

공학석사학위논문

점성을 고려한

유체-구조물 상호작용의 시간영역 해석

Time-Domain Analysis of Fluid-Structure Interaction

Considering Viscous Fluid

2002 년 2 월

서울대학교 대학원

지구환경시스템공학부

안 양 광

초록

기존의 유체-구조물 상호 작용에 관한 연구는 대부분 대상 유체를 이상 유체로 가정한 경우가 많으며 유체의 점성을 고려한 연구는 거의 이루어지지 않았다. 따라서 유체의 점성의 영향을 고려하는 연구가 필요하다.

구조물 내의 유체를 점성 유체로 모델링 한 경우, 지배 방정식은 연속 방정식과 Navier-Stokes 방정식으로 구성되는데, 이를 penalty 정식화에 의해 하나의 방정식으로 통합하여 계산하였다.

유체와 구조물의 상호 작용을 연구할 때에는 이들의 서로 다른 운동 기술법을 통일할 필요가 있다. 이 논문에서는 기존의 유체의 운동 기술법인 Euler 운동 기술법은 그대로 두고 속도를 상대 속도 개념으로 사용하는 Washizu(Washizu, 1984)에 의한 상대 운동 정식화(relative motion formulation)를 사용하여 유체와 구조물의 서로 다른 운동 기술법 문제를 해결하였다.

유한요소법에 의하여 점성 유동을 해석하는 경우 발생하는 수치적 불안정성을 해결하기 위하여 SUPG 정식화와 선택 감소 적분(selective reduced integration)을 사용하였다.

주요어:

슬로싱, Navier-Stokes 방정식, penalty 정식화, 상대 운동 정식화, SUPG 정식화, 선택 감소 적분

학번:2000-21546

목차

초록	i
목차	iii
그림목차	v
1. 서론	1
2. 점성 유체의 지배방정식 및 경계조건	5
2.1 지배방정식	5
2.1.1 Penalty 정식화	5
2.1.2 상대 운동 정식화	6
2.2 경계조건	7
2.2.1 자유 수면에 대한 경계조건	8
2.2.2 구조물과 접하는 부분에 대한 경계조건	9
3. Navier-Stokes 방정식의 연약식 및 이산화	11
3.1 Galerkin 법	11
3.2 Streamline Upwind/Petruv-Galerkin 안정화 기법	11
3.2.1 SUPG의 필요성	11
3.2.2 연약식의 구성	13
3.3 선형화(Linearlization)	16
3.4 이산화(Discretization)	16
3.5 선택 감소 적분(Selective reduced integration)	19
3.6 구조물과의 연계	21

3.7 시간에 대한 이산화	23
3.8 자유 수면 경계 조건식의 적용	25
4. 예제	27
4.1 구조물을 강체로 모델링 하는 경우의 예제	29
4.2 구조물의 변형을 고려하는 경우의 예제	31
5. 결론	35
참고문헌	37

그림목차

그림 2.1 유한요소법에 의한 영역 이산화 및 경계영역 분리.....	7
그림 3.1 일반적 형태의 사각형 요소	15
그림 4.1 지반에 고정된 수조 구조물의 해석 모델	27
그림 4.2 입력 지반 가속도	28
그림 4.3 구조물 단면의 모델	29
그림 4.4 벽면 바닥에서의 시간에 따른 압력의 변화	30
그림 4.5 벽면에 미치는 압력	31
그림 4.6 벽면 바닥에서의 시간에 따른 압력의 변화	32
그림 4.7 벽면에 미치는 압력	33
그림 4.8 자유수면의 형상	33
그림 4.9 각 항의 놈의 크기 비교	34

1. 서론

기존의 유체-구조물 상호 작용에 관한 연구는 대부분 이상 유체로 가정한 경우가 많았다. 이상 유체로 가정한 경우 유체에 대한 식이 포텐셜을 가지게 되고, 따라서 식이 간단해 지기 때문이다. 그러나 많은 구조물들이 내부에 석유 같은 점성이 상당히 큰 유체와 상호 작용을 하며, 이러한 경우 유체를 이상 유체로 가정하여 계산하는 것은 정확한 해석으로 보기 어렵다. 따라서 본 논문에서는 구조물과 유체의 상호 작용에 의하여 발생하는 유체의 동압력을 보다 엄밀하게 구하기 위해 Navier-Stokes 방정식을 사용하여 구조물의 지진 응답을 구하였다.

최근까지 유체-구조물 상호 작용에 관한 연구는 매우 활발하게 이루어져 왔다. Zienkiewicz 등(Zienkiewicz *et al.*, 1977)은 유한요소법에 기초한 연계 시스템(coupled system)의 정식화를 제안하였고, Wilton(Wilton, 1978)은 경계요소-유한요소 연계법에 의해 외적 유체-구조물 상호 작용에 대해 연구하였다. Nakayama와 Washizu(Nakayama and Washizu, 1980)는 직사각형 수조에서 비선형 슬로싱(sloshing)에 대해 연구하였고, Bai와 Wu(Bai and Wu, 1994)는 압축성 유체를 포함하는 쉘 구조물의 자유 진동에 대해 연구하였으며, Dutta와 Laha(Dutta and Laha, 2000)는 경계요소법을 사용하여 임의 형상의 강체 수조 내 유체의 슬로싱에 대해 연구하였다. 그러나 대부분의 연구에서 점성을 고려한 연구는 거의 이루어지지 않았다. 최근에 Zang 등(Zang *et al.*, 2000)의 구조물의 진동에 의한 점성 유

체의 슬로싱에 대한 연구 논문이 보고되고 있을 뿐이다. 따라서 점성을 고려하는 연구가 필요하다.

점성을 고려하는 경우 유체에 대해서는 Navier-Stokes 방정식과 연속 방정식의 두개의 방정식을 연립하여 풀어야 한다. 이를 근사적으로 풀기 위하여 Penalty 정식화를 사용한다. 이 방법은 전체적인 방정식의 미지수의 개수가 줄어들게 되어 식이 간단해지고 계산 시간이 단축되는 장점이 있다.

유체의 지배 방정식은 Euler 정식화에 의거하고 구조물과 같은 고체의 지배 방정식은 Lagrange 정식화에 의거하기 때문에 이들의 상호 작용을 연구할 때, 상이한 운동 기술법을 통일할 필요가 있다. 이를 위하여 Washizu(Washizu, 1984)에 의한 상대 운동 정식화(relative motion formulation)를 사용하였다. 상대 운동 정식화는 기존의 유체의 운동 기술법인 Euler 운동 기술법은 그대로 두고 속도를 상대 속도 개념으로 생각하여, 유체와 구조물의 서로 다른 운동 기술법 문제를 해결한다.

유한요소법에 의하여 점성 유체의 거동을 해석하고자 하는 경우, 두 가지 종류의 수치적 불안정성이 존재한다. 하나는 이송항에 의하여 발생하는 것이고 (Bathe, 1996), 다른 하나는 유속과 압력항에 대하여 적절한 보간 함수를 적용하지 못했을 경우 발생하는 불안정성이다(Brooks and Hughes, 1982).

이송항은 유체의 기본 방정식이 Euler 운동기술법에 의거하였기 때문에 나타나는 항이며, 궁극적으로 유한요소 계수 행렬을 비대칭이 되게 한다. 그리고 유한요소 계수 행렬이 비대칭이 될수록 유한요소법에 의한 근사해는 정해와 점점

떨어지게 된다. 실례로서 해가 심하게 진동하거나 왜곡되는 등의 현상을 들 수 있다. 본 논문에서는 이러한 문제점을 해결하기 위하여 유선 상류 / Petrov-Galerkin (Streamline Upwind / Petrov-Galerkin : SUPG) 항을 추가하였다.

유속과 압력의 보간 함수를 같은 공간에서 사용할 경우 유속에 대해서는 좋은 해를 구할 수 있지만 압력 해는 매우 불안정한 결과를 보이며(Taylor and Hood, 1973), 이러한 보간 방법을 동차 보간(equal-order interpolation)이라고 한다. 이러한 불안정성의 원인은 동차 보간의 경우 시스템의 방정식이 특이 행렬(Singular matrix)을 구성하기 때문으로 알려져 있다. 이러한 단점을 해결하기 위해서는 압력과 유속의 보간 함수가 BB(Babuska-Brezzi) 조건(Oden and Carey, 1984)을 만족해야 한다(Zienkiewicz and Taylor, 1991; Hughes, 1987). 이를 위해 본 논문에서는 선택 감소 적분(selective reduced integration)을 사용하였다(Hughes, 1987). 이는 Penalty가 들어있는 항을 유속 항보다 한 차수 아래의 적분 방법을 사용하여 적분하는 방법으로서, 압력과 유속의 보간 함수가 BB(Babuska-Brezzi) 조건(Oden and Carey, 1984)을 만족할 수 있도록 해 준다(Zienkiewicz and Taylor, 1991).

Navier-Stokes 방정식은 비선형 방정식이므로 이를 풀기 위해서는 선형화 하는 과정이 필요하다. 일반적으로 해의 수렴성이 좋은 문제에서는 수렴을 빨리 하기 위하여 Newton 타입의 반복 계산법을 사용하고 있다. 그러나 Navier-Stokes 방정식은 비선형성이 크므로, Newton 반복 계산법은 안정적으로 적용하기가 불가능하다(□□□, 1997). Picard 반복 계산법을 사용하면 해를 좀 더 안정

적으로 구할 수 있다.

4장에서는 구형 평면을 가지는 대형 철근 콘크리트 구조물을 예제로 하여 점성을 고려하였을 때와 고려하지 않았을 때의 차이를 살펴보았다.

