

공학석사 학위논문

영역 변수화에 의한 유한체 내부영역의 기하학적 형상과 물성치  
결정을 위한 역해석

An Inverse Analysis for Determining Geometric Shape and Material  
Properties of an Inclusion in a finite body using Domain Parameterization

1997 년 8 월

서울대학교 공과대학

토목공학과

김 용 한

영역 변수화에 의한 유한체 내부영역의 기하학적  
형상과 물성치 결정을 위한 역해석

An Inverse Analysis for Determining Geometric Shape and Material  
Properties of an Inclusion in a Finite Body Using Domain  
Parameterization

지도교수 이 해 성

이 논문을 공학석사학위논문으로 제출함

1997년 4월

서울대학교 대학원

토목공학과

김 용 한

김용한의 공학석사학위 논문을 인준함

1997년 7월

위 원 장

---

부위원장

---

위 원

---

## 초 록

이 논문에서는 유한체 내부에 존재하는 미지의 함유체의 기하학적 형상과 물성치를 결정하기 위한 시스템 변수 추정법을 제안하였다. 함유체의 이산화된 경계면을 나타내는 제어절점의 좌표와 물성치를 시스템 변수로 선택하였다. 시스템 변수는 유한체 외부 경계면에서 유한개의 측정점에서 측정한 변위와 유한요소법에 의하여 계산된 변위간의 오차를 최소화하는 과정에서 추정되었다.

기하학적 형상을 모르는 함유체가 있는 유한체에 대한 지배방정식의 변분식을 기지의 영역에 대하여 표시하기 위하여 영역변수화 기법을 적용하였다. 기지의 영역에 대하여 표시된 변분식은 등매개변수 유한요소와 Laplace 사상을 이용하여 이산화하였다. 최적화 과정에서 발생할 수 있는 수치적 불안정성을 해결하기 위하여 정규화 기법을 도입하였다. 함유체 경계면의 이산화된 길이로 정의되는 정규화 함수를 제안하였으며, 정규화 효과를 극대화시키기 위하여 정규화 계수 수정 기법을 제안하였다.

최적화 과정에서 발생할 수 있는 유한요소 형상의 극심한 왜곡을 방지하기 위하여 유한요소 면적에 대하여 비선형 구속조건을 사용하였다. 비선형 구속조건을 반복적으로 선형화시켜 비선형 목적함수에 대한 최적화를 수행하였다. 수정된 Luenberger- Marquardt 방법과 Fletcher 의 active set strategy 를 사용하여 최적화를 수행하였으며, 변위의 민감도는 직접 미분법에 의하여 계산하였다. 세가지 예제를 통하여 이 논문에서 제안한 변수 추정 기법의 타당성과 효율성을 검증하였다.

### 주요어

영역 변수화 기법, 정규화 기법, Return mapping , Modified Levenberg-Marquardt method, 직접미분법, 민감도

## 목 차

초록.....	i
목차.....	ii
그림목차.....	iv
표목차.....	vi
1. 서론.....	1
2. 지배방정식 및 영역 변수화.....	6
2.1 지배방정식 및 변분식.....	6
2.2 영역 변수화 기법(Domain Parameterization Technique).....	9
2.3 영역이산화 및 변분식의 이산화.....	11
2.4 Laplace 사상.....	14
3. 시스템 변수추정법(Parameter Estimation).....	17
3.1 오차함수 및 정규화(Regularization)기법.....	17
3.2 최적화 기법(Optimization Technique).....	21

3.3 민감도(Sensitivity).....	26
3.4 수치해석 알고리즘.....	28
4. 해석 예제.....	30
4.1 예제 1 – 정규화기법에 따른 시스템 변수 추정 기법의 거동 분석.....	30
4.2 예제 2 – 측정 변위의 정도와 양에 다른 거동 분석.....	36
4.3 예제 3 – 함유체 형상에 따른 거동 분석.....	39
5. 결론.....	41
참고문헌.....	43
Abstract.....	46

## 그림목차

그림 1	함유체를 포함하고 있는 유한체에 대한 문제 정의.....	7
그림 2	영역변수화를 위한 정의영역과 기준영역.....	9
그림 3	영역 이산화를 위한 이단계 사상.....	12
그림 4	Laplace 사상을 위한 문제의 정의.....	12
그림 5	Return Mapping.....	19
그림 6	예제의 기하학적 형상, 재료의 물성치, 측정점의 위치 및 경계 조건.....	25
그림 7	예제 1에서의 초기 유한요소망.....	26
그림 8	정규화 계수에 따른 추정 함유체 형상의 변화.....	28
그림 9	반복계산 회수에 따른 오차함수의 변화.....	29
그림 10	정규화 계수 수정기법에 의하여 수렴된 최종 유한요소망과 추정 형상.....	29
그림 11	예제 2와 예제 3에 대한 초기 유한요소망 및 제어절점의 위치.....	30
그림 12	측정치와 유효자리 개수 변화에 따른 추정된 함유체의 형상.....	31
그림 13	측정 변위에 대한 하중조건의 변화에 따른 추정된 함유체의 형상.....	32
그림 14	3 가지 하중조건에 대하여 수렴된 유한요소망의 형상.....	33

그림 15	각 함유체 형상에 대하여 수렴된 유한요소망의 형상.....	34
-------	----------------------------------	----

## 표목차

표 1	정규화 계수에 따른 수렴회수 및 추정오차.....	33
표 2	측정치 유효자리 수에 따른 수렴회수 및 추정오차.....	37
표 3	하중조건의 변화에 따른 수렴회수 및 추정오차.....	38
표 4	함유체의 형상에 따른 수렴회수 및 추정오차.....	40

## 1. 서론

구조물 내부에 존재하는 결함이나 혹은 손상을 추정하는 것은 공학적으로 대단히 중요한 문제이다. 구조체 내부의 결함이나 손상은 원래 구조물을 구성하고 있는 재료의 물성과 다른 물성을 가지는 재료로 이루어진 유한체내의 함유체로 이상화할 수 있다. 유한체 내부에 존재하는 함유체의 물성치와 기하학적 현상을 구조물의 응답을 이용하여 추정하는 시스템 변수 추정 기법이 여러 연구자들에 의하여 제안되었다.

Tanaka 와 Yamagiwa (Tanaka 등, 1989) 는 구조물의 동적 응답인 고유주기에 대한 자료를 이용하여 경계요소법에 의하여 유한체 내부의 함유체에 대한 기하학적 형상과 물성치를 추정하였다. Schnur 와 Zabaras (Schnur 등, 1992) 는 유한체 경계면에서 측정된 정적 변위를 사용한 유한요소법에 의하여 함유체의 기하학적 형상과 물성치를 추정하였다. 이러한 기존의 연구에서는 미지의 기하학적 형상을 원으로 가정하고 원의 중심 위치와 반지름 그리고 물성치를 추정하였다. 그러나 실제 문제에 있어서는 유한체 내의 함유체에 대한 기하학적 형상을 알 수 없기 때문에 함유체에 대한 형상을 가정하는 것은 불합리하다. 이 논문에서는 측정된 구조물의 정적 변위를 이용하여 유한체 내부의 함유체의 기하학적 형상에 대한 어떠한 가정도 없이 함유체의 임의의 기하학적 형상과 물성치를 결정하는 시스템 변수 추정법을 제안한다. 미지의 기하학적 형상을 가지는 함유체를 포함하고 있는 유한체의 지배방정식의 변분식을 이산화하기 위하여 영역 변수화 기법에 의한 유한요소법을 사용한다. 함유체의 기하학적 형상과 물성치는 측정변위와 유한요

소법에 의하여 계산된 변위와의 오차를 최소화하는 과정에서 추정된다.

함유체의 기하학적 형상이 미리 주어지지 않으므로 지배방정식에 대한 변분식을 바로 이산화 할 수 없기 때문에 영역 변수화 기법을 적용한다. 영역 변수화 기법에 의한 유한요소법은 균열 전파 해석 문제 (Atluri 등, 1985) 균열 전파 예측 문제 (Koh 등, 1995) 그리고 설계 민감도 해석 문제 (Phelan 등, 1989) 에 성공적으로 적용되어, 주어진 문제의 정의 영역이 해석과정에서 변하는 문제를 정확히 해석할 수 있음이 밝혀졌다. 영역 변수화 기법에서는 유한체와 함유체에 대응하는 기지의 기준영역을 설정하고 미지의 함유체의 기하학적 형상을 일대일 사상에 의하여 기준영역에서 정의한다. 미지의 함유체를 포함하고 있는 유한체의 해석상에서 정의되는 변수와 지배방정식의 변분식은 일대일 사상을 통하여 기준영역에서 정의된다.

영역변수화 기법에 의하여 정의되는 기준영역에서의 변분식은 유한요소법에 의하여 이산화한다. 전체 유한체 내부의 절점은 함유체의 경계면상에 위치하는 유한개의 제어절점 (control node) 의 좌표에 대하여 표시되며, 각 절점간의 연결관계 (connectivity) 에 의하여 모든 유한요소가 정의된다. 제어절점의 좌표는 미지수이며, 유한요소를 정의하기 위한 절점간의 연결관계는 미리 알고 있다고 가정한다. 각 유한요소 내에서의 좌표를 기준영역에서의 좌표로 표시하기 위하여 등매개변수 사상을 사용하며, 유한체 내부의 절점의 좌표를 제어절점의 좌표로 표시하기 위하여 기준영역에서 정의되는 Laplace 선형사상 (Haber 등, 1981)을 사용하였다.

영역 변수화 기법에 의하여 이산화된 변분식에는 제어절점의 좌표와 함유체의 물성치가 절점 변위와 함께 미지수로서 포함되어 있다. 이산화된 변분식에는 유한요소 모델에서 정의된 자유도 수와 동일한 개수의 선형방정식이 포함되어 있

으므로 제어절점의 좌표와 함유체의 물성치를 결정하기 위하여는 추가의 조건식이 정의되어야 한다. 추가의 조건식은 측정 변위와 유한요소 모델에 의하여 계산된 변위의 오차의 자승으로 표시되는 오차함수를 최소화하는 최적화 문제에 대한 라그랑지안 1 차 필요조건에 의하여 정의된다.

함유체의 경계면상의 모든 점이 제어절점의 위치가 될 수 있으므로, 제어절점의 위치에 따른 이산화 오차를 무시한다면 주어진 오차함수를 최소화 시키는 제어절점의 위치는 무수히 많이 존재하게 된다. 따라서, 정의된 오차함수에 대한 최적화 문제의 해가 해의 벡터 공간상에서 아주 가까이 무수히 많이 존재하게 되어 수치적인 불안정성이 발생할 수 있다. 이러한 수치적인 불안정성을 해결하고, 최적화 문제의 해를 빠르게 수렴시키기 위하여 정규화 기법 (regularization technique) 을 도입한다. 정규화 기법에서는 주어진 최적화 문제의 성질을 변화 시키지 않으면서 해의 유일성을 보장할 수 있는 정규화 함수를 정의하여 원래 목적함수에 더하여 수정된 목적함수에 대하여 최적화 과정을 수행한다. O. M. Alifanov 과 E. A. Artyukhin 그리고 B. M. Pankratov (Alifanov, 1975) 은 정규화 기법을 열 전달 문제에서 경계면에 작용하고 있는 열류(heat flux)를 추정하기 사용하였으며, Schnur 등은(Schnur 등, 1989) 정적 변위를 측정하여 유한체 경계면에 작용하는 표면력을 추정하기 위하여 사용하였다. 그러나 이들 논문에서는 사용된 정규화 함수는 물리적 차원이 원래의 목적함수의 차원과 상이하여 물리적 의미가 결여되어 있다.

이 논문에서는 함유체의 경계면의 이산화된 길이로 정의되는 정규화 함수를 도입한다. 이러한 정규화 함수는 원래의 오차함수의 물리적 차원이 같다. 수정된 목적함수에 대하여 최적화 과정을 수행하면 원래의 목적함수 뿐만 아니라 정규화 함수를 최소화 시키는 해가 구해진다. 이 논문에서 정의된 정규화 함수를

최소화 시키기 위하여는 제어절점이 함유체의 경계면에서 비교적 균등히 분포해야 한다. 따라서, 정규화 함수에 의하여 최적화 문제의 해의 유일성이 완전히 보장되지는 않지만, 주어진 최적화 문제의 가능한 해의 개수를 감소시키고 최적화 문제의 해가 존재하는 벡터 공간상에서 가능한 해 사이의 거리를 넓혀줌으로써 최적화 과정의 수치적인 안정성을 향상시킬 수 있다.

