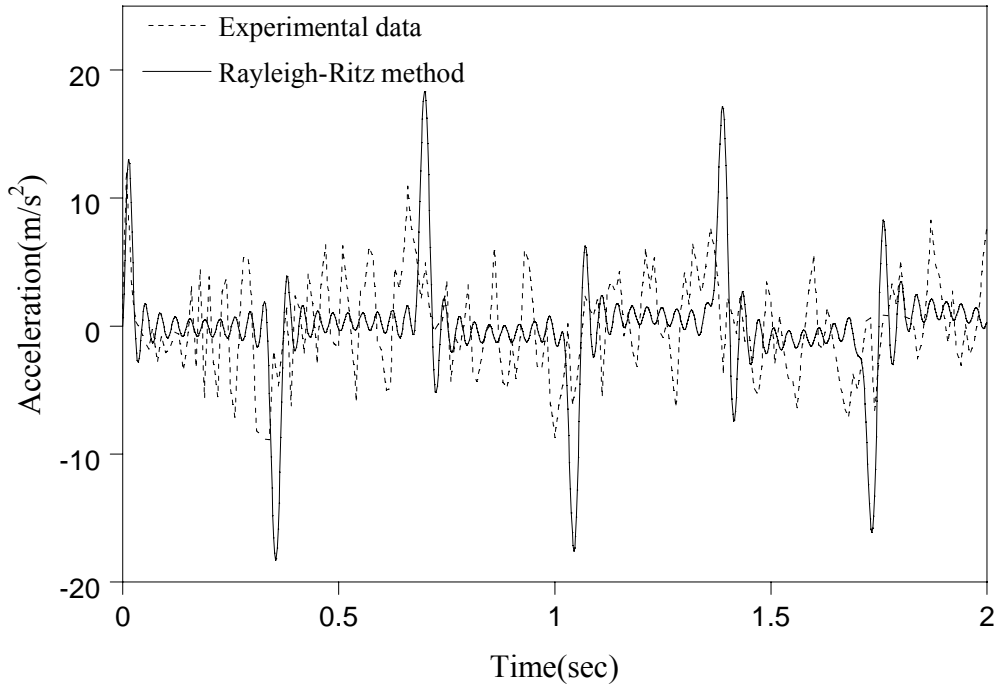


그림 4.12 실측 중앙 가속도와 케이블 모델의 중앙 가속도 비교

경사진 팽팽한 케이블의 경우, 가속도의 실측치와 해석결과의 불안정성을 줄이기 위하여 복합 모델을 이용하여 수행한 결과는 그림 4.13 와 같다. 복합 모델을 사용한 결과 여전히 실측 중앙 가속도와 해석 중앙 가속도의 위상이 정확히 일치 하지 않는다. 이것은 케이블의 단면 2 차 모멘트를 유효단면적을 이용하여 구했기 때문이다. 그러므로 기존의 단면 2 차 모멘트를 1.45 배 한 결과 그림 4.14 과 같이 해석 값이 실측 값과 거의 같게 나타난다. 표 4.3 은 단면 2 차 모멘트에 따른 실측 가속도와 해석 가속도의 Least square error 와 오차의 상대오차를 나타낸다.

