공학석사학위논문

구조물 손상탐지를 위한 L_1-Regularization 과 Time Windowing Technique 을 이용한 시간영역에서의 SI 기법

2004 년 2 월

서울대학교 대학원

지구환경시스템공학부

박 승 근

구조물 손상탐지를 위한 L_1-Regularization 과 Time Windowing Technique 을 이용한 시간영역에서의 SI 기법

System Identification in Time Domain for Structural Damage Assessment Using L_1-Regularization and Time Windowing Technique

지도교수 이 해 성

이 논문을 공학석사학위논문으로 제출함

2003 년 10 월

서울대학교 대학원

지구환경시스템공학부

박 승 근

박승근의 공학석사학위 논문을 인준함

2003 년 12 월

위 원 장 張 [illegible] 鎬

부위원장 李 海 成

위 원 高 鉉 武

초 록

이 논문은 측정한 가속도 데이터를 이용하여 구조물의 감쇠 특성과 강성을 추정하기 위한 시간영역에서의 시스템 확인기법(System Identification)을 설명한다. 오차함수는 구조물의 수학적 모델에 의해 계산된 가속도와 측정된 가속도와의 최소자승오차로 정의된다. 구조물의 강성 뿐만 아니라 감쇠특성까지도 시스템 변수로 고려된다. 구조물의 감쇠는 Rayleigh damping을 이용하여 모델링하였다. SI 기법의 불안정성을 경감시키기 위하여 정규화 기법이 도입되었다. 두 가지의 정규화 함수가 도입되었다. 시간에 대한 시스템 변수의 일차미분의 L_2-norm의 시간에 대한 적분으로 정의되는 L_2-정규화 기법과 시간에 대한 시스템 변수의 일차미분의 L_1-norm의 시간에 대한 적분으로 정의되는 L_1-정규화 기법을 제안한다. L_2-정규화 기법의 정규화 효과를 조정하는 정규화 계수는 GMS (Geometric Mean Scheme)기법을 이용하여 결정하였고, L_1-정규화 기법의 정규화 효과는 TSVD(Truncated Singular Value Decomposition)기법에서의 truncation number의 조정으로 결정된다. 시간에 대한 시스템 변수의 변화를 추정하기 위하여

time windowing 기법을 제안한다. 이 기법에서는 반드시 L_1-정규화 기법을 사용해야 한다. 제안한 방법을 검증하기 위해 2경간 연속 평면 트러스교를 이용한 수치해석을 수행하였다.

주요어

시간영역 시스템 확인기법, 정규화, Time Windowing Technique, Rayleigh damping

학번**: 2002-21285**

목 차

그 림 목 차

표 목 차

I. 서론

지진 발생 후에 신속하게 구조물의 안전성을 평가하는 것은 사회기반시설의 기능성이나 사용성을 평가하는데 있어서 매우 중요하다. 지진이 발생한 동안에 측정한 응답을 이용하여 지진에 의해 야기된 구조물의 손상을 탐지할 수 있다면 사회 기반 시설의 빠른 복구에 큰 도움을 줄 수 있을 것이다.

다양한 시스템 확인기법(SI)들이 지난 20년간 구조 모델의 확인 또는 구조물의 손상탐지를 위해서 개발되어 왔다. 측정된 응답을 이용하는 시스템 확인기법은 static SI [1, 2, 3, 4, 17], frequency-domain SI [5, 6, 7], time-domain SI [8, 9, 10, 11]로 구분된다. 실제 구조물에서 정적 변위를 측정하는 것은 어렵기 때문에 frequency-domain SI, time-domain SI 가 실제 현장에 적용하는 것은 더 실용적이라고 할 수 있다. Frequency-domain SI 알고리즘이 time-domain SI 알고리즘과 같은 동적 응답(가속도)를 이용하지만 transformation 과정 동안에 많은 양의 데이터가 눈에 띄게 손실 된다. 데이터를 다루기가 더 쉽기 때문에 frequency-domain SI 알고리즘이 보다 많이 개발되고 널리 적용되어왔다. 그러나, 실제 측정할 수 있는 모드 형상과 고유 진동수는 저차 모드에 국한되어 있고, 일반적

으로 저차 모드는 국부적인 손상에 민감하지 않기 때문에 모드 접근법에 의해서는 손상을 탐지하기가 어렵다. 이러한 단점을 해결하고 보다 정확히 손상을 탐지하기 위하여 측정 가속도를 이용하는 time-domain SI기법을 이용한다.

이 논문에서는 가속도를 측정 가속도와 수학적 모델에 의한 계산 가속도의 최소 자승오차에 대한 시간 적분을 오차함수로 사용한다. 정의한 오차함수를 최소화함으로써 시스템 변수를 추정한다. 즉, 측정한 응답과 가장 비슷한 응답을 주는 수학적 모델을 찾는 것이다. 이와 같은 최적화 문제는 시스템 변수에 대한 비선형 최적화 문제이므로 선형화시킨 이차 종속문제를 반복적으로 풀어서 최적해를 구한다.

최소화 문제로 정의되는 SI 문제는 측정치의 빈곤과 측정오차로 인한 심각한 불안정성을 지닌 ill-posed problem의 일종으로 잘 알려져 있다. 불안정성은 해의 비존재성, 비유일성, 불연속성으로 구분된다. 측정오차로 인해서는 해의 불연속성이 야기될 수 있고, 측정치의 부족으로 인해서는 해의 비존재성이나 비유일성이 야기될 수 있다. 이러한 SI 문제의 불안정성을 경감시키기 위하여, 정규화 기법이 다양한 공학문제에서 널리 사용된다. [2, 3, 4, 12, 13, 17]

정규화 기법에서는 정규화 함수를 이용하여 주어진 최적화 문제에 추가적인 구속조건을 가해준다. 이것은 적절한 해의 공간을 한정하는 것으로서 SI 기법 고유의 불안정성을 해결하는데 도움을 준다. 따라서 다루고 있는 SI 기법의 해의 특성에 따라서 적절한 해 공간을 정의하는 것은 정확한 해를 찾는데 매우 중요하다. 대표적인 정규화 기법으로는 Tikhonov 정규화 기법과 절단 특이치 분해법 (Truncated Singular Value Decomposition Method; TSVD)이 있으며, 구조물에 대한 SI 문제에서는 주로 Tikhonov 정규화 기법이 사용되었다. 안정화 효과가 너무 크게 정의되면 물리적으로 의미 없는 해가 구해지고, 그 반대의 경우에는 수치적으로 불안정한 해가 구해지기 때문에, 정규화 효과의 크기를 적절히 조정하여야 한다. 따라서 정규화 효과의 크기를 적절히 조정하는 것이 매우 중요한 문제이며, Tikhonov 정규화 기법에서는 정규화 계수로 결정하고, TSVD에서는 절단 번호 (Truncation number)로 조정한다. [4, 17]

이전의 연구에서는 시스템 변수의 일차미분의 L_2-norm의 시간에 대한 적분을 정규화 함수로 사용하는 L_2-Regularization Technique에 대한 연구가 있었다. 그리고 정규화의 영향을 조정하는 정규화 계수로는 Geometric Mean Scheme

(GMS)를 사용하였다. [14] 하지만 L_2-Regularization을 정규화 함수로 사용하는 경우 시스템 변수가 시간에 따라서 continuous한 경우에만 적절하다. 즉 L_2-Regularization function은 시스템 변수를 continuous function으로 한정하게 된다. 하지만 지진과 같은 하중이 짧은 시간 동안 가해진 경우 시간에 대한 시스템 변수의 변화는 piecewise-continuous하게 일어나게 된다. 따라서 L_2-Regularization function의 사용은 부적절하다.

이 연구에서는 시스템 변수의 일차미분의 1-norm의 시간에 대한 적분을 정규화 함수로 사용하는 L_1-Regularization을 제안한다. L_1-Regularization function을 정규화 함수로 사용하는 경우에는 시스템 변수가 시간에 따라서 piecewise-continuous한 경우에 사용하는 것이 적절하다. 즉, 해 공간을 piecewise-continuous function으로 한정한다. 따라서 구조물이 갑작스런 충격에 의해 손상이 일어난 경우에 사용하는 것이 가능하다.

또한 기존의 방법에서는 시스템 변수가 시간에 따라서 변하지 않는다고 가정하였다. 따라서 이미 손상이 발생한 후에 손상의 위치와 정도를 파악하는 것은 가능하지만 손상이 일어난 시점을 파악하는 것은 불가능하였다. 또한 오차

함수의 특징 때문에 기존의 방법에서는 시간이 증가할수록 역해석 시간이 점점 증가하는 단점을 가지고 있다. 그리고 손상이 일어나기 전의 가속도와 손상이 일어난 후의 가속도를 모두 사용하기 때문에 정확한 손상을 파악하는 것이 불가능하였다. 이러한 단점들을 해결하고자 Time Windowing Technique을 제안한다. 이 방법에서는 time window라고 부르는 일정한 시간의 영역 안에서 측정 가속도와 수학적 모델에 의한 계산 가속도의 최소 자승오차에 대한 시간 적분을 오차함수로 사용한다. 그리고 이 time window가 순차적으로 진행되어 나가면서 역해석을 진행한다. 이런 과정을 반복해 나가면서 시간에 따른 물성치의 변화를 추정하게 된다.

구조물의 질량은 알고 있다고 가정하고 구조물은 선형거동 한다고 가정한다. 구조물의 동적인 거동에는 질량과 강성만 중요한 역할을 하는 것이 아니라 감쇠 특성도 매우 중요한 역할을 한다. 따라서 보다 정확한 손상탐지를 위해서는 정확한 감쇠 특성을 추정하는 것이 구조물의 강성을 추정하는 것 못지 않게 중요하다. 그럼에도 불구하고 실제의 감쇠특성을 수학적으로 정확하게 표현하는 것이 어렵기 때문에, 대부분의 time-domain SI 기법에서는 감쇠특성을 알고

있는 것으로 생각한다. 하지만 강성의 변화만으로 구조물의 동적인 거동을 표현하기는 어렵다는 것이 이전의 연구에서 밝혀졌다. 따라서 이 연구에서는 Rayleigh damping을 이용하여 구조물의 감쇠를 모델링하고, Rayleigh damping의 두 계수를 추정함으로써 감쇠특성을 추정하였다.

2경간 연속 트러스교를 이용한 수치 해석 연구를 통하여 구조물의 손상 정도와 위치를 파악하였다. 그리고 각 정규화 함수에 따른 특징을 살펴보았다. 마지막으로 시간에 따른 물성치의 변화를 추정함으로써 제안된 방법을 타당성을 검증한다.

II. 시간영역에서의 SI 기법

구조물의 운동방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\mathbf{Ma}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{v}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t) \tag{2.1}$$

여기서, $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{x}$ 는 각각 질량행렬, 감쇠행렬, 강성행렬, 하중벡터, 시스템 변수를 나타낸다. $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ 는 각각 가속도벡터, 속도벡터, 변위벡터를 나타낸다. 시스템변수에는 강성과 구조물의 감쇠변수까지도 포함한다. 식(2.1)에서 질량, 하중, 초기조건은 알고 있다고 가정한다. 그리고 시스템 변수는 시간에 대하여 변하지 않는다고 가정한다.

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\ \ \Pi(\mathbf{x},\tau) = \frac{1}{2}\int_0^{\tau} \left\| \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x},t) - \bar{\mathbf{a}}(t) \right\|_2^2 dt \ \ \text{subject to}\ \ \mathbf{r}(\mathbf{x}) \le 0 \tag{2.2}$$

여기서 $\tilde{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{a}}$, $\mathbf{r}$ 은 각각 수학적 모델에 의해 계산된 가속도, 측정 가속도, 시스템 변수의 구속조건을 나타낸다. 그리고 $\|\cdot\|$ 은 벡터의 Euclidean norm을 나타낸다. 식(2.2)은 최초 시간부터 현재의 시간 τ 까지 측정 점에서의 측정 가속도와 계산된 가속도의 자승 오차의 최소화를 통하여 변수추정을 한다. 즉, 측정 가속도를

가장 비슷하게 모사할 수 있는 수학적 모델을 찾는 것이다.

시스템변수에 대한 구속조건은, 시스템변수의 물리적 특성을 고려한 상한값과 하한값을 정하여 선형 부등식으로 표현함으로써 시스템변수가 의미 없는 해를 주는 것을 방지한다.

$$\mathbf{x}_l \le \mathbf{x} \le \mathbf{x}_u \tag{2.3}$$

여기서, $\mathbf{x}_l$, $\mathbf{x}_u$ 은 각각 시스템변수의 하한값과 상한값이다.

식(2.2)의 최적화 문제는 시스템변수에 대한 비선형 최적화 문제이므로 식(2.2)을 선형화 한 식(2.4)의 이차종속문제를 반복적으로 풀어서 최적해를 구하게 된다.

$$\underset{\Delta x}{\text{Min}} \left[\frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^T\mathbf{H}_{k-1}\Delta\mathbf{x} - \Delta\mathbf{x}^T\mathbf{S}_{k-1}^T\mathbf{a}_{k-1}^r \right] \ \text{subject to} \ \ \mathbf{r}(\mathbf{x}_{k-1} + \Delta\mathbf{x}) \le 0 \tag{2.4}$$

$$\mathbf{H}_{k-1} \approx \mathbf{S}_{k-1}^T\mathbf{S}_{k-1} \tag{2.5}$$

$$\mathbf{a}_{k-1}^r = \bar{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{a}}_{k-1} \tag{2.6}$$

$$\mathbf{S}_{k-1} = \frac{\partial\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}}{\partial\mathbf{x}} \tag{2.7}$$

여기서, k는 반복단계 수이고, $\mathbf{S}_{k-1}$는 $\tilde{\mathbf{a}}_{k-1}$에 대한 민감도 행렬이며, $\mathbf{H}_{k-1}$는 오차함수에 대한 헤시안 행렬을 나타낸다. 헤시안 행렬에는 시스템변수에 대한

오차함수의 이차 미분항이 포함되어 있다. 오차함수의 이차 미분항을 정확히 계산하는 과정에는, 비선형 방정식인 강성도 방정식을 두 번 미분하여 변위의 시스템변수에 대한 이차 민감도를 계산하여야 하는 어려움이 있다. 따라서 오차함수의 헤시안 행렬을 가속도의 일차 민감도만으로 근사하는, Gauss-Newton 헤시안 행렬을 사용한다. [17]

식(2.4)의 선형 최적조건은 다음과 같다.

$$\mathbf{S}^T\mathbf{S}\Delta\mathbf{x} - \mathbf{S}^T\mathbf{a}^r = 0 \tag{2.8}$$

2.1 SI의 불안정성

최소화 문제로 정의되는 변수추정기법은 ill-posed 역해석 문제의 일종이고 해의 비존재성, 비유일성, 불연속성 등의 불안정성을 지니고 있다. 이러한 불안정성은 측정치의 부족함과 측정응답에 포함되어 있는 측정오차에 의해 발생한다. 불안정성 때문에 주어진 최적화 문제의 해가 물리적으로 의미 없는 해가 되거나, 최적화 과정 동안에 발산할 수도 있다.

2.1.1 특이치 분해 (Singular Value Decomposition)

최적화 과정 동안 발생하는 해의 불안정성은 민감도행렬의 특이치 분해를 통해서 살펴볼 수 있다.

$$\mathbf{S} = \mathbf{Z\Omega V}^T \tag{2.9}$$

민감도 행렬은 식(2.9)와 같이 $m \times n$ 행렬 $\mathbf{Z}$, $n \times n$ 행렬 $\mathbf{\Omega}$, $n \times n$ 행렬 $\mathbf{V}$로 표시된다. m은 측정치의 총 개수이고, n은 시스템변수의 개수를 나타낸다. 여기서, 각 행렬은 다음과 같은 특성을 나타낸다.

$$\mathbf{ZZ}^T = \mathbf{I}_n, \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}_n, \mathbf{\Omega} = diag(\omega_j) \tag{2.10}$$

여기서 ω_j 는 $\omega_1 = \omega_{\max} \geq \cdots \geq \omega_r \geq \varepsilon_r \geq \omega_{r+1} \geq \cdots \geq \omega_n = \omega_{\min} \geq 0$ 과 같이 내림차순으로 정렬된 민감도행렬의 특이치를 나타낸다. 그리고 $\mathbf{I}_n$은 n차의 단위행렬을 나타낸다. 여기서 ε_r 와 r는 각각 rank의 결정을 위한 한계치와 민감도행렬 $\mathbf{S}$의 rank를 나타낸다.

수학적 관점에서 이 한계치 ε_r 은 정확히 0이 되어야 한다. 하지만 수치적 계산과정에서의 유효자리의 한계로 인하여 정확히 0이 될 수 없다. 민감도 행

렬의 특이치는 수치적 계산에 의해서 얻어지기 때문에 이 한계치는 다음의 식에 따라서 계산기계의 유효자리를 고려하여 결정된 값을 사용한다.

$$\varepsilon_r = \delta_m \|\mathbf{S}\|_\infty \tag{2.11}$$

여기서, δ_m 은 계산기계의 유효자리를 고려한 허용오차 값이다. $\|\cdot\|_\infty$ 은 행렬의 L_∞-norm 을 나타낸다. L_∞-norm 정의는 다음과 같다.

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{2.12}$$

$r=n$이면 민감도행렬은 rank-sufficiency라고 부르고, $r<n$인 경우에는 rank-deficiency라고 부른다. 특히 rank-deficiency의 경우에는 해가 불안정해지는 특징을 보여준다.

행렬 **Z**의 열은 left singular vector (LSV), 행렬 **V**의 열은 right singular vector (RSV)로 불린다.

2.1.2 해의 비유일성

해의 비유일성은 추정하려는 시스템변수의 개수에 비해 측정치의 개수가 적을 때 나타난다. 일반적으로 구조시스템의 SI 문제에서는 추정해야 할 시스템변수는 많은 반면에 설치할 수 있는 측정기기는 한정되어 있다. 또한 측정치의 개수가 충분하다고 하더라도 그 측정치에서 주는 정보가 모두 독립적인 것만은 아니기 때문에 구조시스템의 SI 문제에서 rank-deficiency 현상을 피할 수 없다. 따라서 해의 불안정성이 발생하게 되고, 이를 해결하기 위하여 정확한 rank를 구하고 부족한 정도를 살펴보도록 한다. 이를 위하여 민감도행렬의 SVD (singular value decomposition) 을 이용한다. Rank가 부족한 경우에 식(2.8)의 해는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Delta \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{r} \mathbf{v}_j \omega_j^{-1} \mathbf{z}_j^T \mathbf{a}^r + \sum_{j=r+1}^{n} \gamma_j \mathbf{v}_j \tag{2.13}$$

여기서 $\mathbf{v}_j, \mathbf{z}_j$는 각각 j번째 특이치 ω_j에 대한 $\mathbf{V}$와 $\mathbf{Z}$의 열벡터이고, $\mathbf{a}^r$, γ_j는 각각 가속도의 잔차와 임의의 실계수를 나타낸다. r은 확보된 rank를 나타낸다. 식(2.13)에서 첫번째 항은 rank r에 해당하는 성분으로 항상 일정한 값을 가지게

된다. 두번째 항은 rank가 충분한 경우에는 생기지 않지만 rank가 부족하기 때문에 생긴 항으로 가속도의 잔차 $\mathbf{a}^r$ 의 영향을 받지 않는 영공간(null space)의 값이다. 여기서 임의의 계수 γ_j 에 따라서 해가 달라지기 때문에, 해가 유일하게 결정이 되지 않는다. 따라서 이로 인해 해의 비유일성이 발생하게 된다.

