

공학석사학위논문

사장교 및 사장-현수 복합교의
키 세그먼트에서 발생하는
축력 조정을 위한 초기형상해석

An Initial Equilibrium State Analysis for the
Adjustments of the Axial Forces in
Key Segments of Cable-stayed and
Cable-stayed-suspension Hybrid Bridges

2013년 8월

서울대학교 대학원
건설환경공학부
임 예 슬

국문초록

본 논문은 사장교 및 사장-현수 복합교의 키 세그먼트에서 발생하는 축력을 조정할 수 있는 초기형상해석법을 제안한다. 제안하는 방법은 Newton-Raphson 방법을 통한 TCUD 해석법을 바탕으로 하고 있다. 분리 해석을 통해 키 세그먼트의 축력을 제어하는 방법에 대하여 구체적으로 기술하였다. 분리된 면에 원하는 크기의 축력이 작용하도록 하고, 이 때 분리된 단면에서 적합조건을 만족시키는 단면력과 키 세그먼트의 제작 길이를 구함으로써 키 세그먼트의 축력 조정이 가능하다. 연직 방향과 회전각에 대한 적합조건을 만족시키는 절단면의 단면력은 변위의 민감도를 이용하여 반복 업데이트 하는 방법으로 결정할 수 있고, 축 방향의 적합조건을 만족시키기 위한 분리된 절점의 초기 좌표는 successive iteration 방법을 사용하여 결정한다. 제안된 방법을 통해 사하중 상태에서 교량의 목표 형상뿐만 아니라 주어진 키 세그먼트의 축력 또한 정확하게 만족시킬 수 있다. 제안된 방법을 사장교 예제와 사장-현수 복합교 예제에 적용하여 그 타당성을 검증하였으며 기존의 초기형상해석 방법을 적용하였을 때와 비교하여 유효성을 보였다.

주요어 : 초기형상해석, TCUD, 사장교, 사장-현수 복합교, 키 세그먼트의
축력

Student Number: 2011-23401

목 차

국문초록.....	I
목 차.....	III
그림 목 차.....	V
표 목 차.....	VI
1. 서론.....	1
2. NEWTON-RAPHSON 방법을 이용한 초기형상해석.....	4
2.1. 탄성현수선 케이블 요소.....	4
2.2. TCUD 법의 적용.....	10
2.2.1. 사장교에 대한 적용.....	14
2.2.2. 사장-현수 복합교에 대한 적용.....	16
3. 키 세그먼트의 축력 조정법.....	22
3.1. 분리된 교량에 대한 초기형상해석 방법.....	22
3.2. 절단면에서 적합 조건식의 계산.....	26
3.2.1. 사장교에 대한 적용.....	26

3.2.2. 사장-현수 복합교에 대한 적용.....	28
3.2.3. 민감도 계산.....	31
3.3. 키 세그먼트 요소의 길이 결정.....	34
4. 해석 예제.....	37
4.1. FAN TYPE 사장교 예제.....	38
4.2. 사장-현수 복합교 예제.....	43
5. 결론.....	51
참고문헌.....	53
부록.....	1
A. 탄성현수선 케이블 요소의 연성도 행렬.....	1
ABSTRACT.....	3

그림 목 차

그림2.1. 자중을 받는 케이블의 무응력 상태와 변형된 상태의 위치.....	5
그림2.2. 사장교에 대한 TCUD 법의 적용	14
그림2.3. 사장교의 등가 교량 모델.....	15
그림2.4. 사장-현수 복합교에 대한 TCUD 법의 적용.....	18
그림2.5. 사장-현수 복합교의 등가 교량 모델.....	21
그림3.1. 분리 해석법의 순서도	25
그림3.2. 분리 해석법의 사장교에 대한 적용	26
그림3.3. 분리 해석법의 사장-현수 복합교에 대한 적용	28
그림3.4. TCUD 해석 후 분리점의 절점 위치.....	34
그림4.1. 사장교 적용 예제	38
그림4.2. 사장교에 대한 분리 해석법의 수렴성	40
그림4.3. FANTYPE 사장교 예제에 대한 거더의 축력 비교	42
그림4.4. 사장-현수 복합교 적용 예제	43
그림4.5. 행어의 장력 분담 결정 전후 사장 케이블의 장력.....	46
그림4.6. 사장-현수 복합교에 대한 분리 해석법의 수렴성.....	47
그림4.7. 사장-현수 복합교 예제에 대한 거더의 축력 비교.....	49

표 목 차

표1. FAN TYPE 사장교 예제의 재료 및 단면 특성.....	39
표2. FAN TYPE 사장교 예제의 해석 결과.....	41
표3. PROTOTYPE 사장-현수 복합교의 재료 및 단면 특성.....	44
표4. 사장-현수 복합교 예제의 해석 결과.....	48

1. 서론

최근 해상 교량의 건설이 증가하면서 장대 교량에 대한 수요가 증가하는 추세이다. 그에 따라 장경간 교량 형식에 가장 부합하는 특징을 가진 케이블 지지 교량의 건설도 함께 증가하고 있다. 그런데 케이블 부재는 장력이 도입되어야만 강성이 발생되며 기하학적 형상에 의해 강성이 비선형적으로 변화한다. 그렇기 때문에 케이블 지지 교량의 경우 사하중 상태에서의 설계 조건을 만족시키는 케이블의 장력과 무응력 길이를 결정하기 위해 초기형상해석이 반드시 필요하다.

많은 선진 연구자들이 초기형상해석법을 개발해 왔다. 그 대표적인 방법으로 시산법(trial and error)과 Newton-Raphson 방법을 이용한 초기형상해석 방법이 있고, 최적화 기법을 이용하여 거더에 발생하는 휨 모멘트를 최소화하는 방법 또한 사용되고 있다. 그 중 Newton-Raphson 방법을 이용한 초기형상해석법[1,7]은 케이블 지지 구조물의 평형방정식과 사하중 상태에서 목표 형상에 대한 조건을 함께 푸는 방법으로 설계 조건을 정확하게 만족시키는 해를 구할 수 있다는 장점이 있다. 이 방법을 응용하여, 최근 사장교와 현수교의 단점을 보완하고 장점을 적절히 취할 수 있어 신형식 교량으로 각광받고 있는 사장-현수 복합교에 적용하고자 하는 연구도 진행된 바 있다.[8]

한편 사장교 또는 사장-현수 복합교의 시공 단계를 고려해 보면 부분 별로 시공된 거더를 접합하는 과정이 반드시 필요한데 이러한 접합 부분에 이용되는 요소를 키 세그먼트라고 한다. 접합 시에 알맞은 길이의 키 세그먼트를 제작하여 이 부분에서 별도의 축력이 발생하지 않도록 하는 것이 일반적이고 설계자의 의도에 따라 변경될 수도 있다. 이는 곧 키 세그먼트에서 발생하는 축력에 대한 설계 조건이 있음을 의미하고, 특히 사장 케이블에 의하여 거더에 축력이 도입되는 특징을 가지는 케이블 지지 교량에 대해서는 초기 평형상태 결정 시에 이 설계 조건이 중요하게 작용할 수 있다. 그러나 기존의 초기형상해석법에서는 이러한 제약 조건을 특별히 고려하지 않았고, 그렇기 때문에 해석 결과 키 세그먼트에 설계 조건과 다른 축력이 발생하는 현상이 있다.