2 점성 유체의 지배방정식 및 경계조건

2.1 지배방정식

일반적으로 점성 비압축성 유체의 지배방정식은 다음과 같이 비압축성 질량 보존을 의미하는 연속 방정식과 비압축성 Navier-Stokes 방정식으로 구성된다 (Currie, 1993).

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1a)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} \quad (2.1b)$$

여기서 \mathbf{u} 는 수평 및 수직 방향의 유속, ρ 는 유체의 밀도이며, p 는 유체의 압력, μ 는 유체의 점성계수, \mathbf{f} 는 중력에 의한 단위 질량 당 체적력(body force)을 의미한다.

2.1.1 Penalty 정식화

이 방정식을 풀기 위해서는 \mathbf{u} 와 p 에 대한 연립 방정식을 풀어야 한다. 이를 근사적으로 풀기 위하여 Penalty 정식화를 사용한다. 식 (2.1b)의 미지수 p 를 소거하기 위해 비압축성 질량보존 방정식 식 (2.1a)를 다음과 같은 penalty 조건으로 치환한다(Hughes *et al.*, 1978).

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{p}{\lambda} \quad (2.2)$$

여기서 penalty 변수(penalty parameter) λ 가 충분히 커지면 비압축성 조건을 만족하게 된다. 그러나 λ 의 값이 너무 크면 해의 수렴성을 떨어뜨리기 때문에 적절히 선택되어야 한다. λ 값은 매우 큰 팽창 점성 계수(dilatational viscosity)로서 해석될 수 있다. 이제 식 (2.2)를 식 (2.1b)에 대입하면 미지수 p 가 소거되어 하나의 식이 남게 된다. 이 방법은 전체적인 방정식의 미지수의 개수가 줄어들게 되어 간단해지고 계산 시간이 단축되는 장점이 있다.

이 방법에 따라 식 (2.1)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \lambda \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} \quad (2.3)$$

2.1.2 상대 운동 정식화

식 (2.3)에서 유속은 절대속도로 되어 있다. 그런데 유체의 운동이 지반과 상대 운동을 하기 때문에 Washizu 등(Washizu *et al.*, 1984)의 정식화에 의해 식 (2.3)을 다음과 같은 상대 운동 정식화(relative motion formulation)로 쓸 수 있다.

식 (2.3)을 지반에 대한 상대 속도에 대한 식으로 나타내기 위하여 \mathbf{u} 를 다음과 같이 분해한다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^r + \mathbf{u}^g \quad (2.4)$$

여기에서 \mathbf{u}^r 은 유체의 지반에 대한 상대 속도이고, \mathbf{u}^g 는 지반의 절대속도이다.
 식 (2.4)를 식 (2.3)에 대입하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}^r}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}^r \cdot \nabla)\mathbf{u}^r = \lambda \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^r) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}^r + \rho \mathbf{f} + \rho \mathbf{a} \quad (2.5)$$

여기서 \mathbf{a} 는 지반 입력 가속도이다.

2.2 경계조건

유체의 경계 조건은 크게 두 가지 부분으로 나눌 수 있다. 그림 (2.1)에서 보는 바와 같이 유체의 경계를 자유 수면 S_1 과 구조물 벽체와 접하는 부분인 S_2

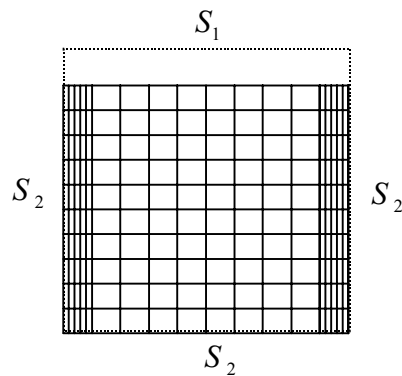


그림 2.1 유한요소법에 의한 영역 이산화 및 경계영역 분리

로 나눈다.

2.2.1 자유 수면에 대한 경계조건

일반적으로 지진과 같은 동적 하중이 작용할 때 자유 수면에서는 자유 수면에 놓인 유체 입자가 운동하는 동안 자유 수면상에 위치해야 한다는 운동학적 경계 조건(kinematic boundary condition)과 자유 수면에 작용하는 압력이 대기압과 같아야 한다는 동역학적 경계 조건(dynamic boundary condition)의 두 가지 경계 조건을 동시에 만족시켜야 한다(Currie, 1993).

먼저, 자유 수면에 있는 임의의 점에서의 y 방향 속도는 η (자유 수면에 수직인 방향의 자유도, sloshing)의 속도와 수면이 x 방향으로 움직이기 때문에 발생하는 속도의 합과 같으므로,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\bar{u}_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + \bar{u}_y \quad \text{on } S_1 \quad (2.6)$$

의 자유 수면에서의 운동학적 경계 조건을 얻는다.

자유 수면에 작용하는 압력은 대기압과 같으므로 다음과 같은 자유 수면에서의 동역학적 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\bar{T}_x = 0, \quad \bar{T}_y = 0 \quad \text{on } S_1 \quad (2.7)$$

그러나 실제로 자유 수면에서는 sloshing에 의한 중력파(gravity wave)가 존재하므로, 이에 대한 고려가 필요하다(Zienkiewicz *et al.*, 1991). 중력파를 고려할 경우 자유 수면에서의 동역학적 경계조건은 다음과 같다.

$$\bar{T}_x = 0, \bar{T}_y = -\rho g \eta \quad \text{on } S_1 \quad (2.8)$$

2.2.2 구조물과 접하는 부분에 대한 경계조건

구조물에 접하는 유체 경계에서, 구조물에 대하여 법선 방향의 유체 속도는 구조물의 속도와 같게 된다.

$$\bar{u}_n = \bar{u}_n^w \quad \text{on } S_2 \quad (2.9)$$

경계에서 접선 방향의 유체 속도에 대한 경계 조건은 착벽 조건(no-slip condition)에 의하여 다음과 같은 경계 조건을 부과한다.

$$\bar{u}_t = \bar{u}_t^w \quad \text{on } S_2 \quad (2.10)$$

Welch 등(Welch *et al.*, 1996)은 유체의 경계층(boundary layer)의 두께가 유한요소 셀(cell)보다 얇을 경우에만 구조물과 유체의 경계에서 미끄러짐을 허용해도 된다고 하였다. 본 논문에서는 경계층의 두께를 알 수 없으므로 착벽 조건을 사

용하였다. 그러나 실제로는 경계층에 의하여 어느 정도의 미끄러짐이 발생한다. 이를 어느 정도 모사하기 위해 그림 2.1과 같이 구조물에 가까워질수록 요소를 더욱 세분화하여 구조물과 가까운 부분에서는 유속의 변화가 자유롭게 발생하도록 허용하였다.

3 Navier-Stokes 방정식의 연약식 및 이산화

3.1 Galerkin 법

식 (2.4)를 Galerkin 법에 의해 연약식으로 구성하면 다음과 같다.

$$\int_V \hat{\mathbf{u}} \cdot \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}^r}{\partial t} + \rho (\mathbf{u}^r \cdot \nabla) \mathbf{u}^r = \lambda \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^r) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}^r + \rho \mathbf{f} + \rho \mathbf{a} \right) dV = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

위의 식을 정리하면 식 (3.2)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \rho \int_V \hat{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}^r dV + \rho \int_V \hat{\mathbf{u}} \cdot ((\mathbf{u}^r \cdot \nabla) \mathbf{u}^r) dV \\ & + \frac{1}{2} \mu \int_V (\nabla \hat{\mathbf{u}} + (\nabla \hat{\mathbf{u}})^T) : (\nabla \mathbf{u}^r + (\nabla \mathbf{u}^r)^T) dV + \lambda \int_V (\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}) (\nabla \cdot \mathbf{u}^r) dV \\ & = \rho \int_V \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{f} dV + \rho \int_V \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{a} dV + \int_{S_1} \hat{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{T}} dS_1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.2 Streamline Upwind/Petruv-Galerkin 안정화 기법

3.2.1 SUPG의 필요성

일반적으로 유한요소법에 의하여 점성 비압축성 유동을 해석하고자 하는 경우, 이송항(convective term)에 의하여 종류의 수치적 불안정성이 발생하게 된다 (□□□, 1997). 이송항은 유체의 기본 방정식이 Euler 운동기술법에 의거하였기 때문에 나타나는 항이며, 궁극적으로 유한요소 계수 행렬을 비대칭이 되게 한

다. 또한 유속이 빨라져 Reynolds 수가 증가할수록 즉, 이송항이 강할수록 수치적 불안정성은 증대된다(Bathe, 1996). 결국 유한요소 계수 행렬이 비대칭이 될수록 유한요소법에 의한 근사해는 정해와 점점 멀어지게 된다. 실례로서 해가 심하게 진동하거나 왜곡되는 등의 현상을 들 수 있다. 해결책으로서 이송항이 더 이상 요소 수준에서 작용하지 않도록 매우 조밀한 유한요소망을 구성해야 한다(Brooks and Hughes, 1982). 그러나 연산 시간이 그만큼 증대되므로 근본적인 해결책은 되지 못한다.

위와 같은 현상들은 궁극적으로 Navier-Stokes 방정식과 같은 이송-확산 형태의 방정식을 구조물과 같은 고체 해석법으로 흔히 쓰이는 표준 Galerkin 법 (standard Galerkin method)을 사용하여 이산화하는 경우 요소의 수가 부족한 경우 발생하는 현상이다.