2.1.3 해의 불연속성

해의 불연속성은 측정할 때 발생하는 오차로 인해 발생한다. 측정치에 포함되어 있는 오차는 해의 불연속성을 증폭시키게 되는데 이것 또한 민감도행렬의 SVD를 통해서 살펴볼 수 있다. Rank가 충분한 경우에 식(2.9)의 증분해는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{V}diag(\frac{1}{\omega_j})\mathbf{Z}^T\mathbf{a}^r = \sum_{j=1}^{n}\mathbf{v}_j\omega_j^{-1}\mathbf{z}_j^T\mathbf{a}^r \tag{2.14}$$

여기서 가속도의 잔차 $\mathbf{a}^r$ 는 오차성분 때문에 0으로 수렴을 할 수가 없다. 왜냐하면 측정가속도의 오차성분은 부적합한 가속도성분을 포함하고 있기 때문에 수학적모델의 시스템 변수를 조정하는 것 만으로는 얻어낼 수 없기 때문이다. 실제로 가능하지는 않지만 이론적으로 측정한 가속도를 오차성분과 오차가 포

함되지 않는 부분으로 분리시킬 수 있다고 가정하면 다음 식과 같이 표현할 수 있다.

$$\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{a}}^f + \overline{\mathbf{a}}^e \tag{2.15}$$

여기서, $\overline{\mathbf{a}}^f$ 는 오차가 포함되지 않은 가속도를 나타내고, $\overline{\mathbf{a}}^e$ 는 순수히 오차의 성분만을 나타낸다. 식(2.15)을 식(2.14)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{V}diag(\frac{1}{\omega_j})\mathbf{Z}^T(\overline{\mathbf{a}}^f - \widetilde{\mathbf{a}}) + \mathbf{V}diag(\frac{1}{\omega_j})\mathbf{Z}^T\overline{\mathbf{a}}^e = \Delta\mathbf{x}^f + \Delta\mathbf{x}^e \tag{2.16}$$

여기서 $\Delta\mathbf{x}^f$ 는 측정 오차가 없는 경우의 가속도 잔차에 의해 계산된 증분해 성분이고, $\Delta\mathbf{x}^e$ 는 측정 오차에 의한 증분해 성분이다. 측정오차가 무시할 정도로 작거나 오차벡터 $\overline{\mathbf{a}}^e$ 가 $\mathbf{Z}$와 직교하지 않으면 $\Delta\mathbf{x}^e$ 는 0이 되지 않으며, 결국 증분해 $\Delta\mathbf{x}$ 는 $\Delta\mathbf{x}^e$ 에 의해서 정해로부터 멀어지게 된다. 게다가 작은 특이치에 의해서는 그 효과가 증폭되어 나타나게 되고 수렴한 해는 물리적인 의미를 잃게 될 수도 있다. 이와 같이 측정자료가 서로 간에 거의 연속적이라 생각될 정도로 작은 차이를 보이고 있는 경우에도 매우 작은 특이치로 인한 증폭 효과

때문에, 최종적으로 구한 증분해는 전혀 다른 값을 가질 수 있기 때문에 해의 불연속성이 나타나게 된다.

2.2 정규조건

정규조건은 해가 존재하는 적절한 함수공간을 정의하는 것이다. 적절한 함수공간을 정의함으로써 불안정성을 해소하고 보다 의미 있는 해를 찾을 수 있다. 따라서 해의 특징에 따라서 적절한 함수공간을 정의하고, 적절한 정규화 함수를 이용하는 것이 매우 중요하다. L_p-norm을 이용하는 정규화 방법이 가장 일반적이고, 시간영역 SI기법에서의 일반적인 정규화 함수는 다음과 같이 정의된다.

시스템 변수가 시간에 따라서 변하지 않는다고 가정했기 때문에, 가속도의 측정치가 충분하고 오차가 없는 경우에는 식(2.2)의 최소화 문제는 τ가 변하더라도 같은 결과를 산출하게 되어있다. 그러나 토목 구조물에서 측정치는 항상 부족하고 다양한 종류의 오차를 포함하고 있다. 게다가 SI 기법에 사용되는 측정치 데이터의 양이 시간 τ가 앞으로 이동할수록 증가한다(그림 2.1(a)). 따라서, 최소화 문제는 그림 2.1(a)에 나오는 것처럼 τ가 변함에 따라서 다른 시스

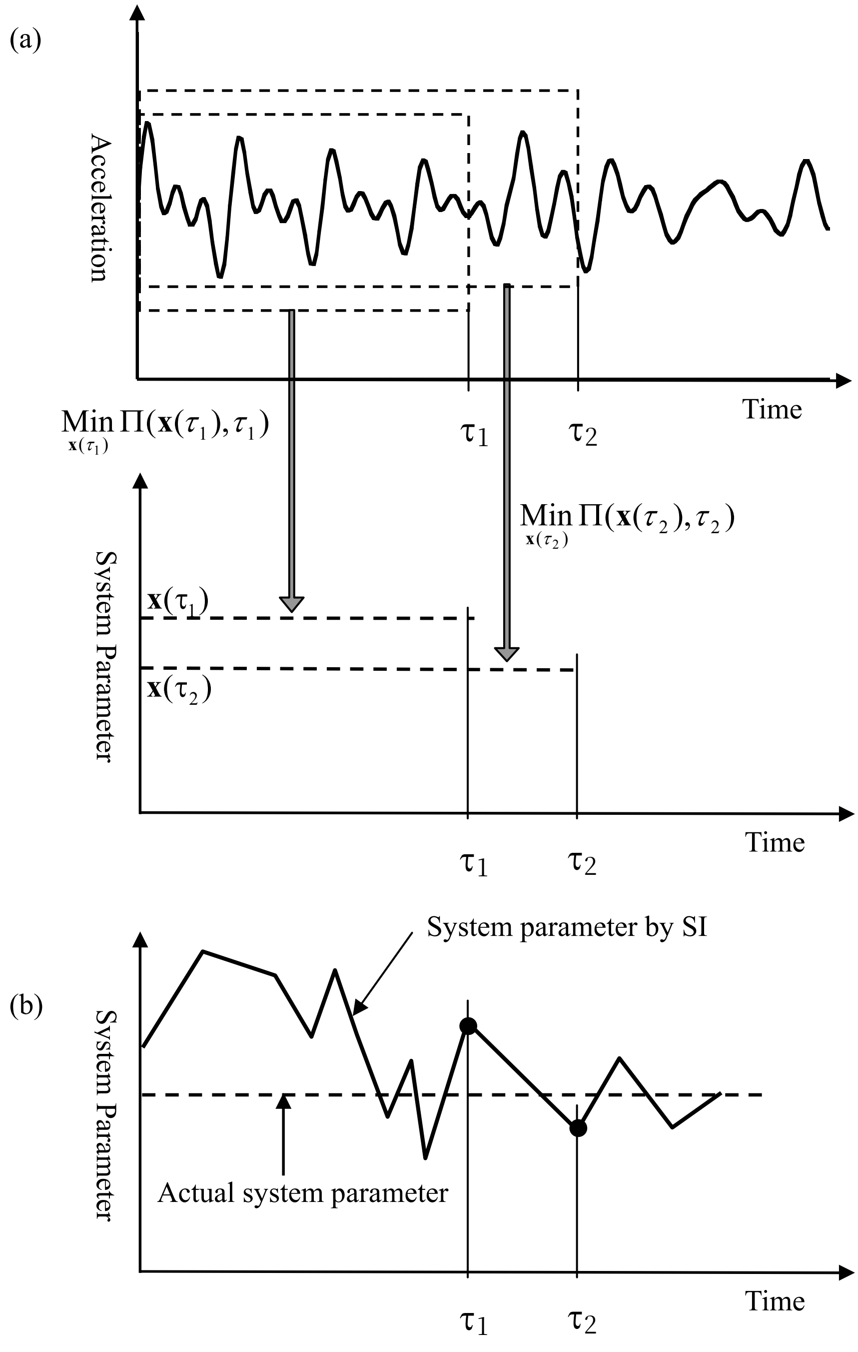

그림 2.1 (a) 두개의 다른 시간에서의 time-domain SI

(b) 시스템 변수의 시간에 따른 변화

템 변수를 산출하게 된다. 시스템 변수는 고정된 τ 에 대해서 $0 < t \le \tau$ 구간 내에서는 일정한 값을 갖는다. 하지만 τ 가 변하면서 일정한 시스템 변수의 추정값은 변하게 된다. 그림 1(b)은 시간 축에 따라 그려진 τ 가 변화하면서 추정된 시스템 변수의 변화를 나타낸 개념도이다. 문제의 성질 때문에 시스템 변수가 시간에 따라서 변하지 않는다는 가정을 지키기는 어렵다. 하지만 이것이 구조물의 시스템 변수가 시간에 따라서 변화한다는 것을 의미하는 것이 아니고 측정응답의 정보량이 증가할수록 추정되는 시스템 변수가 변화하는 것을 의미한다. 시간에 따라 시스템 변수가 변화하는 경우는 3장에서 논의하겠다. 주어진 가정을 정확하게 만족시키지는 못하지만 식(2.17)으로 정의된 정규화 함수를 원래의 오차함수에 더하여 최소화함으로써 시스템 변수의 시간에 따른 변화의 크기를 가능한 한 감소시켜야만 한다. 따라서 정규화 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\ \Pi_R = \frac{1}{2}\int_0^{\tau} \left\| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right\|_p dt \tag{2.17}$$

여기서, $\mathbf{x}(t)$는 그림 2.1(b)에서 보여주는 것처럼 초기시간부터 시간 τ 까지 측정된 가속도를 이용하여 추정된 각 시간에서의 시스템 변수를 나타낸다. 식(2.17)의 최소화 문제는 시간에 따라 변하지 않는 시스템 변수의 가정을 만족시키기 위한 weak constraint 또는 penalty function으로 고려된다. 정규조건은 현재 시간까

지의 시스템 변수의 총 변화를 나타낸다. 그리고 피 적분함수는 시간의 함수이다. 정의된 Π_R 은 time-domain SI 의 정규화 함수로 사용된다.

식(2.17)의 정규조건은 함수의 적분가능성을 규정함으로써, 시스템변수의 함수공간을 한정시켜준다. 또한 추정된 시스템변수가 정해를 가질 경우에는 시간에 따른 시스템 변수의 변화가 0이 되기 때문에 원래의 목적함수에 영향을 끼치지 않게 된다. 따라서 최종해에 영향을 끼칠 수 없게 된다. p는 시스템 변수의 물리적, 수학적 특징을 고려하여 결정한다. p=2인 경우에는 L_2-Regularization condition, p=1인 경우에는 L_1-Regularization condition이라고 부른다.

2.3 정규화 기법

정규화 기법은 크게 두 가지로 나누어진다. 해의 불연속성을 해소하고 수렴성을 높여주는 방향으로 정규화가 이루어지는 Tikhonov 정규화 기법이 있고, 해의 비유일성을 해소하는 방향으로 정규화가 이루어지는 TSVD (Truncated Singular Value Decomposition) 정규화 기법이 있다. 이 연구에서는 L_2-Regularization function을 사용할 경우에는 Tikhonov 정규화 기법을, L_1-Regularization function을 사용할 경우에는 TSVD 정규화 기법을 사용하였다.

2.3.1 Tikhonov 정규화 기법

Tikhonov 정규화 기법의 개념은 역해석 문제의 불안정성을 극복하기 위해 사용되어 왔고, 다양한 종류의 역해석 문제에 성공적으로 적용되어 왔다. 식 (2.2)의 오차함수에 positive definite한 정규화 함수를 더해주어 새로운 오차함수를 최소화함으로써 불안정성을 해결하는 방법이다.

$$\underset{\mathbf{x}}{\mathrm{Min}}\ \Pi(\mathbf{x},\tau)=\frac{1}{2}\int_0^{\tau}\left\|\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x},t)-\bar{\mathbf{a}}(t)\right\|_2^2 dt\ +\Pi_R \quad \text{subject to } \mathbf{r}(\mathbf{x})\le 0 \tag{2.18}$$

여기서 Π_R 은 정규화 함수를 나타낸다. 정규화란 측정치에 의해 계산된 해와 사전에 알고 있는 해를 섞어주는 역할을 한다. 이는 시스템 변수에 대한 기존의 정보가 반영된 정규화 함수를 오차함수에 대해줌으로써 이루어진다.

이 방법은 정규화 함수가 미분 불가능한 함수일 경우 적용할 수 없다.

정규화 기법을 적용했을 때, 전체의 목적함수에 정규화의 영향이 커지면 해는 안정화 되는 효과를 보이지만 그 영향이 너무 클 경우 정확한 해를 찾는 것이 어려워진다. 따라서 정규화의 영향을 적절히 조절하는 것이 정확한 해를 찾고 해를 안정화 시키는데 매우 중요하다. 이 기법에는 정규화의 효과는 정규화

계수에 따라서 결정하게 되는데, 정규화 계수를 결정하는 방법으로는 선형 SI 문제에서는 LCM (L-Curve Method) [13], GCV (Generalized Cross Validation) [15]등이 있으면 비선형 SI문제에서는 GMS (Geometric Mean Scheme) [4], VRFS (Variable Regularization Factor Scheme) [2,3]등이 제안되어 있다.

2.3.2 TSVD (Truncated Singular Value Decomposition) 정규화 기법

Rank가 부족한 문제에는 해의 개수가 무한하게 된다. 또한 특이치가 작은 부분의 성분들은 작은 측정오차에 의해서도 해가 크게 증폭되어 해가 불안정하게 되고 의미 없는 해를 얻을 수도 있다. 그리고 특이치가 작은 성분은 민감도가 작은 부분이기 때문에 작은 오차성분에 의해서도 해는 크게 변화하게 된다. 이를 해결하기 위하여 특이치가 작은 부분의 해를 잘라내어 해를 구하고, 잘라낸 부분의 해 성분은 정규화 함수의 최소화를 통해 복원하여, 잘라내지 않은 부분에 더하여 해를 구하는 방법이다. Rank가 부족하여 발생하는 해의 비유일성은 정규화 함수의 최소화 과정을 통해서 해결하고, 측정 오차에 의해 발생하는 해의 불안정성은 특이치가 작아 불안정성을 발생시키는 부분을 잘라냄으로써 해결한다.

이 방법은 정규화 함수가 미분 불가능한 함수일 경우에도 적용이 가능하다. TSVD 기법에서 정규화의 효과는 truncation number에 의해서 결정된다. [17] Truncation number가 작을 경우에는 정규화 효과는 커지지만 많은 부분의 해 성분을 잘라내기 때문에 정확한 손상을 탐지하기가 어렵다. 반대로 truncation number가 클 경우에는 잘라내는 부분이 적기 때문에 불안정한 부분의 해 성분을 포함하게 되어 해가 불안정해진다. [19] 적절한 truncation number를 결정하는 방법으로는 discrepancy principle [20], bilinear fitting method 등이 있다.

2.4 정규화 기법의 적용

정규화 기법은 해의 공간을 한정하기 때문에, 적절한 정규화 함수를 사용하여 적절한 해의 함수 공간을 정하는 것은 해의 정확성과 안정성을 결정하는데 중요한 역할을 한다. 이 연구에서는 L_2-Regularization function과 L_1-Regularization function을 이용하여 정규화 기법을 적용하였다.

2.4.1 L_2-Regularization function

L_2-Regularization function은 다음과 같이 정의된다.

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\ \Pi_R = \frac{\lambda^2}{2}\int_0^{\tau}\left\|\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right\|_2^2 dt \tag{2.19}$$

여기서, λ는 정규화 계수를 뜻한다. L_2-Regularization function은 시스템변수의 시간에 대한 일차미분의 2-norm의 시간에 대한 적분으로 정의한다.

정규화 함수는 적분 가능성을 통하여 해의 공간을 한정하게 된다. 정규화 함수가 적분이 가능하기 위해서는 피 적분함수 $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$는 piecewise-continuous해야만 한다. 따라서 시간의 함수 $\mathbf{x}(t)$는 continuous해야 한다. 즉 시간에 따른 시스템 변수 $\mathbf{x}$의 변화가 continuous하게 일어난다는 뜻이다(그림 2.2).

L_2-Regularization function을 이용한 SI 문제는 Tikhonov regularization 기법을 이용한다. 정규화 함수를 고려한 새로운 목적함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}&\underset{\mathbf{x}(\tau)}{\text{Min}}\ \Pi(\mathbf{x}(\tau),\tau) = \frac{1}{2}\int_0^{\tau}\left\|\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}(\tau),t) - \bar{\mathbf{a}}(t)\right\|_2^2 dt + \frac{\lambda^2}{2}\int_0^{\tau}\left\|\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right\|_2^2 dt\\&\text{subject to } \mathbf{r}(\mathbf{x}) \le 0\end{aligned} \tag{2.20}$$

2.3.1장에서 설명했듯이 정규화 계수는 정규화의 영향을 조절하는 역할을 한다. 정규화 계수가 작을때는 정규화 함수의 역할은 거의 사라지고, 정규화 계수가 클때는 정규화 함수가 지배적이 되기 때문이다. 이 연구에서 정규화 계수는

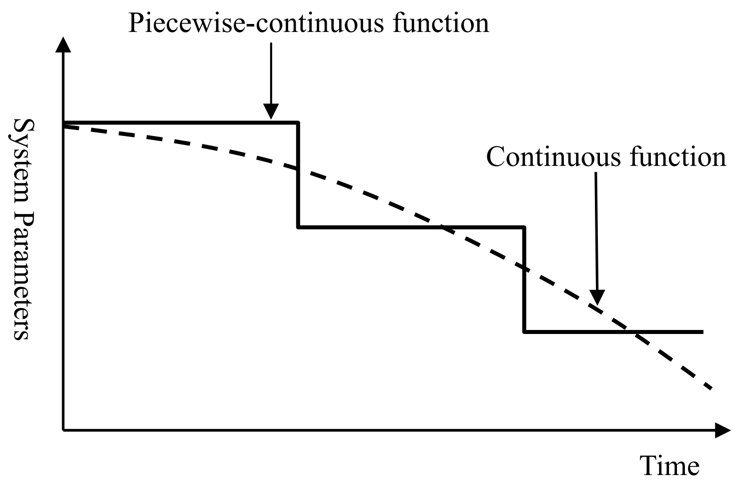

그림 2.2 Continuous 함수와 piecewise-continuous 함수

GMS (Geometric Mean Scheme) 방법을 통하여 결정한다. [4, 17] GMS기법에서는 이산화 된 오차함수의 민감도 행렬의 가장 큰 특이치와 0이 아닌 가장 작은 특이치의 기하평균으로 정의된다.

$$\lambda = \sqrt{\omega_{\max} \cdot \omega_{\min}} \tag{2.21}$$

식(2.20)의 목적함수를 이산화하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\Pi(\mathbf{x}(\tau),\tau) &= \frac{1}{2}\int_0^{\tau}\left\|\widetilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}(\tau),t)-\overline{\mathbf{a}}(t)\right\|_2^2 dt+\frac{\lambda^2}{2}\int_0^{\tau}\left\|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right\|_2^2 dt \\
&\approx \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{nt}\left\|\widetilde{\mathbf{a}}_k(\mathbf{x}_{nt})-\overline{\mathbf{a}}_k\right\|_2^2\Delta t+\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^{nt}\frac{\left\|\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_{k-1}\right\|_2^2}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{nt}\left\|\widetilde{\mathbf{a}}_k(\mathbf{x}_{nt})-\overline{\mathbf{a}}_k\right\|_2^2\Delta t+\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^{nt-1}\frac{\left\|\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_{k-1}\right\|_2^2}{\Delta t}+\frac{\lambda}{2}\frac{\left\|\mathbf{x}_{nt}-\mathbf{x}_{nt-1}\right\|_2^2}{\Delta t}
\end{aligned} \tag{2.22}
$$