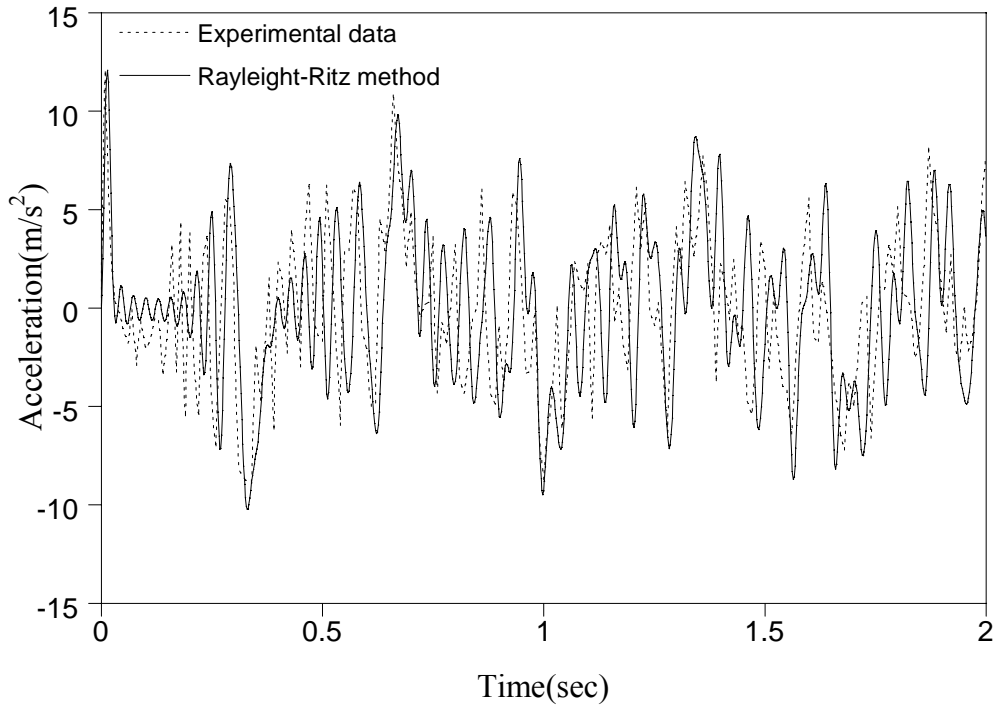


그림 4.13 실측 중앙 가속도와 복합 모델의 중앙 가속도 비교

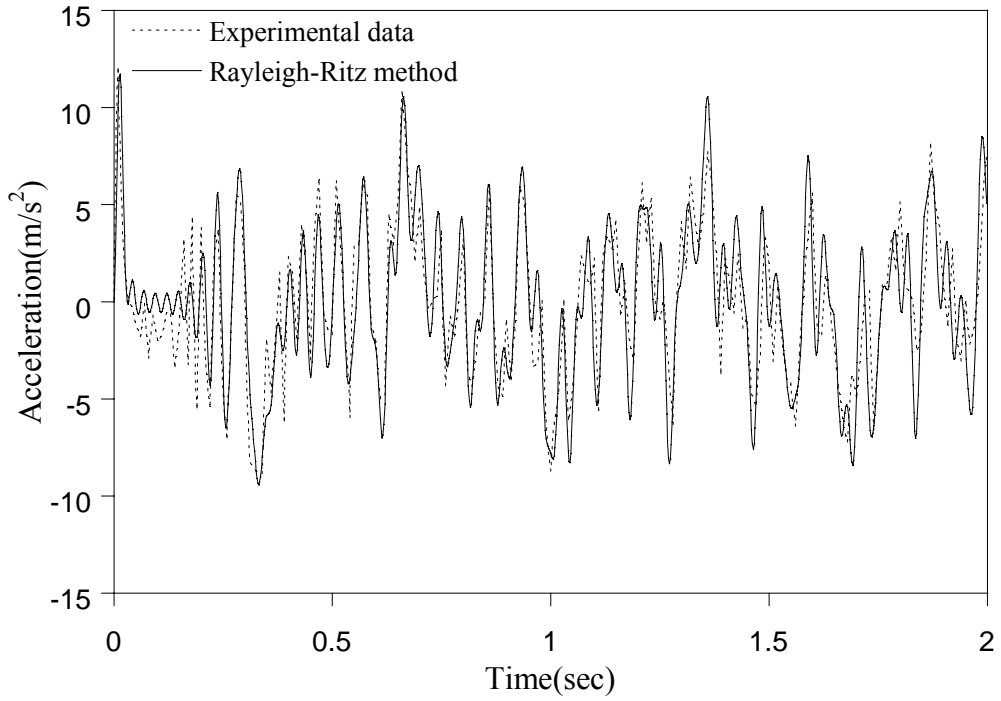


그림 4.14 실측 중앙 가속도와 복합 모델($1.45 \times I$)의 중앙 가속도 비교

표 4.3 Least square error 및 상대오차

	단면 2 차 모멘트	단면 2 차 모멘트(1.45 배)	상대오차(%)
Least square	12.344	10.875	11.901

5. 결 론

기존의 해석 방법을 사용하면 장력 수준이 낮은 느슨한 케이블의 해석 결과가 불안정하거나 케이블의 비선형성을 정확히 묘사하지 못하는 문제점이 있었다. 이 논문에서는 느슨한 케이블 해석 시에 발생하는 수치적 불안정성을 해결한 복합 모델을 제안한다.