정규화 함수는 최적화 문제의 수치적 안정성을 위하여 첨가된 보조적인 항이므로 정규화 함수값이 지배적으로 작용되어 원래의 오차 최적화 문제의 성질을 변화 시켜서는 안 된다. 이를 위해서 적절한 정규화 계수를 정규화 함수에 곱하여 전체적인 정규화 항의 크기와 원래의 오차함수 값이 항상 적절한 비율을 유지하도록 정규화 계수값을 최적화 과정에서 조정한다. 즉, 최적화 과정의 초기에서는 원래의 오차함수 값이 크므로 상대적으로 큰 정규화 계수를 사용하고, 최적화 과정이 진행되면서 원래의 오차함수 값이 작아지게 되므로 정규화 계수값도 이에 따라 적절히 감소시킨다. 그러나, 정규화 계수가 너무 작아지게 되면 정규화 효과가 감소하여 최적화 문제의 해가 거의 수렴한 상태에서 수치적 불안정성이 발생하여 해가 더 이상 수렴하지 않을 수 있으므로 정규화 계수의 하한값을 사용하여 정규화 항이 어느 한도 이상으로 작아지지 않게 한다. 정규화 계수값이 달라지면 목적함수가 달라지므로 전 단계의 최적화 과정에서 결정된 해를 초기값으로 취하여 새로운 목적함수에 대한 최적화 과정을 수행한다.

최적화 과정에 결정된 제어절점의 위치가 유한요소의 형상에 극심한 왜곡을 발생시키게 되면 유한요소법에 의한 해석이 불가능하게 된다. 이러한 현상을 방지하기 위하여 각 유한 요소의 면적은 항상 양수이며 또한 어느 한도 이하로 작아질 수 없다는 구속조건을 사용한다. 각 유한요소의 면적은 각 유한요소에 포함

된 절점의 좌표에 대한 2 차식으로 표시되게 되므로 주어진 시스템 변수 추정법은 비선형 부등식형 구속조건을 가진 비선형 목적함수에 대한 최적화 문제이다. 각 최적화 단계별로 비선형 구속조건을 선형화 시킨 후 원래의 최적화 문제를 선형 구속조건을 가지는 최적화 문제로 근사 시켜 최적화를 수행한다.

비선형 목적함수에 대한 2 차 미분값 (hessian) 은 직접 구하기가 어려우므로 목적함수의 1 차 미분값만으로 hessian 행렬을 근사하는 수정된 Luenberger-Marquardt 방법 (Reklaitis, 1983) 을 적용하였다. Luenberger-Marquardt 방법은 Newton 방법과 steepest descent 방법을 절충한 방법으로 hessian 행렬의 positive definite 성을 높여주기 때문에 해의 수렴성을 안정화시킨다. 변위에 대한 민감도를 구하기 위하여 정의영역에 대한 평형방정식을 직접 미분하는 직접 미분법 (Phelan 등, 1989) 을 사용하였다. 선형화된 부등식형 구속조건을 고려하기 위하여 Fletcher 의 active set strategy (Luenberger, 1989) 를 사용하였다. 선형화된 구속조건에 의하여 구한 해는 원래의 비선형 구속조건을 만족시키지 못하므로 gradient projection 방법에 기초한 Return Mapping 방법 (Luenberger, 1989) 을 사용하여 원래의 비선형 구속조건을 정확히 만족시킨다.

세개의 예제를 통하여 제안된 방법을 검증하였다. 첫번째 예제는 정규화 기법이 이 연구에 미치는 영향을 파악하기 위한 예제이며 두번째 예제에서 정규화 기법을 적용하여 측정 변위의 정도, 하중조건 수의 변화에 대해 고찰하고 세번째 예제에서는 함유체의 여러가지 복잡한 기하학적 형상에 대해 제안된 방법을 적용하여 제안된 방법의 수치적 거동을 분석한다.

## 2. 지배방정식 및 영역 변수화

이 장에서는 내부에 미지의 함유체를 포함한 유한체에 대한 지배방정식 및 경계 조건 그리고 이들에 대한 변분식을 정의한다. 함유체의 기하학적 형상이 미리 주어지지 않기 때문에 지배방정식의 변분식은 미지의 영역에 대하여 표시된다. 영역 변수화 기법을 도입하여 미지의 영역에 대하여 표시되는 변분식을 기지의 기준영역에 대하여 표시한다. 등매개변수 유한요소 사상과 Laplace 사상을 이용하는 이단계 사상을 이용하여 변분식을 이산화한다.

### 2.1 지배방정식 및 변분식

그림 1 에는 정의영역  $V$ 와 경계  $S$ 로 이루어진 유한체의 기하학적 형상과 경계조건을 보이고 있다. 정의영역  $V$ 는 서로 다른 물성치로 구성된 외부 유한체에 대한 영역  $V_1$ 과 내부 함유체에 대한 영역  $V_2$ 로 이루어져 있으며  $V_1 \cup V_2 = V$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  이다.  $S_I$ 로 표시된 함유체와 외부 유한체의 경계는 주어지지 않으며,  $V_1$ 과  $V_2$ 는 미지의 경계면  $S_I$ 에 대하여 표시되는 미지의 영역이다. 외부 유한체의 탄성계수와 포아송비는 주어지 있으나 내부 함유체에 대한 탄성계수와 포아송비는 정의되어 있지 않다. 유한체의 외부 경계면은 각각 변위가 주어진 경계  $S_u$ , 표면력이 주어진 경계  $S_t$ 로 구성되며  $S_u \cup S_t = S$ ,  $S_u \cap S_t = \emptyset$  이다.

외부 유한체 및 함유체에 대한 지배방정식 및 경계조건을 미지의 함유체 경계면과 물성치에 대하여 표시하면 다음과 같다.

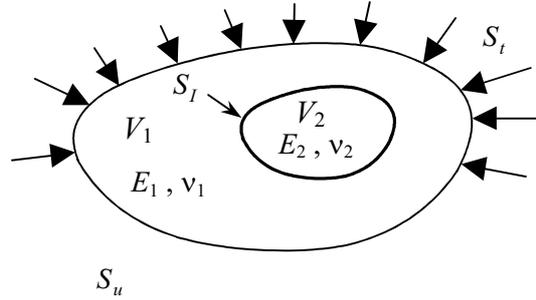


그림 1. 함유체를 포함하고 있는 유한체에 대한 문제 정의

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 + \mathbf{b}_1 = 0 \quad \text{in } V_1 \quad (1-a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{C}_1 : \boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad \text{in } V_1 \quad (1-b)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_1 + (\nabla \mathbf{u}_1)^T) \quad \text{in } V_1 \quad (1-c)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + \mathbf{b}_2 = 0 \quad \text{in } V_2 \quad (2-a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \mathbf{C}_2 : \boldsymbol{\varepsilon}_2 \quad \text{in } V_2 \quad (2-b)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_2 + (\nabla \mathbf{u}_2)^T) \quad \text{in } V_2 \quad (2-c)$$

$$\mathbf{u}_1 - \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{on } S_u \quad (3-a)$$

$$\mathbf{T}_1 - \bar{\mathbf{T}} = 0 \quad \text{on } S_t \quad (3-b)$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \quad \text{on } S_t \quad (4-a)$$

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 = \mathbf{0} \quad \text{on } S_t \quad (4-b)$$

여기서  $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C}, \mathbf{u}, \mathbf{b}, \mathbf{T}$  는 각각 응력 텐서, 변형도 텐서, 탄성 텐서, 변위, 체적력 그리고 표면력이며,  $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{T}}$  는 각각 경계면  $S_u, S_t$  에서 주어지는 변위와 표면력이다. 아래첨자는 각 변수들이 정의되는 영역을 나타낸다. 식 (1)과 (2)는 각각 영

역 1 과 2 에서의 지배 방정식이며, 식 (3)과 (4)는 유한체 외부 경계면과 함유체 경계면에서의 경계조건이다.

지배방정식을 풀기 위하여 필요한 조건이나 물리량 중에서 주어지지 않은 것이 시스템 변수로 정의된다. 식 (1) - (2) 에서 주어진 지배방정식을 경계조건 (3) 과 (4)를 이용하여 풀기 위하여 필요한 함유체 경계면의 형상과 물성치가 주어지지 않으므로, 함유체 경계면의 형상과 물성치가 앞에서 정의한 문제의 시스템 변수이다.

각 영역에서의 평형방정식에 가상일의 원리를 적용하여 부분 적분하면 다음과 같은 변분식을 구할 수 있다.

$$\int_{V_1} \nabla \hat{\mathbf{u}}_1 : \mathbf{C}_1 : \nabla \mathbf{u}_1 dV - \int_{V_1} \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{b}_1 dV - \int_{S_I} \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \bar{\mathbf{T}} dS - \int_{S_I} \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{T}_1 dS = 0 \quad (5a)$$

$$\int_{V_2} \nabla \hat{\mathbf{u}}_2 : \mathbf{C}_2 : \nabla \mathbf{u}_2 dV - \int_{V_2} \hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{b}_2 dV - \int_{S_I} \hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{T}_2 dS = 0 \quad (5b)$$

여기서  $\hat{\mathbf{u}}$  은 가상변위이다. 식 (5a) 와 식 (5b)를 더하고 식 (4)에서 정의된 경계조건을 적용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{V_1} \nabla \hat{\mathbf{u}}_1 : \mathbf{C}_1 : \nabla \mathbf{u}_1 dV + \int_{V_2} \nabla \hat{\mathbf{u}}_2 : \mathbf{C}_2 : \nabla \mathbf{u}_2 dV = \\ & \int_{V_1} \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{b}_1 dV + \int_{V_2} \hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{b}_2 dV + \int_{S_I} \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \bar{\mathbf{T}} dS \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)에서 각 항에 대한 적분을 각 영역별로 수행할 경우, 각 영역을 표시하는 아래 첨자를 생략하고 간단히 표시할 수 있다.

$$\int_{V_1+V_2} \nabla \hat{\mathbf{u}} : \mathbf{C} : \nabla \mathbf{u} dV = \int_{V_2+V_2} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} dV + \int_{S_I} \hat{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{T}} dS \quad (7)$$

## 2.2 영역 변수화 기법

이 절에서는 미지의 영역을 일대일 사상에 의하여 기지의 영역으로 표시하고, 식 (7) 에서 주어진 변분식을 기지의 영역에서 표시하기 위한 영역변수화 기법을 도입한다. 그림 2 에서 보인 바와 같이 영역 변수화 기법에서는 정의영역  $V$  와는 무관한 기지의 기준영역  $\Omega$  를 정의한다. 2.1 절에서 정의된 문제의 정의영역은 시스템 변수의 변화에 따라 변하지만, 기준영역은 반복단계와 무관한 일정한 형상을 갖는다. 그림 2 에서  $\Omega_1$  과  $\Omega_2$  는 외부 유한체의 영역과 함유체 영역에 대응하는 기준영역에서의 영역이며,  $S_I$  에 대응하는 기준영역에서의 경계면은  $\Gamma_I$  으로 나타내었다.

정의영역 내에서의 고정된 질점의 위치는 공간좌표  $\mathbf{x}(x,y)$ 로 나타내며 기준형상에서의 위치는 기준좌표  $\mathbf{r}(r_1,r_2)$ 로 표시한다. 영역 변수화 기법에서는 기준좌표  $\mathbf{r}$ 을 유일한 독립적인 공간변수로 취급한다. 정의영역을 기지의 기준영역에 대하여 표시하고, 정의영역에서의 모든 변수를 기준좌표에 대하여 표시하기 위하여 일대일 사상을 정의한다. 정의영역내의 미지 함유체 경계면상의 좌표는 이에 대응하는 기준영역의 경계면상의 기준좌표로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{x}^{S_I}(\mathbf{r}) = \phi_I(\mathbf{r}) \quad (8)$$

여기서  $\phi_I(\mathbf{r})$ 은 기준영역에서  $\Gamma_I$  를 표시하며, 시스템 변수 추정 과정에서 결정되어야 할 함수이다. 기준영역에서의 고정된 위치에 대응하는 정의영역에서의 질점에 대한 좌표  $\mathbf{x}$ 는 일대일 사상과 식 (8)에 의하여 기준좌표  $\mathbf{r}$ 에 대하여 표시할 수 있다.

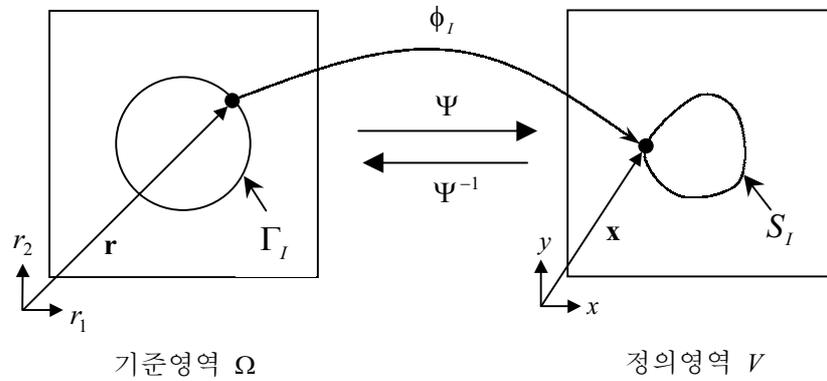


그림 2. 영역변수화를 위한 정의영역과 기준영역

$$\mathbf{x}(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r}, \phi_I(\mathbf{r})) \quad (9)$$

식 (9) 에서 정의된 사상은 함유체 경계면의 함수이므로, 기준영역에서의 고정된 좌표에 대응하는 정의영역에서의 절점은 함유체 경계면의 형상에 따라 변한다.