여기서, nt 는 현재의 시간 $\tau = nt \times \Delta t$ 에 대응하는 시간스텝의 수를 나타낸다. 그리고 아래첨자는 시간스텝을 나타낸다.

$$
\widetilde{\mathbf{a}}_k(\mathbf{x}_{nt})=\widetilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}(\tau),k\Delta t),\ \overline{\mathbf{a}}_k=\overline{\mathbf{a}}(k\Delta t),\ \mathbf{x}_k=\mathbf{x}(k\Delta t) \tag{2.23}
$$

식(2.22)에서 $\mathbf{x}_0$는 시스템 변수의 초기값을 나타낸다. SI 과정은 $0<\tau\le\tau_{\max}$의 매 시간스텝마다 순차적으로 진행되어야 한다. 여기서 $\tau_{\max}$는 SI 과정의 마지막 스텝을 나타낸다. 현재 시간 바로 이전 스텝에서의 시스템 변수는 아는 값이 되기 때문에 현재 시간에서의 최소화 과정에서는 해에 아무런 영향을 끼치지 못하기 때문이다. 따라서 식(2.22)에서 두번째 항은 소거된다. 따라서 최종적으로 이산화 된 최소화 문제는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&\underset{\mathbf{x}_{nt}}{\mathrm{Min}}\,\Pi(\mathbf{x}_{nt},\tau)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{nt}\left\|\widetilde{\mathbf{a}}_k(\mathbf{x}_{nt})-\overline{\mathbf{a}}_k\right\|_2^2\Delta t+\frac{\lambda^2}{2}\frac{\left\|\mathbf{x}_{nt}-\mathbf{x}_{nt-1}\right\|_2^2}{\Delta t} \\
&\text{subject to }\ \mathbf{r}(\mathbf{x}_{nt})\le 0
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

식(2.24)의 최소화 문제는 시간 τ 일 때 시스템 변수에 대한 비선형 문제이므로 이차 종속문제 (Recursive Quadratic Problem)를 반복적으로 풀어 해를 구한다. Line search 기법이 수렴을 가속화하기 위해서 적용된다. RQP를 위한 이차 종속문제는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}
&\underset{\Delta\mathbf{x}_{nt}}{\mathrm{Min}}\left\{\frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}_{nt}^{T}\mathbf{H}\Delta\mathbf{x}_{nt}+\Delta\mathbf{x}_{nt}{}^{T}\sum_{k=1}^{nt}\left(\nabla_{x}\tilde{\bar{\mathbf{a}}}_{k}(\bar{\mathbf{x}}_{nt})\right)^{T}\cdot(\tilde{\bar{\mathbf{a}}}_{k}(\bar{\mathbf{x}}_{nt})-\bar{\mathbf{a}}_{k})\Delta t\right.\\
&\left.+\frac{\lambda^{2}}{\Delta t}\left(\frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}_{nt}^{T}\cdot\Delta\mathbf{x}_{nt}-\Delta\mathbf{x}_{nt}^{T}\cdot(\bar{\mathbf{x}}_{nt}-\mathbf{x}_{nt-1})\right)\right\}\\
&\text{subject to }\ \mathbf{r}(\bar{\mathbf{x}}_{nt}+\Delta\mathbf{x}_{nt})\le 0
\end{aligned}\tag{2.25}$$

여기서, $\mathbf{H}$와 ∇_x 는 각각 오차함수의 Gauss-Newton 헤시안 행렬과 시스템 변수에 대한 gradient operator를 나타낸다. 그리고, $\bar{\mathbf{x}}_{nt}$ 는 시간스텝 nt 일 때 최적화 과정에서 이전 반복 단계에서의 계산된 시스템 변수벡터를 나타낸다. Gauss-Newton 헤시안 행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{H}=\sum_{k=1}^{nt}\left(\nabla_{x}\tilde{\bar{\mathbf{a}}}_{k}(\bar{\mathbf{x}}_{nt})\right)^{T}\cdot\nabla_{x}\tilde{\bar{\mathbf{a}}}_{k}(\bar{\mathbf{x}}_{nt})\Delta t \tag{2.26}$$

위의 반복과정을 통해 얻어진 증분해 $\Delta\mathbf{x}_{nt}$ 에 line search 기법을 이용하여 수렴을 가속화 시킨다.

$$\underset{\beta}{\text{Minimize}}\left\| \tilde{\mathbf{a}}_k(\bar{\mathbf{x}}_{nt}^{i-1} + \beta\,\Delta\mathbf{x}_{nt}) - \bar{\mathbf{a}}_k \right\|_2^2 \tag{2.27}$$

여기서, β 는 step length를 나타낸다. 식(2.27)에서 얻어진 β 를 이용한 i 번째 반복 단계의 해는 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{x}}_{nt}^{i} = \bar{\mathbf{x}}_{nt}^{i-1} + \beta^{\text{opt}}\,\Delta\mathbf{x}_{nt} \tag{2.28}$$

여기서, β^{opt}는 식(2.28)의 최적해를 나타낸다.

2.4.2 L_1-Regularization function

L_l-Regularization function은 다음과 같이 정의된다.

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\ \Pi_R = \int_0^{\tau} \left\| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right\|_1 dt \tag{2.29}$$

L_1-Regularization function은 시스템변수의 시간에 대한 일차미분의 1-norm의 시간에 대한 적분으로 정의한다. L_2-정규화 함수와 달리 L_1-정규화 함수가 적분이 가능하기 위해서는 피 적분함수 $\dfrac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$는 dirac-delta function까지 가능하다. 따라서 시간의 함수 $\mathbf{x}(t)$는 piecewise-continuous function이 되어야 한다. 즉 시간에 따

른 시스템 변수 **x**의 변화가 piecewise-continuous하게 일어난다는 뜻이다 (그림 2.2). 다시 말하면 시스템 변수 **x**가 시간에 따라서 급격하게 변화한다는 것이고 지진과 같이 짧은 시간동안에 가해지는 하중에 의해서 구조물의 강성이 급격히 떨어진 경우에 사용하는 것이 적합하다.

L_1-Regularization function을 이용한 SI 문제는 정규화 함수가 미분이 불가능하기 때문에 Tikhonov기법을 이용하지 않고, TSVD (Truncated Singular Value Decomposition) 기법을 이용한다.

정규화 함수를 고려한 새로운 목적함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\underset{\mathbf{x}(\tau)}{\text{Min}} \int_0^\tau \left\| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right\|_1 dt \ \text{ subject to } \ \underset{\mathbf{x}(\tau)}{\text{Min}} \ \Pi(\mathbf{x}(\tau),\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\tau \left\| \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}(\tau),t) - \bar{\mathbf{a}}(t) \right\|_2^2 dt \\ \text{and } \ \mathbf{r}(\mathbf{x}) \le 0 \tag{2.30}$$

식(2.30)의 목적함수를 이산화하면 다음과 같다.

$$\underset{\mathbf{x}(\tau)}{\text{Min}} \left\| \mathbf{x}_{nt} - \mathbf{x}_{nt-1} \right\|_1 dt \ \text{ subject to } \ \underset{\mathbf{x}_{nt}}{\text{Min}} \ \Pi(\mathbf{x}_{nt},\tau) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{nt} \left\| \tilde{\mathbf{a}}_k(\mathbf{x}_{nt}) - \bar{\mathbf{a}}_k \right\|_2^2 \Delta t \\ \text{and } \ \mathbf{r}(\mathbf{x}) \le 0 \tag{2.31}$$

식(2.31)의 최소화 문제는 TSVD 방법을 이용하여 푼다. 과정은 다음과 같다.

식(2.31)는 비선형 최적화 구속조건이 포함되어 있기 때문에 다음의 증분 형태의 구속조건을 반복계산을 통해 풀어야 한다.

$$\begin{aligned}
&\underset{\Delta\mathbf{x}_{nt}}{\text{Min}} \left\|\overline{\mathbf{x}}_{nt}^{i-1} + \Delta\mathbf{x}_{nt} - \mathbf{x}_{nt-1}\right\|_1 \text{ subject to } \underset{\Delta\mathbf{x}_{nt}}{\text{Min}} \sum_{k=1}^{nt} \left\|\mathbf{S}\Delta\mathbf{x}_{nt} - \mathbf{a}_k^r\right\|_2^2 \\
&\text{and } \mathbf{r}(\overline{\mathbf{x}}_{nt}^{i-1} + \Delta\mathbf{x}) \le 0
\end{aligned} \tag{2.32}$$

여기서 $\mathbf{a}_k^r$ 는 $\mathbf{a}_k^r = \overline{\mathbf{a}}_k - \widetilde{\mathbf{a}}_k(\overline{\mathbf{x}}_{nt}^{i-1})$ 로서 정의할 수가 있다. 식()의 선형 최적화 구속조건을 특이치 분해를 통해 구한 증분해는 다음과 같다.

$$\Delta\mathbf{x}_{nt} = \sum_{j=1}^{t} \mathbf{v}_j \omega_j^{-1} \mathbf{z}_j^T \mathbf{a}^r + \sum_{j=t+1}^{n} \gamma_j \mathbf{v}_j = \Delta\mathbf{x}_{nt}^{TSVD} + \mathbf{z} \tag{2.33}$$

여기서, t는 truncation number이고 $\Delta\mathbf{x}_t$ 와 $\mathbf{z}$는 계산상의 간편함을 위해 치환한 것이다. 작은 크기의 특이치에 의해서 발생되는 SI 기법의 불안정성을 제거하고 민감도 행렬의 rank를 어느 정도 확보하여 사용하고 절삭하는 것은 중요하다. 이것을 결정하기 위한 최적 truncation number의 결정방법은 이 논문에서는 논의하지 않는다.

식(2.33)은 rank가 부족한 문제에 대한 해이기 때문에 임의의 γ_j 에 대해 무수히 많은 해가 존재하고 이를 식(2.32)의 추가적인 구속조건인 L_1-정규조건에

대입하여 하나의 해를 결정한다.

$$\underset{\mathbf{z}}{\mathrm{Min}}\left\|\mathbf{z}+\left(\overline{\mathbf{x}}_{nt}^{i-1}+\Delta\mathbf{x}_{nt}^{TSVD}-\mathbf{x}_{nt-1}\right)\right\|^{1} \text{ subject to } \mathbf{V}_t^T\mathbf{z}=0$$
$$\text{and } \mathbf{R}(\mathbf{z}+\overline{\mathbf{x}}_{nt}^{i-1}+\Delta\mathbf{x}_{nt}^{TSVD})\leq 0 \tag{2.34}$$

여기서, $\mathbf{V}_t$는 다음과 같다.

$$\mathbf{V}_t=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_t) \tag{2.35}$$

식(2.34)에서 등식형 추가조건인 $\mathbf{V}_t^T\mathbf{z}=0$은 z와 $\mathbf{V}_t$가 가지고 있는 벡터의 기저가 각각 $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_t)$, $(\mathbf{v}_{t+1},\mathbf{v}_{t+2},\cdots,\mathbf{v}_n)$으로 달라서 서로 직교하는 관계에 있으므로 추가 되었다. 식(2.34)은 $\mathbf{z}$에 대한 선형 최적화 문제이고 simplex algorithm을 통해 최적화 된 해 $\mathbf{z}^{\mathrm{opt}}$를 구한다. [18] $\mathbf{z}^{\mathrm{opt}}$를 식(2.30)에 대입하면 현 반복단계의 최적화 된 증분해 $\Delta\mathbf{x}_{nt}^{\mathrm{opt}}$는 다음과 같다.

$$\Delta\mathbf{x}_{nt}^{\mathrm{opt}}=\sum_{j=1}^{t}\mathbf{v}_j\omega_j^{-1}\mathbf{z}_j^T\mathbf{a}^r+\mathbf{z}^{\mathrm{opt}}=\Delta\mathbf{x}_{nt}^{TSVD}+\mathbf{z}^{\mathrm{opt}} \tag{2.36}$$

위의 반복과정을 통해 얻어진 증분해 $\Delta\mathbf{x}_{nt}$에 line search 기법을 이용하여 수렴을 가속화 시킨다.

$$\underset{\beta}{\text{Minimize}}\left\|\tilde{\mathbf{a}}_k(\bar{\mathbf{x}}_{nt}^{i-1}+\beta\,\Delta\mathbf{x}_{nt}^{\text{opt}})-\bar{\mathbf{a}}_k\right\|_2^2 \tag{2.37}$$

여기서, β는 step length를 나타낸다. 식(2.37)에서 얻어진 β를 이용한 i 번째 반복 단계의 해는 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{x}}_{nt}^{i}=\bar{\mathbf{x}}_{nt}^{i-1}+\beta^{\text{opt}}\,\Delta\mathbf{x}_{nt}^{\text{opt}} \tag{2.38}$$

여기서, β^{opt}는 식(2.38)의 최적해를 나타낸다.

2.5 지배방정식의 시간에 대한 이산화와 시간에 대한 적분

지배방정식의 시간에 대한 적분은 Newmark β-method를 이용한다. [14]

지배방정식을 시간에 대하여 이산화 하면 다음과 같다.

$$\mathbf{Ma}_k+\mathbf{C}_n\mathbf{v}_k+\mathbf{K}_n\mathbf{u}_k=\mathbf{p}_k \tag{2.39(a)}$$
$$\mathbf{Ma}_{k+1}+\mathbf{C}_n\mathbf{v}_{k+1}+\mathbf{K}_n\mathbf{u}_{k+1}=\mathbf{p}_{k+1} \tag{2.39(b)}$$

여기서, 각 첨자 k는 시간단계를 나타낸다. n은 3장의 Time Windowing 기법을 사용하지 않을 때는 n번째 시간스텝 nt 를 나타내고 Time Windowing 기법을 사용할 때는 n번째 스텝의 time window nc 를 나타낸다. n은 역해석에 의해서 시스템 변수를 추정이 끝나고 다음 시간스텝으로 넘어갈 때 변하는 값이고 지배 방

정식의 시간적분을 할 때는 일정한 값을 가진다.

식(2.39)의 증분형태는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{M}\Delta\mathbf{a}_k + \mathbf{C}_n\Delta\mathbf{v}_k + \mathbf{K}_n\Delta\mathbf{u}_k = \Delta\mathbf{p}_k \tag{2.40}$$

변위, 속도, 가속도의 증분간의 관계식은 다음과 같다.

$$\Delta\mathbf{v}_k = (\Delta t)\mathbf{a}_k + (\gamma\Delta t)\Delta\mathbf{a}_k \tag{2.41(a)}$$

$$\Delta\mathbf{u}_k = (\Delta t)\mathbf{v}_k + \frac{(\Delta t)^2}{2}\mathbf{a}_k + \beta(\Delta t)^2\Delta\mathbf{a}_k \tag{2.41(b)}$$

여기서, $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=\frac{1}{4}$ 이다. 위 식(2.41)로부터 속도, 가속도의 증분을 변위의 증분에 대한 식으로 바꾸면 다음 식(2.42)이 된다.

$$\Delta\mathbf{a}_k = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\Delta\mathbf{u}_k - \frac{1}{\beta\Delta t}\mathbf{v}_k + \frac{1}{2\beta}\mathbf{a}_k \tag{2.42(a)}$$

$$\Delta\mathbf{v}_k = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta\mathbf{u}_k - \frac{\gamma}{\beta}\mathbf{v}_k + \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\mathbf{a}_k \tag{2.42(b)}$$

식(2.42)을 식(2.40)에 대입하여 정리하면

$$\hat{\mathbf{K}}_n\Delta\mathbf{u}_k = \Delta\hat{\mathbf{p}}_k \tag{2.43(a)}$$

$$\hat{\mathbf{K}}_n = \mathbf{K}_n + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C}_n + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\mathbf{M} \tag{2.43(b)}$$

$$\Delta\hat{\mathbf{p}}_k = \Delta\mathbf{p}_k + \hat{\mathbf{a}}\mathbf{v}_k + \hat{\mathbf{b}}\mathbf{a}_k \tag{2.43(c)}$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{1}{\beta\Delta t}\mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta}\mathbf{C}_n \ , \ \hat{\mathbf{b}} = \frac{1}{2\beta}\mathbf{M} + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\mathbf{C}_n \tag{2.43(d)}$$

식(2.43)로부터 $\Delta\mathbf{u}_k$ 를 구할 수 있고 이 값을 식(2.42)에 대입하면 $\Delta\mathbf{v}_k$, $\Delta\mathbf{a}_k$ 를 구할 수 있고 이 값들을 이전 단계의 변위, 속도, 가속도에 더해주어 새로운 $k+1$타임스텝에서의 변위, 속도, 가속도를 구할 수 있다.

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \Delta\mathbf{u}_k \ , \ \ \mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + \Delta\mathbf{v}_k \ , \ \ \mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{a}_k + \Delta\mathbf{a}_k \tag{2.44}$$

2.6 민감도 행렬 (Sensitivity Matrix)

2.6.1 초기 민감도

첫번째 단계에서의 민감도는 다음과 같이 구한다. 시간단계 k 에서의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_k + \mathbf{C}_n\mathbf{v}_k + \mathbf{K}_n\mathbf{u}_k = \mathbf{p}_k \tag{2.45}$$

식(2.45)를 시스템 변수에 대하여 미분하고 그 시간단계에서의 초기값을 넣어주면 초기 민감도를 계산할 수 있다. 계산과정은 다음과 같다.

$$\mathbf{M}\frac{\partial\mathbf{a}_k}{\partial\mathbf{x}_n} + \frac{\partial\mathbf{C}_n}{\partial\mathbf{x}_n}\mathbf{v}_k + \mathbf{C}_n\frac{\partial\mathbf{v}_k}{\partial\mathbf{x}_n} + \frac{\partial\mathbf{K}_n}{\partial\mathbf{x}_n}\mathbf{u}_k + \mathbf{K}_n\frac{\partial\mathbf{u}_k}{\partial\mathbf{x}_n} = 0 \tag{2.46}$$

현 단계에서의 시스템변수는 초기변위와 초기속도에 영향을 줄 수 없으므로 초기의 속도와 변위에 대한 민감도는 0이다. 따라서 초기가속도에 대한 민감도는 다음과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{a}_0}{\partial \mathbf{x}_n} = -\mathbf{M}^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{C}_n}{\partial \mathbf{x}_n}\mathbf{v}_0 + \frac{\partial \mathbf{K}_n}{\partial \mathbf{x}_n}\mathbf{u}_0\right) \tag{2.47}$$

단, 구조물이 정적 평형상태에서 하중이 갑자기 제거되는 경우에는 초기 변위에 대한 민감도가 존재하게 된다. 따라서 다음과 같은 계산을 통하여 초기 변위에 대한 민감도를 고려하여야 한다.

정적 평형상태는 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_n\mathbf{u}_0 = \mathbf{p}_0 \tag{2.48}$$

식(2.48)을 시스템 변수에 대하여 미분하고 정리하면 초기 변위의 민감도는 다음과 같이 계산된다.

$$\mathbf{K}_n\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{x}_n} + \frac{\partial \mathbf{K}_n}{\partial \mathbf{x}_n}\mathbf{u}_0 = 0 \tag{2.49(a)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{x}_n} = -\mathbf{K}_n^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{K}_n}{\partial \mathbf{x}_n}\mathbf{u}_0\right) \tag{2.49(b)}$$

2.6.2 민감도

타임 윈도우가 시작되는 첫 시간 단계의 민감도를 이용하여 타임 윈도 내의 각 시간 단계에서의 민감도를 축차적으로 구할 수 있다. 즉 타임 윈도우 내에서 시간 단계에 대한 민감도는 다음과 같이 식(2.44)을 미분하여 구한다.