이러한 현상을 극복하기 위해 적절한 인위적 확산성(artificial diffusion)의 첨가와 중앙 차분법이 결합된 최적 후방 차분법(optimal upwind difference)의 개념을 유한요소법에 적용한 상류 유한요소법(upwind finite element method)이 제시되었다. 그러나 상류 유한요소법을 다차원 공간으로 확장하는 경우 인위적 확산성에 의해 소위 과잉 직각방향 확산 효과(spurious crosswind diffusion effect)라는 현상이 발생하게 되어 물리학적으로 맞지 않는 결과가 나타난다. 이러한 현상을 극복하기 위해 인위적 확산성이 유체의 흐름 방향으로만 작용하도록 하는 유선 상류 / Petrov-Galerkin (Streamline Upwind / Petrov-Galerkin : SUPG) 항을 추가하는 방법이 제시되었으며 십 수년간 많은 논문에서 SUPG 항의 강력한 적용성이 입

증되어 왔다.

3.2.2 연약식의 구성

SUPG항을 추가한 Navier-Stokes 방정식의 가중잔차식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & \int_V \hat{\mathbf{u}} \cdot \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}^r}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}^r \cdot \nabla) \mathbf{u}^r = \lambda \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^r) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}^r + \rho \mathbf{f} + \rho \mathbf{a} \right) dV \\
 & + \sum_e \int_{V_e} \hat{\mathbf{p}} \cdot \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}^r}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}^r \cdot \nabla) \mathbf{u}^r = \lambda \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^r) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}^r + \rho \mathbf{f} + \rho \mathbf{a} \right) dV_e \\
 & = \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

여기서, $\hat{\mathbf{p}} = \tilde{k} \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}}$ 이고, V_e 는 요소 e 의 내부영역이다. \tilde{k} 는 SUPG의 계수

이고, 오차를 최소화하는 값으로 결정된다. 결정된 \tilde{k} 는 다음과 같다.

$$\tilde{k} = (\tilde{\xi} u_\xi h_\xi + \tilde{\eta} u_\eta h_\eta) / 2 \tag{3.3}$$

여기에서

$$\begin{aligned}
 \tilde{\xi} &= (\coth \alpha_\xi) - 1 / \alpha_\xi, \quad \tilde{\eta} = (\coth \alpha_\eta) - 1 / \alpha_\eta \\
 \alpha_\xi &= \rho u_\xi h_\xi / 2\mu, \quad \alpha_\mu = \rho u_\mu h_\mu / 2\mu
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$u_\xi = \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{u}, \quad u_\eta = \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{u}$$

단위 벡터 \mathbf{e}_ξ , \mathbf{e}_η 와 요소의 특성길이 h_ξ , ρ 는 그림 3.1에 나타내었다. (3.3)의 \tilde{k} 는 노드에서 정확한 값을 나타내는 경우이며, 만일 비정상 해석 시 위상 오차를 최소화하기 위해서는 \tilde{k} 는 다음과 같다.

$$\tilde{k} = (\tilde{\xi} u_\xi h_\xi + \tilde{\eta} u_\eta h_\eta) / \sqrt{15} \quad (3.5)$$

이렇게 만들어진 $\hat{\mathbf{p}}$ 은 확산항에 최적 artificial diffusion 성분을 첨가시켜 주는 것과 같은 효과를 가져온다. 식 (3.3)을 정리하면 식 (3.6)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \rho \int_V \hat{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}^r dV + \rho \int_V \hat{\mathbf{u}} \cdot ((\mathbf{u}^r \cdot \nabla) \mathbf{u}^r) dV \\ & + \frac{1}{2} \mu \int_V (\nabla \hat{\mathbf{u}} + (\nabla \hat{\mathbf{u}})^T) : (\nabla \mathbf{u}^r + (\nabla \mathbf{u}^r)^T) dV + \lambda \int_V (\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}) (\nabla \cdot \mathbf{u}^r) dV \\ & + \sum_e \int_{V_e} \hat{\mathbf{p}} \cdot \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}^r}{\partial t} + \rho (\mathbf{u}^r \cdot \nabla) \mathbf{u}^r - \lambda \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^r) - \mu \nabla^2 \mathbf{u}^r - \rho \mathbf{f} - \rho \mathbf{a} \right) dV_e \\ & = \rho \int_V \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{f} dV + \rho \int_V \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{a} dV + \int_{S_1} \hat{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{T}} dS_1 \end{aligned} \quad (3.6)$$

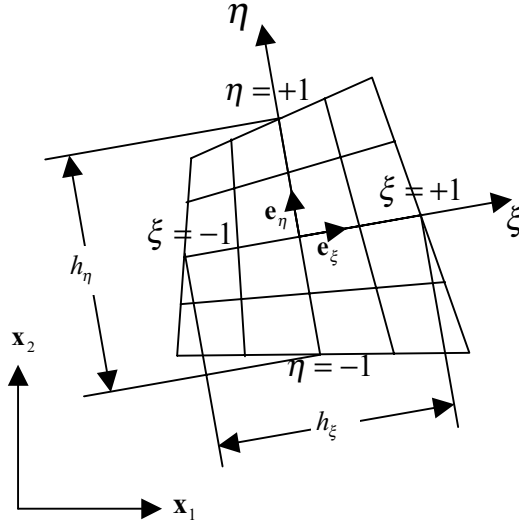


그림 3.1 일반적 형태의 사각형 요소

본 논문에서는 유속에 대하여 bilinear 요소를 사용하였으므로 요소 내부에서 $\nabla \cdot \mathbf{u}^r = 0$ 이 된다. 이를 적용하여 식 (3.6)을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
& \rho \int_V \hat{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}^r dV + \rho \int_V \hat{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{u}^r \cdot \nabla) \mathbf{u}^r dV \\
& + \frac{1}{2} \mu \int_V (\nabla \hat{\mathbf{u}} + (\nabla \hat{\mathbf{u}})^T) : (\nabla \mathbf{u}^r + (\nabla \mathbf{u}^r)^T) dV + \lambda \int_V (\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}) (\nabla \cdot \mathbf{u}^r) dV \\
& + \sum_e \int_{V_e} \hat{\mathbf{p}} \cdot \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}^r}{\partial t} + \rho (\mathbf{u}^r \cdot \nabla) \mathbf{u}^r - \rho \mathbf{f} - \rho \mathbf{a} \right) dV_e \\
& = \rho \int_V \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{f} dV + \rho \int_V \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{a} dV + \int_{S_1} \hat{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{T}} dS_1
\end{aligned} \tag{3.7}$$

3.3 선형화(Linearlization)

주어진 방정식은 비선형 항, $(\mathbf{u}^r \cdot \nabla)\mathbf{u}^r$ 이 포함되어 있으므로, 이를 풀기 위해서는 선형화 하는 과정이 필요하다. 이 때, 선형화 하는 과정은 해를 푸는 방법과 매우 밀접한 관계가 있다. 일반적으로 해의 수렴성이 좋은 문제에서는 수렴을 빨리 하기 위하여 Newton 타입의 반복 계산법을 사용하고 있다. 그러나 Navier-Stokes 방정식은 비선형성이 크므로 본 논문에서는 안정적으로 적용하기가 불가능하다(□□□, 1997). 따라서 본 논문에서는 해를 좀 더 안정적으로 구하기 위해 Picard 반복 계산법을 사용하였다. 이 방법은 비선형항 $(\mathbf{u}^r \cdot \nabla)\mathbf{u}^r$ 를 $(\underline{\mathbf{u}}^r \cdot \nabla)\mathbf{u}^r$ 로 치환하는데, 이 때 $\underline{\mathbf{u}}$ 는 이전 시간 스텝에서의 속도를 의미한다. 이 과정은 수렴할 때까지 연속적으로 계속되므로 연속 치환법(successive substitution method)이라고도 불린다.

3.4 이산화(Discretization)

식 (3.7)에서 사용된 변수들을 공간에 대해 이산화하여 요소 내에서 나타내면, $\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}^r$ 은 $\hat{\mathbf{u}}^h, \mathbf{u}^{r^h}$ 이 되며 $\mathbf{x} \in V^e$ 이다.

$$\mathbf{u}^{r^h} = \mathbf{N}^e(\mathbf{x})\mathbf{u}^e \quad (3.8)$$

$$\nabla \mathbf{u}^{r^h} = \nabla \mathbf{N}^e(\mathbf{x})\mathbf{u}^e \quad (3.9)$$

$$\nabla \mathbf{u}^{r^h} + (\nabla \mathbf{u}^{r^h})^T = (\nabla \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) + (\nabla \mathbf{N}^e(\mathbf{x}))^T) \mathbf{u}^e \quad (3.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{r^h} = \nabla \cdot \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{u}^e \quad (3.11)$$

$$\hat{\mathbf{u}}^h = \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}^e \quad (3.12)$$

$$\nabla \hat{\mathbf{u}}^h = \nabla \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}^e \quad (3.13)$$

$$\nabla \hat{\mathbf{u}}^h + (\nabla \hat{\mathbf{u}}^h)^T = (\nabla \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) + (\nabla \mathbf{N}^e(\mathbf{x}))^T) \hat{\mathbf{u}}^e \quad (3.14)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}^h = \nabla \cdot \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}^e \quad (3.15)$$

$$\hat{\mathbf{p}}^h = \tilde{k} \frac{\mathbf{u}^T}{\|\mathbf{u}\|^2} \nabla \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}^e \quad (3.16)$$

여기서 \mathbf{N}^e 는 요소 내에서 정의된 bilinear 요소의 형상 함수이다. 이러한 형상 함수를 적용하여 식 (3.7)을 행렬에 대한 식으로 표현하면, 다음과 같다.