기준체적에서 정의영역으로의 사상  $\Psi$  의 Jacobian 과 역 Jacobian 은 다음과 같이 표시된다.

$$\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \equiv \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{x} \equiv \nabla_{\mathbf{r}} \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{X}) \quad (10)$$

$$\bar{\mathbf{J}} = \nabla \Psi^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{X}) = \tilde{\mathbf{J}}^{-1} \quad (11)$$

여기서  $\nabla$  와  $\nabla_{\mathbf{r}}$  은  $\mathbf{x}$  와  $\mathbf{r}$  에 대한 gradient 연산자이며, 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\nabla ( ) = \nabla_{\mathbf{r}} ( ) \cdot \bar{\mathbf{J}} \quad (12)$$

정의영역에서의 미소체적  $dV$  와 미소영역  $dS$  는 기준영역에서의 미소체적  $d\Omega$  와 미소면적  $d\Gamma$  로 다음과 같이 표시된다.

$$dV = \tilde{J} d\Omega \quad (13)$$

$$dS = K_a d\Gamma \quad (14)$$

여기서  $\tilde{J}, K_a$  는 각각 **Jacobian** 의 행렬값, 면적 **metric** 이다. 식 (12)에 의하여 소변형 문제에서의 변형도 텐서는 다음과 같이 기준좌표계에서 표시된다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla_r \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{J}} + (\nabla_r \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{J}})^T) \quad (15)$$

식(10) - (15)을 식 (6)에 대입하면 기준영역에서의 변분식을 유도할 수 있다.

$$\int_{\Omega_1 + \Omega_2} (\nabla_r \hat{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{J}}) : \mathbf{C} : (\nabla_r \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{J}}) \tilde{J} d\Omega = \int_{\Omega_1 + \Omega_2} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} \tilde{J} d\Omega + \int_{\Gamma_r} \hat{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{T}} K_a d\Gamma = 0 \quad (16)$$

## 2.3 영역 이산화 및 변분식의 이산화

유한요소해석을 위해서 주어진 정의영역과 변분식을 2.2 절에서 정의한 기준영역에 대하여 이산화한다. 유한요소에 의하여 기준영역을 이산화하며, 각 유한요소를 정의하는 절점좌표와 절점간의 연결성은 주어진다. 함유체의 경계면상에 위치하는 절점을 제어절점으로 정의한다. 기준영역에서의 제어절점간의 연결성 및 제어절점 위치에 대응하는 정의영역에서의 좌표에 의하여 함유체의 경계면이 정의되고, 이에 따라 정의영역에서의 외부 유한체 영역과 내부 함유체 영역이 정의된다. 따라서, 제어절점의 좌표는 외부유한체와 내부 함유체의 형상을 결정하는 이산화된 시스템 변수이다.

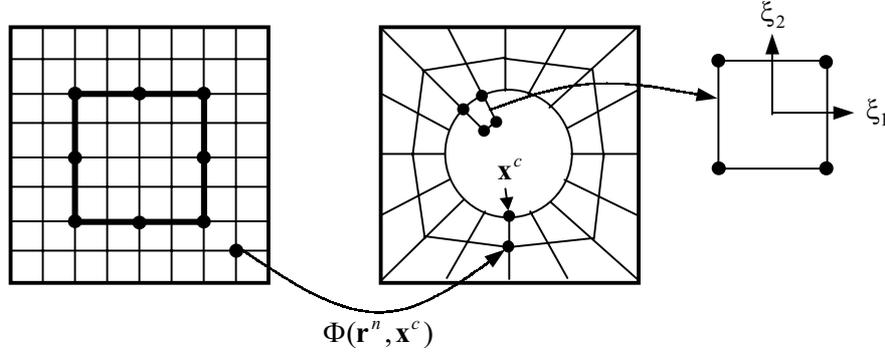


그림 3. 영역 이산화를 위한 이단계 사상

기준영역에서의 주어진 유한요소를 사용하여 식 (16)을 이산화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sum_e \int_{\Omega_1^e + \Omega_2^e} (\nabla_r \hat{\mathbf{u}}^e \cdot \bar{\mathbf{J}}^e) : \mathbf{C} : (\nabla_r \mathbf{u}^e \cdot \bar{\mathbf{J}}^e) \tilde{\mathcal{J}}^e d\Omega^e = \\ \sum_e \int_{\Omega_1^e + \Omega_2^e} \hat{\mathbf{u}}^e \cdot \mathbf{b}^e \tilde{\mathcal{J}}^e d\Omega^e + \sum_e \int_{\Gamma_f^e} \hat{\mathbf{u}}^e \cdot \bar{\mathbf{T}}^e K_a^e d\Gamma^e = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

기준영역에서의 유한요소별로 식 (17)의 각 적분항이 계산되므로, 기준영역과 정의영역간의 관계를 나타내는 일대일 사상을 각각의 유한요소에서 정의하여야 한다. 이를 위하여 2 단계 사상을 사용한다 (그림 3) (Koh 등, 1995). 첫번째 사상은 기준영역에서의 유한요소에 대응하는 정의영역에서의 유한요소의 형상을 나타내기 위하여 사용된다. 두번째 사상은 이산화된 기준영역의 절점 위치에 대한 정의영역에서의 절점 좌표를 제어절점 좌표에 의하여 표시하기 위하여 사용된다.

첫번째 사상으로는 등매개변수 유한요소 사상을 이용한다. 등매개변수 유한요소의 모요소 및 모좌표계가 정의영역내에서의 각 유한요소에 대한 기준형상 및 기준좌표계로 사용된다.

등매개변수 사상을 이용하여 정의영역에서의 유한요소를 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\mathbf{x}^e(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{X}^e \quad (18)$$

여기서,  $\boldsymbol{\xi}$ ,  $\mathbf{x}^e$ ,  $\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi})$ ,  $\mathbf{X}^e$  는 각각 모요소 좌표계, 유한요소  $e$  내의 좌표와 형상 함수이고 유한요소  $e$  를 구성하고 있는 절점의 정의 영역에서의 좌표이다.

기준영역의 각 절점에 대응하는 정의영역에서의 좌표를 제어절점의 좌표에 대하여 표시하기 위하여 두번째 사상을 사용하며, 다음과 같이 일반적인 형태로 정의할 수 있다.

$$\mathbf{X}^n = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}^n, \mathbf{X}^c) \quad (19)$$

여기서,  $\mathbf{X}^n$ ,  $\mathbf{r}^n$  그리고  $\mathbf{X}^c$  는 각각 정의영역에서 절점의 좌표, 기준영역에서 절점의 좌표 그리고 정의영역에서의 제어절점 좌표이다. 식 (19)에 정의된 사상이 제어절점의 좌표에 대하여 선형으로 주어진다면 식 (19)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{X}^n = \mathbf{Q}(\mathbf{r}^n) \cdot \mathbf{X}^c \quad (20)$$

여기서  $\mathbf{Q}$  는 선형사상을 나타내는 매트릭스이다.

각 유한요소를 구성하고 있는 절점은 전체 절점의 일부이므로 다음과 같이 전체 절점에 대하여 표시할 수 있다.

$$\mathbf{X}^e(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{T}^e \cdot \mathbf{X}^n \quad (21)$$

식 (20)를 식 (21)에 대입하고, 그 결과를 다시 (18)에 대입하면, 정의영역에서의

유한요소의 형상을 제어절점의 좌표에 대하여 표시할 수 있다.

$$\mathbf{x}^e(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{T}^e \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{r}^n) \cdot \mathbf{X}^c = \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{Q}^e(\mathbf{r}^n) \cdot \mathbf{X}^c = \boldsymbol{\Psi}^e(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}^c) \quad (22)$$

식 (22)는 식 (9)의 이산화된 형태로서 각 유한요소별로 정의된다. 각 유한요소에 대한 Jacobian 은 식 (21)을 (10)에 대입하여 구할 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{J}}^e = \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{x}^e(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{Q}^e(\mathbf{r}^n) \cdot \mathbf{X}^c \quad (23)$$

각 유한요소에서 정의되는 일대일 사상 (22) 에서는 기준좌표계로서 모요소 좌표계가 사용되기 때문에 모요소 좌표에 대한 gradinet 연산자가 식 (23)에서 사용되었다. 식 (17)에 포함되어 있는 역 Jacobian  $\bar{\mathbf{J}}^e$  와 Jacobian 의 행렬식 값  $\tilde{\mathbf{J}}^e$  는 식 (23)을 사용하여 구할 수 있으며, 면적 metric 은 Nannson 의 관계식 (Malvern, 1969) 에 의하여 구할 수 있다.

$$K_a^e = \tilde{\mathbf{J}}^e ((\mathbf{n}_r^e \cdot \bar{\mathbf{J}}^e) \cdot (\mathbf{n}_r^e \cdot \bar{\mathbf{J}}^e))^{0.5} \quad (24)$$

여기서,  $\mathbf{n}_r^e$  은 기준형상의 외부 경계면에서의 외향 단위 법선 벡터이다. 식 (17)은 변위와 시스템 변수인 제어절점의 좌표와 함유체의 물성치에 대한 비선형 방정식이며, 미지수의 개수가 방정식의 개수보다 많다. 추가의 방정식은 시스템 변수 추정 과정에서 정의된다.

#### 2.4. Laplace 사상

이산화된 기준영역의 절점에 대응하는 정의영역에서의 각 절점의 위치를 미지 경계면상의 절점 좌표에 대하여 표시하는 선형사상을 정의하기 위하여 Laplace 사상을 도입한다. Laplace 사상은 기준영역에서 정의된 포텐셜 문제에

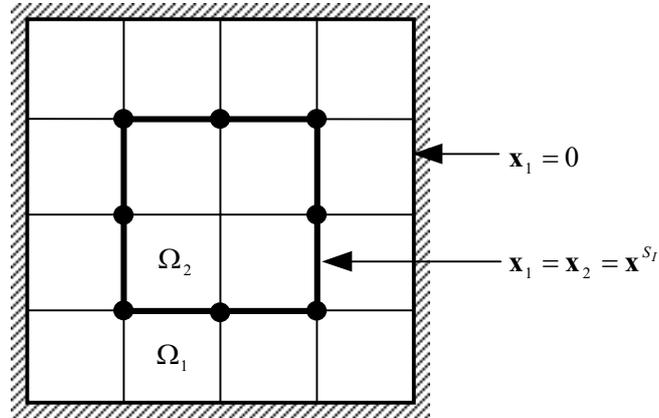


그림 4. Laplace 사상을 위한 문제의 정의

대한 Laplace 방정식에 의하여 정의된다. 기준영역의 외부 전 경계면에서는 포텐셜이 영으로 주어지는 Dirichlet 경계조건이 정의되며, 함유체의 경계면에서는 정의영역에서의 함유체 경계면에 대한 좌표가 포텐셜로서 정의된다 (그림 4). 이러한 경계조건을 가지는 Laplace 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\nabla^2 \mathbf{x}_1 = 0 \quad \text{In } \Omega_1 \quad (25-a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{x}_2 = 0 \quad \text{In } \Omega_2 \quad (25-b)$$

$$\mathbf{x}_1 = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (26-a)$$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}^{S_I}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{on } \Gamma_I \quad (26-b)$$

식 (7) 을 유도하기 위하여 사용한 방법을 식 (25)와 (26)에 적용하여 변분식을 유도하고, 식 (16)을 이산화하기 위하여 사용한 유한요소망과 동일한 유한요소망에 의하여 변분식을 이산화하여 매트릭스 형식으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii} & \mathbf{k}_{ic} \\ \mathbf{k}_{ci} & \mathbf{k}_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}^i \\ \mathbf{X}^c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

여기서  $\mathbf{k}_{ij}$ 는 이산화된 Laplace 방정식에 대한 계수 행렬이며,  $\mathbf{X}^i$ 는 정의영역에서 함유체의 경계면에 있지 않은 절점의 좌표이다. 식(27)에서 내부절점의 좌표를 제어절점의 좌표로 표시하면 다음과 같다.

$$\mathbf{X}^i = -\mathbf{k}_{ii}^{-1} \cdot \mathbf{k}_{ic} \cdot \mathbf{X}^c \quad (28)$$

식 (28)을 이용하여, 전체 절점좌표를 제어절점 좌표에 대하여 표시하는 선형사상 매트릭스  $\mathbf{Q}$  를 구할 수 있다

$$\mathbf{X}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^i \\ \mathbf{X}^c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_{ii}^{-1} \cdot \mathbf{k}_{ic} \\ \mathbf{I}_{nc} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}^c = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}^c \quad (29)$$

여기서,  $\mathbf{I}_{nc}$  는 전 제어절점의 좌표 개수와 같은 차수를 가지는 단위행렬이다.