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}_n} = \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial \mathbf{x}_n} + \frac{\partial \Delta \mathbf{u}_k}{\partial \mathbf{x}_n}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}_n} = \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \mathbf{x}_n} + \frac{\partial \Delta \mathbf{v}_k}{\partial \mathbf{x}_n}, \quad \frac{\partial \mathbf{a}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}_n} = \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial \mathbf{x}_n} + \frac{\partial \Delta \mathbf{a}_k}{\partial \mathbf{x}_n} \tag{2.50}$$

식(2.42)를 시스템변수 $\mathbf{x}_n$에 대하여 미분하면 다음과 같다

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{a}_k}{\partial \mathbf{x}_n} = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \frac{\partial \Delta \mathbf{u}_k}{\partial \mathbf{x}_n} - \frac{1}{\beta \Delta t} \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \mathbf{x}_n} + \frac{1}{2\beta} \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial \mathbf{x}_n} \tag{2.51(a)}$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{v}_k}{\partial \mathbf{x}_n} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \frac{\partial \Delta \mathbf{u}_k}{\partial \mathbf{x}_n} - \frac{\gamma}{\beta} \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \mathbf{x}_n} + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial \mathbf{x}_n} \tag{2.51(b)}$$

식(2.43)를 시스템변수 $\mathbf{x}_n$로 미분한 식(2.52)을 식(2.51)에 대입하고 식(5.7)에서 얻어진 값을 식(2.50)에 대입하면 축차적으로 각 시간단계에 대한 민감도를 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{u}_k}{\partial \mathbf{x}_n} = \hat{\mathbf{K}}_n^{-1} \left(\frac{\partial \Delta \hat{\mathbf{p}}_k}{\partial \mathbf{x}_n} - \frac{\partial \hat{\mathbf{K}}_n}{\partial \mathbf{x}_n} \Delta \mathbf{u}_k \right) \tag{2.52(a)}$$

$$\frac{\partial \Delta \hat{\mathbf{p}}_k}{\partial \mathbf{x}_n} = \frac{\partial \hat{\mathbf{a}}}{\partial \mathbf{x}_n} \mathbf{v}_k + \frac{\partial \hat{\mathbf{b}}}{\partial \mathbf{x}_n} \mathbf{a}_k + \hat{\mathbf{a}} \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \mathbf{x}_n} + \hat{\mathbf{b}} \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial \mathbf{x}_n} \tag{2.52(b)}$$

$$\frac{\Delta \hat{\mathbf{a}}}{\partial \mathbf{x}_n} = \frac{\gamma}{\beta} \frac{\partial \mathbf{C}_n}{\partial \mathbf{x}_n} \quad , \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{b}}}{\partial \mathbf{x}_n} = \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \frac{\partial \mathbf{C}_n}{\partial \mathbf{x}_n} \tag{2.52(c)}$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{K}}_n}{\partial \mathbf{x}_n} = \frac{\partial \mathbf{K}_n}{\partial \mathbf{x}_n} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \frac{\partial \mathbf{C}_n}{\partial \mathbf{x}_n} \tag{2.52(d)}$$

2.7 감쇠 모델

실제 구조물의 감쇠 현상을 수학적으로 정확히 표현한다는 것은 불가능하다. 실제로 현존하는 모든 구조물 감쇠 모델은 실제 감쇠 현상을 정확히 표현할 수 없으며, 정도의 차이는 있지만 실제 감쇄 현상을 근사적으로 표현할 수 있을 뿐이다. 기존의 대부분의 연구에서는 구조물의 감쇄를 기지수로 취급하고 강성도 변수만을 미지수로 취급하여 왔다. 그러나, 구조물의 감쇄는 실제적으로 미리 가정할 수 없고, 구조물의 동적 거동에 중요한 영향을 미치기 때문에 SI 기법에서 반드시 미지수로 취급하여 구조물의 실제 거동에 의하여 결정되어야 한다.

많은 고전적 감쇠 모델 중에서 모드 감쇄 모델과 Rayleigh 감쇄 모델이 널리 사용되고 있다. 모드 감쇄 모델은 구조물의 각 모드마다 정의되는 감쇠 계

수에 의하여 감쇠 행렬을 다음과 같이 표시한다.

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}\left(\sum_{k=1}^{N_d} 2\zeta_k \omega_k \boldsymbol{\phi}_k \boldsymbol{\phi}_k^T\right)\mathbf{M} \tag{2.53}$$

여기서, ζ_k, ω_k, $\boldsymbol{\phi}_k$ 는 각각 modal damping ratio, 고유 진동수, 질량 행렬에 의하여 normalize된 k번째 모드의 모드형상을 나타낸다. N_d는 모드의 수를 나타낸다.

Rayleigh 감쇠 모델에서는 질량 행렬과 강성도 행렬의 선형 조합에 의하여 다음과 같이 감쇠 행렬을 정의한다.

$$\mathbf{C} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K} \tag{2.54}$$

여기서, a_0, a_1 은 Rayleigh 감쇠 계수를 나타낸다. Rayleigh 감쇠 모델에 의해서 감쇠를 모델링 한 경우에는 식(2.53)와 식(2.54)을 이용하여 등가의 modal damping ratio를 구할 수 있다.

$$\zeta_k = \frac{1}{2\omega_k}\boldsymbol{\phi}_k^T(a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K})\boldsymbol{\phi}_k \tag{2.55}$$

전술한 바와 같이 모드 감쇠 모델이나 Rayleigh 감쇠 모델이나 실제 감쇠 현상

을 정확히 모사할 수 없다. 그러나, 모드 감쇠 모델을 사용할 경우 감쇠 계수가 각 모드에서 정의되어야 하기 때문에 구조물의 자유도 만큼의 감쇠 계수를 결정하여야 한다. SI 문제에서는 미지수가 증가할수록 독립적인 구조물의 정보를 포함하는 측정점의 수를 증가시켜야 한다. 토목 구조물과 같이 규모가 크고 복잡한 구조물에서 측정점의 개수를 미지수의 개수에 따라 증가시킨다는 것은 실제적으로 불가능하다. 따라서, SI 문제에서는 가능한 한 미지수를 줄여야 만이 수치적인 해의 안정성을 확보하여 보다 적은 수의 측정점에 의하여 정확한 해를 구할 수 있다. 이 연구에서는 2개의 미지수를 가지는 Rayleigh 감쇠 모델을 사용한다.

III. Time Windowing Technique

2장에서 제안한 변수추정기법은 시간에 따른 시스템 변수의 변화가 없고, 질량, 하중, 초기조건은 알고 있는 값이라는 가정이 있었다. 시간이 지남에 따라서 추정되는 시스템 변수의 변화가 있기는 하지만 그것은 시간이 지남에 따른 정보량의 변화 때문에 일어나는 변화고 실제로 추정하는 시스템 변수의 변화가 일어나는 것은 아니다. 하지만 실제로 측정되는 구조물의 응답은 구조물에 손상이 발생하기 전의 응답과 손상이 발생한 후의 응답을 모두 포함하고 있다. 손상이 발생한 시점을 안다면 손상이 발생한 후의 응답만을 얻어낼 수 있기 때문에 추정하는 시스템 변수는 시간에 따라서 변하지 않는다는 가정을 그대로 이용할 수 있다. 하지만 측정된 응답만을 가지고 손상이 발생한 시점을 정확하게 추정할 수 없으므로 위의 방법은 적용이 불가능하다. 시간에 따른 물성치의 변화를 추정하기 위해서 Time Windowing Technique을 제안한다.

$$\underset{\mathbf{x}(t)}{\text{Min}}\ \Pi(\mathbf{x}(t),t)=\frac{1}{2}\int_{t}^{t+d_w}\alpha(t)\left\|\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}(t),t)-\bar{\mathbf{a}}(t)\right\|_2^2 dt \ \text{ subject to } \ \mathbf{r}(\mathbf{x}(t))\le 0 \qquad (3.1)$$

여기서 $\tilde{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{a}}$, $\mathbf{r}$, α는 각각 수학적 모델에 의해 계산된 가속도, 측정 가속도, 시

스템 변수의 구속조건, weighting factor을 나타낸다. 그리고 $\|\cdot\|$ 은 벡터의 Euclidean norm을 나타낸다.

이 기법에서는 오차함수가 최초 시간부터 현재 시간까지가 아니고 time window라고 불리는 일정한 시간의 영역 안에서 측정 가속도와 수학적 모델에 의해서 계산된 가속도와의 자승오차의 시간에 대한 적분으로 정의된다(그림 3.1(a)).

오차함수를 식(3.1)와 같이 정의하는 이유는 크게 네가지이다.

첫째는 시스템 변수 추정의 정확성을 위해서이다. 오차함수가 손상이 발생하기 이전의 응답과 손상이 발생한 응답을 포함하고 있다면 손상의 정도를 정확히 파악하기가 불가능하다. 하지만 이 기법에서 time window가 손상이 발생하기 이전의 영역에 있을 경우에는 손상이 발생하지 않은 상태에서의 응답만이 오차함수에 포함되기 때문에 손상이 없는 상태의 시스템 변수를 추정할 수 있고, time window가 손상이 발생한 후의 영역에 있을 경우에는 손상이 발생한 후의 응답만이 오차함수에 포함되기 때문에 손상이 발생한 상태의 시스템 변수를 추정할 수가 있다. 그리고 time window가 두가지 영역을 모두 포함하고 있을 때

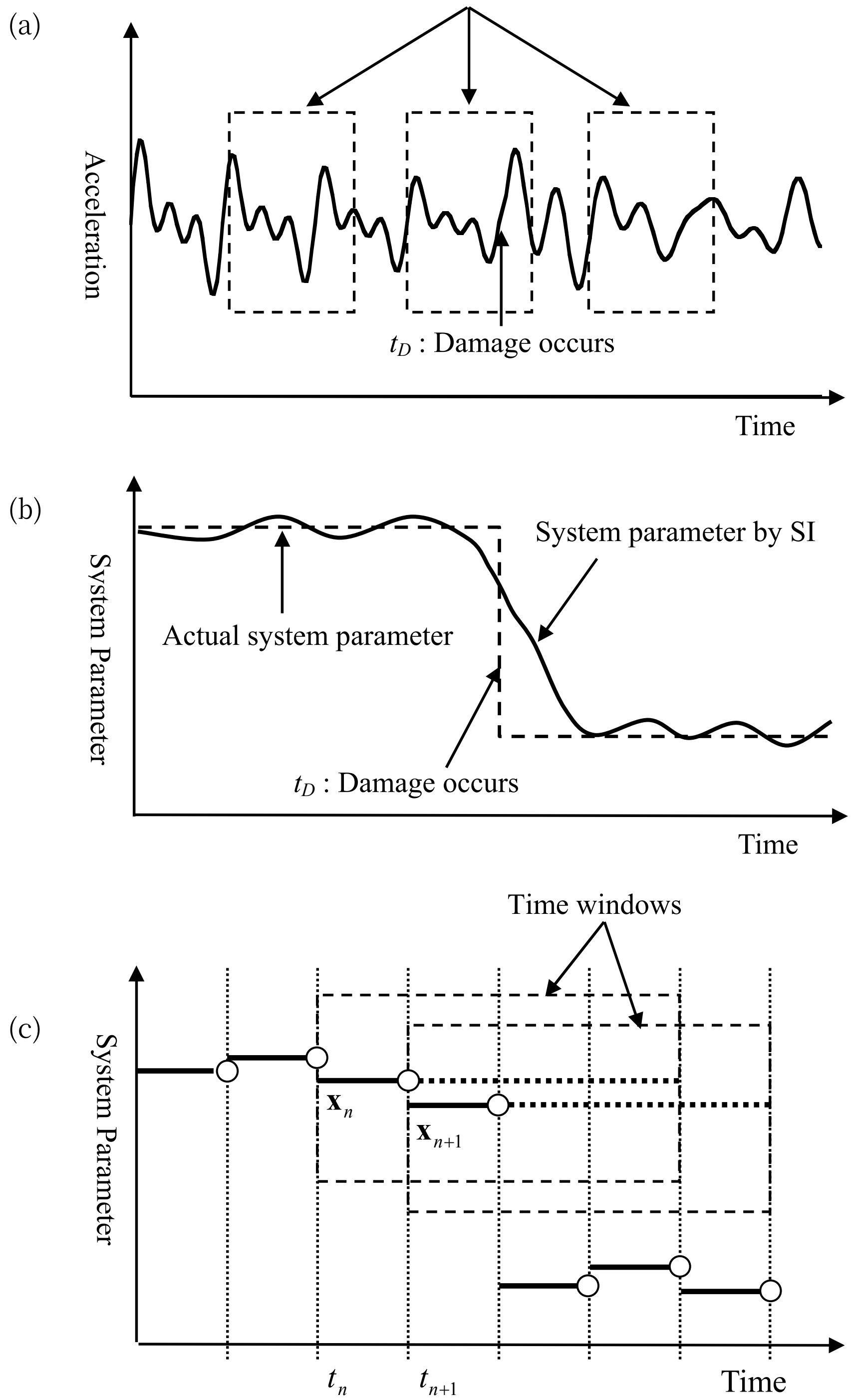

그림 3.1 Time window의 개념

는 손상이 발생하기 이전과 손상이 발생한 후의 시스템 변수의 중간쯤을 추정할 것이라고 예상할 수 있다(그림 3.1(b)).

둘째는 손상이 발생한 시점을 알 수 있다. 물론 손상이 발생하기 이전과 손상이 발생한 이후의 사이에서 transient 영역이 생기기 때문에 정확한 시점을 알 수는 없지만 time window의 크기가 작아지면 작아질수록 더욱 정확하게 손상이 발생한 시점을 추정할 수 있다.

셋째는 역해석 시간을 단축할 수 있다. 오차함수(식(3.1))의 특성상 시간이 지나면 지날수록 오차함수의 크기는 증가하기 때문에 한 시간스텝의 해석시간은 점점 증가하게 된다. 하지만 이 기법에서는 오차함수가 항상 일정한 크기를 갖기 때문에 시간이 지나도 해석시간이 일정하게 유지된다.

마지막으로 이 기법을 사용하는 가장 중요한 이유는 시간에 따른 시스템 변수의 변화를 추정할 수 있다는 것이다. 즉, 시스템 변수를 시간의 함수로 생각할 수 있다는 것이다.

Time window안에서 추정된 시스템 변수는 time window의 초기 시간에서의 시스템변수로 생각을 한다. 그 이유는 현재의 시스템 변수가 변화하면 그 영향

은 그 시점 이후에 영향을 주는 것이지 그 이전 시간에는 아무런 영향을 끼치지 못하기 때문이다. 또한 추정된 시스템 변수는 그 시점에서부터 다음 시간스텝 바로 이전까지의 시스템 변수로 가정을 한다(그림 3.1(c)). 지배방정식(식(3.2))에서 질량, 하중, 초기조건은 역시 알고 있다고 가정한다.

3.1 초기값

타임 윈도가 시작되는 시간에서 수학적 모델 상의 각 변수 및 그들의 민감도를 모르기 때문에 이 문제는 엄밀히 말하면 초기값에 대한 비선형 문제가 된다. 현재 시간에서 시스템 변수가 변하게 되면 그 시점에서 변위와 속도는 연속이 되지만 가속도는 불연속이 일어난다. 따라서 time window에서의 초기 가속도는 시스템 변수가 변함에 따라서 계속 변한다. 이를 풀기 위하여는 또 다른 반복 계산이 필요하게 되는데, 다음과 같은 간단한 알고리즘을 적용한다. 시간 t 에서의 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{Ma}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{v}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t) \tag{3.2}$$

위 식에서 전 시간 단계에서의 변수와 그들의 민감도를 알고 있고, 현 시간

단계에서의 감쇠특성과 강성도를 알고 있으면, Newmark-β method 에 의하여 현 단계에서의 모든 변수와 그들의 민감도를 구할 수 있다. 그러나, 지금의 문제에서는 현 단계에서의 시스템 변수를 모르기 때문에 초기값에 대한 비선형 문제가 되는데 이를 Newton-Raphson 방법으로 풀기에는 식이 너무 복잡하게 되므로 다음과 같은 방법을 이용한다.

1) 전 단계에서 수렴된 시스템 변수와 초기치를 이용하여 식(3.2)을 풀어 새로운 time window에서의 초기치 $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{v}_0$ 를 구한다.

2) 1에서 구한 값을 다음 식(3.2)에 대입하여 타임윈도우에서의 가속도의 초기치 $\mathbf{a}_0$ 을 얻을 수 있다. 1,2 단계에서 구한 초기치를 이용하여 목적 함수의 최적화를 수행한다.

3) 2단계에서 구해진 시스템 변수에 의하여 식 (3.2)을 다시 풀어 새로운 가속도의 초기치 $\mathbf{a}_0$ 를 구하고 수렴할 때 까지 이 과정을 반복한다. 물성치의 변화에 따라서 가속도의 불연속은 일어날 수가 있지만 변위와 속도의 불연속성은 일어나지 않기 때문에 1단계에서 얻은 변위와 속도를 그대로 이용한다.

4) 최적화가 수렴하면, 현단계에서의 시스템변수와 그들의 민감도를 계산하고

다음 단계로 이동한다.

3.2 Time Windowing 기법에서의 정규화 기법

Time Windowing 기법을 이용하여 추정하고자 하는 경우는 지진과 같은 하중에 의하여 시스템 변수가 시간에 따라서 급격히 변화하는 경우이기 때문에 정규화 함수는 반드시 L_1-Regularization function을 사용해야 한다. 정규화 함수를 적용한 최종적인 최적화 문제는 다음 식과 같이 정의 된다.

$$\underset{\mathbf{x}(t)}{\text{Min}} \int_0^t \left\| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right\|_1 dt \quad \text{subject to} \quad \underset{\mathbf{x}(t)}{\text{Min}}\, \Pi = \frac{1}{2} \int_t^{t+d_w} \alpha(t) \left\| \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}(t), t) - \bar{\mathbf{a}}(t) \right\|_2^2 dt \\ \text{and } \mathbf{r}(\mathbf{x}(t)) \le 0 \tag{3.3}$$

여기서, 정규화 함수의 역할은 time window안에서가 아니라 시간에 따른 시스템 변수의 변화 전체 영역에 가해진다. 따라서 정규화 함수의 적분구간은 초기시간에서부터 현재시간 t 까지가 된다.

L_1-Regularization function을 사용했으므로 TSVD기법을 사용하여 최적화 문제를 푼다. 풀이과정은 2.4.2장과 같다.

목적함수를 이산화 하면 다음과 같다.

$$\underset{\mathbf{x}_{nc}}{\text{Min}} \left\| \mathbf{x}_{nc} - \mathbf{x}_{nc-1} \right\|_1 \text{ subject to } \underset{\mathbf{x}_{nc}}{\text{Min}}\ \Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=nc}^{nc+ntw} \alpha(k) \left\| \widetilde{\mathbf{a}}_k(\mathbf{x}_{nc}) - \overline{\mathbf{a}}_k \right\|_2^2 \Delta t$$
$$\text{and } \mathbf{r}(\mathbf{x}_{nc}) \leq 0 \tag{3.4}$$

여기서, *nc*, *ntw*는 각각 현재 시간에서의 타임스텝의 수와 time window안에 포함되는 시간 스텝의 수를 나타낸다.