케이블 모델을 이용하여 해석을 수행하는 경우 느슨한 케이블에서 수치적 불안정성이 발생한다. 수치적 불안정성이 발생하는 이유는 압축력이 발생할 경우 강성도 행렬의 대각 요소가 음수가 되기 때문이다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 아치 요소를 케이블 모델에 결합하여 부족한 강성을 보완한다. 실제 케이블은 이상화된 케이블 모델과는 다르게 약간의 휨 강성과 회전 관성을 가지고 있다. 그러므로 아치 요소에 의한 휨 강성을 보완하여 실제 케이블과 더욱 가까운 형태의 모델이 만들어진다.

제안된 복합 모델의 타당성을 확인하기 위하여 경간 길이 100m 인 수평케이블을 적용하여 보았다.

팽팽한 케이블의 경우 같이 큰 장력이 케이블에 도입되면 케이블의 휨강성 케이블의 장력에 의하여 발생하는 강성도에 비하여 무시할 수 있을 정도로 작을 것이다. 그러므로 팽팽한 케이블에서는 수치적 불안정성이 발생하지 않을 것이라 생각을 했다. 그러나 두 번째 수치예제에서 실험을 통해 얻은 변위와

가속도의 측정치를 케이블 모델과 비교한 결과 변위는 측정값과 해석결과가 일치하였다. 하지만 가속도의 경우는 불안정성이 발생하였다. 그리고 복합 모델을 이용한 해석결과는 측정된 가속도와 상당히 일치하였다.

앞으로 케이블의 동적 거동에 대한 자세한 실험적 연구 및 이에 근거한 적절한 해석 모델의 정립이 필요할 것이다.

부록

A. 아치의 변형도와 변위의 관계 및 변환

극좌표계에서 정의된 아치의 변형도와 변위의 관계를 직각좌표계로 변환하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{L}_C = \begin{bmatrix} \frac{d}{dp_s} & \frac{d\phi}{dp_s} \\ \frac{d\phi}{dp_s} & \frac{d}{dp_s} + \frac{d^2\phi}{dp_s^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$$

여기서,

$$\begin{aligned} L_{11} &= -\sin\phi \frac{d\phi}{dp_s} + \cos\phi \frac{d}{dp_s} - \sin\phi \frac{d\phi}{dp_s} = -2\sin\phi \frac{d\phi}{dp_s} + \cos\phi \frac{d}{dp_s} \\ L_{12} &= \cos\phi \frac{d\phi}{dp_s} + \sin\phi \frac{d}{dp_s} + \cos\phi \frac{d\phi}{dp_s} = 2\cos\phi \frac{d\phi}{dp_s} + \sin\phi \frac{d}{dp_s} \\ L_{21} &= -\frac{d\phi}{dp_s} \sin\phi \frac{d\phi}{dp_s} + \cos\phi \frac{d\phi}{dp_s} \frac{d}{dp_s} + \cos\phi \frac{d^2\phi}{dp_s^2} + \frac{d^2}{dp_s^2} \sin\phi \\ &= -\frac{d\phi}{dp_s} \sin\phi \frac{d\phi}{dp_s} + \cos\phi \frac{d\phi}{dp_s} \frac{d}{dp_s} + \cos\phi \frac{d^2\phi}{dp_s^2} + \frac{d}{dp_s} (\cos\phi \frac{d\phi}{dp_s} + \sin\phi \frac{d}{dp_s}) \\ &= -\frac{d\phi}{dp_s} \sin\phi \frac{d\phi}{dp_s} + \cos\phi \frac{d\phi}{dp_s} \frac{d}{dp_s} + \cos\phi \frac{d^2\phi}{dp_s^2} \\ &\quad + (-\sin\phi (\frac{d\phi}{dp_s})^2 + \cos\phi \frac{d^2\phi}{dp_s^2} + 