### 3. 시스템 변수 추정법

이 장에서는 함유체의 이산화된 경계면을 나타내는 제어절점의 좌표와 물성치를 결정하기 위한 시스템 변수 추정기법을 제안한다. 유한체의 외부 경계면상의 몇 개의 측정점에서 측정된 변위와 유한요소모델에 의하여 계산된 변위간의 오차를 최소화하는 과정에 시스템 변수가 추정된다. 최적화 과정의 수치적 안전성을 확보하고 수렴 속도를 빠르게 하기 위하여 정규화 기법을 도입한다. 최적화 과정에서 필요한 hessian 행렬과 변위의 민감도를 구하기 위하여 각각 수정된 Luenberger-Marquardt 방법과 직접미분법을 사용한다. 유한요소의 면적에 대하여 가해지는 비선형 부등식형 구속조건을 고려하기 위하여 수정된 Newton 방법과 Fletcher 의 active set strategy 를 사용한다.

#### 3.1 오차함수 및 정규화 기법

시스템 변수 추정을 위한 최적화 과정에 위하여 point-collocation 방법과 최소자승법에 기초한 다음과 같은 오차함수를 정의한다.

$$\Pi_E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nlc} \|\tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{D}) - \bar{\mathbf{u}}_i\|^2 \quad (30)$$

여기서  $nlc$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_i$  그리고  $\bar{\mathbf{u}}_i$  는 각각 독립적인 하중조건의 수, 유한요소 해석모델에 의하여 계산된 측정점에서의 변위 그리고 측정점에서의 측정변위이다. 시스템 변수는 식 (30)에서 정의된 오차함수를 최소화 시키는 다음과 같은 최적화 과정에서 추정된다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } \Pi_E &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nlc} \|\tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{D}) - \bar{\mathbf{u}}_i\|^2 \text{ with respect to } \mathbf{D} \\ \text{subject to } \mathbf{K}(\mathbf{D})\mathbf{u}_i &= \mathbf{f}_i, \quad i=1, \dots, nlc \text{ and } \mathbf{c}(\mathbf{D}) \leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (31)$$

여기서,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{u}_i$ ,  $\mathbf{f}_i$  그리고  $\mathbf{c}$ 는 영역이산화 기법에 의하여 구성된 구조물의 강성도 행렬이며,  $i$  번째 하중조건에서의 구조물 전체 자유도에 대한 변위,  $i$  번째 하중조건 그리고 부등식형 구속조건이다. 측정점은 유한체 외부 경계면에 위치하며 유한요소 모델의 절점 위치와 일치한다고 가정한다. 따라서  $\tilde{\mathbf{u}}_i$ 의 모든 성분은  $\mathbf{u}_i$  성분의 일부분으로 정의된다. 식 (31)에서 정의된 최적화 문제는 최소자승기법에 기초하고 있기 때문에 독립적인 측정변위의 개수가 시스템 변수의 개수보다 많거나 같은 경우에만 의미 있는 해가 존재할 수 있다.

고체 역학에서 변형 가능한 고체에 대하여 정의영역과 정의영역에서의 물성치 및 경계조건이 적절히 주어지면 주어진 고체에 대한 지배방정식을 만족하는 해는 유일하게 존재한다. 그러나 고체의 응답이 주어졌을 경우, 주어진 고체에 대하여 같은 응답을 발생시키는 재료성질 및 경계조건은 수 없이 많이 존재할 수 있다. 특히, 이 논문에서는 유한체의 경계면에서의 측정된 변위만을 사용하여 함유체의 기하학적 형상과 물성치를 추정하기 때문에 수 없이 많은 조합의 시스템 변수가 식 (31)에서 정의된 최적화 문제의 해가 될 수 있다.

영역 변수화 기법에 의하여 함유체의 기하학적 형상은 유한개의 제어절점 좌표와 제어절점간의 연결관계에 의하여 이산화된다. 제어절점간의 연결성은 미리 주어져 있다고 가정하였으므로 제어절점의 좌표에 의하여 함유체의 기하학적인 형상이 결정된다. 제어절점의 위치에 따른 함유체 경계면의 기하학적 이산화 오차를 무시하면, 함유체 경계면상에서 모든 점이 동일한 함유체의 경계면을 나타

내는 제어절점이 될 수 있다. 어떤 제어절점의 집합이 식(31)에서 정의된 최적화 문제의 해라면 그 제어절점 주위의 점으로 표시되는 또 다른 제어절점의 집합 역시 (31)의 해가 될 수 있다. 따라서 식 (31) 에서 정의된 최적화 문제의 해는 수 없이 많이 존재하고, 각각의 해가 연속적으로 분포하기 때문에 최적화 과정에서 수치적인 불안정성이 발생하여 수렴속도가 매우 느려지거나 최적화 과정이 발산할 수 있다. 이러한 수치적인 불안정성을 제거하기 위하여 정규화 기법을 도입한다.

정규화 기법에서는 수 많은 제어절점의 집합중 하나를 최적화 과정 중에서 결정할 수 있는 정규화 함수를 정의하고 오차함수에 더하여 수정된 오차함수에 대하여 최적화를 수행한다. 정규화 함수는 원 최적화 문제의 특성을 유지하면서 수치적 안정성을 보장할 수 있으며 문제의 특성에 적합한 물리적인 의미를 가지도록 결정하여야 한다. 이 논문에서는 제어절점들 간의 거리의 제곱함수로 표시되는 다음과 같은 정규화 함수를 제안한다.

$$\Pi_R = \frac{\alpha}{2} \int_{\phi} \left( \left( \frac{dx^{\phi}}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy^{\phi}}{dt} \right)^2 \right) dt \approx \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^{nc} L_k^2 = \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^{nc} \|\mathbf{X}_{i+1}^c - \mathbf{X}_i^c\|^2 \quad (32)$$

여기서  $\alpha, x^{\phi}, y^{\phi}, t, nc$  그리고  $L_k$ 는 각각 정규화 계수, 함유체 경계면상에서의  $x$  좌표와  $y$  좌표, 경계곡선의 곡선 매개변수, 제어절점의 개수 그리고 두개의 제어절점에 의하여 정의되는 함유체의 이산화된 경계곡선 구간의 길이이며,  $\mathbf{X}_{nc+1}^c = \mathbf{X}_1^c$ 이다. 식 (32) 를 식 (30) 에서 정의된 오차함수에 더하여 최적화를 위한 새로운 목적함수를 다음과 같이 구성한다.

$$\Pi = \Pi_E + \Pi_R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nlc} \|\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i\|^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^{nc} \|\mathbf{X}_{i+1}^c - \mathbf{X}_i^c\|^2 \quad (33)$$

원 오차함수와 정규함수에서 사용하는 함유체 경계면의 이산화된 거리의 자승은 물리적 차원이 같기 때문에 정규화 계수는 무차원 양으로 정의되는 상수이다.

정규화 계수값이 아주 커지게 되면 정규화 함수가 지배적으로 작용하게 되어 원래의 오차함수의 영향이 작아지게 되므로 올바른 시스템 변수의 추정이 불가능해지며, 이와는 반대로 정규화 계수가 아주 작아지게 되면 정규화 함수의 영향이 사라지게 되어 수치적 불안정성이 발생하게 된다. 이러한 현상이 최적화 과정에서 발생하지 않도록 정규화 계수 값을 결정하여야 한다. 정규화 함수가 최적화 과정에서 지배적인 영향을 미치지 않도록 하기 위하여 정규화 함수값이 항상 원 오차함수의 값보다 항상 작게 되도록 정규화 계수값을 정한다.

$$\sum_{i=1}^{nlc} \|\tilde{\mathbf{u}}_i - \bar{\mathbf{u}}_i\|^2 \geq \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^{nc} \|\mathbf{X}_{i+1}^c - \mathbf{X}_i^c\|^2 \quad (34)$$

최적화 과정이 진행되면 함유체의 이산화된 경계면의 길이인 정규화 함수값은 항상 유한한 값을 유지하지만, 오차함수의 크기는 점점 감소하게 된다. 식 (34) 을 최적화 전 과정에 만족하는 정규화 계수값은 매우 작은 값이 되게 되므로 최적화 과정 초기에 수치적 불안정성이 발생하게 된다. 따라서, 고정된 정규화 계수를 전 최적화 과정에서 사용하는 것은 불합리하므로, 정규화 계수값이 각 최적화 단계에서 오차함수의 크기에 따라 적절히 변해야 한다. 즉, 최적화를 위한 시스템 변수의 초기 가정치에 의하여 (34) 를 만족하는 적절한 정규화 계수를 결정 후, 매 최적화 단계에서 (34) 가 만족되는 지를 검사하여 만족하지 않는 경우에는 정규화 계수를 일정한 비율로 감소시키는 정규화계수 수정 기법을 사용한다. 정규화 계수를 감소시키는 비율을 계수 수정율이라고 정의하며, 이 논문에서는 1/10 을 사용하였다. 정규화 계수가 수정되면 목적함수가 변하기 때문에 전

단계에서 추정된 시스템 변수 값을 초기치로 하여 새로운 목적함수에 대한 최적화 과정을 수행한다. 이러한 과정이 반복적으로 수행되면 오차함수의 감소에 따라 정규화 계수 값이 점점 감소하게 되어 정규화 함수의 영향이 매우 작아지게 되어 최적화 과정이 거의 수렴한 상태에서 다시 수치적 불안정성이 발생할 수 있으므로 정규화 계수의 하한값을 설정하여 정규화 함수가 어느 한계 이하로 작아지는 것을 방지한다.

목적함수 (34)의 최적화 과정에서 추정되는 제어절점의 위치에 의하여 유한요소 형상이 극심한 왜곡이 발생하여 유한요소법에 의한 해석이 불가능하게 되는 것을 방지하기 위하여 다음과 같은 구속조건을 사용한다.

$$A^e(\mathbf{X}^c) \geq \mu A_0^s \quad (35)$$

여기서,  $A^e, A_0^s$  그리고  $\mu$  는 각각 유한요소의 면적과 초기 유한요소 형상에서 가장 작은 요소의 면적 그리고 적절한 구속상수이다. 유한요소의 면적은 각 유한요소를 구성하고 있는 절점 좌표 대하여 2 차식으로 표시되고 각 절점 좌표는 식 (30) 에 의하여 제어절점에 대하여 선형으로 표시되므로 식 (35) 에서 정의된 구속조건은 제어절점의 좌표에 대한 비선형 구속조건이다.

### 3.2 최적화 기법

식 (33) 에서 정의된 수정된 목적함수에 대한 최적화 문제는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } \Pi &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nlc} \|\tilde{\mathbf{u}}_i - \bar{\mathbf{u}}_i\|^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^{nc} \|\mathbf{X}_{i+1}^c - \mathbf{X}_i^c\|^2 \text{ with respect to } \mathbf{D} \\ \text{subject to } \mathbf{K}(\mathbf{D})\mathbf{u}_i &= \mathbf{f}_i, \quad i=1, \dots, nlc \text{ and } \mathbf{c}(\mathbf{D}) \leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (36)$$

식 (36) 에 등식형 구속조건으로 주어져 있는 강성도 방정식은 시스템 변수와 변위에 대한 비선형 방정식이므로, 식 (36) 은 비선형 등식형 구속조건과 비선형 부등식형 구속조건을 가진 비선형 목적함수에 대한 최적화 문제이다. 따라서 두가지 형태의 구속조건을 동시에 고려하여 라그랑지 함수를 구성하여 변위와 시스템 변수에 대하여 최적화를 수행하면 변위와 시스템 변수를 동시에 구할 수 있다. 그러나, 강성도 방정식 자체가 비선형이므로 강성도 방정식을 등식형 구속조건으로 고려하면 식(36) 에 라그랑지 1 차 필요조건식이 대단히 복잡하게 된다. 이 논문에서는 이러한 복잡성을 피하기 위하여 강성도 방정식을 최적화 과정에 분리하여 기지의 제어절점의 위치에 대하여 독립적으로 풀고, 여기서 구한 변위에 의하여 부등식형 구속조건을 고려하여 식 (36) 의 최적화 과정을 수행하여 새로운 제어 절점의 위치를 결정하는 일종의 수정된 Newton 방법을 사용한다. 이러한 방법에 의한 최적화 문제는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } \Pi &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n/c} \|\mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}}_i\|^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^{n/c} \|\mathbf{X}_{i+1}^c - \mathbf{X}_i^c\|^2 \text{ with respect to } \mathbf{D} \\ \text{subject to } & \mathbf{c}(\mathbf{D}) \leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (37)$$

식 (37) 에서 정의된 최적화 문제에서는 비선형 부등식형 구속조건이 포함되어 있다. 비선형 부등식형 구속조건을 고려하여 최적화를 수행하게 될 경우 라그랑지 함수가 대단히 복잡해지고 각 최적화 단계 내부에서 또 다른 반복계산이 필요하게 되므로 현재의 시스템 변수에서 선형화한 구속조건을 사용하여 선형 부등식형 구속조건을 가지는 최적화 문제를 반복적으로 푸는 다음과 같은 증분형 최적화 문제를 정의한다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } {}^m\Pi &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nc} \left\| {}^m\tilde{\mathbf{u}}_i - \bar{\mathbf{u}}_i \right\|^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^{nc} \left\| {}^m\mathbf{X}_{i+1}^c - {}^m\mathbf{X}_i^c \right\|^2 \text{ with respect to } {}^m\mathbf{D} \\ \text{subject to } & \mathbf{c}({}^{m-1}\mathbf{D}) + \nabla_D \mathbf{c}({}^{m-1}\mathbf{D}) \cdot ({}^m\mathbf{D} - {}^{m-1}\mathbf{D}) \leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (38)$$