3.3 Time Windowing 기법을 사용하는데 중요한 요소

Time Windowing 기법을 사용하는데 중요한 영향을 끼치는 몇 가지의 요소가 있다. 이는 반드시 이 기법에만 적용되는 문제가 아니라 Time-domain SI 기법의 일반적인 문제에도 적용이 된다. 하지만 Time Windowing 기법에서는 time window가 transient 영역을 지나갈 때 모델링 오차가 상당히 크기 때문에 더욱 큰 불안정성이 발생한다. 따라서 더욱 신중하게 여러 가지 요인들을 고려하여 적용하여야 한다.

중요한 요소로는 window size, sampling rate, truncation number, measurement error, weighting factor등이 있다. 이것들은 해의 안정성에 중요한 역할을 하며 7장의 예제에서의 결과를 바탕으로 다시 설명하도록 하겠다.

IV. 예제

두 가지의 수치 해석 예제를 통하여 제안한 Time-domain SI 기법의 L_2-Regularization 기법과 L_1-Regularization기법을 비교하고 Time Windowing Technique의 유효성을 보이고자 한다.

4.1 시간에 따라서 시스템 변수가 변화하지 않는 경우

- **Time Windowing Technique**을 사용하지 않은 경우

이 경우는 L_2-Regularization function을 사용했을 때와 L_1-Regularization function을 사용했을 때 두가지 경우에 대하여 simulation study를 수행하였다.

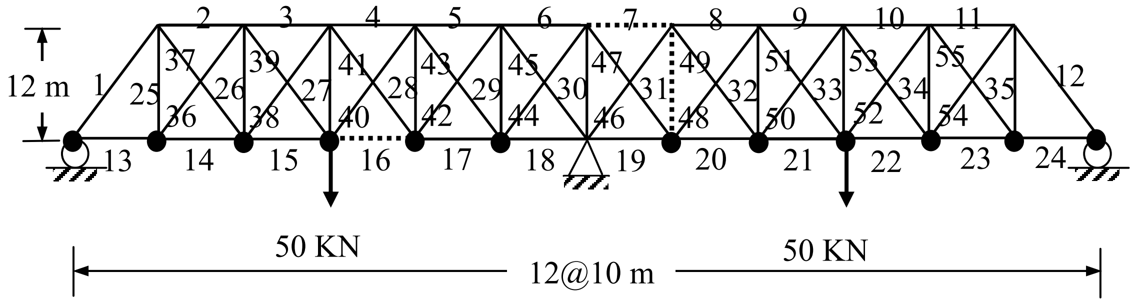

그림 4.1 2경간 연속 트러스교

그림 4.1에 나오는 2경간 연속 평면 트러스교를 통하여 수치해석을 하였다. 재료의 성질은 다음과 같다. Young's modulus = 210 GPa, Specific mass = 7850Kg/m^3은 전체 부재에 대하여 동일하다. 상부, 하부, 수직, 사재의 단면은 각각 250cm^2, 300cm^2, 200cm^2, 220cm^2이다. 다음 구조물의 natural frequency는 6.6Hz 부터 114.7Hz까지의 범위를 갖는다. Damage에 따른 stiffness의 감소는 7, 16, 31번 부재에 각각 40%, 50%, 55 % 일어났다고 simulation하였다. 손상을 입은 부재는 그림에서 점선으로 표시되었다. 그림 4.1에서와 같이 50KN의 하중을 갑자기 제거한 후 free vibration을 통한 가속도를 사용하였다. 측정 점은 truss의 아래 부분의 12개의 node에서 측정하였고 0초부터 1.0초까지의 수평, 수직 방향의 가속도를 사용하였다. Samping rate는 1/200 sec이다.

측정가속도는 modal damping을 통하여 generate되었고 8%의 random 오차를 포함하고 있다. 역해석을 할 때는 Rayleigh damping을 통하여 해석하였다. 계산 가속도를 얻는데 사용된 damping ratio는 그림 4.6에 나와있다. 초기의 Rayleigh damping ratio는 a_0=2.32, a_1=1.05×10^{-3} 이다. 초기의 Rayleigh damping ratio에 의해 계산된 modal damping ratio는 그림 4.6에 나와있다.

4.1.1 L_2-Regularization 기법을 적용한 경우

제안된 time-domain SI 기법을 이용하여 1초 동안 손상을 입은 구조물의 시스템 변수 추정을 하였다. 정규화 함수는 L_2-Regularization function을 사용하였다. 그림 4.2은 손상을 입은 부재의 축강성의 시간에 따른 변화를 보여준다. 손상을 입은 부재의 추정된 시스템 변수 값이 시간이 지남에 따라서 실제의 값에 수렴해 가는 것을 볼 수 있다. 시간에 따른 시스템 변수의 변화가 부드러운 곡선을 나타내는 것을 볼 수 있다. 그림 4.3은 마지막 시간스텝 $\tau=1.0$ sec에서 모든 부재의 축강성을 나타낸다. 그림 4.2와 그림 4.3의 수직축은 각 부재의 초기 축강성에 대해서 normalize된 값을 나타낸다. 제안한 SI 기법이 손상된 부재를 잘 찾아내고 또한 그 정도까지도 정확하게 추정하고 있다. 추정된 축강성은 52개의 손상을 입지 않은 부재에 중에서 49개는 ±10%의 범위 안에서 진동하고 있고, 3개는 10%이상의 진동을 하고 있다. 그러나 손상을 입은 부재의 축강성이 손상을 입지 않은 부재에 비교하여 훨씬 작기 때문에 손상을 입은 부재를 찾아낼 수 있다. 오차가 없는 가속도 데이터를 이용하여 추정된 축강성이 보다 정확하고 안정된 값을 나타내고 있다(그림 4.3). 측정치의 오차가 없어도 해가 진

동하는 이유는 감쇠특성을 모델링 할 때 발생하는 모델링 오차 때문이다. 오차가 있는 데이터와 오차가 없는 데이터를 사용했을 때 거의 비슷한 결과를 주는 것으로 보아 제안한 기법이 측정 오차에 대해서는 큰 영향을 받지 않는다는 것을 알 수 있다. 그림 4.4은 왼쪽 경간 중앙에서 측정된 가속도와 마지막 시간스텝에서 추정된 시스템 변수를 이용하여 계산된 가속도를 비교한 것이다. 계산된 가속도가 측정된 가속도와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 그림 4.5은 시간에 따른 Rayleigh damping 계수의 변화를 나타낸다. 왼쪽 수직축은 질량 행렬에 대한 계수를 나타내고 오른쪽 수직축은 강성행렬에 대한 계수를 나타낸다. Damping 계수가 강성에 비하여 수렴이 느리다. 감쇠 행렬에서 강성행렬과 질량행렬의 Frobenius norm의 비가 32.4로 계산되었다. 이는 감쇠행렬에서 a_1 이 a_0 에 비해 훨씬 중요한 역할을 한다는 것을 나타낸다. 그림 4.6은 마지막 시간스텝에서 식 (2.55)을 이용하여 계산된 modal damping ratio의 변화를 나타낸다. 추정된 Rayleigh damping을 이용하여 계산된 modal damping ratio가 약 60Hz (22차모드)의 범위까지 실제의 modal damping ratio를 잘 근사화 함을 알 수 있다. 반면 고차모드에서는 실제의 modal damping ratio가 추정된 값에 비하여 비교적 큰

값을 나타내고 있다. 하지만, 실제의 토목구조물에서는 60Hz보다 작은 저차모드가 구조물의 거동에 지배적인 역할을 하기 때문에, 추정된 시스템 변수들은 실제의 구조물의 거동을 잘 근사한 것으로 판단된다.

감쇠 특성을 이미 알고 있는 값으로 가정하고 SI기법을 적용한 경우에는 추정된 축강성이 의미 없는 결과를 주었다. 이 경우에는 Rayleigh damping 계수는 초기값으로 고정을 한 상태로 역해석을 실시하였다. 초기 시간스텝에서는 최적화 과정에서 30번의 iteration동안에도 해가 수렴하지 않았다. 이것은 damping에 의한 에너지의 소산이 감쇠특성의 조정이 없이 구조물의 강성에 의해서만 조정이 되기 때문에 적절히 조정이 되는 것이 불가능하기 때문이다. 그러므로, 감쇠특성은 기지의 값이 아닌 미지의 값으로 생각하여 SI 기법에 의해서 강성과 함께 추정되어야 한다.

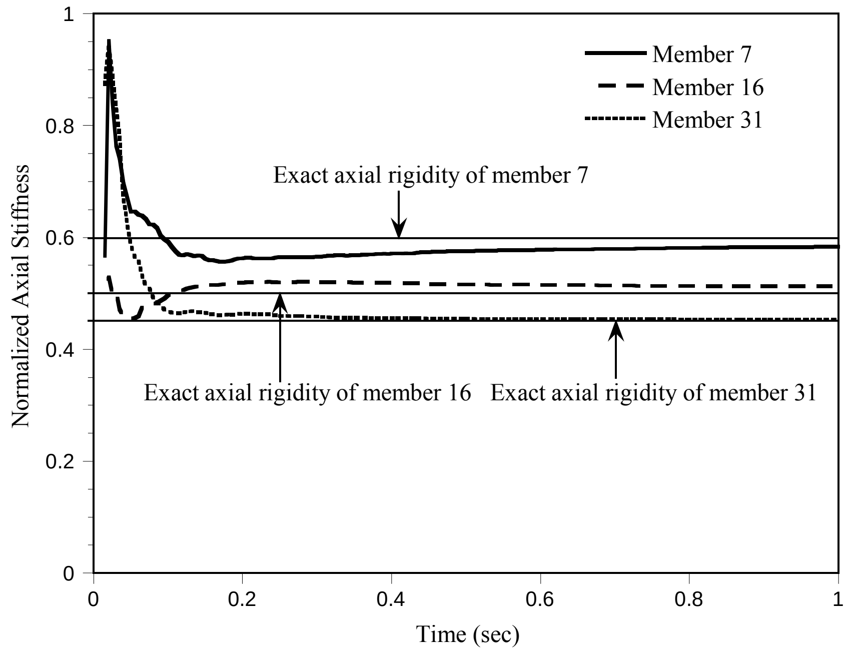

그림 4.2 손상을 입은 부재의 축강성의 변화

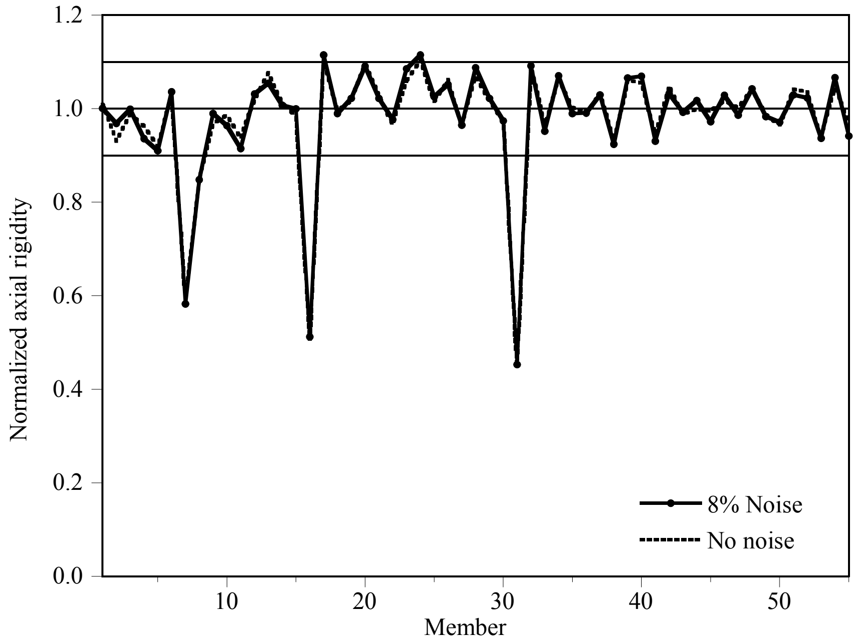

그림 4.3 마지막 시간 $\tau = 1.0$ sec 일때 모든 부재의 추정된 물성치

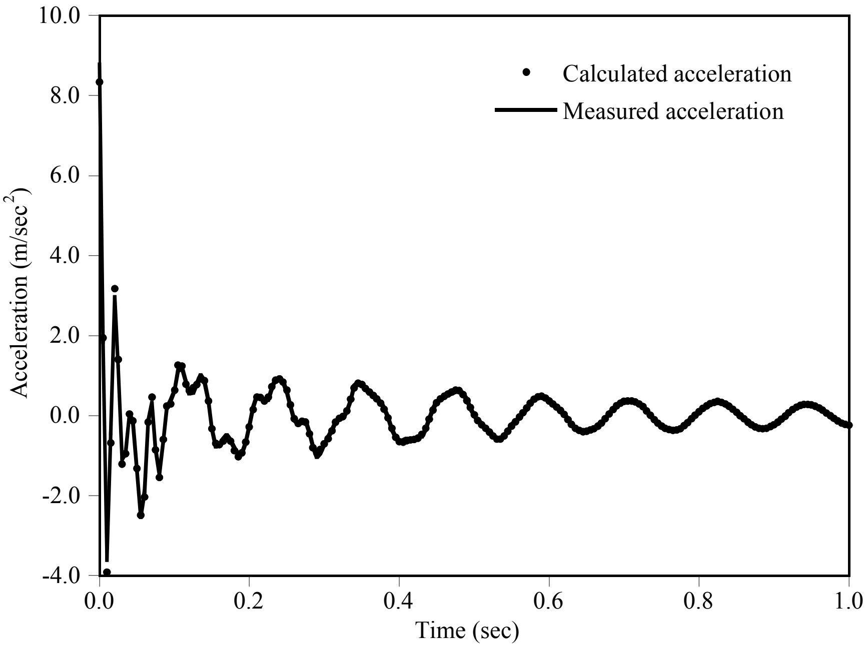

그림 4.4 왼쪽 경간의 중앙에서 측정된 가속도와 계산된 가속도

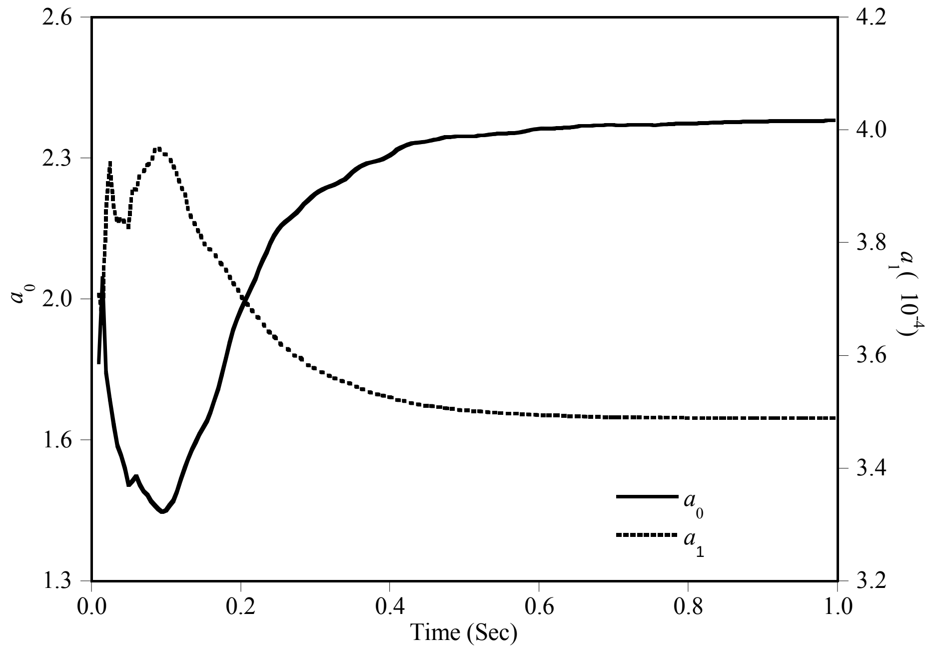

그림 4.5 시간에 따른 Rayleigh damping 계수의 변화

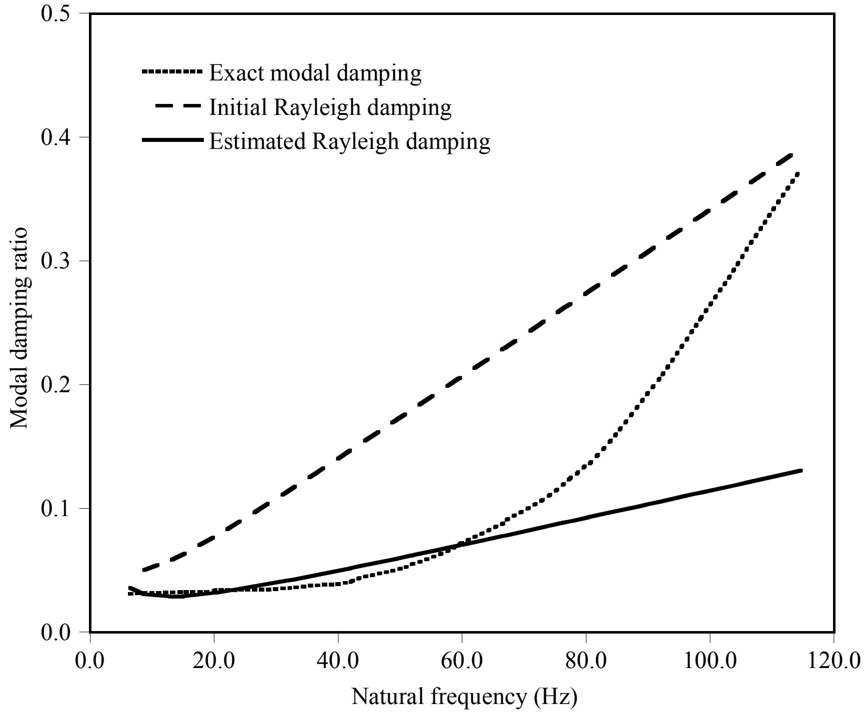

그림 4.6 마지막 시간 $\tau = 1.0$ sec일 때 추정된 modal damping ratio

4.1.2 L_1-Regularization 기법을 적용한 경우

제안된 time-domain SI 기법을 이용하여 1초 동안 손상을 입은 구조물의 시스템 변수 추정을 하였다. 정규화 함수는 L_1-Regularization function을 사용하였다. Truncation number는 30을 사용하였다.

그림 4.7은 손상을 입은 부재의 축강성의 시간에 따른 변화를 보여준다. 손상을 입은 부재의 추정된 시스템 변수 값이 시간이 지남에 따라서 실제의 값에 수렴해 가는 것을 볼 수 있다. L_2-Regularization function을 사용했을 때는 시간에 따른 시스템 변수의 변화가 부드러운 곡선을 나타내는 것과 달리 시간에 따른 시스템 변수의 변화가 급격하게 일어나고 수렴 속도는 더 빠른 것을 알 수 있다. 시스템 변수의 시간에 따른 변화를 제외하고는 다른 결과들은 L_2-Regularization function을 사용했을 때와 비슷한 결과를 보여준다. 그 이유는 정규화 함수가 한정한 해의 공간이 시스템 변수의 시간에 따른 변화에 대해서만 적용이 되기 때문이다. 따라서 시스템 변수의 시간에 대한 변화는 두가지 방법의 특징을 잘 보여주지만 다른 함수공간에 대해서는 비슷한 결과를 나타낸다. 그림 4.8은 마지막 시간스텝 τ =1.0 sec에서 모든 부재의 축강성을 나타낸다. 그

림 4.7와 그림 4.8의 수직축은 각 부재의 초기 축강성에 대해서 normalize된 값을 나타낸다. 제안한 SI 기법이 손상된 부재를 잘 찾아내고 또한 그 정도까지도 정확하게 추정하고 있다. 추정된 축강성은 52개의 손상을 입지 않은 부재에 중에서 47개는 ±10%의 범위 안에서 진동하고 있고, 5개는 10%이상의 진동을 하고 있다. 그러나 손상을 입은 부재의 축강성이 손상을 입지 않은 부재에 비교하여 훨씬 작기 때문에 손상을 입은 부재를 찾아낼 수 있다. 그림 4.9은 왼쪽 경간 중앙에서 측정된 가속도와 마지막 시간스텝에서 추정된 시스템 변수를 이용하여 계산된 가속도를 비교한 것이다. 계산된 가속도가 측정된 가속도와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 그림 4.10은 시간에 따른 Rayleigh damping 계수의 변화를 나타낸다. a_1이 a_0에 비해 훨씬 중요한 역할을 하기 때문에 a_0의 변화는 크게 일어나지 않고 a_1이 변화함으로써 감쇠특성을 추정하는 것을 알 수 있다. 또한 a_1은 다른 시스템 변수에 비하여 수렴속도가 훨씬 느리다. 그림 4.11은 마지막 시간스텝에서 식 (2.55)을 이용하여 계산된 modal damping ratio의 변화를 나타낸다. 추정된 Rayleigh damping을 이용하여 계산된 modal damping ratio가 약 60Hz (22차 모드)의 범위까지 실제의 modal damping ratio를 잘 근사화

함을 알 수 있다. 이 결과 역시 L_2-Regularization function을 사용했을 때와 비슷한 결과를 보여준다.