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{V}} + (\mathbf{C}_n + \mathbf{C}_\lambda)\mathbf{V} = \mathbf{F} + \mathbf{T} + \mathbf{A} \quad (3.17)$$

여기서,

$$\mathbf{M} = \sum_e \mathbf{M}^e \quad (3.18)$$

$$\mathbf{C}_n = \sum_e \mathbf{C}_n^e \quad (3.19)$$

$$\mathbf{C}_\lambda = \sum_e \mathbf{C}_\lambda^e \quad (3.20)$$

$$\mathbf{F} = \sum_e \mathbf{F}^e \quad (3.21)$$

$$\mathbf{T} = \sum_e \mathbf{T}^e \quad (3.22)$$

$$\mathbf{A} = \sum_e \mathbf{A}^e \quad (3.23)$$

$$\mathbf{V} = \sum_e \mathbf{u}^e \quad (3.24)$$

$$\dot{\mathbf{V}} = \sum_e \dot{\mathbf{u}}^e \quad (3.25)$$

이고, 요소 단위 항들, 즉 \mathbf{M}^e , \mathbf{C}_n^e , \mathbf{C}_λ^e , \mathbf{F}^e , \mathbf{T}^e , \mathbf{A}^e 은 아래의 적분을 통해 구해진다.

$$\mathbf{M}^e = \rho \int_{V^e} \left((\mathbf{N}^e)^T \mathbf{N}^e + \left(\tilde{k} \frac{\mathbf{u}^T}{\|\mathbf{u}\|^2} \nabla \mathbf{N}^e \right)^T \mathbf{N}^e \right) dV^e \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_n^e = \int_{V^e} & \left[\rho (\mathbf{N}^e)^T \underline{\mathbf{u}}^r \nabla \mathbf{N}^e + \frac{1}{2} \mu (\nabla \mathbf{N}^e + (\nabla \mathbf{N}^e)^T)^T : (\nabla \mathbf{N}^e + (\nabla \mathbf{N}^e)^T) \right. \\ & \left. + \rho \left(\tilde{k} \frac{\mathbf{u}^T}{\|\mathbf{u}\|^2} \nabla \mathbf{N}^e \right)^T \underline{\mathbf{u}}^r \nabla \mathbf{N}^e \right] dV^e \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{C}_\lambda^e = \lambda \int_{V^e} (\nabla \cdot \mathbf{N}^e)^T (\nabla \cdot \mathbf{N}^e) dV^e \quad (3.28)$$

$$\mathbf{F}^e = \rho \int_{V^e} \left((\mathbf{N}^e)^T \mathbf{f}^e + \left(\tilde{k} \frac{\mathbf{u}^T}{\|\mathbf{u}\|^2} \nabla \mathbf{N}^e \right)^T \mathbf{f}^e \right) dV^e \quad (3.29)$$

$$\mathbf{T}^e = \int_{S_1^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{t}^e dS_1^e \quad (3.30)$$

$$\mathbf{A}^e = \rho \int_{V^e} \left((\mathbf{N}^e)^T \mathbf{a}^e + \left(\tilde{k} \frac{\mathbf{u}^T}{\|\mathbf{u}\|^2} \nabla \mathbf{N}^e \right)^T \mathbf{a}^e \right) dV^e \quad (3.31)$$

여기서 \mathbf{f}^e , \mathbf{a}^e 를 각각 표시하면 다음과 같다.

$$\mathbf{f}^e = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{a}^e = \begin{pmatrix} -a_x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

3.5 선택 감소 적분(Selective reduced integration)

Navier-Stokes 방정식을 원시 변수 정식화(primitive variable formulation)에 의하여 풀고자 할 때, 유속과 압력의 보간 함수를 같은 함수 공간에서 사용할 경우 유속에 대해서는 좋은 해를 구할 수 있지만 압력 해는 매우 불안정한 결과를 보이며(Taylor and Hood, 1973), 이러한 보간 방법을 동차 보간(equal-order

interpolation)이라고 한다. 이러한 불안정성의 원인은 동차 보간의 경우 시스템의 방정식이 특이 행렬(Singular matrix)을 구성하기 때문으로 알려져 있다(□□□, 1997). 이러한 단점을 해결하기 위해서는 압력과 유속의 보간 함수가 BB(Babuska-Brezzi) 조건(Oden and Carey, 1984)을 만족해야 한다(Zienkiewicz and Taylor, 1991). 압력의 형상 함수를 유속의 형상 함수보다 한 차수 낮은 함수 공간에서 적용하게 되면, 압력장에 대한 보조적 Poisson 방정식(auxiliary Poisson equation)으로부터 연속 방정식이 각각의 요소에서 평균적으로 만족되도록 압력을 정할 수 있게 되며(Brooks and Hughes, 1982) 또한 BB 조건을 만족하게 된다. 이와 같이 서로 다른 함수공간의 보간 함수를 사용하는 경우, 이를 혼합 정식화(mixed formulation)이라고 한다.

Penalty 방법(□□□, 1997)을 사용하는 경우 압력항은 연속 조건의 penalty 형태로 적용되므로 방정식에서 삭제가 되며, 보간할 필요가 없어진다. 따라서 계산 시간이 매우 단축되고, 방정식의 형태가 단순하여지므로 문제를 더욱 효율적으로 풀 수 있다. Penalty 방법을 사용하는 경우 압력항(penalty 항)을 유속 항보다 한 차수 아래의 적분 방법을 사용하여 적분하면 mixed formulation에서 Babuska-Brezzi 조건(Oden and Carey, 1984)을 만족하는 보간 함수를 사용하는 것과 같은 효과를 갖는데, 이와 같은 적분방법을 선택 감소 적분(selective reduced integration)이라고 한다(Hughes, 1987).

본 논문에서는 유속은 요소 내부에서 $\sigma_{ij,j} = 0$ 을 만족시키는 bilinear 요소

(bilinear element)를 사용했고 압력은 한 차수 낮은 constant 요소(constant element)를 사용했다.

3.6 구조물과의 연계

유체에 해당하는 부분을 유체 내부 영역, 자유 수면 경계, 구조물과 접한 경계로 나누고 $\mathbf{C}_n + \mathbf{C}_\lambda = \mathbf{C}$ 라 하여 식 (3.17)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{if} & \mathbf{M}_{iw} \\ \mathbf{M}_{fi} & \mathbf{M}_{ff} & \mathbf{M}_{fw} \\ \mathbf{M}_{wi} & \mathbf{M}_{wf} & \mathbf{M}_{ww} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{V}}_i \\ \dot{\mathbf{V}}_f \\ \dot{\mathbf{V}}_w \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ii} & \mathbf{C}_{if} & \mathbf{C}_{iw} \\ \mathbf{C}_{fi} & \mathbf{C}_{ff} & \mathbf{C}_{fw} \\ \mathbf{C}_{wi} & \mathbf{C}_{wf} & \mathbf{C}_{ww} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_f \\ \mathbf{V}_w \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_f \\ \mathbf{F}_w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{T}_i \\ \mathbf{T}_f \\ \mathbf{T}_w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}_i \\ \mathbf{A}_f \\ \mathbf{A}_w \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.34)$$

여기서 아래 첨자 i, f, w 는 각각 유체 내부 영역 및 자유 수면 경계의 수평 방향, 자유 수면 경계의 수직 방향, 구조물과 접한 경계를 의미한다. 또한 sloshing의 정의에 의해 식 (3.34)에서 다음을 만족한다.

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{T}_w = \mathbf{0} \quad (3.35)$$

구조물에 해당하는 부분을 유한요소법에 의해 이산화하면 동적 방정식을 얻을 수 있다. 이렇게 얻어진 구조물의 동적 방정식을 유체와 접하는 부분과 접

하지 않는 부분으로 나누어 구성하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_1^r \\ \ddot{\mathbf{u}}_2^r \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^r \\ \mathbf{u}_2^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

여기서 아래 첨자 1은 유체와 접한 구조물의 영역이고 아래 첨자 2는 유체와 접하지 않은 구조물의 영역이다. 그리고 위 첨자 r 은 이 식이 상대 변위에 대한 식이라는 것을 나타낸다.

이제 경계 조건식 (2.9), (2.10)에 의하여 식 (3.34)와 (3.36)을 하나의 식으로 재구성할 수 있다. 단 \mathbf{A}_w 와 \mathbf{A}_1 은 서로 반력 관계에 있으므로 더해지면서 소거된다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{if} & \mathbf{M}_{iw} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{fi} & \mathbf{M}_{ff} & \mathbf{M}_{fw} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{wi} & \mathbf{M}_{wf} & \mathbf{M}_{ww} + \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{V}}_i \\ \dot{\mathbf{V}}_f \\ \dot{\mathbf{V}}_w \\ \ddot{\mathbf{u}}_2^r \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ii} & \mathbf{C}_{if} & \mathbf{C}_{iw} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{fi} & \mathbf{C}_{ff} & \mathbf{C}_{fw} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{wi} & \mathbf{C}_{wf} & \mathbf{C}_{ww} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_f \\ \mathbf{V}_w \\ \dot{\mathbf{u}}_2^r \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_f \\ \mathbf{u}_1^r \\ \mathbf{u}_2^r \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_f \\ \mathbf{F}_w + \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_f \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}_i \\ \mathbf{A}_f \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}$$

3.7 시간에 대한 이산화

식 (3.37)을 시간에 대해 이산화하기 위해 Newmark 베타 법(Newmark beta method)을 사용한다. 우선 식 (3.37)을 간단히 하여 시간 차분에 대한 식으로 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\mathbf{M}(\Delta \dot{\mathbf{V}})^t + \mathbf{C}(\Delta \mathbf{V})^t + \mathbf{K}(\Delta \mathbf{u})^t = (\Delta \mathbf{A})^t \quad (3.38)$$