2\cos\phi \frac{d\phi}{dp_s} \frac{d}{dp_s} + \sin\phi \frac{d^2}{dp_s^2}) \\ &= -2\frac{d\phi}{dp_s} \sin\phi \frac{d\phi}{dp_s} + 2\cos\phi \frac{d^2\phi}{dp_s^2} + 3\cos\phi \frac{d\phi}{dp_s} \frac{d}{dp_s} + \sin\phi \frac{d^2}{dp_s^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{22} &= \frac{d\phi}{dp_s} \cos \phi \frac{d\phi}{dp_s} + \frac{d\phi}{dp_s} \sin \phi \frac{d}{dp_s} + \sin \phi \frac{d^2\phi}{dp_s^2} - \frac{d^2}{dp_s^2} \cos \phi \\
&= \frac{d\phi}{dp_s} \cos \phi \frac{d\phi}{dp_s} + \frac{d\phi}{dp_s} \sin \phi \frac{d}{dp_s} + \sin \phi \frac{d^2\phi}{dp_s^2} \\
&\quad - \frac{d}{dp_s} \left(-\sin \phi \frac{d\phi}{dp_s} + \cos \phi \frac{d}{dp_s} \right) \\
&= \frac{d\phi}{dp_s} \cos \phi \frac{d\phi}{dp_s} + \frac{d\phi}{dp_s} \sin \phi \frac{d}{dp_s} + \sin \phi \frac{d^2\phi}{dp_s^2} \\
&\quad - \left(-\cos \phi \left(\frac{d\phi}{dp_s} \right)^2 - \sin \phi \frac{d^2\phi}{dp_s^2} - \sin \phi \frac{d\phi}{dp_s} \frac{d}{dp_s} + \cos \phi \frac{d^2}{dp_s^2} \right) \\
&= 2 \frac{d\phi}{dp_s} \cos \phi \frac{d\phi}{dp_s} + 2 \sin \phi \frac{d^2\phi}{dp_s^2} + 3 \frac{d\phi}{dp_s} \sin \phi \frac{d}{dp_s} - \cos \phi \frac{d^2}{dp_s^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_C &= \begin{bmatrix} -2 \frac{\sin \phi}{R} & 2 \frac{\cos \phi}{R} \\ -2 \frac{d\phi}{dp_s} \sin \phi \frac{d\phi}{dp_s} + 2 \cos \phi \frac{d^2\phi}{dp_s^2} & 2 \frac{d\phi}{dp_s} \cos \phi \frac{d\phi}{dp_s} + 2 \sin \phi \frac{d^2\phi}{dp_s^2} \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} \cos \phi \frac{d}{dp_s} & \sin \phi \frac{d}{dp_s} \\ 3 \cos \phi \frac{d\phi}{dp_s} \frac{d}{dp_s} & 3 \frac{d\phi}{dp_s} \sin \phi \frac{d}{dp_s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sin \phi \frac{d^2}{dp_s^2} & -\cos \phi \frac{d^2}{dp_s^2} \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{L}_C^0 + \mathbf{L}_C^1 + \mathbf{L}_C^2
\end{aligned}$$