여기서 왼쪽 위첨자  $m$  과  $\nabla_D$  은 반복계산회수와 시스템 변수에 대한 gradient 연산자이다. 식 (38) 을 최적화하기 위하여는 다음과 같은 라그랑지안 1 차 필요조건이 만족되어야 한다.

$$\nabla_D {}^m\Pi + \Lambda \nabla_D {}^{m-1}\mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (39-a)$$

$${}^{m-1}\mathbf{c} + \nabla_D {}^{m-1}\mathbf{c} \cdot ({}^m\mathbf{D} - {}^{m-1}\mathbf{D}) = \mathbf{0} \quad (39-b)$$

여기서  ${}^{m-1}\mathbf{c} = \mathbf{c}({}^{m-1}\mathbf{D})$  이다. 이 논문에서 고려하고 있는 구속조건이 모두 부등식형 구속조건이므로 식 (39-a)의 구속조건에 대한 항과 (39-b) 에는 현 단계의 반복계산에서 active 한 구속조건만을 포함한다. Active 한 구속조건을 판단하기 위하여 Fletcher 의 active set strategy (Luenberger, 1989) 를 적용한다

식(39-a)는 비선형 방정식이므로 시스템 변수  $\mathbf{D}$  에 대하여 선형화하여 매트릭스 형태로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} {}^{m-1}\mathbf{H} \cdot {}^m\mathbf{d} + \Lambda \cdot \nabla_D {}^{m-1}\mathbf{c} &= -\nabla_D {}^{m-1}\Pi \\ \nabla_D {}^{m-1}\mathbf{c} \cdot {}^m\mathbf{d} &= -{}^{m-1}\mathbf{c} \end{aligned} \quad (40)$$

여기서  ${}^{m-1}\mathbf{H}$  는  $\Pi$  에 대한 hessian 행렬이며,  ${}^m\mathbf{d} = {}^m\mathbf{D} - {}^{m-1}\mathbf{D}$  이다.

식(30)에 정의된  $\Pi$  에 대한 정확한 hessian 에는 오차함수의 시스템 변수에 대한 2 차 미분항이 포함되어 있다. 오차함수의 2 차 미분항을 정확히 계산하기 위하여는 변위의 시스템 변수에 대한 2 차 민감도를 계산하여야 한다. 그러나, 변위에 대한 2 차 민감도를 계산하려면 강성도 방정식을 두번 미분하여야 한다.

그러나, 강성도 방정식은 시스템 변수에 대하여 비선형 방정식이므로 강성도 방정식을 두번 미분하는 것은 어렵고 복잡하다. 따라서 이 논문에서는 오차함수의 hessian 행렬을 변위의 1 차 민감도만으로 근사하는 Gauss-Newton 행렬을 사용한다. Gauss-Newton 행렬은 현 반복단계에서의 시스템 변수가 정해에 가까이 있을 경우에는 원 hessian 행렬을 잘 근사하지만, 시스템 변수가 정해에서 멀리 떨어져 있을 경우에는 원 hessian 행렬을 잘 근사하지 못하므로 최적화 초기단계에서 수치적인 불안정성이 발생하여 해가 수렴하지 않을 수 있다. 이러한 현상을 방지하기 위하여 수정된 Luenberger-Marquardt 방법에 기초한 다음과 같은 hessian 행렬을 사용한다.

$${}^{m-1}\mathbf{H} \approx {}^{m-1}\mathbf{G} + \theta\mathbf{I} \quad (41)$$

여기서  $\theta, \mathbf{I}, \mathbf{G}$  는 각각 Marquard 계수, 단위행렬 그리고 오차함수에 대한 Gauss-Newton hessian 을 포함하고 있는 hessian 행렬이며 다음과 같다.

$${}^{m-1}\mathbf{G} = \sum_{i=1}^{nlc} \nabla_D ({}^{m-1}\tilde{\mathbf{u}}_i) \cdot \nabla_D ({}^{m-1}\tilde{\mathbf{u}}_i) + \alpha\mathbf{I}_x \quad (42)$$

여기서  $\mathbf{I}_x$  는 제어절점의 좌표에 해당하는 부분에서는 단위행렬이며, 물성치에 해당하는 부분에서는 0 인 행렬이다. 식(41)에 의해 근사된 hessian 행렬은 기하학적 형상 결정의 문제처럼 불안정한 거동을 보이는 문제의 최적화 과정을 Marquard 계수로 조정함으로써 안정화 시킬 수 있다는 장점이 있다. Marquard 계수가 작아지면 식 (41)에서 정의된 hessian 은 오차함수에 대한 Gauss-Newton hessian 으로 되어 수정된 Newton 방법에 의하여 최적화 과정을 수행하는 것과 같으며, Marquard 계수가 커지면 steepest decent 방법에 의하여 최적화를 수행하는 것과 같게 된다.

Steepest decent 방법을 사용하면 수렴속도는 느리지만 안정된 최적화 과정을 수행할 수 있기 때문에 최적화 과정이 불안정해지면 Marquard 계수를 증가 시켜 최적화 과정을 steepest decent 방법이 지배적으로 작용하도록 하고, 최적화 과정이 안정화되면 Marquard 계수를 감소시켜 Newton 방법이 지배적으로 작용하여 빠른 수렴성을 가지도록 한다. 최적화 과정의 안정성 여부를 판단하기 위하여 다음과 같은 최적화 조건의 약 조건식 (Weak form) 을 사용한다.

$${}^m \Pi < {}^{m-1} \Pi \quad (43)$$

즉 현 단계에서 계산된 시스템 변수가 전 단계에서 계산된 시스템 변수 보다 목적함수를 작게 만든다면 현 최적화 과정은 안정한 것으로 판단하여 Marquard 계수를 감소시키고, 그 반대의 현상이 발생하면 Marquard 계수를 감소시킨다. 이 논문에서는 초기 Marquard 계수값으로 10,000 을 사용하며, 최적조건의 약 조건식의 만족 여부에 따른 Marquard 계수의 증감율로서 10 을 사용하였다.

식 (40)은 선형화된 구속조건에 대한 방정식이므로 식 (40)을 풀어 구한 시스템변수는 원래의 비선형 구속조건을 만족시키지 못할 수 있다. 따라서, 식 (40)을 풀어 구한 시스템 변수가 원래의 비선형 구속조건을 만족시키지 못하면 시스템 변수가 모든 구속조건을 만족시키도록 return mapping 방법에 의하여 시스템변수를 수정하여야 한다. 이 논문에서는 다음과 같이 Gradient projection 법에 기초한 return mapping 을 사용하였다. (그림 5)

$${}^m \mathbf{D}^k = {}^m \mathbf{D}^{k-1} - \nabla \mathbf{c}_a ({}^{m-1} \mathbf{D}) \cdot {}^{m-1} \mathbf{B}_a^{-1} \cdot \mathbf{c}_a^T ({}^m \mathbf{D}^{k-1}) \quad (44)$$

여기서,  $k$  는 return mapping 을 위한 반복계산의 회수이며,  $\mathbf{c}_a$  는 active 한 부등식형 구속조건이다. 식 (44)에서 사용된 식의 정의는 다음과 같다.

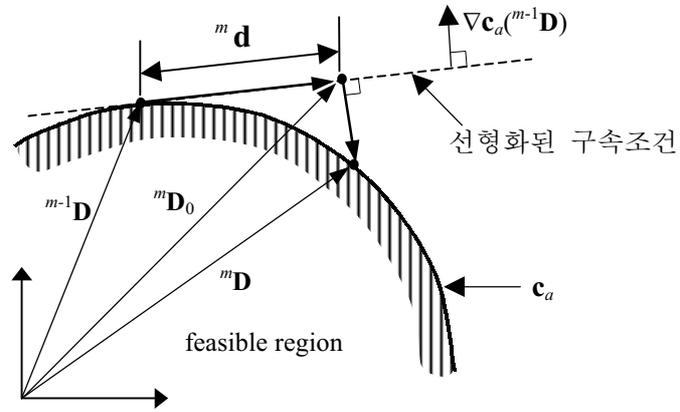


그림 5. Return Mapping

$${}^{m-1}\mathbf{B}_a = \nabla \mathbf{c}_a^T(^{m-1}\mathbf{D}) \cdot \nabla \mathbf{c}_a(^{m-1}\mathbf{D})$$

$${}^m\mathbf{D}^0 = {}^{m-1}\mathbf{D} + {}^m\mathbf{d}$$

### 3.3 민감도(Sensitivity)

이 논문에서는 강성도 방정식을 시스템 변수에 대해 직접 미분하여 최적화 과정에서 필요한 변위의 민감도를 구한다. 민감도를 구하기 위하여 체적력과 경계면에 작용하는 표면력은 정의영역의 변화에 대해 독립적이라 가정할 때 기준영역에서의 변분식 (16)을 시스템 변수에 대해 직접 미분하면 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
& \sum_e \int_{\Omega_1^e + \Omega_2^e} (\nabla_r \hat{\mathbf{u}}^e \cdot \bar{\mathbf{J}}_{,m}^e) : \mathbf{C} : (\nabla_r \mathbf{u}^e \cdot \bar{\mathbf{J}}^e) \tilde{\mathcal{J}}^e d\Omega + \\
& \sum_e \int_{\Omega_1^e + \Omega_2^e} (\nabla_r \hat{\mathbf{u}}^e \cdot \bar{\mathbf{J}}^e) : \mathbf{C}_{,m} : (\nabla_r \mathbf{u}^e \cdot \bar{\mathbf{J}}^e) \tilde{\mathcal{J}}^e d\Omega + \\
& \sum_e \int_{\Omega_1^e + \Omega_2^e} (\nabla_r \hat{\mathbf{u}}^e \cdot \bar{\mathbf{J}}^e) : \mathbf{C} : (\nabla_r \mathbf{u}^e \cdot \bar{\mathbf{J}}_{,m}^e) \tilde{\mathcal{J}}^e d\Omega + \\
& \sum_e \int_{\Omega_1^e + \Omega_2^e} (\nabla_r \hat{\mathbf{u}}^e \cdot \bar{\mathbf{J}}^e) : \mathbf{C} : (\nabla_r \mathbf{u}_{,m}^e \cdot \bar{\mathbf{J}}^e) \tilde{\mathcal{J}}^e d\Omega + \\
& \sum_e \int_{\Omega_1^e + \Omega_2^e} (\nabla_r \hat{\mathbf{u}}^e \cdot \bar{\mathbf{J}}^e) : \mathbf{C} : (\nabla_r \mathbf{u}^e \cdot \bar{\mathbf{J}}^e) \tilde{\mathcal{J}}_{,m}^e d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{45}$$

여기서  $(\cdot)_{,m} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial D_m}$  이다. 식 (45)에서 물성치의 제어절점 좌표에 대한 미분과 제

어절점 좌표의 물성치에 대한 미분은 영이다.

제어절점  $m$ 에 대한 어떤 유한요소  $e$ 의 역 Jacobian의 미분값은 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{\mathbf{J}}_{,m}^e = -\bar{\mathbf{J}}^e \cdot \frac{\partial \mathbf{J}^e}{\partial \mathbf{X}_m^c} \cdot \bar{\mathbf{J}}^e \tag{46}$$

여기서  $\mathbf{J}^e$ ,  $\bar{\mathbf{J}}^e$ 은 각각 유한요소  $e$ 의 Jacobian이고 그리고 역 Jacobian이다. 식

(44)의 우변의 Jacobian의 제어절점의 좌표에 대한 미분값은 식 (33)을 사용하여 표시할 수 있다.

$$\mathbf{J}_{,m}^e = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \square} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}^e}{\partial \mathbf{X}_m^c} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \square} \cdot \mathbf{Q}_m^e \tag{47}$$

여기서 시스템  $\mathbf{Q}_m^e$ 은  $\mathbf{Q}^e$ 의  $m$ 번째 행이다. 제어절점 좌표에 대한 Jacobian의 행렬식에 대한 미분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_{,m} &= \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \mathbf{X}_m^c} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_m^c} (e_{ij} J_{i1} J_{j2}) \\
&= \frac{\partial J_{11}}{\partial \mathbf{X}_m^c} J_{22} + J_{11} \frac{\partial J_{22}}{\partial \mathbf{X}_m^c} - J_{12} \frac{\partial J_{21}}{\partial \mathbf{X}_m^c} - \frac{\partial J_{12}}{\partial \mathbf{X}_m^c} J_{21}
\end{aligned} \tag{48}$$

여기서  $J_{ij}$  는 Jacobian 성분이다. 식 (46)-(48)를 식 (45)에 대입하면 풀면 변위의 민감도를 계산할 수 있다.