본 논문에서는 이러한 기존 연구의 한계점을 보완하기 위하여 사장교와 사장-현수 복합교의 키 세그먼트에서 발생하는 축력을 조정할 수 있는 초기형상해석법을 제안하고자 한다. 이를 위해 우선 Newton-Raphson 방법을 이용한 초기형상해석법에 대하여 기술하고, 그 후 키 세그먼트에 발생하는 축력을 조정하는 구체적인 방법을 제안한다. 키 세그먼트의 축력 조정법은 교량을 분리하여 그 단면에서 발생하는 축 방향 힘을 조정하는 방법이고, 분리된 절점의 적합 조건을 만족시키는 단면력과 키 세그먼트의 제작 길이를 구하는 과정을 필요로 한다. 본 논문에서

는 변위의 민감도를 이용하여 Newton-Raphson 방법을 통해 단면력을 계산하는 방법을 제시한다. 분리된 절점의 초기 좌표를 이동시켜 축 방향 적합조건을 만족시키고 결과적으로는 설계 조건을 만족시키는 키 세그먼트의 길이를 도출하는 successive iteration 방법 또한 구체적으로 기술하였다.

제안된 방법의 타당성과 유효성을 검증하기 위하여 사장교와 사장-현수 복합교 예제를 구성하고 적용해 보았다. 유한요소 모델링을 통하여 사장교와 사장-현수 복합교에 대한 예제를 설정하였고 각각에 대해 제안된 방법론을 적용하여 해석의 수렴성과 해석 결과를 확인하였다. 또한 기존의 초기형상해석법을 적용하였을 때와 비교하여 키 세그먼트의 축력을 원하는 대로 조정할 수 있음을 확인하고 그로부터 제안한 방법이 유효함을 검증하였다.

2. Newton-Raphson 방법을 이용한 초기형상해석

이 장에서는 Newton-Raphson 방법을 이용한 초기형상해석법을 설명하고자 한다. 이를 위해 탄성현수선 케이블 요소의 강성도 방정식을 유도하고, 초기형상해석법의 적용 방법에 대하여 기술할 것이다. 이 장에서 설명하고자 하는 초기형상해석법은 모든 케이블 지지 구조물에 대해 적용할 수 있지만 본 장에서는 사장교와 사장-현수 복합교에 대한 적용 방법만을 설명하고자 한다.

2.1. 탄성현수선 케이블 요소

자중을 받는 케이블 부재의 처짐 곡선은 평형방정식과 constitutive law 그리고 기하 형상에 관한 식으로 이루어지는 지배방정식을 풀어 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_1(s) &= u_1^i - \frac{F_1^i}{EA} s - \frac{F_1^i}{w} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{F_3^i + ws}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{F_3^i}{H} \right) \right\} \\ u_2(s) &= u_2^i - \frac{F_2^i}{EA} s - \frac{F_2^i}{w} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{F_3^i + ws}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{F_3^i}{H} \right) \right\} \\ u_3(s) &= u_3^i - \frac{F_3^i}{EA} s - \frac{ws^2}{2EA} - \frac{1}{w} \left\{ \sqrt{H^2 + (F_3^i + ws)^2} - \sqrt{H^2 + (F_3^i)^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

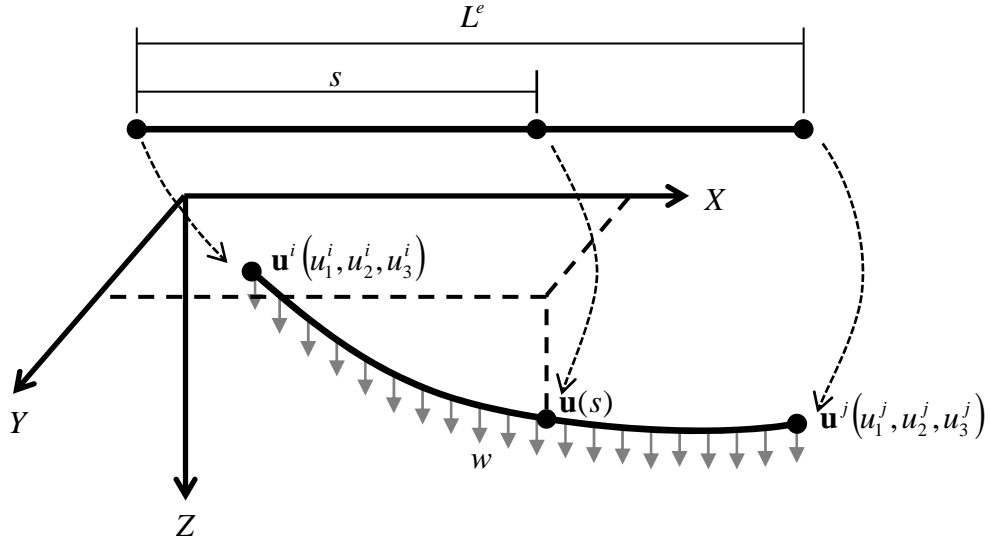


그림2.1. 자중을 받는 케이블의 무응력 상태와 변형된 상태의 위치

여기서 \mathbf{u}^i 는 케이블 요소 i 단의 위치를 나타내고 $\mathbf{u}(s)$ 는 무응력 상태에서 라그랑지 좌표 s 로 표시된 점의 변형 후 위치이다. \mathbf{F}^i 는 i 단에서 발생하는 재단력이며 $H = \sqrt{(F_1^i)^2 + (F_2^i)^2}$ 이다. L^e , E , A , w 는 각각 케이블 부재의 무응력 길이, 영계수 (Young's Modulus), 단면적 그리고 단위길이 당 중량을 의미한다. 아래첨자 1, 2, 3은 각각 X , Y , Z 방향 성분을 나타내기 위하여 쓰여졌다.

식(2.1)의 처짐 곡선에 j 단에서의 위치 정보를 대입하면 다음과 같이 탄성현수선 케이블 요소의 적합 조건식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
u_1^j - u_1^i &= -\frac{F_1^i}{EA} L^e - \frac{F_1^i}{w} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{F_3^i + wL^e}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{F_3^i}{H} \right) \right\} \\
&= f_1(\mathbf{F}^i, L^e) \\
u_2^j - u_2^i &= -\frac{F_2^i}{EA} L^e - \frac{F_2^i}{w} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{F_3^i + wL^e}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{F_3^i}{H} \right) \right\} \\
&= f_2(\mathbf{F}^i, L^e) \\
u_3^j - u_3^i &= -\frac{F_3^i}{EA} L^e - \frac{w(L^e)^2}{2EA} - \frac{1}{w} \left\{ \sqrt{H^2 + (F_3^i + wL^e)^2} - \sqrt{H^2 + (F_3^i)^2} \right\} \\
&= f_3(\mathbf{F}^i, L^e)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

식(2.2)에서 절점의 변위가 i 단 재단력의 함수로 표현되므로 비선형성을 가진다는 것을 알 수 있다. 따라서 위의 적합 조건식을 풀기 위해서는 증분형 관계식을 사용하여야 한다. 식(2.2)를 재단력에 대해 Taylor 전개하여 증분형 방정식으로 나타내면 식(2.3a)와 같다. 식(2.3b)는 이를 매트릭스 형태로 표현한 것이다. 식(2.3)에 대한 자세한 수식은 부록에 기술되어 있다.