여기에서,

$$(\Delta \dot{\mathbf{V}})^t = (\dot{\mathbf{V}})^{t+\Delta t} - (\dot{\mathbf{V}})^t \quad (3.39)$$

$$(\Delta \mathbf{V})^t = (\mathbf{V})^{t+\Delta t} - (\mathbf{V})^t \quad (3.40)$$

$$(\Delta \mathbf{u})^t = (\mathbf{u})^{t+\Delta t} - (\mathbf{u})^t \quad (3.41)$$

$$(\Delta \mathbf{A})^t = (\mathbf{F} + \mathbf{T} + \mathbf{A})^{t+\Delta t} - (\mathbf{F} + \mathbf{T} + \mathbf{A})^t \quad (3.42)$$

이다. 그리고 Newmark 베타 법(Newmark beta method)에 의하여 $\dot{\mathbf{V}}$ 와 \mathbf{V} , $\ddot{\mathbf{u}}$ 와 $\dot{\mathbf{u}}$, \mathbf{u} 는 다음과 같은 관계를 가진다.

$$(\Delta \mathbf{V})^t = \Delta t (\dot{\mathbf{V}})^t + \gamma \Delta t (\Delta \dot{\mathbf{V}})^t$$

$$(\Delta \dot{\mathbf{u}})^t = \Delta t (\ddot{\mathbf{u}})^t + \gamma \Delta t (\Delta \ddot{\mathbf{u}})^t \quad (3.43)$$

$$(\Delta \mathbf{u})^t = \Delta t (\dot{\mathbf{u}})^t + \frac{\Delta t^2}{2} (2\beta (\Delta \ddot{\mathbf{u}})^t + (\ddot{\mathbf{u}})^t)$$

우리가 주로 보게 되는 것은 유체의 속도이므로 식 (3.38)을 속도에 대한 식으로 이산화해야 한다. 따라서 식 (3.43)에서 속도를 변위와 가속도에 대한 식으로 정리하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$(\Delta \dot{\mathbf{V}})^t = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{(\Delta \mathbf{V})^t}{\Delta t} - (\dot{\mathbf{V}})^t \right)$$

$$(\Delta \ddot{\mathbf{u}})^t = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{(\Delta \dot{\mathbf{u}})^t}{\Delta t} - (\ddot{\mathbf{u}})^t \right) \quad (3.44)$$

$$(\Delta \mathbf{u})^t = \frac{\beta}{\gamma} \Delta t (\Delta \dot{\mathbf{u}})^t + \Delta t (\dot{\mathbf{u}})^t + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{\gamma} \right) \Delta t^2 (\ddot{\mathbf{u}})^t$$

이를 식 (3.38)에 대입하고 정리하면 다음의 최종 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\gamma \Delta t} \mathbf{M} + \mathbf{C} + \frac{\beta}{\gamma} \mathbf{K} \right) (\Delta \mathbf{V})^t \\ &= (\Delta \mathbf{A})^t + \left(\frac{1}{\gamma} \mathbf{M} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{\gamma} \right) \Delta t^2 \mathbf{K} \right) (\dot{\mathbf{V}})^t - \Delta t \mathbf{K} (\mathbf{V})^t \end{aligned} \quad (3.45)$$

3.8 자유 수면 경계 조건식의 적용

식 (3.45)를 풀기 위해서는 $(\Delta \mathbf{A})'$ 안의 \mathbf{T}_f 를 알 수 있어야 한다. \mathbf{T}_f 는 식 (2.8)에 의하여 자유 수면 S_1 에서의 슬로싱을 구함으로써 얻을 수 있다. 그리고 슬로싱은 식 (2.6)의 경계 조건식을 풀어서 구해낼 수 있다. 식 (2.6)은 편미분 방정식의 형태로 되어있으므로 이를 풀기 위해서는 연약식을 구하여 이산화해야 한다. 식 (2.6)을 다시 한 번 써 보면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\bar{u}_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + \bar{u}_y \quad (3.46)$$

연약식을 구성하기 위하여 양 변에 가중 함수를 곱하고 자유 수면 S_1 에 대하여 적분하면 아래와 같은 식을 얻을 수 있다. 가중 함수는 Galerkin 방법에 의하여 형상 함수를 그대로 사용하였다.

$$\int_{S_1} \hat{\eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial \eta}{\partial x} - \bar{u}_y \right) dS = 0 \quad (3.47)$$

식 (3.47)을 공간에 대하여 이산화하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\hat{\eta} \int_{S_1} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dS \dot{\eta} + \hat{\eta} \int_{S_1} \mathbf{N}^T \left(\mathbf{N} \mathbf{u}_1 \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right) dS \eta = \hat{\eta} \int_{S_1} \mathbf{N}^T (\mathbf{N} \mathbf{u}_2) dS \quad (3.48)$$

식 (3.48)은 다음과 같이 간단히 정리할 수 있다.

$$\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{B}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{C}$$

$$\text{단, } \mathbf{A} = \int_{S_1} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dS, \quad \mathbf{B} = \int_{S_1} \mathbf{N}^T \left(\mathbf{N} \mathbf{u}_1 \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right) dS, \quad \mathbf{C} = \int_{S_1} \mathbf{N}^T (\mathbf{N} \mathbf{u}_2) dS \quad (3.49)$$

식 (2.49)를 시간에 대하여 이산화 하기 위해 유한 차분법을 사용하였다. 유한 차분법에 의하여 다음과 같은 차분식을 얻을 수 있다.

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \frac{\boldsymbol{\eta}^{t+\Delta t} - \boldsymbol{\eta}^{\Delta t}}{\Delta t} \quad (3.50)$$

식 (3.50)을 식 (3.49)에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

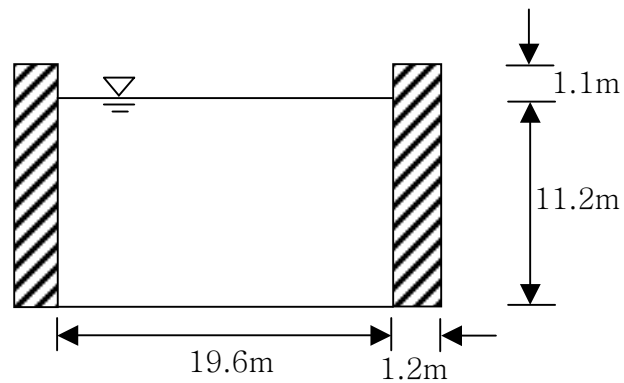
$$\left(\frac{\mathbf{A}}{\Delta t} + \mathbf{B} \right) \boldsymbol{\eta}^{t+\Delta t} = \mathbf{C} + \frac{\mathbf{A}}{\Delta t} \boldsymbol{\eta}^{\Delta t} \quad (3.51)$$

식 (3.51)에서 행렬 \mathbf{B} , \mathbf{C} 에 포함된 \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 는 식 (3.45)를 풀어야 얻을 수 있는 식이다. 따라서 식 (3.45)와 식 (3.51)은 서로에게 영향을 주며 반복 계산되어야 한다.

4 예제

이 장에서는 지금까지 논한 내용들을 실제 상황에 적용하여 그 유용성에 대해 알아본다. 이를 위해 점성을 고려하여 구한 결과와 점성을 고려하지 않았을 때의 결과가 어느 정도의 차이를 보이는 지를 살펴본다.

예제는 구형 평면을 가지는 대형 철근 콘크리트 구조물이다. 그림 4.1은 수조 구조물의 단면과 재료 성질을 나타낸다. 내부의 유체는, 점성이 있는 경우는 유체 중에서 가장 밀도가 크다고 알려진 글리세린을 사용하였고, 점성이 없는 경우는 비교를 위하여 밀도는 그대로 두고 점성 계수만 $1.0E-4\text{kg/m}\cdot\text{s}$ 로 바꾸어 사용하였다. 글리세린의 밀도는 1257.6kg/m^3 이고 점성 계수는 섭씨 10°C 정도



$$E = 21.0E + 9\text{N/m}^2$$

$$\nu = 0.17$$

$$\rho = 2300\text{Kg/m}^3$$

그림 4.1 지반에 고정된 수조 구조물의 해석 모델

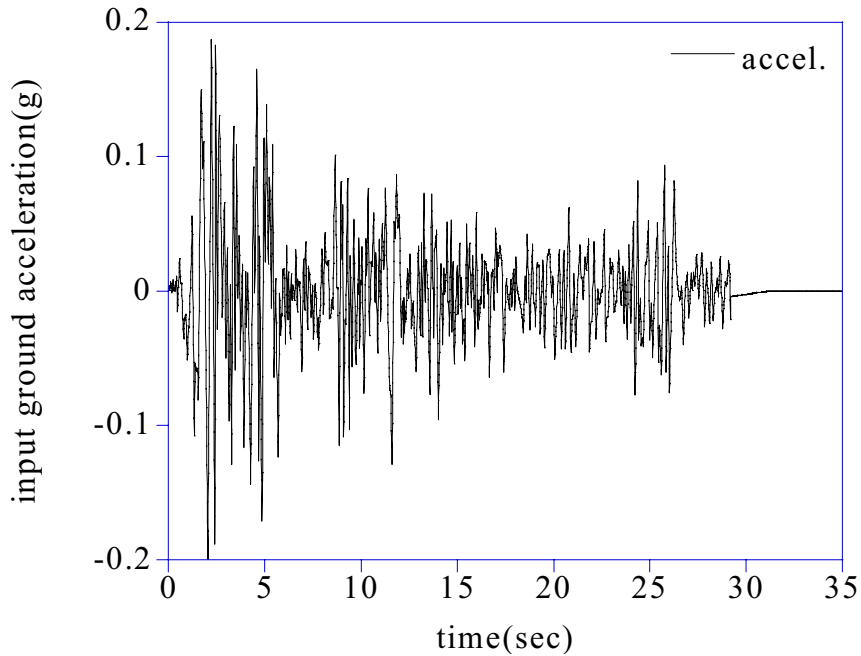


그림 4.2 입력 지반 가속도

에서 2.0kg/m/s 정도의 점성을 가진다. 사용한 입력 지반 가속도는 1940년 El Centro 지진 기록의 N-S성분으로써 수평방향 가속도만을 사용하였으며, 그 최대 가속도를 0.2g 가 되도록 Scaling하였다. 그리고 El Centro 지진 기록은 0.02s 간격으로 측정이 되었지만 두 측정값 사이를 평균하여 값을 더 추가함으로써 시간 간격이 0.01s 가 되도록 하였다. 본 해석 기법을 적용하기 위하여 내부 유체는 우선 20×20 의 bilinear요소로 구성하였고, 2.2.2절에서 언급한 바와 같이 경계층에서의 미끄러짐을 모사하기 위하여 구조물에 인접해 있는 요소를 다시 세로로 5등분하여 결과적으로 bilinear요소로 구성된 20×28 의 격자를 구성하였다. 구