### 3.4 수치해석 알고리즘

다음은 이 논문에서 제안된 시스템 변수 추정을 위한 수치해석 알고리즘이다.

- I. 최적화 문제를 초기화한다. ( $i=1, {}^1\mathbf{D}^1, {}^1\alpha=1$ )
- II. Marquardt 상수를 초기화한다. ( ${}^i\theta^1=0$ )
- III.  ${}^i\mathbf{D}^1$  에 대한 유한요소망을 구성하고 변위를 계산하여 변위 오차 함수를 구성하고, 정규화 함수값을 계산하여  ${}^i\Pi^1$  를 구한다. ( ${}^i\Pi^1 = {}^i\Pi_d^1 + {}^i\Pi_r^1$ )
- IV.  ${}^i\Pi_d^1 < {}^i\Pi_r^1$  이고  ${}^i\alpha > 10^{-10}$  이면  ${}^{i+1}\alpha = 0.1 \times {}^i\alpha$ ,  ${}^{i+1}\mathbf{D}^1 = {}^i\mathbf{D}^1$ ,  $i=i+1$  로 하여 III 으로 돌아간다.
- V.  $k=1$  로 놓고 다음을 반복한다.
  - 1)  ${}^i\mathbf{D}^k$  에 대하여 비선형 구속 조건들을 선형화한다.
  - 2) 변위 오차 함수와 정규화 함수의 hessian 행렬을 계산하여 목적함수의 hessian 행렬을 계산한다. ( ${}^i\mathbf{H}^k = {}^i\mathbf{H}_d^k + {}^i\mathbf{H}_r^k + {}^i\theta^k \mathbf{I}$ )
  - 3) 식(40)에 의해  $\mathbf{d}^k$  를 구한다.  ${}^i\mathbf{D}^{k+1} = {}^i\mathbf{D}^k + \mathbf{d}^k$  로 놓는다

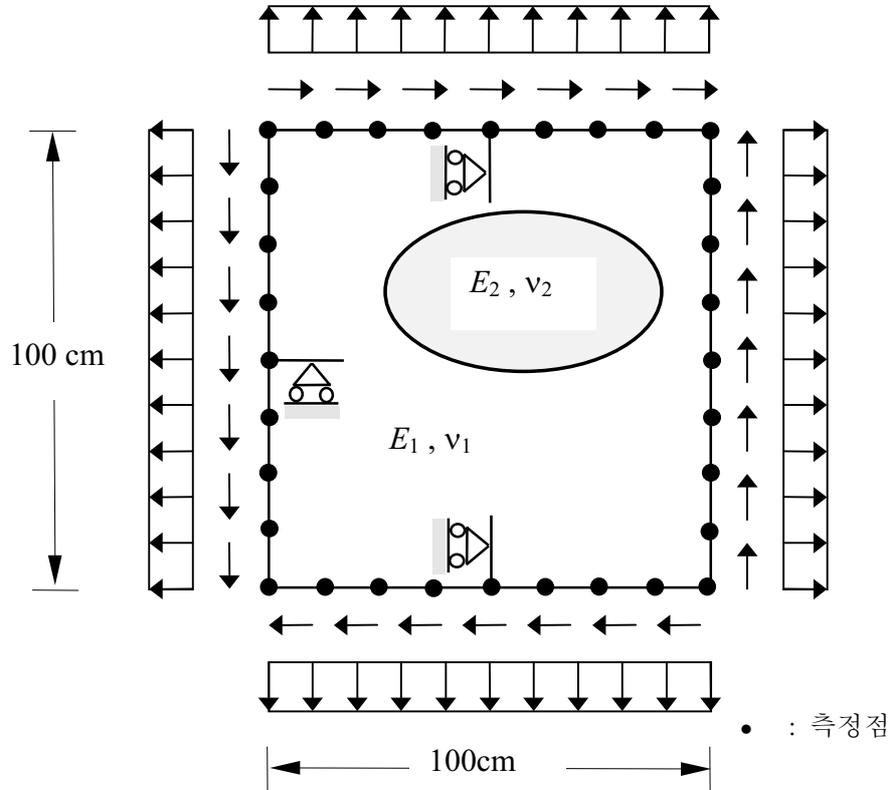
- 4)  ${}^i \mathbf{D}^{k+1}$  를 식(44)에 의해 비선형 구속 조건에 대한 return mapping 을 수행한 후 feasibility 를 검사한다. Feasible region 으로의 return mapping 이 수렴하지 않을 경우  ${}^i \theta^k$  를 증가시켜 2) 로 돌아간다.
  - 5)  ${}^i \mathbf{D}^{k+1}$  에 대한 유한요소망을 구성하고 변위를 계산하여 변위 오차 함수를 구성하고, 정규화 함수값을 계산하여  ${}^i \Pi^{k+1}$  을 구한다.
  - 6)  ${}^i \Pi^{k+1} < {}^i \Pi^k$  을 만족하지 않으면  ${}^i \theta^k$  를 증가시켜 2) 로 돌아간다.
  - 7)  ${}^i \Pi_d^{k+1} < {}^i \Pi_r^{k+1}$  이고  ${}^i \alpha > 10^{-10}$  이면  ${}^{i+1} \alpha = 0.1 \times {}^i \alpha$ ,  ${}^{i+1} \mathbf{D}^1 = {}^i \mathbf{D}^{k+1}$ ,  $i=i+1$  로 놓고 II 로 돌아간다.
  - 8) 수렴조건을 만족하지 않으면  ${}^i \theta^{k+1} = 0.1 \times {}^i \theta^k$ ,  $k=k+1$  로 놓고 1) 로 돌아간다.
  - 9) 수렴조건을 만족할 경우 최적화를 종료한다.
- Marquardt 상수  ${}^i \theta^k$  의 증가시  ${}^i \theta^k = 0$  이면  ${}^i \theta^k = 1$  로,  ${}^i \theta^k \neq 0$  이면  ${}^i \theta^k = 10 \times {}^i \theta^k$  로 증가시킨다.

## 4. 해석 예제

2 차원 평면응력 상태에 있는 각변의 길이가 1 m 인 정사각형 유한체의 내부에 포함된 여러가지 형태의 함유물의 기하학적 형상과 물성치를 추정하기 위하여 3 개의 예제에 이 논문에서 제안한 시스템 변수 기법을 적용한다. 3 개의 예제에서 공통적으로 사용되는 예제 문제의 기하학적 형상, 재료의 물성치, 측정점의 위치 그리고 경계조건은 그림 6 에 주어져 있다. 외부 유한체와 함유체는 각각 강재와 스티의 물성치를 가진다. 예제 1 에서는 함유체의 중심과 유한체의 중심이 일치하지 않고 함유체의 형상이 타원인 경우에 대하여 정규화 계수에 따른 시스템 변수 추정 기법의 거동을 분석한다. 예제 2 에서는 함유체의 중심이 유한체 중심에서 떨어져 있는 타원에 대하여 측정변위의 정도의 변화, 하중조건의 변화에 대해 제안된 방법의 거동을 분석하였고 예제 3 에서는 함유체의 형상이 마름모인 경우와 왜곡된 타원인 경우에 대하여 제안된 방법을 적용하여 함유체의 형상과 물성치를 추정하였다.

### 4.1 예제 1 - 정규화 기법에 따른 시스템 변수 추정 기법의 거동 분석

이 예제에서의 함유체 형상은 x 방향으로의 장경이 40 cm 이고 y 방향으로의 단경이 20 cm 인 타원이며, 타원의 중심은 유한체의 중심으로부터 x 방향으로 5 cm, y 방향으로 10 cm 떨어져 있다. 유한 요소 해석을 위해 전체 영역을 LST 삼각형요소 128 개와 289 개의 절점을 사용하여 이산화 하였다. 함유체의 초기 형상은 반지름이 30cm 인 원으로 가정하였으며, 제어절점의 개수는 16 개이다.



- 하중단계

- 1:  $q_x = 1.8 \text{ GPa}$
- 2:  $q_y = 1.8 \text{ GPa}$
- 3:  $\tau_{xy} = 1.8 \text{ GPa}$

- 물성치

- 1) 외부영역 - 강철  
 $E_1 = 210 \text{ GPa}$   
 $\nu_1 = 0.3$
- 2) 내부영역 - 놋쇠  
 $E_2 = 100 \text{ GPa}$   
 $\nu_2 = 0.34$

그림 6. 예제의 기하학적 형상, 재료의 물성치, 측정점의 위치 및 경계조건

합유체의 초기 형상과 제어절점의 위치는 각각 그림 6에 굵은 실선과 작은 원으로 표시되어 있다. 합유체의 초기 물성치는 탄성계수 150 GPa, 포아송비 0.32로 가정하였다. 유한체의 외부 경계면에 3가지 종류의 정적 하중을 각각 독립적으로 재하하여 각 하중조건에 대하여 독립적으로 측정점에서 정적변위를 측정하였다. 총 측정점의 개수는 32개이며, 측정점의 위치는 그림 6에 까만 원으로 표시하였다. 측정 변위로는 합유체의 기하학적 형상과 물성치를 이용한 유한 요소 해석을 수행하여 구한 변위를 사용하였다. 비선형 부등식형 구속상수  $\mu$ 는 0.05를 적용하였다. 시스템 변수인 제어 절점의 좌표, 탄성계수, 포아송비의 상대 오차를 매 반복단계 각각 계산하여 동시에  $10^{-4}$ 보다 작을 때 최적화를 종료하였다. 정규화 계수 수정기법을 사용할 경우에는 계수 수정률을 1/10, 정규화 계수의 하한값을  $10^{-10}$ 으로 설정하였다.

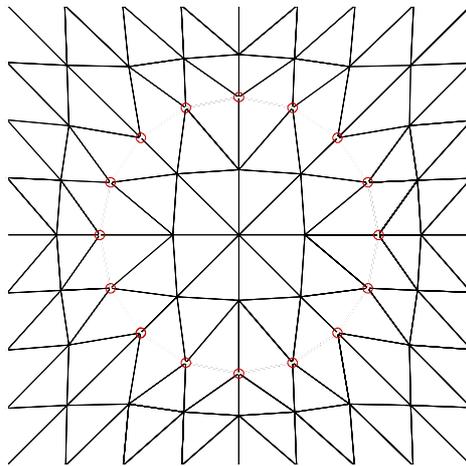


그림 7 예제 1에서의 초기 유한요소망

표 1. 정규화계수에 따른 수렴회수 및 추정오차

$\alpha$	수렴 회수	추정 오차 (%)		
		형상의 면적오차	탄성계수	포아송비
0	151	0.000	0.000	0.000
$10^{-10}$	115	-0.552	-0.249	0.003
$10^{-9}$	65	-3.264	-2.377	0.324
$10^{-8}$	37	-18.059	-14.483	3.794
수정기법	14	-0.323	-0.245	0.003

표 1은 정규화 계수에 따른 수렴회수, 실제 형상의 면적과 추정된 형상의 면적의 상대오차 및 실제 물성치와 추정 물성치의 상대오차를 나타낸다.  $\alpha$ 가 0일 때 즉 정규화를 고려하지 않을 때는 정확히 실제 형상과 물성치를 추정하였으나 수렴 속도가 정규화를 고려한 경우보다 매우 느리다는 것을 알 수 있다. 표 1에 의하여 정규화 기법이 해의 수렴 속도를 가속시키고 있음을 알 수 있다. 그림 8과 표 1에서 보인 바와 같이 정규화 계수가 작아질수록 정규화 기법의 영향이 줄어들어 수렴속도는 느려지나 보다 정확한 형상을 추정하고 있으며, 정규화 계수가 커지면 정규화 함수의 영향이 최적화 과정에서 지배적으로 작용하게 되어 수렴속도는 빨라지나 추정형상이 부정확해 진다. 이러한 거동에 의하여 최적화 과정이 진행되어 변위 오차 함수값이 작아지게 되면 정규화 계수를 적절히 감소시켜야만이 빠른 수렴속도와 동시에 높은 정도의 추정치를 얻을 수 있다는 것을 판단할 수 있으며, 정규화 계수 수정 기법의 타당성을 확인할 수 있다. 정규화 계수 수정 기법을 사용하는 경우가 수렴속도가 가장 빠르며, 정규화 기법을 사용하는 경우에는 가장 높은 정도를 보이고 있다. 이러한 거동은 이 논문에서 제안한 정규화 계수 수정법에 의하여 최적화 과정이 대단히 효과적으로 수행되고 있음

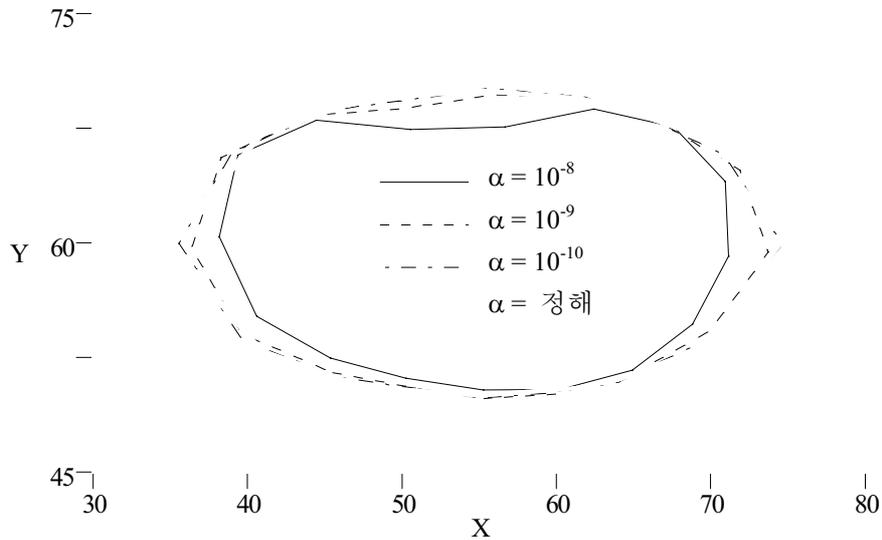


그림 8. 정규화 계수에 따른 추정 합유체 형상의 변화.