$$\begin{aligned}
\Delta u_1^j - \Delta u_1^i &= \Delta f_1(\mathbf{F}^i, L^e) = \frac{\partial f_1}{\partial F_1^i} \Delta F_1^i + \frac{\partial f_1}{\partial F_2^i} \Delta F_2^i + \frac{\partial f_1}{\partial F_3^i} \Delta F_3^i \\
\Delta u_2^j - \Delta u_2^i &= \Delta f_2(\mathbf{F}^i, L^e) = \frac{\partial f_2}{\partial F_1^i} \Delta F_1^i + \frac{\partial f_2}{\partial F_2^i} \Delta F_2^i + \frac{\partial f_2}{\partial F_3^i} \Delta F_3^i \\
\Delta u_3^j - \Delta u_3^i &= \Delta f_3(\mathbf{F}^i, L^e) = \frac{\partial f_3}{\partial F_1^i} \Delta F_1^i + \frac{\partial f_3}{\partial F_2^i} \Delta F_2^i + \frac{\partial f_3}{\partial F_3^i} \Delta F_3^i
\end{aligned} \tag{2.3a}$$

$$\Delta \mathbf{u}^j - \Delta \mathbf{u}^i = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{F}^i} \Delta \mathbf{F}^i \quad (2.3b)$$

식(2.3)을 이용하여 i 단 재단력의 증분을 절점 변위의 증분에 대하여 표시하면 다음과 같다.

$$\Delta \mathbf{F}^i = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{F}^i} \right)^{-1} (\Delta \mathbf{u}^j - \Delta \mathbf{u}^i) = \mathbf{k}_c^e (\Delta \mathbf{u}^j - \Delta \mathbf{u}^i) \quad (2.4)$$

j 단 재단력의 증분 또한 이와 같이 재단 변위에 대해 표현하여야 하는데 그러기 위해서 케이블의 외적 평형 조건을 고려하여야 한다. 케이블 요소의 외적 평형 조건은 다음과 같다.

$$\mathbf{F}^j = -\mathbf{F}^i - \mathbf{w}L_0^e \quad (2.5)$$

여기서 $\mathbf{w} = (0, 0, w)^T$ 이다. 식(2.5)를 증분형으로 표시하면 다음과 같다.

$$\Delta \mathbf{F}^j = -\Delta \mathbf{F}^i \quad (2.6)$$

식(2.4)를 식(2.6)에 대입하여 j 단 재단력의 증분을 재단 변위에 대해 표현하면 다음과 같다.

$$\Delta \mathbf{F}^j = -\mathbf{k}_c^e (\Delta \mathbf{u}^j - \Delta \mathbf{u}^i) \quad (2.7)$$

식(2.4)와 식(2.7)을 합하여 하나의 행렬식으로 나타내면 케이블 요소에 대한 증분형 강성도 행렬식을 구할 수 있다.

$$\Delta \mathbf{F}_C^e = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{F}^i \\ \Delta \mathbf{F}^j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_C^e & \mathbf{k}_C^e \\ \mathbf{k}_C^e & -\mathbf{k}_C^e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}^i \\ \Delta \mathbf{u}^j \end{pmatrix} = \mathbf{K}_C^e \Delta \mathbf{u}_C^e \quad (2.8)$$

한편 초기형상해석법은 설계 조건을 만족시키는 케이블 요소의 무응력 길이를 구하기 위해 제안된 해석 방법이므로 케이블 요소의 무응력 길이를 미지수로 사용한다. 따라서 재단력의 증분을 무응력 길이의 증분에 대해서도 표시하여야 한다. 그 관계식을 구하는 과정은 다음과 같다.

식(2.2)를 케이블 길이의 무응력 길이에 대해 Taylor 전개하여 1차 항까지만 표시하면 다음과 같이 절점 변위의 증분과 무응력 길이의 증분의 관계식을 얻는다. 식(2.9b)는 식(2.9a)를 행렬식으로 나타낸 것이며 식(2.9)의 자세한 수식은 부록에 기술되어 있다.

$$\Delta u_1^j - \Delta u_1^i = \Delta f_1(\mathbf{F}^i, L^e) = \frac{\partial f_1}{\partial L^e} \Delta L^e$$

$$\Delta u_2^j - \Delta u_2^i = \Delta f_2(\mathbf{F}^i, L^e) = \frac{\partial f_2}{\partial L^e} \Delta L^e \quad (2.9a)$$

$$\Delta u_3^j - \Delta u_3^i = \Delta f_3(\mathbf{F}^i, L^e) = \frac{\partial f_3}{\partial L^e} \Delta L^e$$

$$\Delta \mathbf{u}^j - \Delta \mathbf{u}^i = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial L^e} \Delta L^e \quad (2.9b)$$

식(2.9)를 재단력과 재단 변위의 관계식인 식(2.4)에 대입하면 재단력의 증분을 다음과 같이 무응력 길이의 증분에 대해 표시할 수 있다.

$$\Delta \mathbf{F}^i = \mathbf{k}_c^e \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial L^e} \Delta L^e \quad (2.10)$$

외적 평형 조건을 나타내는 식(2.5)를 무응력 길이에 대한 증분형 방정식으로 표현하면 아래와 같다.

$$\Delta \mathbf{F}^j = -\Delta \mathbf{F}^i - \mathbf{w} \Delta L^e \quad (2.11)$$

식(2.11)으로부터 j 단 재단력의 증분을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\Delta \mathbf{F}^j = -\mathbf{k}_c^e \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial L^e} \Delta L^e - \mathbf{w} \Delta L^e = \left(-\mathbf{k}_c^e \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial L^e} - \mathbf{w} \right) \Delta L^e \quad (2.12)$$

식(2.10)와 식(2.12)을 하나의 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\Delta \mathbf{F}_C^e = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{F}^i \\ \Delta \mathbf{F}^j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_c^e \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial L^e} \\ -\mathbf{k}_c^e \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial L^e} - \mathbf{w} \end{bmatrix} \Delta L^e = \mathbf{K}_{CL}^e \Delta L^e \quad (2.13)$$

이 절에서 유도한 케이블 요소의 강성도 행렬 식(2.8)과 식(2.13)를 이용한 초기형상해석법의 자세한 내용은 다음 절에서 설명하고자 한다.

2.2. TCUD 법의 적용

TCUD(Target Configuration Under Dead Loads)는 사하중 상태에서 구조물이 만족하여야 하는 설계 조건을 의미하며, 이는 설계자의 경험을 통해 결정되거나 구조물에 대한 기능적 요구를 만족시키도록 주어진다. 이러한 TCUD 조건과 구조물의 평형 방정식을 Newton-Raphson 방법을 이용하여 동시에 풀어 케이블의 무응력 길이를 구하는 초기형상해석법을 TCUD 법이라 한다.

TCUD 법에서는 일반 해석에서와 달리 케이블의 무응력 길이를 추가적인 미지수로 고려한다. 미지수를 추가하면 구조물에 대한 평형 방정식만으로는 식의 개수가 부족하여 문제를 풀 수 없기 때문에 추가의 조건식이 필요하다. 여기서 TCUD 조건을 추가의 조건식으로 사용할 수 있고 추가되는 조건식의 개수는 추가된 미지수의 개수와 정확하게 일치하여야 한다.