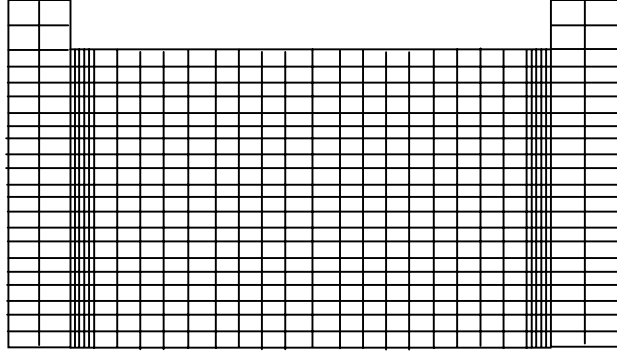


그림 4.3 구조물 단면의 모델

구조물에 대해서는 세로 방향으로는 2등분을 했고, 가로 방향으로는 유체와 같은 열에서 격자를 구성했으며, 유체보다 위로 나온 부분에 대해서는 2등분을 하였다. 결과적으로 유체의 양쪽에 각각 bilinear요소로 구성된 22×2 의 격자를 구성하였다. 완성된 격자의 모양은 그림 4.1과 같다. 구조물은 수조 구조물이 단면에 비하여 상당히 길다고 가정하고 평면 변형(plane strain) 요소를 사용하였다.

본 논문에서는 비선형 해석 시 SUPG항을 제외하였다. 결과를 보면, 구조물에 미치는 압력의 최대값이 2~12초 사이에 나타나는 데 비하여, SUPG항을 넣지 않아서 발생하는 해의 불안정성은 15초가 넘어서야 나타났기 때문이다.

4.1 구조물을 강체로 모델링 하는 경우의 예제

구조물을 강체로 모델링하는 경우 구조물의 상대 변위가 0이 되므로 경계 조건식 (2.9)와 (2.10)은 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$\bar{u}_n = 0, \bar{u}_t = 0 \quad \text{on } S_2 \quad (4.1)$$

그리고 유한요소 식 또한 유체-구조물의 연계 과정이 필요 없이 식 (3.34)만을 시간에 대해 이산화하여 사용할 수 있다.

이와 같이 하여 유체가 구조물에 미치는 동압력을 계산해 보면 그림 4.5와 같다. 그림 4.5는 그림 4.4에서 바닥면에서의 압력이 최대가 되는 시간을 찾아서, 그 시간대에 유체가 구조물에 미치는 동압력을 점성이 있는 경우와 없는 경우로 나누어 계산한 것이다. 그림 4.4에서 볼 수 있듯이 압력이 최대인 시간은

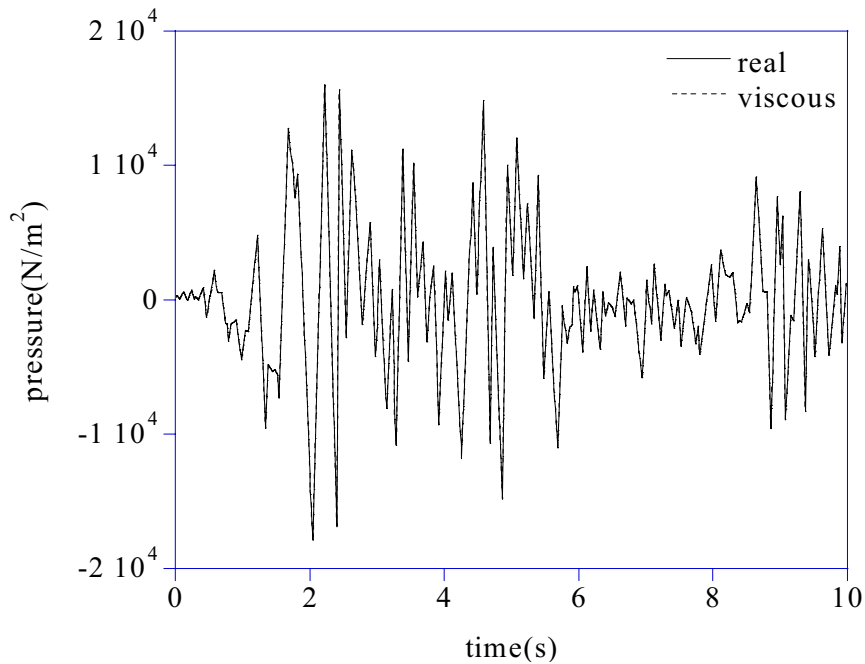


그림 4.4 벽면 바닥에서의 시간에 따른 압력의 변화

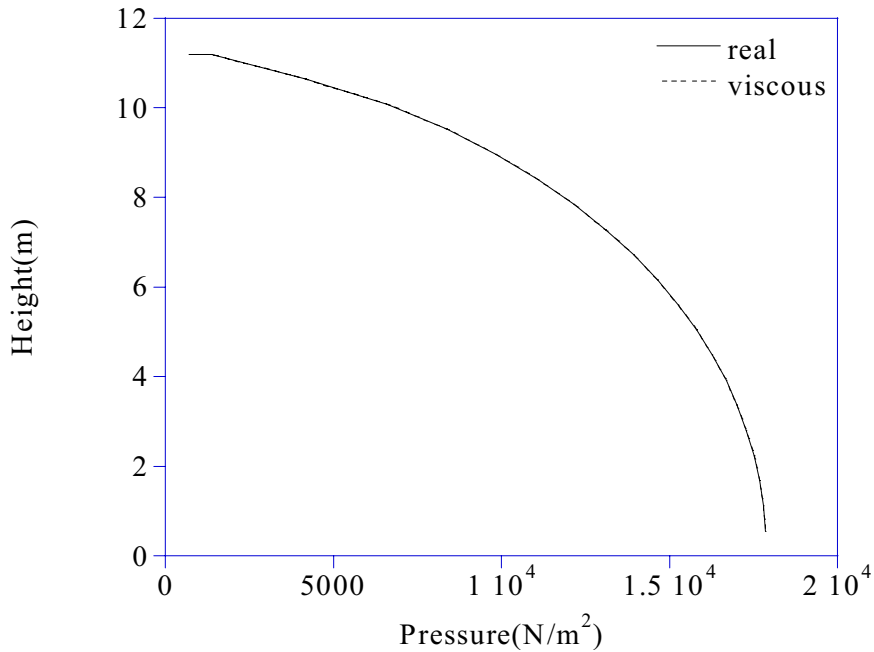


그림 4.5 벽면에 미치는 압력

2.04초이다. 그림 4.5에서 보면 점성이 있을 때와 없을 때의 벽면에 미치는 압력이 전혀 차이가 보이지 않음을 알 수 있다. 실제로 확대해서 보면 약간의 수치적인 차이가 있기는 하지만 그 차이가 너무나 미미하여 그래프상으로는 확인되지 않는다.

4.2 구조물의 변형을 고려하는 경우의 예제

구조물을 강체로 모델링했을 때와 마찬가지로 우선 바닥 압력의 시간에 대한 변화를 그려보면 그림 4.6과 같다. 그림에서 볼 수 있듯이 바닥면에서의 압력이 최대가 되는 시간은 11.59초이다. 이 때, 유체가 구조물에 미치는 동압력을 점

성이 없는 경우와 있는 경우를 비교해보면 그림 4.6과 같다. 구조물을 강체로 모델링했을 때와 마찬가지로 거의 차이가 나지 않음을 알 수 있다. 그림 4.7은 유체의 시간이 10초일 때 슬로싱의 형상을 나타낸 것이다. 단 슬로싱은 압력에 비하여 해의 진동이 심하기 때문에 이송항을 제거한 상태에서 선형 해석하여 그래프를 그렸다. 압력의 경우와 마찬가지로 거의 차이가 없는 것을 알 수 있다.