을 입증하고 있다. 반복 계산회수에 따라 변위 오차함수값을 도시한 그림 9에 의하여 정규화 기법이 최적화 과정의 수렴속도에 미치는 영향을 잘 알 수 있다. 정규화 기법을 적용하지 않는 경우와 고정된 정규화 계수  $10^{-9}$  를 사용한 경우 초기 단계에서는 거의 차이를 발견할 수 없다. 이는 초기 단계에서는 정규화 함수값의 크기가 변위 오차함수값의 크기에 비교하여 작기 때문이다. 그러나, 최적화 과정이 진행되어 변위 오차 함수값과 정규화 함수값이 같아 지는 38 번 반복 계산 단계 부근에서부터는 정규화 기법을 적용한 경우의 변위 오차함수값이 정규화 과정을 적용하지 않은 경우에 비하여 훨씬 빨리 감소하고 있음을 알 수 있다. 정규화 계수 수정 기법을 사용하게 되면 초기 단계부터 변위 오차 함수값과 정규화 함수값의 크기가 항상 비슷한 비율을 유지하기 때문에 초기 단계부터 다른 경우에 비하여 매우 빠른 수렴 속도를 보이고 있다. 그림 9는 정규화 계수 수정기법에 의하여 수렴된 최종 유한 요소망과 추정 형상을 나타내고 있다.

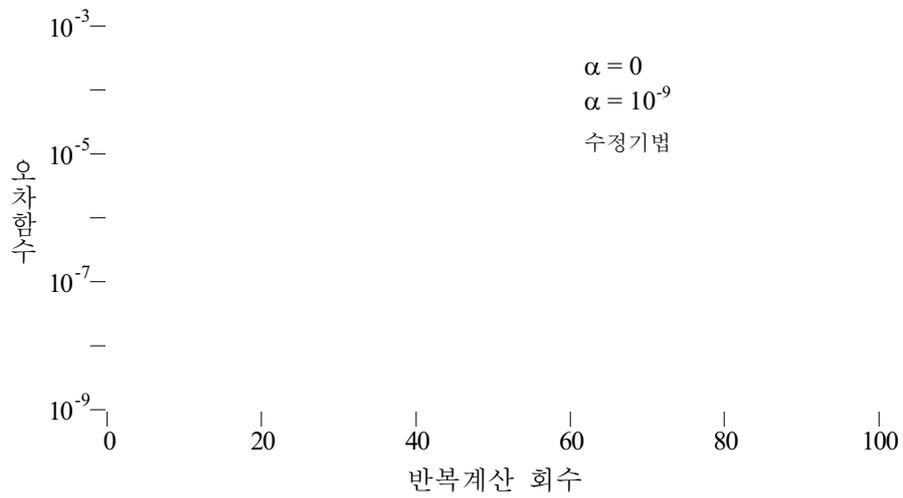


그림 9 반복계산 회수에 따른 오차함수의 변화.

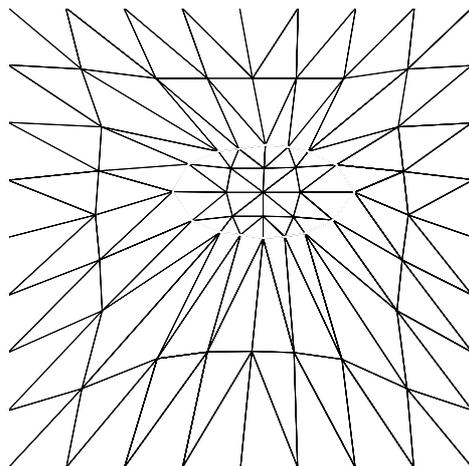


그림 10. 정규화 계수 수정기법에 의하여 수립된 최종 유한요소망과 추정 형상

#### 4.2 예제 2 - 측정 변위의 정도와 양에 따른 거동 분석

이 예제에서는 정규화 계수 수정기법을 적용하여 측정 변위의 유효자리 개수의 변화와 하중의 조건의 변화에 대한 제안된 시스템 변수 추정기법의 거동 변화를 분석하였다. 함유체의 형상 및 위치 그리고 유한체의 기하학적 형상, 물성치, 하중조건, 경계조건등은 예제 1 과 동일하며 전체 영역을 LST 삼각형 요소 512 개와 1089 개의 절점으로 세분화하여 이산화하였고, 제어절점의 개수는 32 개이다. 함유체의 초기형상은 예제 1 에서와 같이 반경 30 cm 인 원으로 가정하였다. 제어절점의 위치와 초기 유한요소망은 그림 11 에 주어져 있다. 그림 비선형 부등식형 구속조건 상수  $\mu$  는 0.01 을 사용하였다.

측정치의 정도를 조정하기 위하여 그림 5 에서 보인 3 개의 하중조건에 대한 유한요소 해석에서 구한 측정점에서의 변위를 소수점 이하 4 째 자리, 7 째 자리 13 째 자리에서 반올림하여 3 개, 6 개 12 개의 유효자리를 가지는 측정치를 사용하였다. 이는 각각 최소 측정단위  $10^{-2}$  mm,  $10^{-5}$  mm,  $10^{-11}$  mm 에 해당한다.

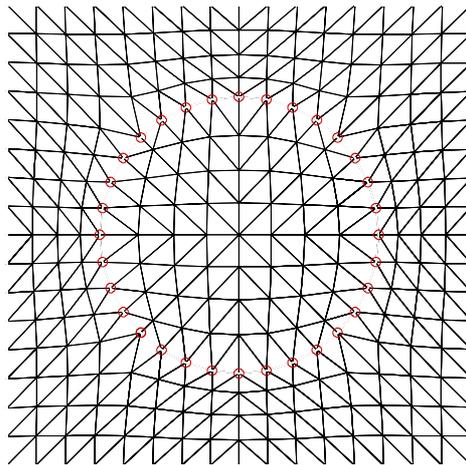


그림 11. 예제 2 와 예제 3 에 대한 초기 유한요소망 및 제어 절점의 위치

표 2. 측정치의 유효자리 수에 따른 수렴회수 및 추정오차

측정치 유효자리	수렴 회수	추정 오차 (%)		
		형상의 면적오차	탄성계수	포아송비
3	53	-11.845	-9.073	1.302
6	21	-0.312	-0.213	0.022
12	21	-0.324	-0.221	0.024

표 2에는 사용된 측정 변위의 유효자리 개수에 따른 수렴회수, 실제 기하학적 형상의 면적과 추정된 기하학적 형상의 면적에 대한 상대오차 및 실제 물성치와 추정 물성치의 상대오차가 주어져 있다. 유효자리 개수가 6개인 경우와 유효자리 12개인 경우가 수렴속도와 수렴정도에 있어서 거의 비슷함을 알 수 있다. 측정 변위의 정도는 수렴성과 추정오차에 큰 영향을 끼치나 어느 정도 이상의 측정 변위를 사용하면 수렴 속도와 해의 정밀도에 큰 영향을 미치지 않음을 알 수 있다. 그림 12은 각 경우에 대하여 추정된 함유체의 형상을 보이고 있다.

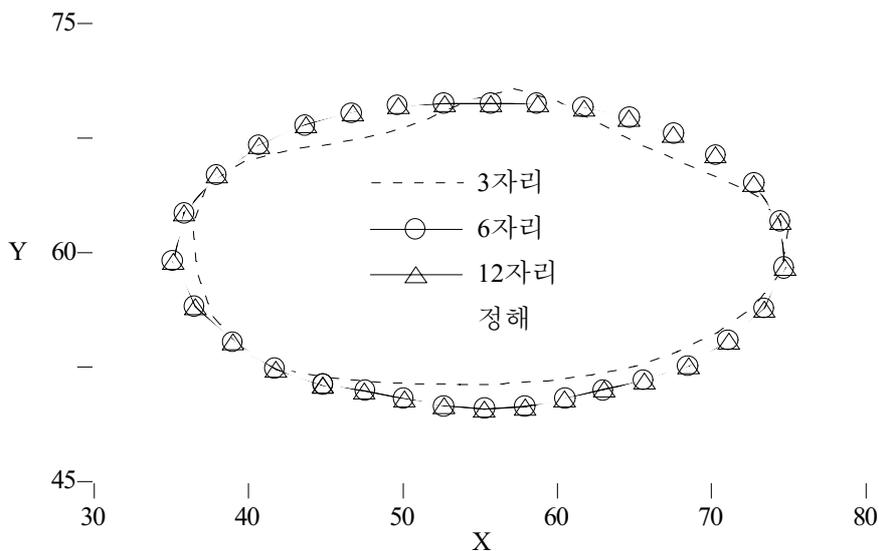


그림 12. 측정치의 유효자리 개수 변화에 따른 추정된 함유체의 형상

표 3. 하중조건의 변화에 따른 수렴회수 및 추정오차

하중조건 개수	수렴 회수	추정 오차(%)		
		형상의 면적오차	탄성계수	포아송비
2	23	-0.806	-0.618	0.156
3	21	-0.324	-0.221	0.024

측정 변위의 개수에 따른 시스템 변수 추정법의 거동을 분석하기 위하여 그림 6에서 주어진 3개의 하중조건 모두를 사용한 경우와 x-방향 표면력과 y-방향 표면력에 대한 2개의 하중조건에 대한 측정 변위를 사용한 경우에 대하여 제안된 방법을 적용하였다. 두 경우 모두 측정 변위의 유효자리 수는 12개이다. 각 경우에 대한 수렴 회수와 추정오차가 표 3에 주어져 있다. 그림 11에는 각 경우에 추정된 함유체의 형상이 주어져 있다. 각 경우에 추정오차 및 수렴회수에 있어서 큰 차이를 보이고 있지 않다. 이에 의하여 제안된 시스템 변수 추정법의 거동이 측정점의 개수가 시스템 변수보다 많을 경우에는 측정점 개수에 큰 영향

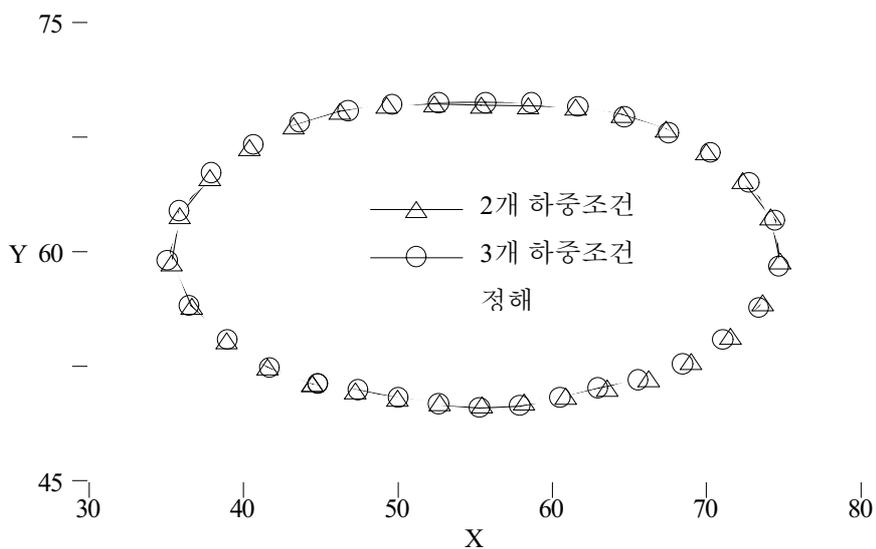


그림 13. 측정 변위에 대한 하중조건의 변화에 따른 추정된 함유물의 형상

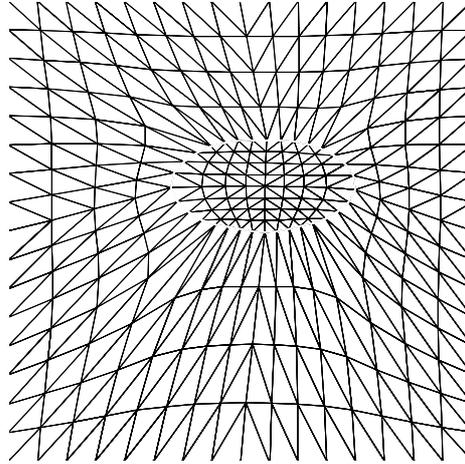


그림 13. 3 가지 하중조건에 대하여 수립된 유한요소망의 형상

을 받지 않음을 알 수 있다. 그림 13 에 3 가지 하중조건에 대하여 최종적으로 수립된 유한요소망의 형상이 주어져 있다.