그러나 2.1절에서 설명하였듯이 케이블 요소의 적합조건식이 비선형성을 가지기 때문에 구조물의 평형 방정식과 TCUD 조건식을 조합하여 구성되는 강성도 행렬식 또한 비선형이다. 따라서 2.1에서 유도된 케이블의 증분형 강성도 행렬을 이용하여 강성도 행렬식을 증분형으로 표시하여야 하며 Newton-Raphson 방법을 이용한 반복 계산을 통해 사하중 상태

에서 원하는 목표 형상을 만족시키는 케이블의 무응력 길이를 계산할 수 있다.

프레임 요소와 케이블 요소로 구성된 케이블 지지 구조물에 대한 평형 방정식을 강성도 행렬을 이용하여 증분형으로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}_k + \sum_e (\mathbf{K}_F^e)_k \Delta \mathbf{u}_k^e + \sum_e (\mathbf{K}_C^e)_k \Delta \mathbf{u}_k^e \quad (2.14)$$

여기서 \mathbf{P} , \mathbf{F}_k , $\Delta \mathbf{u}_k^e$ 는 외부 하중의 벡터와 k 번째 반복 계산 단계에서 계산된 구조물의 저항력 그리고 k 번째 반복 계산 단계에서의 요소 별 변위 증분의 벡터이다. \mathbf{K}_F^e , \mathbf{K}_C^e 는 각각 프레임 요소와 케이블 요소에 대한 증분형 강성도 행렬을 의미한다. 여기에 케이블 요소의 무응력 길이를 추가로 고려하여 증분형 방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}_k + \sum_e (\mathbf{K}_F^e)_k \Delta \mathbf{u}_k^e + \sum_e (\mathbf{K}_C^e)_k \Delta \mathbf{u}_k^e + \sum_e (\mathbf{K}_{CL}^e)_k \Delta L_k^e \quad (2.15)$$

ΔL_k^e 는 k 번째 반복계산 단계에서 어떤 케이블 요소에 대한 무응력 길이의 증분을 나타내고, \mathbf{K}_{CL}^e 는 식(2.13)에서 유도한 케이블 요소의 무응력 길이에 대한 증분형 강성도를 의미한다. 위 식을 유한요소 조합 연산자에 의해 적합 조건을 만족하도록 조합하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{P}_k &= (\mathbf{K}_F)_k \Delta \mathbf{u}_k + (\mathbf{K}_C)_k \Delta \mathbf{u}_k + (\mathbf{K}_{CL})_k \Delta \mathbf{L}_k \\ &= (\mathbf{K}_T)_k \Delta \mathbf{u}_k + (\mathbf{K}_{CL})_k \Delta \mathbf{L}_k\end{aligned}\quad (2.16)$$

여기서 $\Delta \mathbf{P}_k$, $\Delta \mathbf{u}_k$, $\Delta \mathbf{L}_k$ 는 각각 k 번째 단계에서 계산된 불평형력 ($\mathbf{P} - \mathbf{F}_k$)의 벡터와 구조물 전체 자유도에 대한 변위 증분의 벡터 그리고 케이블 요소의 무응력 길이 증분의 벡터이다. \mathbf{K}_F , \mathbf{K}_C , \mathbf{K}_{CL} 은 전체 자유도에 대해 조합된 강성도 행렬들이며, \mathbf{K}_T 는 구조물을 구성하는 모든 요소에 대해 조합된 강성도 행렬이다. 구조물이 프레임 요소와 케이블 요소로만 이루어져 있는 경우 \mathbf{K}_T 는 위 식에서와 같이 \mathbf{K}_F 와 \mathbf{K}_C 의 합으로 쓸 수 있다.

위의 평형 방정식을 설계 조건이 주어지는 자유도와 그렇지 않은 자유도로 나누어 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \Delta \mathbf{P}^f \\ \Delta \mathbf{P}^c \end{pmatrix}_k &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_T^{ff} & \mathbf{K}_T^{fc} \\ \mathbf{K}_T^{cf} & \mathbf{K}_T^{cc} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}^f \\ \Delta \mathbf{u}^c \end{pmatrix}_k + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{CL}^f \\ \mathbf{K}_{CL}^c \end{bmatrix}_k \Delta \mathbf{L}_k \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_T^{ff} & \mathbf{K}_T^{fc} & \mathbf{K}_{CL}^f \\ \mathbf{K}_T^{cf} & \mathbf{K}_T^{cc} & \mathbf{K}_{CL}^c \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}^f \\ \Delta \mathbf{u}^c \\ \Delta \mathbf{L} \end{pmatrix}_k\end{aligned}\quad (2.17)$$

여기서 위 첨자로 사용된 f와 c는 각각 TCUD 조건이 주어지지 않는 자유도와 TCUD 조건이 주어지는 자유도를 의미한다.

식(2.17)를 풀기 위한 추가의 조건은 사하중 상태에서 거더나 주탑의 처짐값으로 주어지며, 현수교의 경우 여기에 추가적으로 행어가 수직으로서 있어야 한다는 조건과 sag에 관한 조건을 사용한다. 이러한 조건을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{u}^c = \mathbf{C} \quad (2.18)$$

여기서 \mathbf{C} 는 상수 벡터이므로 위 식을 증분형으로 표현하면 다음과 같다.

$$\Delta \mathbf{u}_k^c = \mathbf{0} \quad \text{and} \quad \mathbf{u}_1^c = \mathbf{C} \quad (2.19)$$

식(2.19)의 조건을 식(2.17)에 대입하여 다음과 같이 하나의 증분형 강성도 행렬식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \Delta \mathbf{P}^f \\ \Delta \mathbf{P}^c \end{pmatrix}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_T^{ff} & \mathbf{K}_{CL}^f \\ \mathbf{K}_T^{cf} & \mathbf{K}_{CL}^c \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}^f \\ \Delta \mathbf{L} \end{pmatrix}_k \quad \text{and} \quad \mathbf{u}_1^c = \mathbf{C} \quad (2.20)$$

매번 반복 계산 단계에서 유도된 식(2.20)을 풀어 무응력 길이의 증분을 구하고 다음 단계에서 사용될 케이블의 무응력 길이를 업데이트하게 되는데, 이 때 무응력 길이의 증분이 다음의 수렴 척도를 만족시키게 되면 반복계산을 멈춘다. 반복 계산을 종료하면 최종적으로 케이블의 무

응력 길이와 사하중 상태에서 케이블 지지 교량의 형상을 얻는다.

$$\frac{\|\Delta \mathbf{L}_k\|}{\|\mathbf{L}_{k+1}\|} \leq 10^{-10} \quad (2.21)$$

위에서 설명한 TCUD 법을 사장교와 사장-현수 복합 케이블 교량에 대해 적용하는 방법은 다음과 같다.

2.2.1. 사장교에 대한 적용

사장교에 대하여 TCUD 법을 적용하기 위해서는 우선 케이블의 수와 동일한 수의 TCUD 조건을 설정하여야 한다. 기본적으로 사하중 상태에서 목표로 하는 거더의 형상이 존재하므로 정해진 목표형상을 만족시키기 위하여 위의 그림 2.2에 표시된 것과 같이 케이블에 의해 지지되는 점의 처짐을 초기형상 해석을 위한 설계 조건으로 사용할 수 있다.