식 (3.16)을 다음과 같이 나타낸다.

$$\mathbf{B}_C = (\mathbf{L}_C^0 + \mathbf{L}_C^1 + \mathbf{L}_C^2)\mathbf{N} = (\mathbf{B}_C^0 + \mathbf{B}_C^1 + \mathbf{B}_C^2)$$

여기서,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B}_C^0)_i &= \begin{bmatrix} -2 \frac{\sin \phi}{R} & 2 \frac{\cos \phi}{R} \\ -2 \frac{d\phi}{dp_s} \sin \phi \frac{d\phi}{dp_s} + 2 \cos \phi \frac{d^2 \phi}{dp_s^2} & 2 \frac{d\phi}{dp_s} \cos \phi \frac{d\phi}{dp_s} + 2 \sin \phi \frac{d^2 \phi}{dp_s^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{xi} \cos \theta & -g_{yi} \sin \theta \\ g_{xi} \sin \theta & g_{yi} \cos \theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (-\sin \phi \cos \theta g_{xi} + \cos \phi \sin \theta g_{xi}) \frac{2}{R} & (\sin \phi \sin \theta g_{yi} + \cos \phi \cos \theta g_{yi}) \frac{2}{R} \\ 2 \left(\frac{d\phi}{dp_s}\right)^2 (\cos \phi \sin \theta - \sin \phi \cos \theta) & 2 \left(\frac{d\phi}{dp_s}\right)^2 (\sin \phi \sin \theta + \cos \phi \cos \theta) \\ + 2 \frac{d^2 \phi}{dp_s^2} (\cos \theta \cos \phi + \sin \phi \sin \theta) & + 2 \frac{d^2 \phi}{dp_s^2} (\cos \theta \sin \phi - \cos \phi \sin \theta) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \sin(\theta - \phi) \frac{g_{xi}}{R} & 2 \cos(\theta - \phi) \frac{g_{yi}}{R} \\ \left(2 \left(\frac{d\phi}{dp_s}\right)^2 \sin(\theta - \phi) + 2 \frac{d^2 \phi}{dp_s^2} \cos(\theta - \phi)\right) g_{xi} & \left(2 \left(\frac{d\phi}{dp_s}\right)^2 \cos(\theta - \phi) - 2 \frac{d^2 \phi}{dp_s^2} \sin(\theta - \phi)\right) g_{yi} \end{bmatrix} \\
(\mathbf{B}_C^1)_i &= \begin{bmatrix} \cos \phi \frac{d}{dp_s} & \sin \phi \frac{d}{dp_s} \\ 3 \cos \phi \frac{d\phi}{dp_s} \frac{d}{dp_s} & 3 \frac{d\phi}{dp_s} \sin \phi \frac{d}{dp_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{xi} \cos \theta & -g_{yi} \sin \theta \\ g_{xi} \sin \theta & g_{yi} \cos \theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta \frac{dg_{xi}}{dp_s} + \sin \phi \sin \theta \frac{dg_{xi}}{dp_s} & -\cos \phi \sin \theta \frac{dg_{yi}}{dp_s} + \sin \phi \cos \theta \frac{dg_{yi}}{dp_s} \\ 3 \frac{\cos \phi \cos \theta}{R} \frac{dg_{xi}}{dp_s} + 3 \frac{\sin \phi \sin \theta}{R} \frac{dg_{xi}}{dp_s} & -3 \frac{\cos \phi \sin \theta}{R} \frac{dg_{xi}}{dp_s} + 3 \frac{\sin \phi \cos \theta}{R} \frac{dg_{yi}}{dp_s} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta - \phi) \frac{dg_{xi}}{dp_s} & -\sin(\theta - \phi) \frac{dg_{yi}}{dp_s} \\ 3 \frac{\cos(\theta - \phi)}{R} \frac{dg_{xi}}{dp_s} & -3 \frac{\sin(\theta - \phi)}{R} \frac{dg_{yi}}{dp_s} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B}_C^2)_i &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sin \phi \frac{d^2}{dp_s^2} & -\cos \phi \frac{d^2}{dp_s^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{xi} \cos \theta & -g_{yi} \sin \theta \\ g_{xi} \sin \theta & g_{yi} \cos \theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sin \phi \cos \theta \frac{d^2 g_{xi}}{dp_s^2} - \cos \phi \sin \theta \frac{d^2 g_{xi}}{dp_s^2} & -\sin \phi \sin \theta \frac{d^2 g_{yi}}{dp_s^2} - \cos \phi \cos \theta \frac{d^2 g_{yi}}{dp_s^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\sin(\theta - \phi) \frac{d^2 g_{xi}}{dp_s^2} & -\cos(\theta - \phi) \frac{d^2 g_{yi}}{dp_s^2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\frac{dg_{xi}}{dp_s} = \frac{dg_{xi}}{ds} \frac{ds}{dp_s} = \frac{1}{1+T_s/EA} \frac{dg_{xi}}{ds}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 g_{xi}}{dp_s^2} &= \frac{d}{dp_s} \left(\frac{dg_{xi}}{ds} \frac{ds}{dp_s} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{dg_{xi}}{ds} \frac{ds}{dp_s} \right) \frac{ds}{dp_s} = \frac{1}{1+T_s/EA} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{1+T_s/EA} \frac{dg_{xi}}{ds} \right) \\
&= \frac{1}{(1+T_s/EA)^2} \frac{d^2 g_{xi}}{ds^2} - \frac{T'_s/EA}{(1+T_s/EA)^3} \frac{dg_{xi}}{ds}
\end{aligned}$$

$$\frac{dg_{yi}}{dp_s} = \frac{1}{1+T_s/EA} \frac{dg_{yi}}{ds}$$

$$\frac{d^2 g_{yi}}{dp_s^2} = \frac{1}{(1+T_s/EA)^2} \frac{d^2 g_{yi}}{ds^2} - \frac{T'_s/EA}{(1+T_s/EA)^3} \frac{dg_{yi}}{ds}$$

$$\frac{dp}{ds} = (x'^2(s) + z'^2(s))^{0.5} = \frac{dp}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} = \frac{T_s}{EA} + 1$$

$$\frac{dR}{dp} = \left(3 - \frac{1}{T(s)/EA + 1} \right) \frac{(F_z^1 + ws)}{F_x^1}$$