이렇게 거의 차이가 없는 이유를 알아보기 위해 이송항과 점성항이 전체의 식에 미치는 영향을 그래프로 그려 보았다. 그림 4.9에서 **Ma**는 질량에 관계된

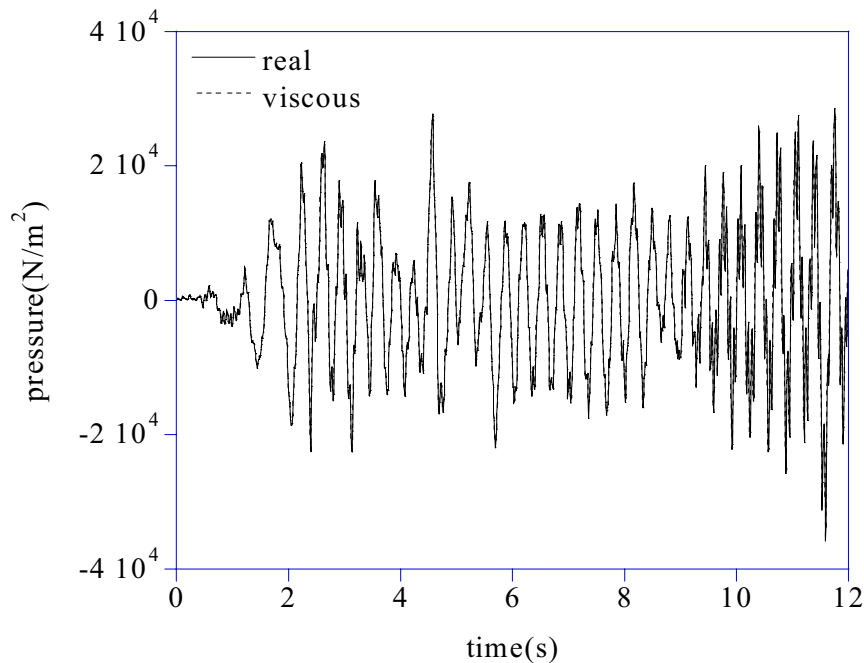


그림 4.6 벽면 바닥에서의 시간에 따른 압력의 변화

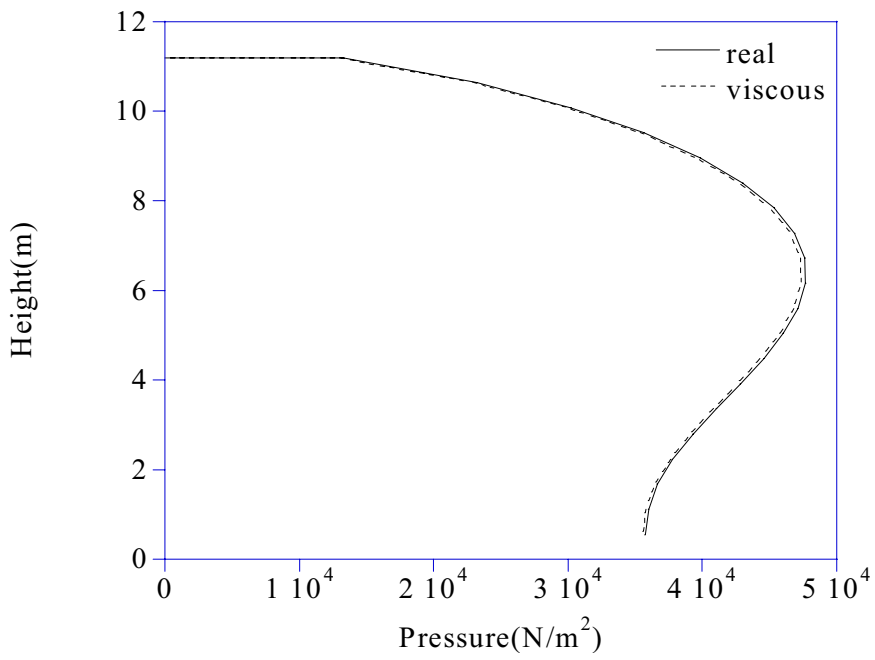


그림 4.7 벽면에 미치는 압력

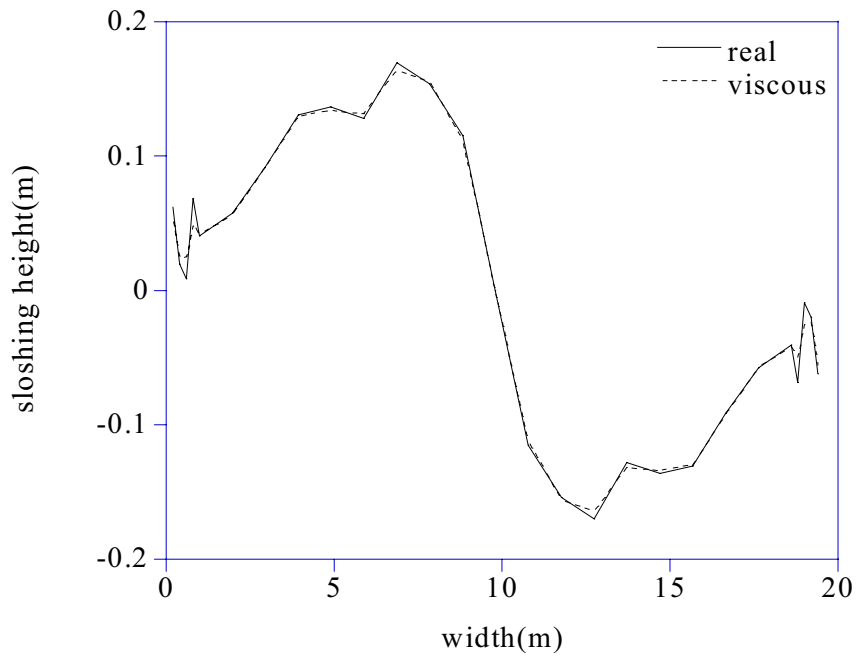


그림 4.8 자유수면의 형상

항의 norm을 계산한 것이고 $C_{mu} \mathbf{v}$ 는 점성항이 들어가 있는 항의 norm을 계산한 것이며 $C_{tr} \mathbf{v}$ 는 이송항이 들어가 있는 항의 norm을 나타낸 것이다. 그래프를 보면 질량에 관계된 항이 이송항이나 점성항에 비하여 월등히 큰 것을 알 수 있다. 따라서 점성의 효과가 거의 나타나지 않는 것은 당연하다. 또한 이송항을 제거하고 선형으로 계산한 결과와 이송항을 포함해서 비선형으로 계산한 결과가 거의 비슷한 이유도 설명된다.

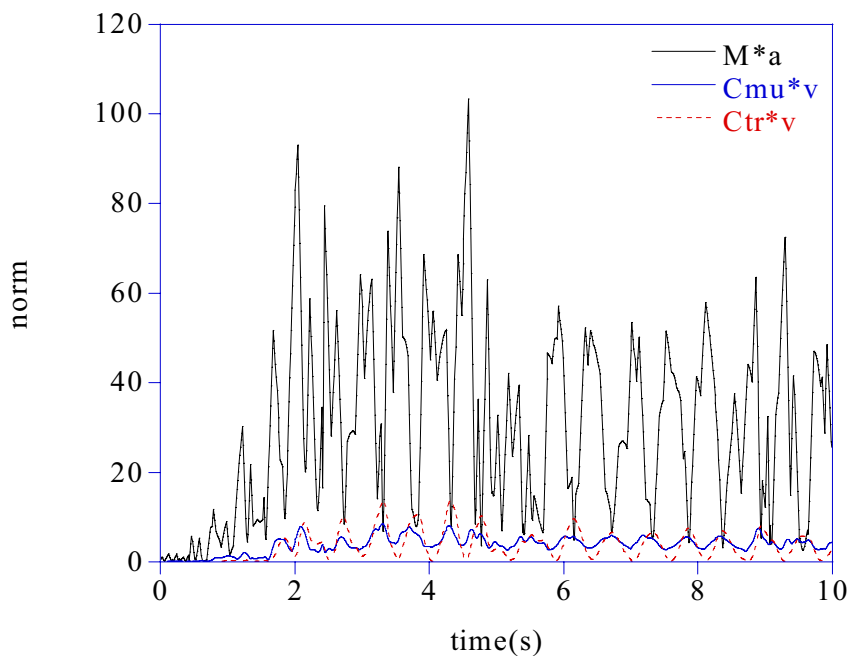


그림 4.9 각 항의 norm의 크기 비교

5. 결론

본 논문에서는 구조물과 유체의 상호 작용에 의하여 발생하는 유체의 동압력을 보다 엄밀하게 구하기 위해 Navier-Stokes 방정식을 사용하여 구조물의 지진 응답을 구하였다.

Navier-Stokes 방정식과 연속 방정식의 두개의 방정식을 근사적으로 풀기 위하여 Penalty 정식화를 사용하였다. 이 방법은 전체적인 방정식의 미지수의 개수가 줄어들게 되어 식이 간단해지고 계산 시간이 단축되는 장점이 있다.

유체와 구조물의 상이한 운동 기술법을 통일하기 위하여 Washizu(Washizu, 1984)에 의한 상대 운동 정식화(relative motion formulation)를 사용하였다. 상대 운동 정식화는 기존의 유체의 운동 기술법인 Euler 운동 기술법은 그대로 두고 속도를 상대 속도 개념으로 생각하여, 유체와 구조물의 서로 다른 운동 기술법 문제를 해결한다.

유한요소법에 의하여 점성 유체의 거동을 해석하고자 하는 경우, 두 가지 종류의 수치적 불안정성이 존재한다. 하나는 이송항에 의하여 발생하는 것이고 (Bathe, 1996), 다른 하나는 유속과 압력항에 대하여 적절한 보간 함수를 적용하지 못했을 경우 발생하는 불안정성이다(Brooks and Hughes, 1982; Hammani *et al.*, 1995). 이러한 문제점을 해결하기 위하여 유선 상류 / Petrov-Galerkin (Streamline Upwind / Petrov-Galerkin : SUPG) 항을 추가하였고, 선택 감소 적분(selective reduced integration)을 사용하였다(Hughes, 1987).