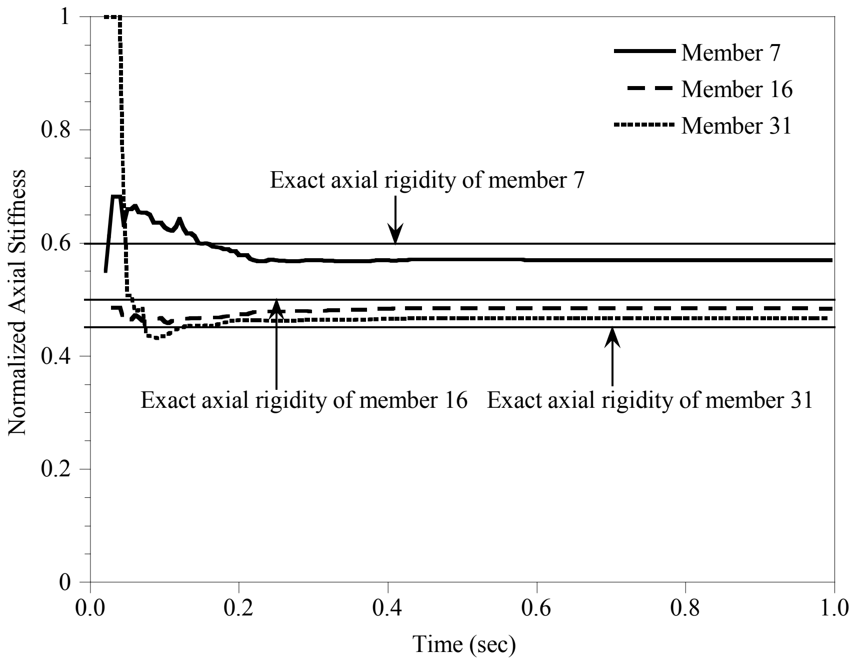

그림 4.7 손상을 입은 부재의 축강성의 변화

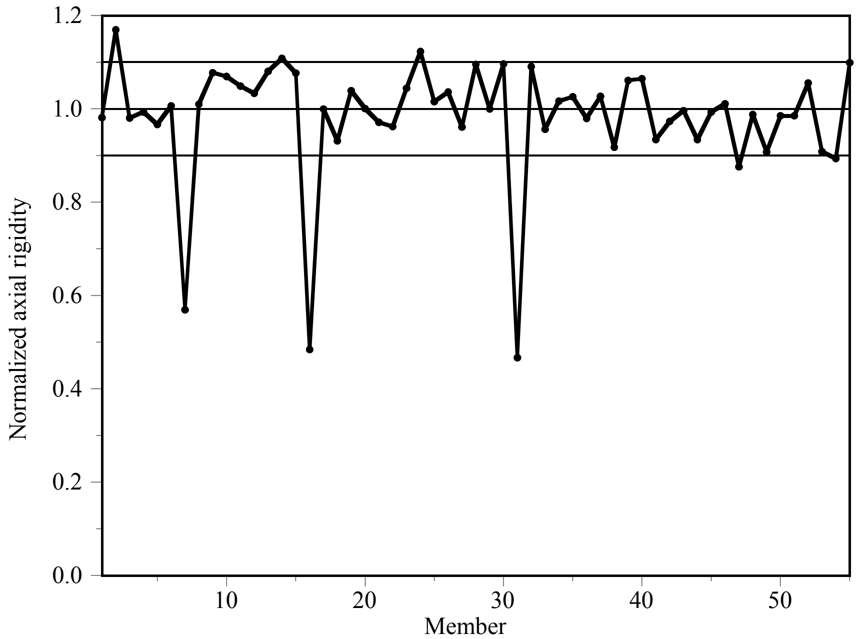

그림 4.8 마지막 시간 $\tau = 1.0$ sec 일때 모든 부재의 추정된 물성치

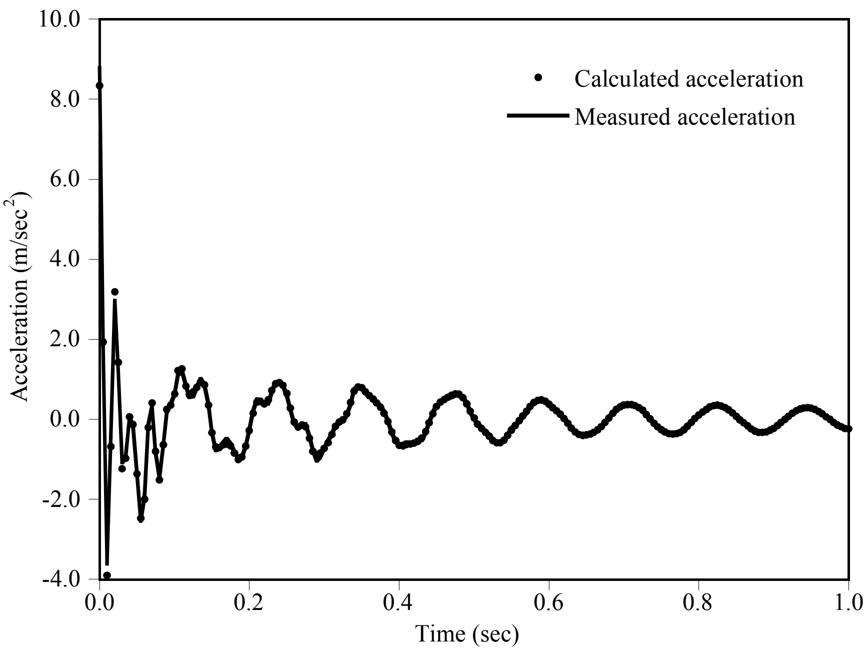

그림 4.9 왼쪽 경간의 중앙에서 측정된 가속도와 계산된 가속도

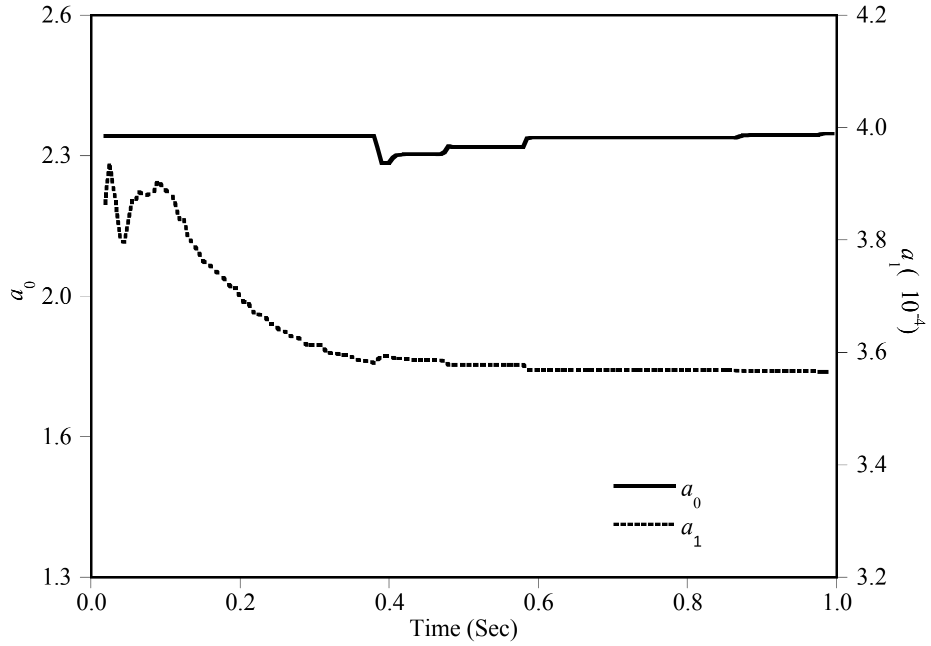

그림 4.10 시간에 따른 Rayleigh damping 계수의 변화

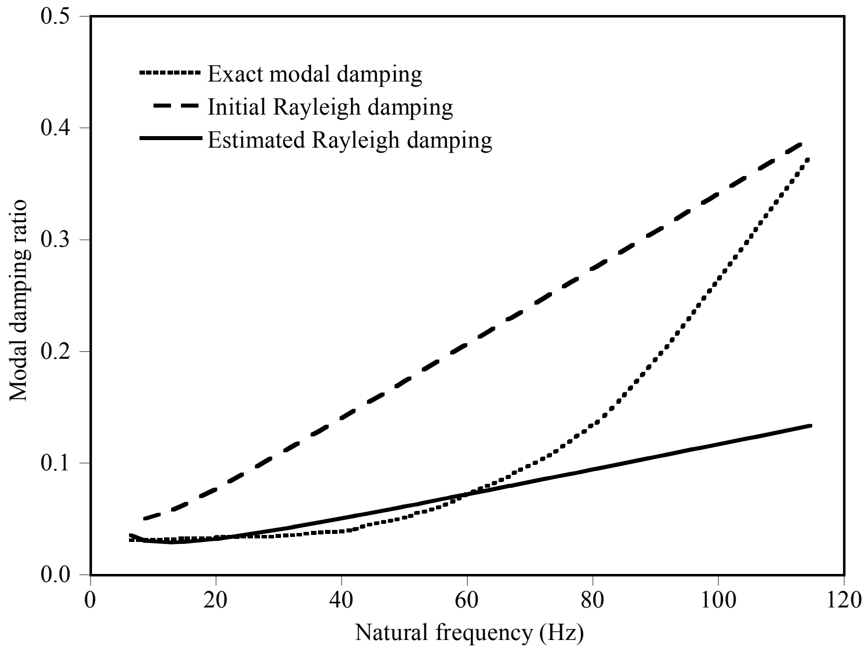

그림 4.11 마지막 시간 $\tau = 1.0$ sec일 때 추정된 modal damping ratio

4.2 시간에 따라서 시스템 변수가 변화하는 경우

- **Time Windowing Technique**을 사용한 경우

앞의 예제를 통하여 L_2-Regularization function을 사용했을 때는 시스템 변수의 시간에 따른 변화가 연속적이고 부드러운 반면에 L_1-정규화 함수를 사용했을 때는 시스템 변수의 시간에 따른 변화가 급격하게 변화하는 것을 알 수 있었다. Time Windowing Technique을 이용하여 추정하고자 하는 것은 시스템 변수의 시간에 따른 급격한 변화이다(그림 3.1(b)). 따라서 이 기법을 사용할 경우에는 반드시 L_1-Regularization function을 사용해야 한다. 그렇지 않으면 찾고자 하는 해가 정규화 함수에 의해서 한정된 해공간에 존재하지 않기 때문에 해가 발산하거나 의미 없는 해가 나올 수 있다.

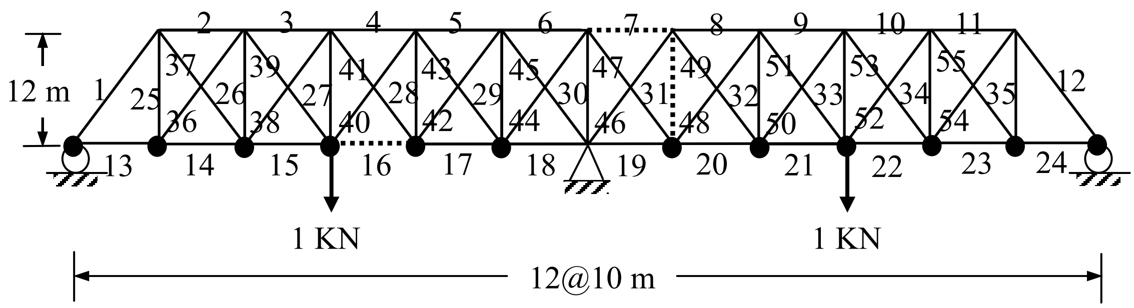

그림 4.12 2경간 연속 트러스교

앞의 예제와 마찬가지로 그림 4.12에 나오는 2경간 연속 평면 트러스교를 통하여 수치해석을 하였다. 재료의 성질은 다음과 같다. Young's modulus = 210 GPa, Specific mass = 7850Kg/m^{3}은 전체 부재에 대하여 동일하다. 상부, 하부, 수직, 사재의 단면은 각각 250cm^2, 300cm^2, 200cm^2, 220cm^{2}이다. 다음 구조물의 natural frequency는 6.6Hz 부터 114.7Hz까지의 범위를 갖는다. Damage에 따른 stiffness의 감소는 7, 16, 31번 부재에 각각 40%, 50%, 33 % 일어났다고 simulation 하였다. 단 초기시간부터 0.5초까지는 손상이 발생하지 않고, 시간이 0.5초가 되는 순간 손상이 발생하여 각각의 부재가 위에 설명한대로 축강성이 감소하게 된다. 손상을 입은 부재는 그림에서 점선으로 표시되었다. 그림 4.12에서와 같이 1KN의 하중을 갑자기 제거한 후 free vibration을 통한 가속도를 사용하였다. 측정 점은 truss의 아래 부분의 12개의 node에서 측정하였고 0초부터 2.0초까지의 수평, 수직 방향의 가속도를 사용하였다. 측정가속도는 modal damping을 통하여 generate하였다. 역해석을 할 때는 Rayleigh damping을 통하여 해석하였다. 계산 가속도를 얻는데 사용된 damping ratio는 그림 4.17에 나와있다. 초기의 Rayleigh damping ratio는 a_0 =2.32, a_1 =1.05×10^{-3} 이다. 초기의 Rayleigh damping ratio에 의해 계산된 modal damping ratio는 그림 4.17에 나와있다.

제안된 time-domain SI 기법을 이용하여 2초 동안 손상을 입은 구조물의 시스템 변수 추정을 하였다. 정규화 함수는 L_1-Regularization function을 사용하였다. 측정오차는 3%, truncation number는 12, sampling rate 0.01초이다. Time window의 크기는 0.2초이다. 그림 4.13은 손상을 입은 부재의 축강성의 시간에 따른 변화를 보여준다. 손상을 입은 부재의 추정된 시스템 변수 값이 0.5초까지는 초기의 값을 유지하다가 0.5초 이후 감소하여 시간이 지남에 따라서 실제의 값에 수렴해 가는 것을 볼 수 있다. 하지만 7번 부재와 16번 부재는 실제의 값에 수렴해 가는 반면에 31번 부재는 초기의 강성을 그대로 유지하고 있다. 그 이유는, time window가 transient 영역을 통과할 때 모델링 오차가 상당히 크게 발생하는데 이 때문에 발생하는 불안정성을 제거하기 위해서는 truncation number가 더 줄여서 보다 더 증가된 오차성분을 잘라내야 한다. 그런데 31번 부재는 수직재로서 민감도가 상당히 작은 부재이다. 따라서 truncation number를 줄일 때 오차성분과 함께 정보가 잘려 나가게 된다. 이 때문에 31번 부재의 손상을 추정을 할 수가 없었다. 손상을 입지 않은 부재인 1번 부재를 원래의 값을 잘 유지하고

있는 것을 알 수 있다. L_1-Regularization function을 사용하였기 때문에 시스템 변수의 시간에 대한 변화는 급격하게 일어나는 것을 알 수 있다. 그림 4.14은 마지막 시간스텝(t =2.0sec)에서 모든 부재의 축강성을 나타낸다. 그림 4.13와 그림 4.14의 수직축은 각 부재의 초기 축강성에 대해서 normalize된 값을 나타낸다. 제안한 SI 기법이 7번, 16번 두개의 부재에 대해서는 손상된 정도를 잘 찾아내고 있다. 하지만 31번 부재는 전술한 바와 같이 정보가 잘려나가서 손상을 탐지하지 못했다. 추정된 축강성은 52개의 손상을 입지 않은 부재에 중에서 48개는 ±10%의 범위 안에서 진동하고 있고, 4개는 10%이상의 진동을 하고 있다. 그러나 손상을 입은 부재의 축강성이 손상을 입지 않은 부재에 비교하여 훨씬 작기 때문에 손상을 입은 부재를 찾아낼 수 있다. 그림 4.15은 왼쪽 경간 중앙에서 측정된 가속도와 마지막 시간스텝에서 추정된 시스템 변수를 이용하여 계산된 가속도를 비교한 것이다. 계산된 가속도가 측정된 가속도와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 그림 4.16은 시간에 따른 Rayleigh damping 계수의 변화를 나타낸다. a_1 이 a_0 에 비해 훨씬 중요한 역할을 하기 때문에 a_0 의 변화는 크게 일어나지 않고 a_1 이 변화함으로써 감쇠특성을 추정하는 것을 알 수 있다. 따라

서 감쇠특성에 중요한 역할을 하는 a_1 의 변화로서 감쇠특성을 파악할 수 있다. 손상이 발생하기 전에는 비교적 작은 damping 값을 갖다가 손상이 발생한 시점인 0.5초에는 damping 값이 상당히 큰 값을 갖고 일정시간이 지나면 안정화 되어 일정한 값을 갖게 된다. 손상이 발생한 후의 damping 값이 손상이 발생하기 전의 damping 값보다 큰 값을 갖는 것은 손상이 발생한 후의 에너지의 소산이 더 크기 때문이다. 그림 4.17은 마지막 시간스텝에서 식 (2.55)을 이용하여 계산된 modal damping ratio의 변화를 나타낸다. 추정된 Rayleigh damping을 이용하여 계산된 modal damping ratio가 약 60Hz (22차 모드)의 범위까지 실제의 modal damping ratio를 잘 근사화 함을 알 수 있다. 반면 고차모드에서는 실제의 modal damping ratio가 추정된 값에 비하여 비교적 큰 값을 나타내고 있다. 이 결과는 time window를 사용하지 않은 경우와 큰 차이가 없다.