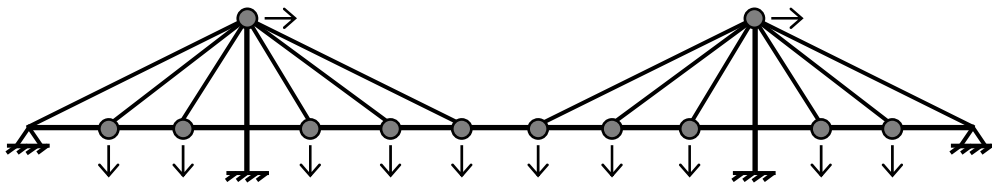


그림 2.2. 사장교에 대한 TCUD 법의 적용

한편 사장교에서 측경간의 끝 단은 교각 또는 앵커리지에 의해 지지되는데, 지점 근처에 정착된 케이블에 대하여 거더의 처짐을 설계 조건으로 이용하는 것은 의미가 없을 수 있다. 위 그림에서 예를 들면 가장 바깥쪽 케이블의 장력은 대부분 지점으로 바로 전달되고, 그렇기 때문에 거더의 처짐을 제어하기 보다는 케이블들의 장력 차이에 의하여 주탑에 과도한 처짐이 발생하는 것을 막기 위해 설계되었을 가능성이 크다. 따라서 측경간의 가장 바깥 쪽 케이블들에 대해서는 주탑이 어느 한 쪽으로 과도하게 처지지 않아야 한다는 설계 조건을 사용할 수 있다. 결과적으로 케이블의 개수와 정확히 같은 수의 합리적인 조건식을 설정하였으므로 이를 이용하여 TCUD 법을 적용할 수 있다.

본격적인 해석에 앞서, TCUD 해석은 반복 계산을 통한 비선형 해석이므로 적절한 초기값을 설정할 필요가 있다. 그림 2.3은 사장교에서 케이블에 의해 지지되는 점을 모두 이동단 지점으로 변경하고 케이블을 제거한 등가 교량 모델을 나타낸 것이다. 케이블 지지점에서 정의된 설계 조건을 등가 교량의 지점에 대한 조건으로 생각하고 해석을 수행하면 교

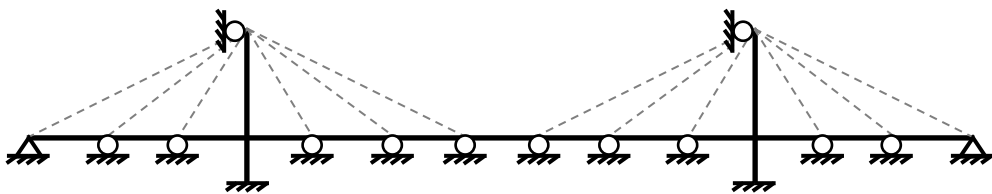


그림2.3. 사장교의 등가 교량 모델

량의 처짐 형상과 이동단 지점에서 발생하는 반력을 얻는다. 거더가 원하는 목표 형상을 만족시키는 상태일 때 사장 케이블 장력의 연직 성분은 등가 교량 모델에 대한 해석을 통해 구한 반력의 크기와 비슷할 것이라고 생각할 수 있으므로 케이블요소 i 단의 연직방향 부재력 성분을 반력과 크기가 같고 방향이 반대인 힘으로 설정한다. 그 다음 식(2.2)의 케이블 요소에 대한 적합조건식 중 연직방향 성분에 관련된 방정식을 풀어 케이블의 초기 무응력 길이를 설정할 수 있다.

2.2.2. 사장-현수 복합교에 대한 적용

사장-현수 복합교에는 사장교와 달리 거더의 하중을 주 케이블로 전달하는 행어 케이블이 존재한다. 행어 케이블은 수직으로 서 있어 연직방향의 하중만을 전달하는 부재로 사용되는데, 2.1절에서 구한 탄성현수선 케이블 요소는 수직으로 서 있는 케이블에 대하여 유도된 것이 아니기 때문에 탄성현수선 케이블 요소로 행어 케이블을 모사할 수 없다. 대신 행어 케이블 모사를 위해 트러스 요소를 이용할 수 있는데 TCUD 해석을 위해서는 트러스 요소 재단력의 증분을 무응력 길이의 증분으로 표현하여야 한다. 수직으로 서 있는 트러스 요소에 대한 평형 방정식은 다음과 같다.

$$F_3^i = \frac{EA}{L^e}(u_3^i - u_3^j - (u_3^i)_0 + (u_3^j)_0) - \frac{1}{2}wL^e \quad (2.22)$$

여기서 \mathbf{F}^i 는 트러스 요소의 i 단 부재력, \mathbf{u}^i , $(\mathbf{u}^i)_0$, \mathbf{u}^j , $(\mathbf{u}^j)_0$ 는 각각 i 단과 j 단 절점의 변형 후 위치와 무응력 상태에서의 위치를 의미한다. E , A , w , L^e 은 트러스 요소의 영계수(Young's Modulus), 단면적, 단위 길이 당 중량, 길이이다. $L^e = |(u_3^i)_0 - (u_3^j)_0|$ 이므로 위의 식을 Taylor 전개 하여 부재력의 증분을 길이의 증분으로 표현하면 다음과 같다.

$$\Delta F_3^i = -\frac{EA}{(L^e)^2}(u_3^i - u_3^j)\Delta L^e - \frac{1}{2}w\Delta L^e \quad (2.23)$$

식(2.23)을 행렬식으로 표현하면 아래와 같다.

$$\Delta \mathbf{F}^i = \begin{pmatrix} \Delta F_1^i \\ \Delta F_2^i \\ \Delta F_3^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{EA}{(L^e)^2}(u_3^i - u_3^j) - \frac{1}{2}w \end{pmatrix} \Delta L^e = \left(\mathbf{k}_{TL} - \frac{1}{2}\mathbf{w} \right) \Delta L^e \quad (2.24)$$

여기서 $\mathbf{w} = (0, 0, w)^T$ 이고, 트러스 요소에 대한 외적 평형 방정식으로부터 j 단 부재력의 증분을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\Delta \mathbf{F}^j = -\Delta \mathbf{F}^i - \Delta \mathbf{w}L^e = \left(-\mathbf{k}_{TL} - \frac{1}{2}\mathbf{w} \right) \Delta L^e \quad (2.25)$$

식(2.24)과 식(2.25)를 하나의 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\Delta \mathbf{F}^e = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{F}^i \\ \Delta \mathbf{F}^j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{TL} - \frac{1}{2} \mathbf{w} \\ -\mathbf{k}_{TL} - \frac{1}{2} \mathbf{w} \end{bmatrix} \Delta L^e = \mathbf{K}_{TL}^e \Delta L^e \quad (2.26)$$

사장-현수 복합교에 대해 TCUD 법을 적용 할 때 사하중 상태 목표 형상에 대한 조건식은 다음과 같이 정의할 수 있다. 우선 목표 거더 형상으로부터 사장 케이블과 행어 케이블에 의해 지지되는 지점에서의 처짐에 관한 조건식을 얻는다. 2.2.1절에서 언급하였듯이 지점으로 곧바로 연결 된 사장 케이블이 존재하는 경우 해당 케이블의 주탑 부분 정착 지점에서 처짐에 관한 조건식을 사용할 수도 있다. 다음으로 주 케이블에 대해서는 사하중 상태에서 행어 케이블이 수직으로 서 있어야 한다는 조건을 이용한다. 그러기 위해서는 주 케이블 상의 행어 정착부에서 수평 변위가 발생하지 않아야 하고 이를 수식으로 나타내면 행어 케이블의 개수만큼의 조건식을 얻게 된다. 한편 거더 측 행어 케이블 정착 지점의