Navier-Stokes 방정식은 비선형 방정식이므로 이를 풀기 위해서는 선형화 하

는 과정이 필요하다. 일반적으로 해의 수렴성이 좋은 문제에서는 수렴을 빨리 하기 위하여 Newton 타입의 반복 계산법을 사용하지만 Navier-Stokes 방정식은 비선형성이 강하므로 안정성을 위하여 Picard 반복 계산법을 사용하였다.

결과적으로 토목 구조물에서는 점성을 고려하는 것이 이상 유체를 해석하는 것에 비하여 큰 차이를 보이지는 않는다는 것을 알 수 있었다. 그러나 사용된 기법들은 질량이 매우 가벼운 기체 문제나 점성이 매우 큰 문제를 풀 때 유용하게 사용될 수 있을 것이다.

참고문헌

김한도, “관내 점성 및 압축성 유체의 동압력을 고려한 지상 무한 관로 지진 응답의 진화적 스펙트럼 해석,” 공학석사학위논문, 서울대학교, 서울, 2001

□□□, “亂流 □動을 考慮한 構□□의 耐□□□,” 工□□□□□論□, 서울大□校, 서울, 1997

Bai, M. R. and Wu, K., “Free-Vibration of a Thin Spherical Shell Containing a Compressible Fluid,” *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 95, No. 6, pp. 3300-3310, 1994

Bathe, K. J., *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, N. J., 1996

Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R., “Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 32, pp. 199-259, 1982

Currie, I. G., *Fundamental Mechanics of Fluids*, McGraw-Hill, New York, N. Y., 1993

Dutta, S. and Laha, M. K., “Analysis of the Small Amplitude Sloshing of a Liquid in a Rigid Container of Arbitrary Shape Using a Low-Order Boundary Element Method,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 47, No. 9, pp. 1633-1648, 2000

Hughes, T. J. R., Taylor, R. L. and Levy, J. F., “High Reynolds Number, Steady, Incompressible Flows by a Finite Element Method, in: *Finite Elements in Fluids* (R. H. Gallagher, O. C. Zienkiewicz, J. T. Oden, M. Morandi Cecchi and C. Taylor ed.), Vol. 3, Wiley, New York, N. Y., 1978, pp. 55-72.

Nakayama, T. and Washizu, K., “The Boundary Element Method Applied to the Analysis of Two-Dimensional Nonlinear Sloshing Problems,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, pp. 1631-1646, 1981

Oden, J. T. and Carey, G. F., *Finite Elements: Mathematical Aspects*, Vol. 4, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1984

Washizu, K., Nakayama, T., Ikegawa, M., Tanaka, Y. and Adachi, T., “Some Finite Element Techniques for the Analysis of Nonlinear Sloshing Problems,” in: *Finite Elements in Fluids* (R. H. Gallagher, J. T. Oden, O. C. Zienkiewicz, T. Kawai and M. Kawahara), Vol. 5, Wiley, New York, N. Y., 1984, pp. 357-376

Welch, J. E., Harlow, F. H., Shannon, J. P. and Daly, B. J., "The MAC method : a Computing Technique for Solving Viscous, Incompressible, Transient Fluid-Flow Problems Involving Free Surfaces," Los Alamos Scientific Laboratory Report No. LA-3425, Univ. of California, Los Alamos, New Mexico, 1966

Wilton, D. T., "Acoustic Radiation and Scattering from Elastic Structures," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 13, pp. 123-138, 1978

Zang, Y., Xue, S. and Kurita, S., "A boundary Element Method and Spectral Analysis Model for Small-Amplitude Viscous Fluid Sloshing in Couple with Structural Vibrations," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 32, No. 1, pp. 69-83, 2000

Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., *The Finite Element Method*, Vol. II, McGraw-Hill, London, 1991

Zienkiewicz, O. C., Kelly, D. W. and Bettess, P., "The Coupling of the Finite Element Method and Boundary Solution Procedures," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, pp. 355-375, 1977

Abstract

There are many cases where it is assumed that the objective fluid is ideal and so few it is viscous in the existing studies on fluid-structure interaction that it is necessary the analysis in consideration of the effects of the viscosity of fluid.

Penalty formulation is used to solve continuity equation and Navier-Stokes equation that is governing equation of viscous fluid.

It is necessary to unify the different view point of fluid and structure. In this study, the relative motion formulation proposed by Washizu is used to solve this problem. The relative motion formulation is that the idea of relative velocity is used instead of the absolute velocity to solve the fluid problem in the Eulerian view.

SUPG(streamline upwind / Petrov-Galerkin) formulation and selective reduced integration are used to solve the numerical instability that is produced when viscous fluid is analyzed by finite element method.

Key Word:

sloshing, Navier-Stokes equation, penalty formulation, relative motion formulation, SUPG formulation, selective reduced integration

Student Number:2000-21546

감사의 글

결국 졸업을 하게 되는군요. 어떻게 지나갔는 지도 모르게 2년이 가버렸습니
다. 수많은 하고싶은 일들을 가지고 야심차게 대학원에 들어왔건만, 결국 숙제
에 쫓기는 1학년 생활과 논문 쓴다고 허둥거리다가 별로 한 것도 없이 지나가
버린 2학년 생활만이 남았습니다. 그리고 한 권의 논문이 남았습니다.

이 한 권의 논문 속에는 제 것보다 다른 분들의 것이 더 많이 들어있습니다.
도움을 주신 분들께 이 자리를 빌어 감사의 말씀 올리고 싶습니다. 우선 아무
것도 모르는 저를 이끌어 결실을 맺게 해 주신 이해성 선생님께 감사 드립니다.
그리고 학부 때부터 지금까지 저에게 많은 가르침을 주셨던 장승필 교수님, 오
병환 교수님, 고현무 교수님, 김재관 교수님께도 감사를 드립니다.

모르는 문제가 있어 전화할 때 마다 전혀 싫은 기색 없이, 가능하면 많은 것
을 가르쳐 주려 하셨던 한도형, 정말로 감사합니다. 비록 형이 해놓은 것에서
벗어나지 못하였지만, 그나마도 형이 없었으면 해내지 못했을 것입니다. 형이라
면 권태로운 회사 생활 속에서 창조적인 무언가를 찾아낼 수 있으리라 생각합
니다. 힘내세요.

그리고 마음이 힘들고 지쳐갈 때 용기의 말을 해 주시고, 그 먼 곳에서 달려
와 술을 사주시기를 마다하지 않으셨던 경남이 누나, 그저 감사한 마음 뿐입니
다. 너무 오랫동안 연락도 못 드렸는데, 취직은 하셨는지. 누난 좋은 데 갈 수

있을 겁니다.

또 제가 이 자리에 있을 수 있도록 결정적으로 도움을 주신 주성이형, 정말 감사합니다. 형 덕분에 졸업합니다. 형이 아니었으면 다음 학기에도 이 논문 계속 쓰고 있어야 할 지도 모르죠. 졸업 못하는 줄 알았을 때는 정말 눈 앞이 캄캄했는데..... 지금 생각해도 아찔합니다. 형, 정말로 고마워요. 그리고 형에게 감사할 것이 또 하나 있지요. 형 덕분에 스타를 이만큼이나 배웠습니다. 언제나 저와 같이 악당(?)들을 무찌르려다가 무찌름을 당하시느라 고생이 많으셨죠. 아직도 못하는 편이지만 형의 특훈이 아니었으면 이 정도까지 오지도 못했을 것입니다. 이 자리를 빌어 감사의 말씀을 전합니다.

연구실의 정신적 지주였던 현우형, 언제나 정진과의 한 판으로 저의 쉬는 시간을 즐겁게 해 주시는 기석이형, 학문의 열정에 불타오르게 하고 미래를 설계하는 데 있어 심각하게 해 주신 용한형, 술 마시며 같이 밤을 세고도 다음날 멋지게 출근하여 능력 있는 남자의 표상을 가르쳐 주신 천종형, 언제나 웃는 얼굴로 들어와서 우리들을 기분 좋게 해 주시는 윤석이형, 느림하고 씩씩한 문성이형, 가끔 오셔서 배고픈 이들에게 탕수육을 선사해 주시는 종명이형, 푸근한 형님을 연상시키는 문구형, 꾸준히 공부만을 하고 계시는 툼툼원 누나, 모두 모두 고맙습니다.

정진, 병글, 구철, 너희들이 마지막까지 나와 함께한 동기들이구나. 정말 고맙다. 덕분에 2년 동안 즐거웠고, 또 같이 묻혀서 졸업을 하게 되는구나. 좋은 사람 많은 곳에 취직해서 재미있는 회사 생활 했으면 좋겠다. 가끔 학교도 와

서 나랑 놀아주기도 하고..... 졸업하고 나서도 가끔 모여서 술이나 같이 했으면 좋겠구나.

영근형, 남규, 만우, 정희. 좋은 논문들 쓰시고 졸업할 수 있기를..... 이 논문처럼 남에게 보여주기 부끄러운 논문이 아닌, 당당하게 권해 줄 수 있는 논문을 쓰고 나가기를 바랍니다.

마지막으로 집에서 늘 제 걱정하시는 아버지, 어머니께 감사 드립니다. 부모님 덕분에 제가 이 자리까지 올 수 있었습니다. 그리고 귀여운 동생 혜지와 군대 가서 고생하고 있을 동광이에게도 고마움을 느낍니다. 사랑하는 가족들에게 이 논문을 바칩니다.

2002년 2월 1일