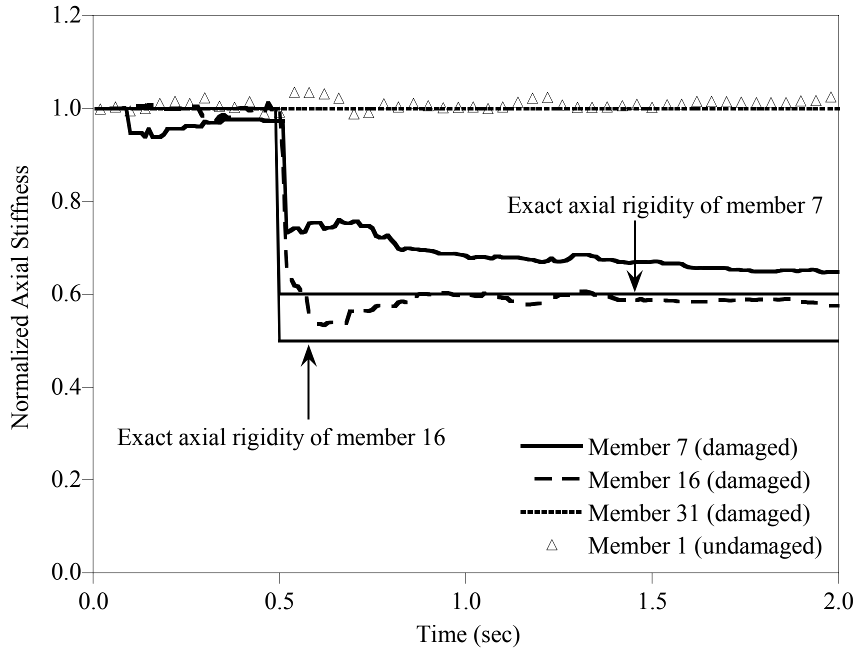

그림 4.13 손상을 입은 부재와 1번 부재의 축강성의 변화

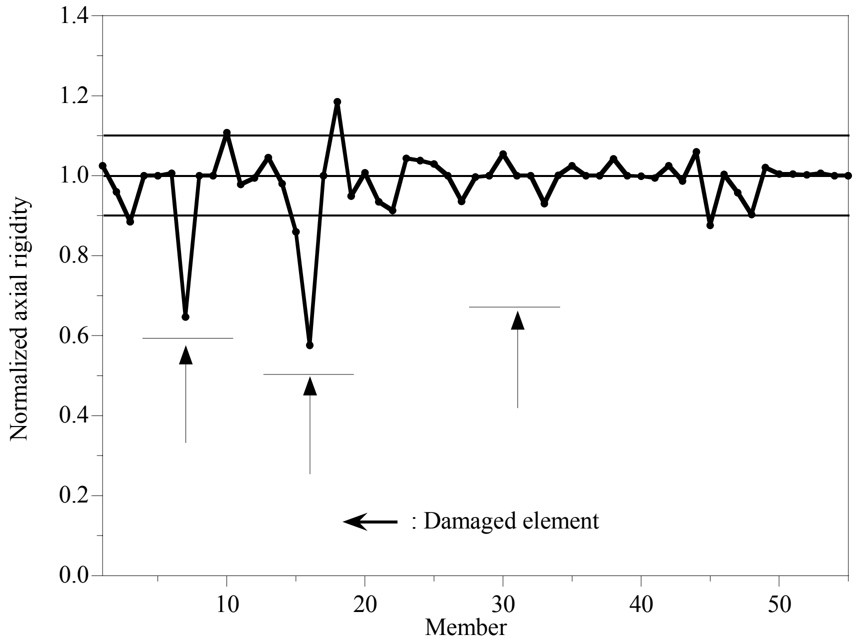

그림 4.14 마지막 시간 $t = 2.0$ sec 일때 모든 부재의 추정된 물성치

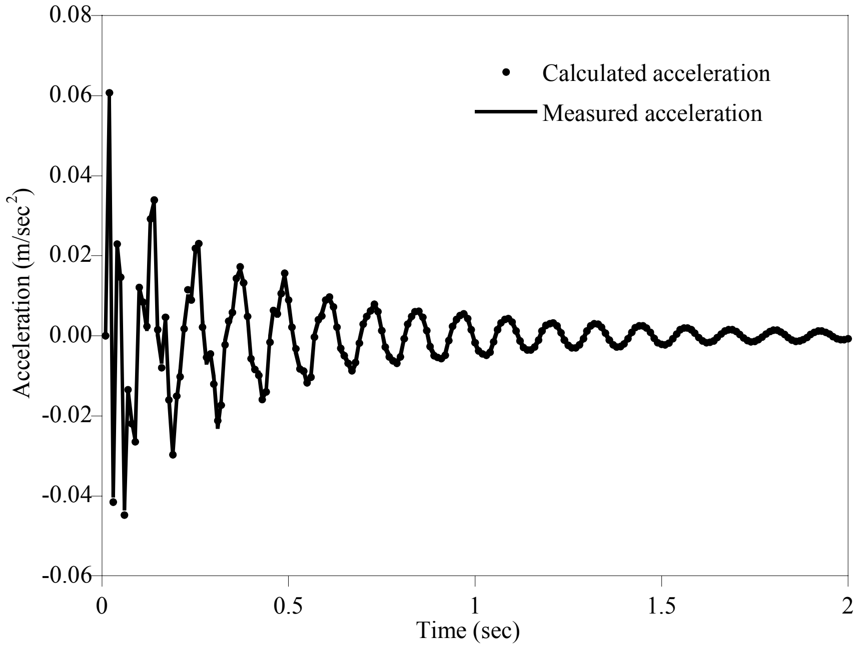

그림 4.15 왼쪽 경간의 중앙에서 측정된 가속도와 계산된 가속도

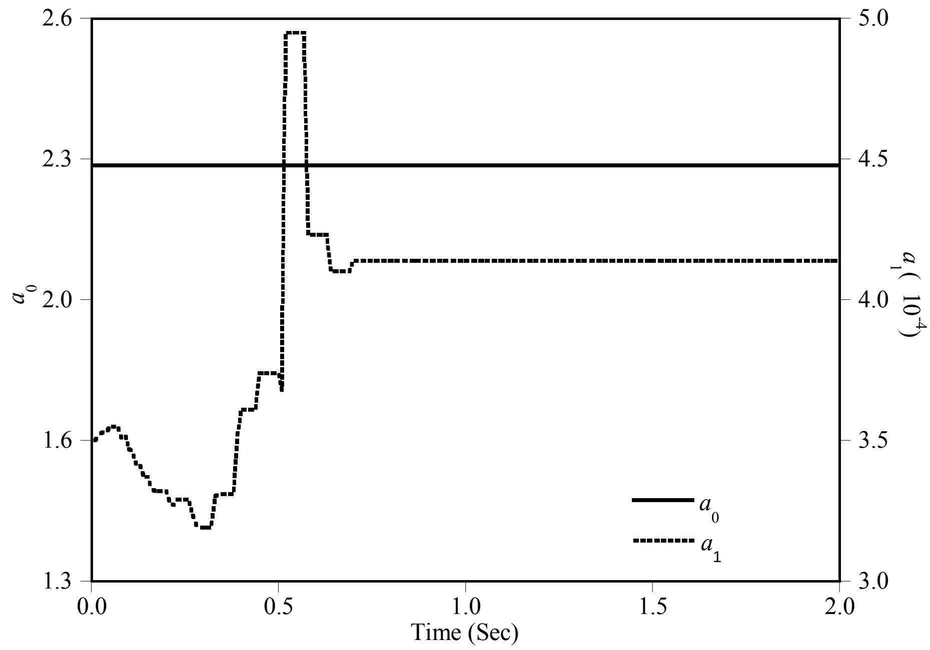

그림 4.16 시간에 따른 Rayleigh damping 계수의 변화

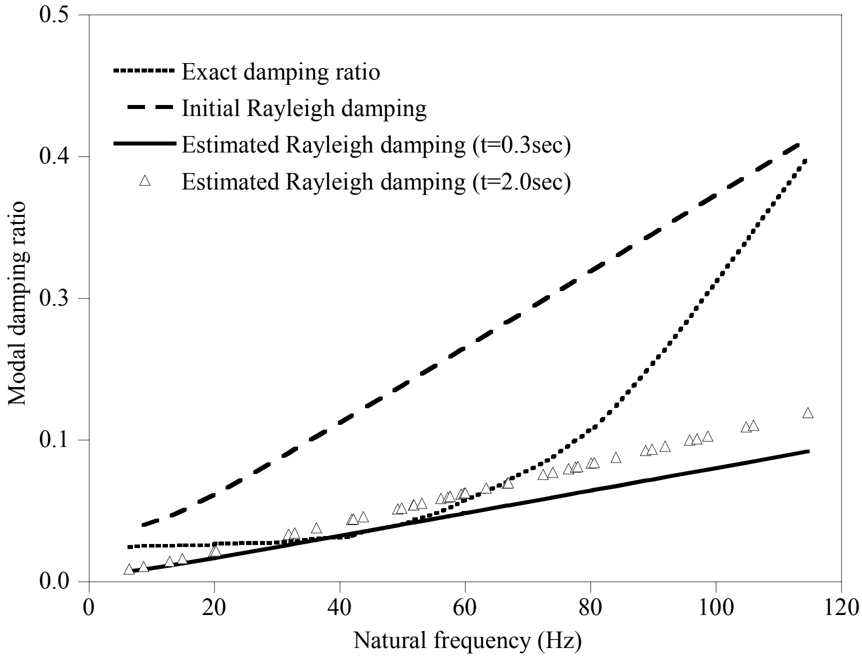

그림 4.17 마지막 시간 $t = 2.0$ sec일 때 추정된 modal damping ratio

3장에서 설명한대로 Time Windowing Technique을 사용하는데 중요한 역할을 하는 몇 가지의 요소가 있다. 중요한 요소로는 window size, sampling rate, truncation number, measurement error, weighting factor등이 있다. 이 예제에서는 window size는 가장 저차 모드가 window안에 약 두 주기가 포함이 되도록 고려하여 결정하였다. Window의 크기는 너무 작은 경우에는 데이터 정보량이 너무 적어져 rank가 부족하게 되고 해의 불안정성이 발생할 수 있고 너무 큰 경우에

는 transient 영역이 너무 커져서 수렴하는 시간이 오래 걸리고 모델링 오차가 크게 발생하게 된다. 하지만 window 크기에 대한 논의는 이 연구에는 고려하지 않았다. 여러 가지 요인들에 의한 영향을 파악하기 위해서 다음의 지수를 도입하였다.

$$I_e = \left\| \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\mathbf{x}_0} \right\|_1 \tag{4.1}$$

위의 지수는 손상이 없는 부재에 대해서 계산하였을 때는 해의 안정성을 나타낼 수 있고, 손상이 있는 부재에 대해서 계산하였을 때는 손상 정도를 얼마나 정확하게 파악했는지를 나타낼 수 있다.

4.2.1 Truncation number의 영향

Truncation number가 너무 작으면 너무 많은 정보가 잘려나가기 때문에 정확한 손상 정도를 파악하기가 어렵고 너무 크면 특이치가 작은 부분의 해 성분까지 포함이 되어 작은 측정오차에도 해가 심하게 흔들리는 불안정성을 지니게 된다. 따라서 적절한 truncation number를 결정하는 것을 해의 결과에 중요한 역할을 한다. 이 연구에서는 최적 truncation number를 결정하는 방법에 대한 논의

는 없다.

그림 4.18과 그림 4.19은 3가지의 truncation number에 대해서 역해석을 실시한 결과이다. Sampling rate는 0.01초이고 측정오차는 0%이다. 그림 4.18은 시간에 따른 16번 부재의 강성 변화를 나타내고 그림 4.19은 마지막 시간스텝(t=2.0sec)일 때 모든 부재에서의 강성 변화를 나타낸다. Truncation number가 8일 때는 7, 16번 부재의 정보가 잘려나가서 손상을 파악하지 못하였다. 또한 15번 부재의 강성이 떨어지는 것으로 나타났다. 또한 truncation number가 30일 때는 손상 입은 부재를 파악하는 것은 truncation number 12일 때와 비슷하지만 손상을 입지 않은 부재에서 결과가 많이 진동을 하는 것을 볼 수 있다. 따라서 이 연구에서는 최적 truncation number를 12로 결정하였다. 표 4.1는 각 경우에 대한 지수 I_e값을 나타낸다.

표 4.1 Truncation number의 변화에 따른 I_e값

Truncation#8		Truncation#12		Truncation#30	
Undamaged	Damaged	Undamaged	Damaged	Undamaged	Damaged
0.0461	0.6930	**0.0310**	**0.2600**	0.0770	0.2690

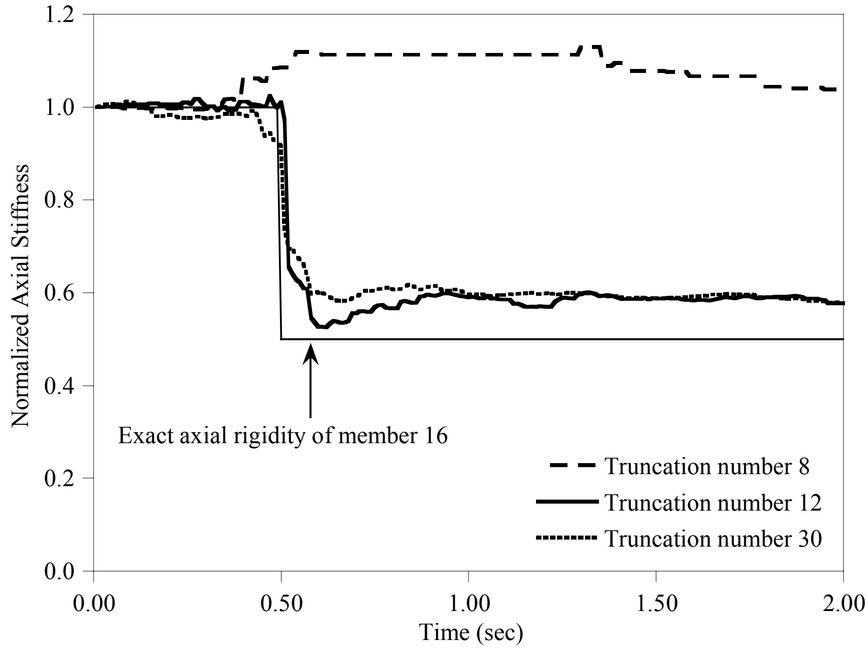

그림 4.18　16번 부재의 축강성의 변화

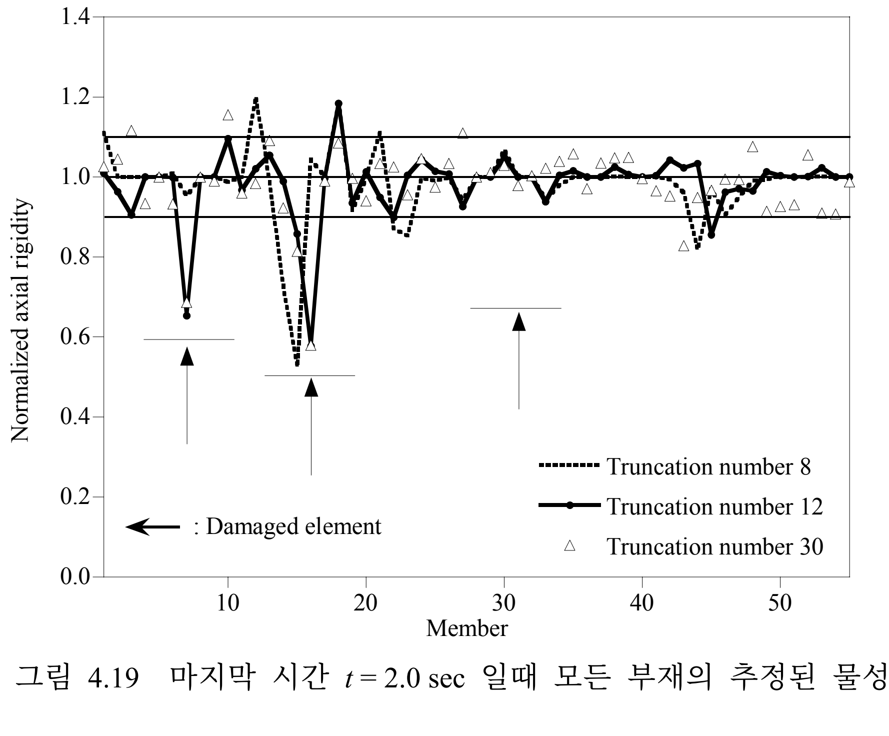

그림 4.19　마지막 시간 $t = 2.0$ sec 일때 모든 부재의 추정된 물성치

4.2.2 측정오차의 영향

그림 4.20과 그림 4.21은 오차가 없는 경우와 오차가 3% 있는 경우에 대해서 역해석을 실시한 결과이다. Sampling rate는 0.01초이고 truncation number는 12이다. 그림 4.20은 시간에 따른 7번 부재의 강성 변화를 나타내고 그림 4.21은 마지막 시간스텝(t=2.0sec)일 때 모든 부재에서의 강성 변화를 나타낸다. 측정오차가 존재하는 경우에 전체적으로 해가 좀 더 진동하고 부정확한 결과를 준다. 하지만 모델링 오차가 상당히 크기 때문에 측정오차에 의해서 발생하는 불안정성은 비교적 작은 편이다. 표 4.2는 각 경우에 대한 지수 I_e값을 나타낸다.

표 4.2 측정 오차의 변화에 따른 I_e값

Measurement Error (0%)		Measurement Error (3%)	
Undamaged	Damaged	Undamaged	Damaged
0.0107	0.2598	0.0327	**0.2560**

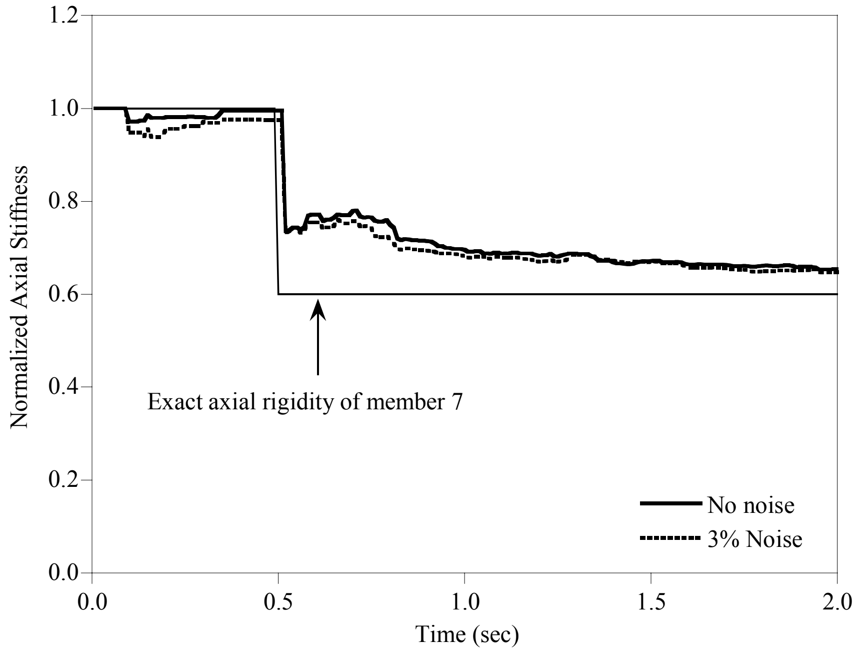

그림 4.20 7번 부재의 축강성의 변화

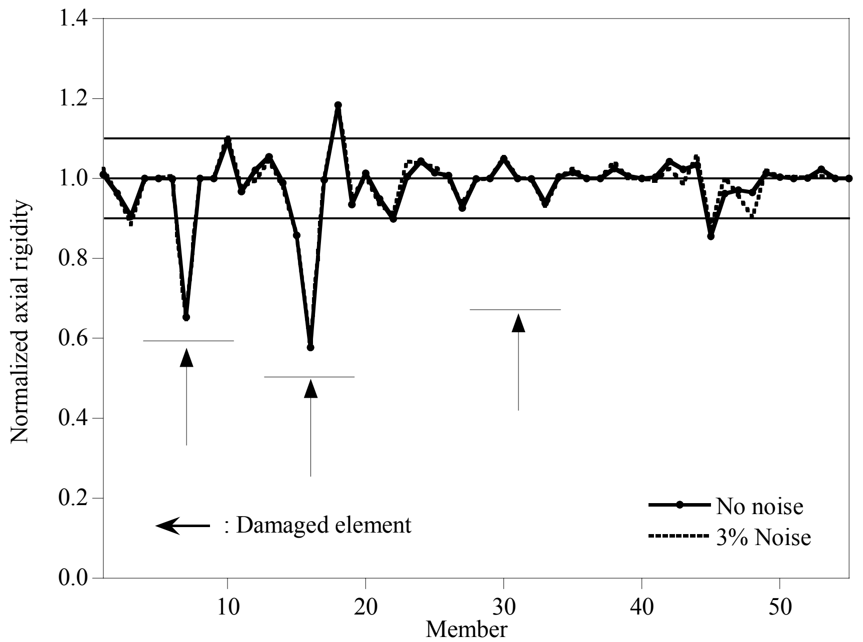

그림 4.21 마지막 시간 $t = 2.0$ sec 일때 모든 부재의 추정된 물성치

4.2.3 Sampling rate의 영향

Sampling rate가 너무 작으면 고 주파수 영역의 성분들이 응답에 포함이 된다. 그런데 오차성분들은 주로 고 주파수 영역에 포함이 되어 있기 때문에 시스템 변수들이 이 오차성분들을 맞추기 위하여 변하게 된다. 따라서 sampling rate가 너무 작으면 오차성분의 영향을 많이 받게 된다. 또한 sampling rate가 너무 크면 time window안에 너무 적은 양의 정보가 포함이 되어 정확한 변수추정이 어렵게 된다.