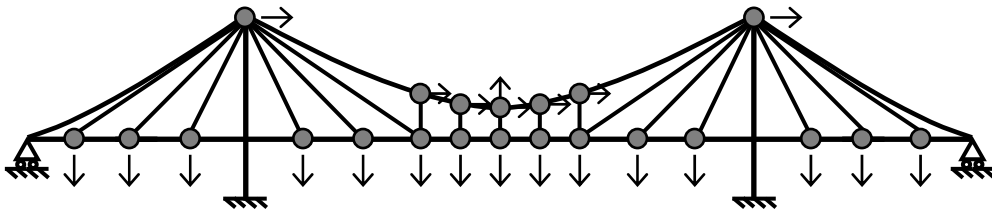


그림 2.4. 사장-현수 복합교에 대한 TCUD 법의 적용

위치는 해당 지점의 초기 위치를 TCUD 해석 후 목표 위치에서 벗어난 양만큼 수정하는 successive iteration 방법을 통해 맞출 수 있다.[8] 그런데 주 케이블의 요소 개수는 반드시 행어 케이블의 수보다 하나가 많기 때문에 추가의 조건식이 필요하다. 이 때 주경간에서는 sag에 대한 설계조건이 존재하게 되므로 그림 2.4에서와 같이 주 케이블 중앙 지점의 위치에 관한 조건식을 얻을 수 있고, 측경간 주 케이블의 경우에는 주탑에 발생하는 수평 변위에 대한 조건을 추가로 이용할 수 있다.

이와 같은 방법으로 TCUD 조건을 설정하는 경우 종종 조건식의 수가 부족하게 되는 경우가 발생하는데 이에 대해 설명하면 다음과 같다. 사장-현수 복합교의 구조적 특징으로 인해 주탑으로 힘이 바로 전달이 되는 사장교 부분과 주 케이블을 통해 주탑으로 힘을 전달하는 현수교 부분에서 강성의 차이가 발생한다. 이 때문에 설계 시에 두 구간의 강성 차이를 완화시키고자 사장교 부분과 현수교 부분의 전이 구간을 설계하고 이 구간에서는 거더의 한 지점이 사장 케이블과 행어 케이블에 의해 동시에 지지되도록 하는 경우가 있다. 이 경우 전이 구간의 사장 케이블과 행어 케이블에 대해서는 정착지점에서 거더의 연직 처짐에 관한 TCUD 조건식이 하나밖에 존재하지 않으므로 추가되는 미지수의 수보다 조건식의 수가 적어지게 된다. 따라서 TCUD 해석을 위한 추가의 조건식이 필요하게 되는데, 이는 사장 케이블과 행어 케이블의 힘의 분담에 대

한 관계식을 설정함으로써 얻을 수 있다. 행어 케이블이 분담하여야 할 힘의 크기가 설계자의 의도에 맞게 결정이 되면 전이 구간의 행어를 제거하여 추가되는 미지수의 개수를 하나 줄이고 대신 해당 부분에 행어의 장력과 같은 크기의 힘을 하중으로 가하여 TCUD 해석을 수행할 수 있다. 행어 케이블의 무응력 길이는 TCUD 해석 후 결정된 거더와 주 케이블의 형상으로부터 구할 수 있다.

행어 케이블의 무응력 길이와 변형 후 길이를 각각 L^e 와 L 이라 하고 행어 케이블의 장력을 T , 영계수 (Young's Modulus)와 단면적을 각각 E , A 라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$L = L^e + \frac{TL^e}{EA} = L^e \left(1 + \frac{T}{EA} \right) \quad (2.27)$$

식 (2.27)로부터 행어 케이블의 길이를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$L^e = \frac{L}{\left(1 + \frac{T}{EA} \right)} \quad (2.28)$$

비선형 해석을 위한 초기 형상 및 케이블의 무응력 길이는 사장교에 서와 마찬가지로 등가 교량 모델에 대한 해석을 통하여 설정할 수 있다. 등가 교량 모델은 그림 2.5와 같고 지점의 반력을 통해 사장 케이블의 초기 장력과 무응력 길이 그리고 행어 케이블의 장력을 구할 수 있다.

행어 케이블의 장력을 알 때 주 케이블의 초기 형상과 장력의 수평방향 성분을 케이블 요소의 선형화 가정과 수평 방향에 대한 평형 조건식을 통해 구할 수 있다.[2] 일련의 계산을 통해 장력의 크기와 케이블 요소 양 끝 절점의 위치를 알게 되므로 식 (2.2)를 풀어 각 케이블 요소의 무응력 길이를 구할 수 있다.

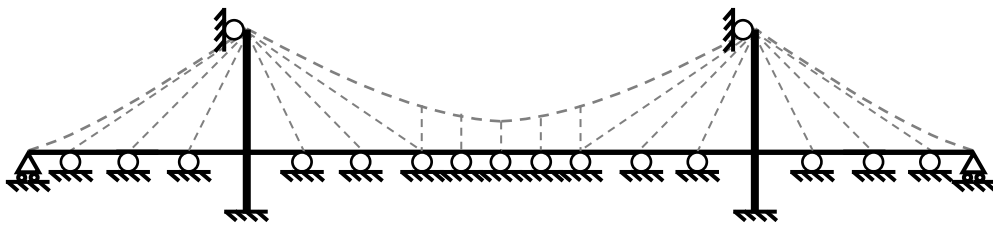


그림2.5. 사장-현수 복합교의 등가 교량 모델

3. 키 세그먼트의 축력 조정법

이 장에서는 사장교와 사장-현수 복합교의 키 세그먼트에서 발생하는 축력에 대한 설계 조건을 정확하게 만족시키는 해석 방법을 제안하고 그 방법에 대해 설명하고자 한다.

3.1. 분리된 교량에 대한 초기형상해석 방법

기존의 TCUD 해석법은 완성된 구조물에 대한 해석 방법이기 때문에 해석 과정에서 거더에 발생하는 축력을 제어하기 위한 장치를 도입하기 어렵다. 본 연구에서는 이러한 한계점을 개선하기 위하여 교량을 분리하여 해석하는 방법을 제안한다. 교량을 분리하여 해석하면 분리된 점에서 거더의 축력에 대한 조건을 추가적으로 고려할 수 있기 때문이다.

실제로 교량을 시공할 때 마지막 폐합 단계에서 고의로 인장력을 도입하거나 혹은 인장력을 받지 않도록 할 수 있으므로 키 세그먼트에 발생하는 축력이 설계 조건으로 주어지는 것으로 생각할 수 있다. 이 점을 고려하여 키 세그먼트 부분에서 교량을 분리하여 해석하고 분리된 단면에 작용하는 축력을 조정함으로써 키 세그먼트에서 설계 조건으로 주어진 축력을 정확하게 만족시키는 TCUD 해석을 수행하게 된다.