참고문헌

- [1] Irvine, H.M. and Caughey, T.K. (1974). "The Linear Theory of Free Vibrations of a Suspended Cable," *Proceedings of the royal society*, London, England, Series A, Vol.341, pp299-315
- [2] Irvine, H.M. (1978). "Free Vibrations of Inclined Cables," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 104, No. ST2, February
- [3] 안상섭. (1998). 경사케이블의 자유진동 특성, 토목학회지, Vol. 18, No. I-5, pp. 615-623
- [4] Henghold, W.M., Russell, J.J. and Morgan, J.D. (1977). "Free Vibrations of a Cable in Three Dimensions," *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 103, No. ST5, Proc. Paper 12954, May, pp. 1127-1136.
- [5] Ramberg, S.E. and Bartholomew, C.L. (1982). "Vibrations of Inclined Slack Cables." *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 108, No. ST7, July.
- [6] Hong, K.J., Der Kiureghian, A. and Sackman, J.L. (2001). "Seismic Interaction in Cable-Connected Equipment Items", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 127, No. 11, pp. 1096-1105
- [7] Lin, H.P. and Perkins, N.C. (1995). "Free Vibration of Complex Cable/Mass Systems : Theory and Experiment." *Journal of Sound and Vibration*, 179(1), pp. 131-149
- [8] Triantafyllou, M.S. (1984). "The Dynamics of Taut Inclined Cables," *Quarterly Journal of Applied Mathematics*, 37, pp. 421-440
- [9] Simo, J.C. and Vu-Quoc L. (1986). "On the Dynamics of Flexible Beams Under Large Overall Motions – The Plane Case: Part I." *Journal of Applied Mechanics*, Vol.53, December, pp.849-854

- [10] Simo, J.C. and Vu-Quoc L. (1986). "On the Dynamics of Flexible Beams Under Large Overall Motions – The Plane Case: Part II." *Journal of Applied Mechanics*, Vol.53, December, pp.855-863
- [11] Dastous, J.-B, and Pierre, J.-B. (1996). "Experimental Investigation on the Dynamic Behavior of Flexible Conductors between Substation Equipment during an Earthquake." *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 11, No. 2, April, pp.801-807
- [12] Scanlan, R.H., and Swart, R.L. (1968). "Bending Stiffness and Strain in Stranded Cables," *IEEE Conference Paper*, No.68, CP 43 -PWR
- [13] Evangelinos, C., Lucor, D., Su, C.-H. and Karniadakis, G.E. (2002). "Flow-Induced Vibrations of Non-linear Cables. Part I : Models and Algorithms," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 55, pp. 535-556.
- [14] Lucor, D., Evangelinos, C., Imas, L. and Karniadakis, G.E. (2002). "Flow-Induced Vibrations of Non-linear Cables. Part II : Simulations," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 55, pp. 557-571.
- [15] Humar, J.L. (1990). *Dynamics of Structures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [16] Luenberger, D.G. (1984). *Linear and Nonlinear Programming*, 2nd ed., Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA
- [17] Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E. and Witt, R.J. (2002). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4th ed., John Wiley and Sons, New York, NY
- [18] Chopra, A.K. *Dynamics of Structures*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ
- [19] 정길제, 박연철, 김현겸, 이해성 (2007). **케이블의 동적해석을 위한 가상 일 원리의 정식화**, 교량설계핵심기술연구단

[20] 박연철 (2006). 느슨한 케이블의 동적 해석을 위한 안정화 기법, 석사학
위 논문, 서울대학교.

ABSTRACT

This paper derives the hybrid model to eliminate dynamic instability when analyzing slack cable, and presents the nonlinear dynamic characteristics by considering 2nd Piola-Kirchhoff stress and Green strain. Contrary to the highly tensioned cable of cable supported bridge, however, compression is introduced into slack cable during free vibration analysis. When compression induced, the stiffness matrix loses positive definiteness. Therefore, the compression causes the slack cable to be severe dynamic instability and it is impossible to analyze dynamic process by using only slack cable model. To solve this point at issue, the former researchers had used nonlinear frame element to analyze slack cable instead of cable model. This research suggests the hybrid model by combining an arch element with a cable model. The arch element has no axial stiffness and translational inertia, and only has bending stiffness. With the hybrid model, an arch element carries compression and a cable model carries tension during vibration. The hybrid element draws more stable solution with longer time step. Two numerical examples are performed to demonstrate the validity and the effectiveness of the proposed model compared with the cable model. A suspension cable which has 50 span-sag ratio and inclined taut cable are used.

Key Word

Dynamic Equilibrium Equation, 2nd Piola-Kirchhoff stress, Green strain, Natural Frequency, Non-linear Analysis, Stabilization, Rayleigh-Ritz method

Student Number : 2005-21163