#### 4.3. 예제 3 - 함유체 형상에 따른 거동 분석

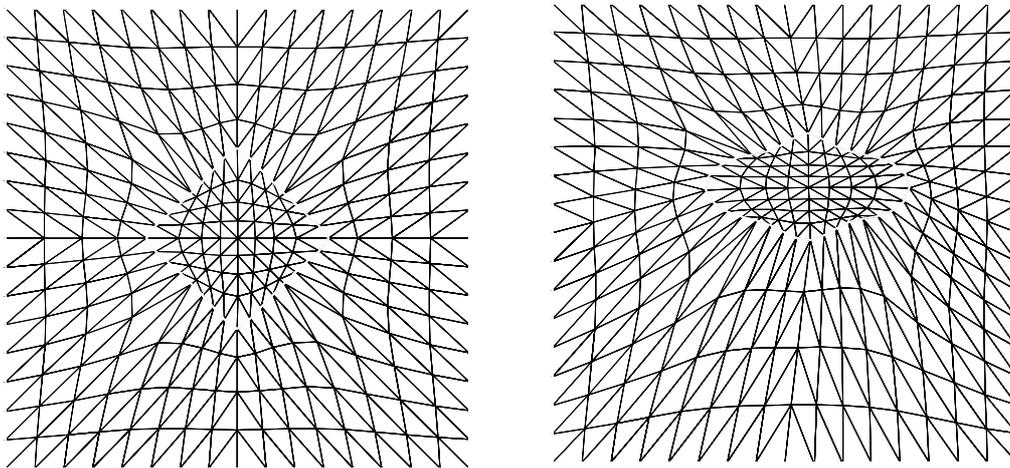
이 예제에서는 내부 함유체의 형상이 복잡할 경우에 대한 제안된 방법의 거동을 파악하기 위하여 함유체의 형상이 마름모일 경우와 왜곡된 타원일 경우에 대하여 시스템 변수 추정을 실시하였다. 마름모의 중심은 외부 유한체의 중심과 일치하며 왜곡된 타원의 중심 위치는 예제 1 과 동일하다. 왜곡된 타원의 형상은 다음과 같은 극좌표계에서의 식을 이용하여 구성하였다.

$$r = \sqrt{\frac{(20 \times 10)^2}{(10 \cos \theta)^2 + (20 \sin \theta)^2}} + 2 \cos 4\theta \quad (49)$$

표 4. 함유체의 형상에 따른 수렴회수 및 추정오차

함유체의 형상	수렴 회수	추정 오차 (%)		
		형상의 면적오차	탄성계수	포아송비
마름모	18	-0.365	-0.287	0.024
왜곡된 타원	23	2.084	1.406	-0.224

표 4 에서 보이듯이 왜곡된 타원 경우가 마름모의 경우가 수렴성이 느리며 추정 오차도 약간 크다. 이는 가정한 초기 형상이 마름모의 경우 보다 왜곡된 타원의 경우가 정해에서 멀리 떨어져 있기 때문으로 판단되며, 비선형의 문제의 일반적 경향이다. 왜곡된 타원의 경우에도 추정된 시스템 변수들은 공학적으로 충분히 정확한 값으로 판단된다. 그림 13 에는 각 경우에 대한 수렴후의 유한요소망과 추정된 함유체의 기하학적 형상이 주어져 있다.



a. 마름모

b. 왜곡된 타원

그림 15. 각 함유체 형상에 대하여 수렴된 유한요소망의 형상

## 5. 결 론

영역변수화 기법에 기초한 유한요소법에 의하여 2 차원 유한체내에 포함되어 있는 미지의 함유체의 기하학적 형상과 물성치를 결정하기 위한 시스템 변수 추정법을 제안하였다. 외부 유한체와 함유체의 내부영역의 이산화된 경계면을 정의하는 제어절점의 좌표와 함유체를 구성하고 있는 재료의 탄성계수와 포아송비를 시스템 변수로 취하였다. 주어진 하중하에서 유한체의 외부 경계면에서 측정된 정적 변위와 유한요소법에 의하여 계산된 변위의 오차를 최소화하는 시스템 변수를 최적화 과정에 의하여 계산하였다.

기하학적 형상을 모르는 함유체를 포함하고 있는 유한체에 대한 지배방정식의 변분식을 기지의 영역에 대하여 표시하기 위하여 영역변수화 기법을 사용하였다. 영역변수화 기법에 의하여 기지의 영역에 대하여 유도된 변분식을 이산화하기 위하여 등매개 변수 유한요소를 사용하였으며, 유한체 내부 절점의 위치를 미지의 제어절점의 위치에 대하여 표시하기 위하여 Laplace 사상을 이용하였다.

시스템 변수를 추정하기 위한 최적화 문제의 해의 비유일성에서 기인하는 수치적 불안정성을 해결하고 해를 빠르게 수렴시키기 위하여 정규화 기법을 도입하였다. 함유체의 이산화된 경계의 길이로 정의되는 정규화 함수를 제안하였으며 정규화 효과를 극대화 시키기 위하여 정규화 계수 수정법을 제안하였다.

최적화 과정에서 결정된 제어절점의 위치가 유한요소 형상의 극심한 왜곡을 유발하게 되면 유한요소법에 의한 해석이 불가능하게 되므로 이를 방지하기 위하여 각 유한요소의 면적이 어느 한계 이하로 작아질 수 없도록 구속조건을 사용하였다. 유한요소의 면적은 각 유한요소에 포함된 절점 좌표에 대하여 2 차식으로

주어지므로 시스템 변수 추정법은 비선형 부등식형 구속 조건을 가지는 비선형 목적함수에 대한 최적화 문제로 정의된다. 목적함수와 구속조건이 모두 비선형으로 정의되는 최적화 문제를 풀기위하여 비선형 구속 조건을 선형화시킨 후 원래의 문제를 선형 구속조건을 가지는 최적화 문제로 근사시켜 반복적으로 풀어 최적화를 수행하였다. 최적화 과정은 수정된 Luenbeger-Marquardt 방법을 사용하였으며, 구속조건은 Fletcher 의 active set strategy 를 사용하여 고려하였다.

제안된 기법을 세 가지 예제에 대하여 적용하여 제안된 변수 추정 기법의 타당성을 검증하였다. 첫번째 예제를 통하여 이 논문에서 제안된 정규화 함수 및 정규화 계수 수정기법의 정당성 및 효율성을 보였다. 두번째 예제에서는 측정치의 정도와 측정점의 개수에 따른 제안된 시스템 변수 추정 추정 기법의 거동을 분석하였으며, 세번째 예제에서는 복잡한 형상을 가지는 함유체에 대하여 제안된 방법을 적용하였다. 세 가지 예제에서 제안된 시스템 변수 기법은 정확하게 시스템 변수를 추정하였으며, 안정적인 수치적 거동과 빠른 수렴성 그리고 보였다. 제안된 방법은 측정점의 개수와 측정 변위의 정도에 크게 영향을 받지 않았으며, 비교적 복잡한 함유체의 형상도 정확히 추정하였다.

## 참고문헌

- 1 A.Cividini,L.Jurina and G.Gioda,”Some Aspects of ‘Characterization’ Problem in Geomechanics ” ,J.Rock Mech.Min.Sci.&Geomech.Abstr.Vol.18,pp.487-503
- 2 D.S.Schnur and Nicholas Zabarar,”An Inverse Method for Determining Elastic Material Properties and a Material Interface”,in International Journal for Numerical Methods in Engineering,Vol.33,2039-2057(1992)
- 3 G.V.Reklaitis ,A.Ravindran and K.M.Ragsdell, Engineering Optimization Method and Applications ,A Wiley-Interscience Publication
- 4 Haber, R., Shephard M. S., Abel, J. F., Gallagher, R. H. & Greenberg, D. P. , “A General Two-Dimensional, Graphical Finite Element Preprocessor Utilizing Discrete Transfinite Mapping” , *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 17: 1015-1044, . 1981
- 5 Keith D.Hjelmstad,Sharon L.Wood and Stephon J. Clark, ”Parameter Estimation in Complex Linear Structures”,Department of Civil Engineering University of Illinois at Urbana-Champaign,Illinois,pp 1-70(1990)
- 6 Koh, H. M., Lee, H. S., and Jeong, U. Y. , “An Incremental Formulation of the Moving-

- Grid Finite Element Method for the Prediction of Dynamic Crack Propagation,” in Nuclear Engineering and Design, Vol. 158 (1995), pp. 295-309,
- 7 Lawrence E. Malvern, Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, Prentice-Hall,inc., 1969
  - 8 Luenberger, D. G. , Linear and Nonlinear Programming , 2<sup>nd</sup> edition. Addison-Wesley : Reading, Massachusetts, 1989
  - 9 Mohammad-reza Banan,and Keith D.Hjelmstad, ”Identification of Structural Systems from Measured Response” , Structural Research Series No.579, pp. 142-162
  - 10 O. M. Alifanov and E. A. Artyukhin, “Regularized Numerical Solution of Nonlinear Inverse Heat-Conduction Problem” , *Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal*, Vol.29, No1, pp. 159-164, July, 1975
  - 11 Phelan and Haber, R. B., "Sensitivity Analysis of Linear Elastic Systems using Domain Parameterization and a mixed Mutual Energy Principle" , *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* Vol. 77 (1989), pp. 31-59.
  - 12 S. N. Atluri, and T. Nishioka, “Numerical studies in Dynamic Fracture Mechanics International Journal of Fracture” 27 (1985), pp. 245-261.
  - 13 Tanaka, M., Yamagiwa, K. , “A Boundary element method for some inverse problems in

elastodynamics” , *Applied Mathematical Modelling* 13: 307-312, 1989

## ABSTRACT

This paper presents a system identification scheme to determine geometric shape and elastic material properties of an inclusion in a finite body. Material properties and the coordinates of control nodes that represent discretized boundary of an inclusion are selected as the system parameters. The parameters are identified by minimizing the least squared errors between the measured displacement field and the calculated displacement field by finite element model.

The domain parameterization technique is adopted to deal with the shape variation of an inclusion. Variational statement in the referential configuration is discretized by utilizing isoparametric mapping and Laplace mapping. Regularization technique is employed to stabilize the minimization process by imposing regularization function defined by discretized surface length of an inclusion. The scheme of updating regularization factor is proposed for maximizing regularization effect.

To prevent unreasonable mesh distortion leading to non-unique isoparametric mapping and negative element area, nonlinear constraint is imposed on each element. To maintain feasibility of the solution calculated by linearized constraint in each iteration, return mapping algorithm based on the gradient projection method is adopted. The modified Levenberg-Marquardt method with Fletcher's active set algorithm is adopted for the minimization process. The sensitivity of displacement with respect to design variables is obtained by the direct differentiation of the variational statement of the equilibrium equation. The validity of the proposed method is demonstrated through three examples.

### Key Word

Domain parameterization technique, Regularization, Return mapping, Modified Levenberg-Marquardt method, Direct differentiation, Sensitivity

## 감사의 글

이 논문이 나오는 마지막까지 옆에서 수 없는 격려와 조언을 아끼지않고, 학문 탐구를 위한 기본적인 자세부터 차근차근 지침해 주셨던 이 해성 선생님께 깊은 감사를 드립니다. 그리고 모자란 저에게 많은 것을 가르쳐 주셨던 장승필 교수님, 고현무 교수님, 오병환 교수님, 김재관 교수님께도 깊은 감사를 드립니다. 학교에서 배운 많은 지식과 교양을 가지고 사회에서도 열심히 살겠다고 약속드리고 싶습니다. 2년여 동안 정들었던 연구실을 떠나며 많은 추억들이 떠오릅니다. 대학원 입학울 같이하고 늘 가까이 있으며 함께 고락을 같이 했던 현우, 술잔을 기울이며 미래를 고민했던 천종이, 믿음직하고 꼼꼼한 우리의 윤석이, 굳은 한국인의 표상, 하먼된다의 문성이, 연구실의 꽃이며 다정다감한 경남이 누나, 그리고 우리 연구실의 미래 기석이, 종승이와의 뜻깊은 추억을 가슴속 간직하고 저는 떠나갑니다. 더 많은 것을, 더 열정적으로 배우고 연구하고 싶은 마음을 뒤로한 채... 앞으로 저가 걸어가는 길은 비록 험난하고 유혹도 많겠지만 늘 正道를 향해 열심히 걸어나갈 것입니다. 끝으로 지금 이 순간까지 멀리서 나를 지켜보고 감싸주시는 아버지, 어머니께 깊이 감사드리고 말없이 많은 도움을 준 진희와 동생들에게도 고마움을 전합니다.