키 세그먼트의 축력 조정 방법을 간단히 설명하면 다음과 같다. 교량을 분리한 후 설계 조건으로 주어진 키 세그먼트의 축력을 분리된 점에서의 단면력으로 가하고 각 구조물에 대해 개별적으로 기존의 TCUD 해석을 수행한다. 그 후 분리된 단면에서 적합 조건식을 만족시키도록 하는 단면력을 계산한다. 이렇게 분리 해석을 통해 계산된 단면력은 통합된 구조물에서 볼 때 해당 부분에서 발생하는 부재력과 같으므로 제안하는 분리 해석법을 통해 완성된 구조계에 대한 초기형상 해석을 수행할 수 있다.

분리된 점에서 연직방향 처짐과 교직방향 모멘트에 대한 적합 조건을 만족시키는 단면력은 다음과 같은 반복 계산을 통해 계산할 수 있다. TCUD 해석을 수행한 후 해당 방향의 전단력과 모멘트에 대한 처짐의 민감도를 구하면 이로부터 단면에 가해야 하는 힘을 계산할 수 있다. 이렇게 계산된 단면력을 재하하면 기존에 TCUD 해석을 통해 맞추어 놓았던 설계 조건들이 맞지 않게 된다. 그러므로 분리된 구조물에 대한 TCUD 해석 및 단면력 업데이트를 반복하여 단면력의 변화가 수렴 기준보다 작아질 때까지 진행한다. 이 과정을 통해 TCUD 조건과 분리된 점의 적합 조건을 모두 만족시키는 케이블의 무응력 길이와 단면력을 구할 수 있다.

위의 반복 계산을 수행할 때, 구하고자 하는 값인 연직방향의 전단

력과 교직 모멘트에 대한 적절한 초기값이 필요하다. 반복 계산 수행에 앞서 전체 구조물에 대하여 기존의 TCUD 해석을 수행하면 그 때 분리 지점에서 발생하는 전단력과 모멘트를 계산할 수 있는데, 이 값을 반복 계산을 위한 초기값으로 설정할 수 있다.

그러나 위의 반복 계산 과정에서는 교량의 축 방향 변형에 대해 고려하지 않았다. 즉 앞에서 설명한 반복 계산을 통해 주어진 TCUD 조건과 함께 분리된 점에서의 연직 처짐 및 회전각에 대한 적합 조건이 만족 되도록 하였을 때 교량의 축 방향에 대한 적합 조건은 만족되지 않는다. 최초의 반복 계산 종료 후에 분리된 두 구조물이 겹치거나 또는 만나지 못하는 상태로 수렴하게 되므로 두 구조물이 최종적으로 같은 점에서 만나도록 하기 위해서는 분리되는 절점의 초기 위치를 조정하여야 한다. 절점의 초기 위치를 조정하면 TCUD 조건과 절단면의 적합 조건이 다시 만족되지 않게 되므로 이에 대한 반복 계산이 필요하다. 모든 해석을 종료한 뒤 분리된 절점의 초기 위치 조정량을 통해 키 세그먼트 요소의 제작 길이를 구할 수 있다.

정리하면 세 가지의 반복 계산을 통해 TCUD 조건, 분리된 점에서의 연직방향 처짐, 회전각 그리고 축 방향 변형에 대한 적합 조건을 모두 만족시키는 케이블의 무응력 길이와 분리된 점에 작용하는 단면력, 또는 키 세그먼트 요소의 길이를 구할 수 있다.

이 장에서 제안하는 키 세그먼트의 축력 조정 방법을 순서도로 나타내면 아래 그림 3.1과 같다.

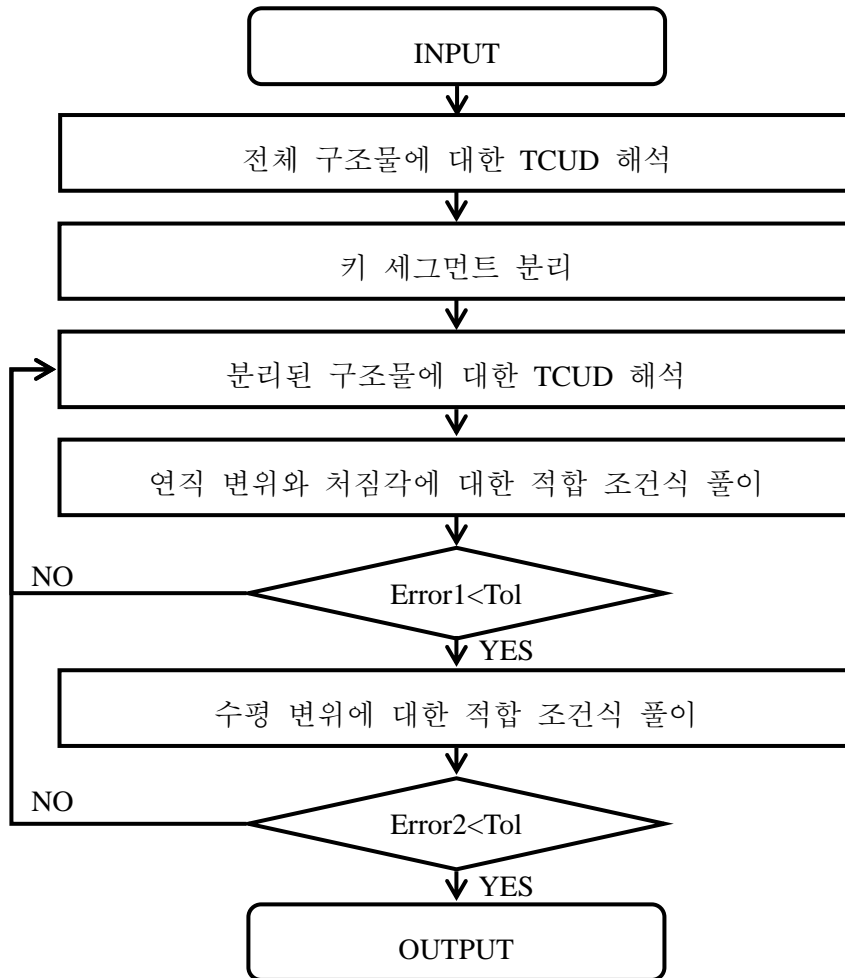


그림3.1. 분리 해석법의 순서도

3.2. 절단면에서 적합 조건식의 계산

3.2.1. 사장교에 대한 적용

사장교에 대하여 그림 3.2와 같이 분리점을 설정하고 본 연구에서 제안하는 키 세그먼트의 축력 조정법을 적용할 수 있다. 분리된 점의 왼쪽과 오른쪽에서 연직 처짐과 교직방향 회전각을 각각 $\delta^L, \theta^L, \delta^R, \theta^R$ 이라 하고 같은 방향에 대한 전단력과 모멘트를 V^L, M^L, V^R, M^R 라 하면 절단면에서의 적합 조건식을 아래 식(3.1)과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta^L(V^L, M^L) &= \delta^R(V^R, M^R) \\ \theta^L(V^L, M^L) &= \theta^R(V^R, M^R) \end{aligned} \quad (3.1)$$

앞서 언급하였듯이 위의 적합 방정식은 비선형성을 포함하고 있으므로 증분형 방정식으로 표현하여 Newton-Raphson 방법을 통해 해를 구한다. k 번째 반복 계산 단계에 대해 아래 식(3.2)와 같이 증분형 방정식을