그림 4.22과 그림 4.23은 3가지의 sampling rate에 대해서 역해석을 실시한 결과이다. Truncation number는 12이고 측정오차는 0%이다. 그림 4.22은 시간에 따른 16번 부재의 강성 변화를 나타내고 그림 4.23은 마지막 시간스텝(t=2.0sec)일 때 모든 부재에서의 강성 변화를 나타낸다. Sampling rate가 0.01초 일 때 가장 안정적이고 정확한 결과를 보여준다. 따라서 이 연구에서는 sampling rate를 0.01초로 결정하였다. 표 4.3는 각 경우에 대한 지수 I_e값을 나타낸다.

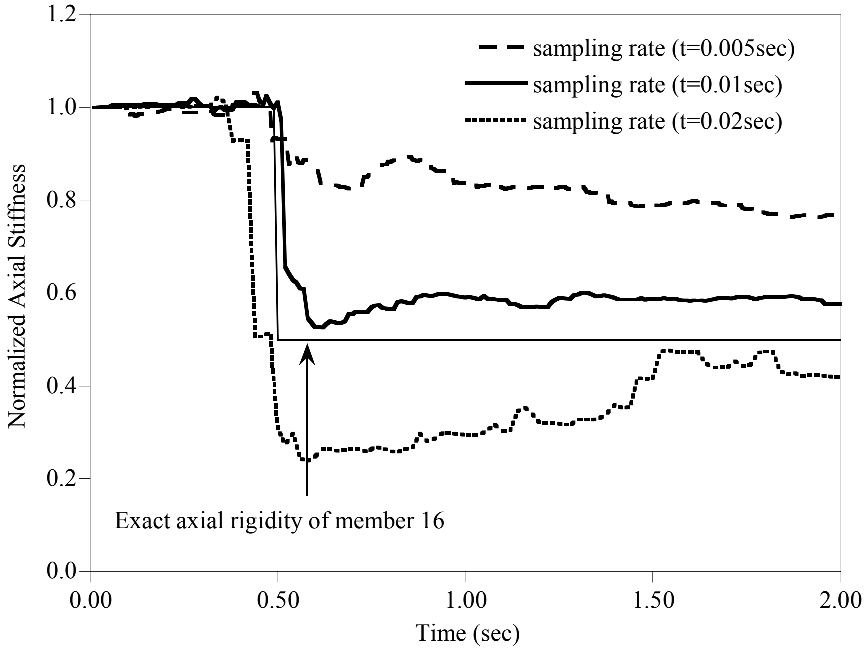

그림 4.22 16번 부재의 축강성의 변화

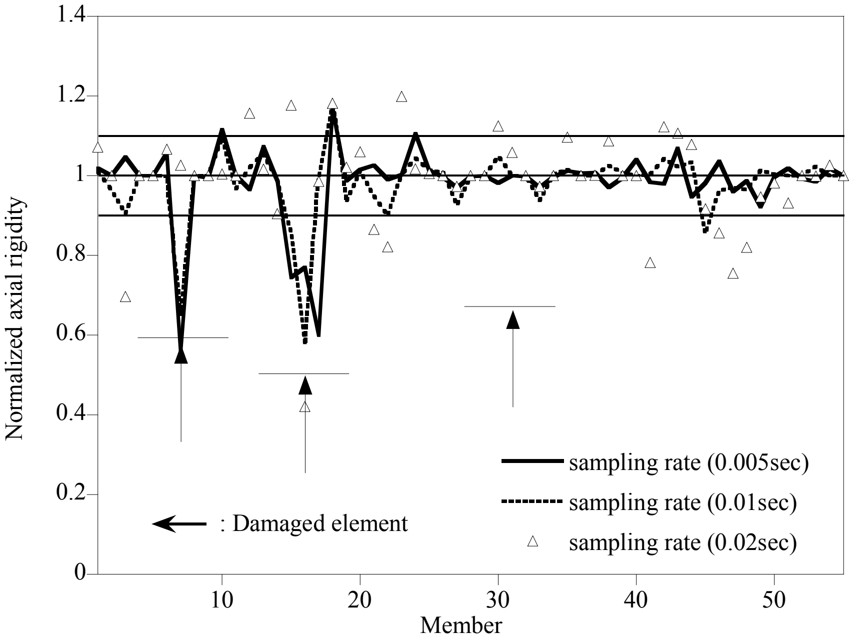

그림 4.23 마지막 시간 $t = 2.0$ sec 일때 모든 부재의 추정된 물성치

표 4.3 Sampling rate의 변화에 따른 I_e값

Sampling Rate (0.005sec)		Sampling Rate (0.01sec)		Sampling Rate (0.02sec)	
Undamaged	Damaged	Undamaged	Damaged	Undamaged	Damaged
0.0379	0.3623	**0.0310**	**0.2599**	0.0689	0.5052

4.2.4 Weighting factor의 영향

TimeWindowing 기법에서는 time window가 transient region을 지나갈 때 발생하는 모델링 오차에 의해서 초기값의 오차가 크게 발생하게 된다. 따라서 초기값의 오차로 인하여 time window내에서 축차적으로 계산되는 가속도는 모두 오차를 포함할 수 밖에 없고 초기값을 정확하게 추정하는 것이 해의 정확성을 높이는데 중요한 역할을 한다. Time window내에서 초기값에 weighting factor를 가해줌으로써 time window내의 초기 가속도에 더 비중을 주도록 하였다.

그림 4.24과 그림 4.25은 3가지의 sampling rate에 대해서 역해석을 실시한 결과이다. Truncation number는 12이고 sampling rate는 0.01초이고 측정오차는 0%이다. 그림 4.24은 시간에 따른 16번 부재의 강성 변화를 나타내고 그림 4.25은 마지막 시간스텝(t=2.0sec)일 때 모든 부재에서의 강성 변화를 나타낸다. Weighting factor를 5,4,3,2,1의 순으로 가했을 때 가장 안정적인 결과를 보였고,

손상 입은 부재의 시스템 변수추정은 weighting factor가 가해지지 않았을 때 가장 정확한 결과를 보여주었다. 표 7.4는 각 경우에 대한 지수 I_e값을 나타낸다.

표 4.4 Weighting factor의 변화에 따른 I_e값

No weighting factor		Weighting factor(5,4,…,1)		Weighting factor(10,9,…,1)	
Undamaged	Damaged	Undamaged	Damaged	Undamaged	Damaged
0.0310	0.2599	0.0302	0.2631	0.0612	0.5230

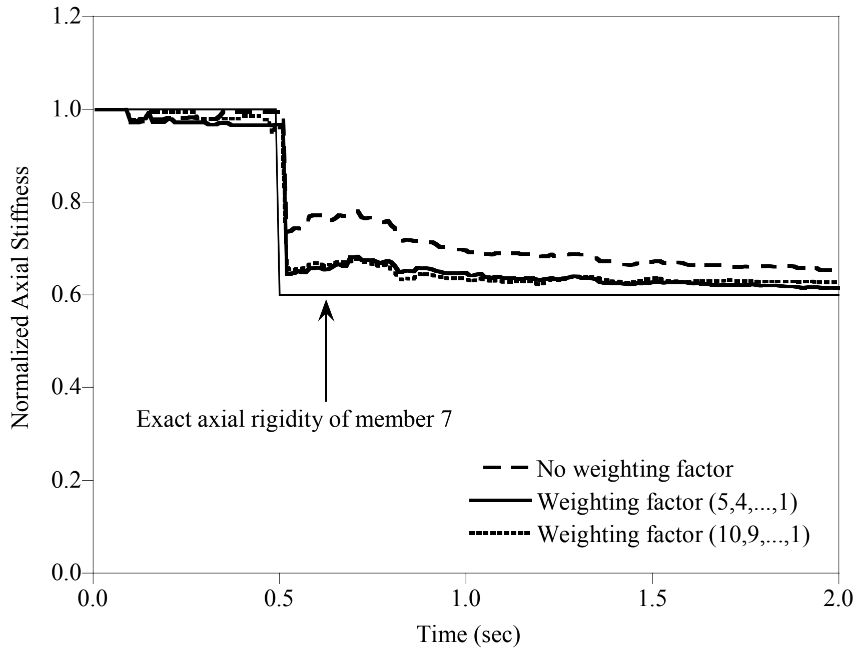

그림 4.24 7번 부재의 축강성의 변화

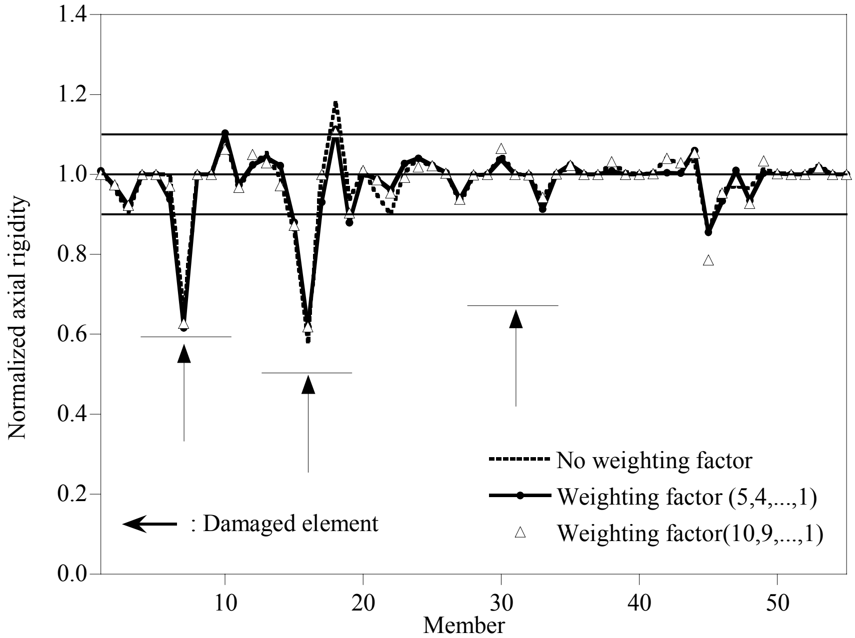

그림 4.25 마지막 시간 $t = 2.0$ sec 일때 모든 부재의 추정된 물성치

V. 결론

측정된 가속도 응답을 이용하는 Time-domain SI 기법을 제안하였다. 시스템 변수로는 구조물의 강성뿐만 아니라 감쇠 특성까지도 시스템 변수로 고려하였다. Rayleigh damping 모델이 구조물의 감쇠특성을 추정하기 위하여 사용되었다.

오차함수로는 수학적 모델에 의해서 계산된 가속도와 측정된 가속도의 최소자승오차로 정의하였다. SI기법에 존재하는 역해석의 불안정성을 경감시키기 위하여 정규화 기법이 사용되었다. 정규화 기법으로는 시스템 변수의 시간에 대한 변화의 2-norm의 시간에 대한 적분을 정규화 함수로 정의하는 L_2-Regularization 기법과 시스템 변수의 시간에 대한 변화의 1-norm의 시간에 대한 적분을 정규화 함수로 정의하는 L_1-Regularization 기법이 사용되었다. L_2-Regularization 기법에서 최적 정규화 계수를 결정하기 위해서 GMS기법이 사용되었고, 시스템 변수의 시간에 대한 변화가 연속적이고 부드러운 경우에 적합하다. L_1-Regularization 기법의 적용을 위해 TSVD (Truncated Singular Value Decomposition)기법이 사용되었고, 시스템 변수의 시간에 대한 변화가 급격하게 일어나는 경우에 적합하다.

감쇠특성을 미지수로 포함하지 않는 경우에는 강성특성만이 변화하여 측정 가속도를 맞춰야 하기 때문에 의미 없는 결과를 산출했다. 실제 구조물의 감쇠 특성을 정확하게 파악하는 것은 불가능하지만 가능한 한 실제 구조물의 감쇠특성을 근사화 하는 것은 매우 중요하다.

시간에 따른 시스템 변수의 변화를 추정하기 위하여 Time Windowing Technique을 제안하였다. 시스템 변수가 시간에 따라서 급격하게 변화하기 때문에 이 기법을 사용할 때는 반드시 L_1-Regularization 기법을 사용해야 한다.

2경간 연속 평면 트러스교를 통하여 제안한 방법의 타당성을 검증하였다. 제안한 방법은 적절한 손상 탐지를 하는 것을 검증하였다. 또한 L_2-Regularization function은 정규화 함수로 사용했을 경우에는 시스템 변수가 시간에 따라서 부드럽고 연속적으로 변하고, L_1-Regulaization function을 정규화 함수로 사용했을 경우에는 시스템 변수가 시간에 따라서 급격하게 변하는 것을 확인할 수 있었다. Time Windowing 기법을 사용했을 때는 시스템 변수의 변화가 손상이 일어난 후에 급격히 발생하여 실제의 시스템 변수 값에 수렴해 가는 것을 확인하였다. 또한 몇 가지 요인들에 의하여 해의 안정성과 정도를 높일 수

있는 것을 알 수 있었다.

제안된 방법은 동적 실험을 통한 구조물의 손상탐지나 구조물의 동 특성 추정에 손쉽게 적용할 수 있을 것으로 판단된다.

참고문헌

[1] K.D. Hjelmstad, S. Shin, Damage Detection and Assessment of Structures from static response, Journal of Engineering Mechanics, ASCE 123(6) (1997) 568-576.

[2] H.S. Lee, Y.H. Kim, C. J. Park, H.W. Park, A new spatial regularization scheme for the identification of geometric shapes of inclusions in finite bodies, International Journal for Numerical Methods in Engineering 46(7) (1999) 973-992.

[3] I. Yeo, S. Shin, H.S. Lee, S.P. Chang, Statistical damage assessment of framed structures from static responses, Journal of Engineering Mechanics, ASCE 126(4) (2000) 414-421.

[4] H.W. Park, S. Shin, H.S. Lee, Determination of optimal regularization factor for system identification of linear elastic continua with the Tikhonov function, International Journal for Numerical Methods in Engineering 51(10) (2001) 1211-1230.

[5] K. D. Hjelmstad, S. Shin, Crack identification in cantilever beam from modal response, Journal of sound and vibration 198(5) (1996) 527-545.

[6] Z.Y. Shi, S.S. Law, L.M. Zhang, Damage localization by directly using incomplete mode shapes, Journal of Engineering Mechanics, ASCE 126(6) (2000) 656-660.

[7] F. Vestouni, D. Capecchi, Damage detection in beam structures based on frequency measurements, Journal of Engineering Mechanics, ASCE 126(7) (2000) 761-768.

[8] J. S. Kang, H.S. Lee, H. M. Koh, J. K. Kim, Damage Assessment of Bridge Structures Using Measured Acceleration Data by a System Identification Scheme, in: Proceedings of 1st International Conference on Bridge Maintenance, Barcelona, July 2002

[9] K. D. Hjelmstad, M. R. Banan, Time-Domain Parameter Estimation Algorithm for Structures I: Computational Aspects, Journal of Engineering Mechanics, ASCE 121(3) (1995) 424-434.

[10] L. Ge, T.T. Soong, Damage Identification through Regularization Method. I: Theory, Journal of Engineering Mechanics, ASCE 124(1) (1998) 103-108.

[11] C.-H. Huang, A non-linear inverse vibration problem of estimating the time-dependent stiffness coefficients by conjugate gradient method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 50 (2001) 1545-1558.

[12] H.D. Bui, Inverse problems in the mechanics of materials : An introduction, CRC Press, Boca Raton,1994.

[13] P.C. Hansen, Rank-deficient and discrete ill-posed problems : Numerical aspects of linear inversion, SIAM, Philadelphia ,1998.

[14] A. K. Chopra, Dynamics of structures : Theory and Applications to Earthquake Engineering, 2nd Edition, Prentice Hall, New Jersey ,2001.

[15] G. H. Golub, C. F. Van Loan, Matrix Computations, 3rd Edition, Johns Hopkins, Baltimore and London ,1996.

[16] D. G. Luenberger, Linear and Nonlinear programming, 2nd Edition, Addison Wesley, Messachusetts ,1989.

[17] H. W. Park, Regularization Techniques in System Identification for Damage

Assessement of Structures, Ph.D. Thesis, Seoul National University, Department of Civil Urban & Geosystem Engineering, Seoul, 2002.

[18] I. Barrondale, F. D. K. Roberts, An improved algorithm for discrete l_1-linear approximation, SIAM J. Numerical Analysis, 10(5), 839-848, 1973

[19] C. R. Vogel, Optimal choice of a truncation level for the truncated SVD solution of linear first kind integral equations when data are noisy, SIAM J. Numerical Analysis, 23(1), 109-117, 1986

[20] V, A, Morozov, Regularization methods for ill-posed problems, M. Stessin, translator, CRC Press, Boca Raton

ABSTRACT

This paper presents a system identification scheme in time domain to estimate stiffness and damping parameters of a structure using measured acceleration. An error function is defined as the time integral of the least-squared error between measured accelerations and calculated accelerations by a numerical model of a structure. Damping parameters as well as stiffness properties of a structure are considered as system parameters. To alleviate the ill-posedness of SI problems two regularization techniques are employed. L_2-Regularization function defined by the L_2-norm of the first derivative of system parameters with respect to time and L_1-Regularization function defined by the L_1-norm of the first derivative of system parameters with respect to time are proposed to alleviate the ill-posed characteristics of inverse problems and to accommodate discontinuities of system parameters in time. In L_2-Regularization scheme, the regularization factor is determined by the geometric mean scheme. In L_1-Regularization scheme, regularization effect is determined by a truncation number of TSVD(Truncated Singular Value Decomposition).

The time window concept is proposed to trace variation of system parameters in time. To represent discontinuity of system parameters in time, L_1-Regularization scheme is employed in time windowing technique. The validity of the proposed method is demonstrated by a numerical simulation study on a two-span truss bridge.

Key Word

Time-domain system identification, Regularization, Time Windowing Technique, Rayleigh damping

Student Number : 2002-21285