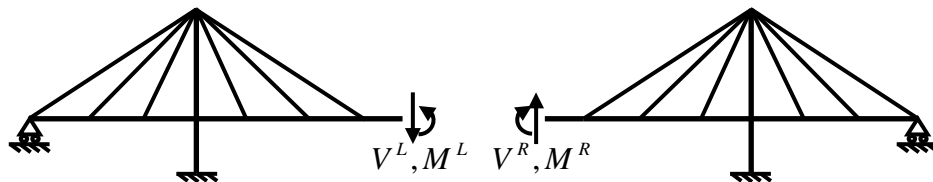


그림3.2. 분리 해석법의 사장교에 대한 적용

출 수 있다. 각 단계에서 민감도를 사용하여 해에 접근하기 때문에 비교적 적은 수의 반복 계산을 통해 해를 구할 수 있으며, 해의 수렴성 또한 보장된다.

$$\begin{aligned}\delta_k^L + \frac{\partial \delta_k^L}{\partial V^L} \Delta V_k^L + \frac{\partial \delta_k^L}{\partial M^L} \Delta M_k^L &= \delta_k^R + \frac{\partial \delta_k^R}{\partial V^R} \Delta V_k^R + \frac{\partial \delta_k^R}{\partial M^R} \Delta M_k^R \\ \theta_k^L + \frac{\partial \theta_k^L}{\partial V^L} \Delta V_k^L + \frac{\partial \theta_k^L}{\partial M^L} \Delta M_k^L &= \theta_k^R + \frac{\partial \theta_k^R}{\partial V^R} \Delta V_k^R + \frac{\partial \theta_k^R}{\partial M^R} \Delta M_k^R\end{aligned}\quad (3.2)$$

식(3.2)에 주어진 적합 조건식은 2개이고 이를 이용하여 절단면 양쪽에 작용하는 단면력 4개를 구해야 하므로 절단면에 작용하는 단면력은 서로 그 크기가 같고 방향이 반대라는 평형 방정식을 추가로 이용한다.

$$\begin{aligned}\Delta V^L + \Delta V^R &= 0 \\ \Delta M^L + \Delta M^R &= 0\end{aligned}\quad (3.3)$$

식(3.2)에 식(3.3)를 대입하여 2개의 미지수(ΔV^L , ΔM^L)에 대한 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\delta_k^L + \frac{\partial \delta_k^L}{\partial V^L} \Delta V_k^L + \frac{\partial \delta_k^L}{\partial M^L} \Delta M_k^L &= \delta_k^R - \frac{\partial \delta_k^R}{\partial V^R} \Delta V_k^L - \frac{\partial \delta_k^R}{\partial M^R} \Delta M_k^L \\ \theta_k^L + \frac{\partial \theta_k^L}{\partial V^L} \Delta V_k^L + \frac{\partial \theta_k^L}{\partial M^L} \Delta M_k^L &= \theta_k^R - \frac{\partial \theta_k^R}{\partial V^R} \Delta V_k^L - \frac{\partial \theta_k^R}{\partial M^R} \Delta M_k^L\end{aligned}\quad (3.4)$$

3.2.2. 사장-현수 복합교에 대한 적용

사장-현수 복합교의 경우에는 사장케이블에 의해 지지되지 않고 주 케이블과 행어 케이블에 의해 지지되는 현수 구간이 비교적 길게 설계 되는데 외부에서 거더로 교축방향의 힘이 도입되지 않는다는 점에서 사장교에서의 키 세그먼트 부분과 비슷한 의미를 가진다. 또 시공 단계를 생각하였을 때 현수 구간의 양 끝점이 마지막으로 폐합하는 지점이 된다. 따라서 그림 3.3와 같이 사장교 구간이 끝나는 두 지점에서 교량을 분리 하고 제안하는 축력 조정법을 적용하는 것이 합당하다고 생각된다. 분리 되는 점을 A, B라 하고 각각 분리된 점에서 처짐과 단면력을 3.2.1에서와 같은 방법으로 명명하면 해당 교량에 대한 적합 조건식을 식(3.5)와 같이 쓸 수 있다.

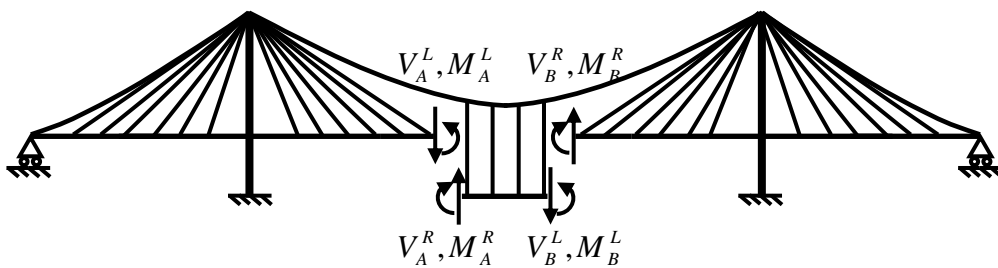


그림3.3. 분리 해석법의 사장-현수 복합교에 대한 적용

$$\begin{aligned}
\delta_A^L(V_A^L, M_A^L) &= \delta_A^R(V_A^R, M_A^R, V_B^L, M_B^L) \\
\theta_A^L(V_A^L, M_A^L) &= \theta_A^R(V_A^R, M_A^R, V_B^L, M_B^L) \\
\delta_B^L(V_A^R, M_A^R, V_B^L, M_B^L) &= \delta_B^R(V_B^R, M_B^R) \\
\theta_B^L(V_A^R, M_A^R, V_B^L, M_B^L) &= \theta_B^R(V_B^R, M_B^R)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

사장교에 적용할 때와 다른 점은 현수 구간이 존재하여 A, B 중 한 쪽 절점에 작용하는 힘에 의해 다른 절점에서 처짐량이 변화할 수 있기 때문에 두 점에 대해 개별적인 적합 조건식을 푸는 것이 아니라 상호 작용이 있는 조건식을 풀어야 한다는 것이다.

3.2.1에서와 마찬가지로 위의 적합 방정식은 비선형성을 포함하고 있으므로 증분형 방정식으로 표현하고 Newton-Rapson 방법을 이용하여 풀이한다. 식(3.6)은 k 번째 반복 계산 단계에서 연직방향 처짐에 대한 적합 조건식을 증분형으로 표시한 것이며 회전각에 대하여 같은 방법으로 증분형 방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\delta_{A,k}^L + \frac{\partial \delta_{A,k}^L}{\partial V_A^L} \Delta V_{A,k}^L + \frac{\partial \delta_{A,k}^L}{\partial M_A^L} \Delta M_{A,k}^L \\
&= \delta_{A,k}^R + \frac{\partial \delta_{A,k}^R}{\partial V_A^R} \Delta V_{A,k}^R + \frac{\partial \delta_{A,k}^R}{\partial M_A^R} \Delta M_{A,k}^R + \frac{\partial \delta_{A,k}^R}{\partial V_B^L} \Delta V_{B,k}^L + \frac{\partial \delta_{A,k}^R}{\partial M_B^L} \Delta M_{B,k}^L \\
&\delta_{B,k}^L + \frac{\partial \delta_{B,k}^L}{\partial V_A^R} \Delta V_{A,k}^R + \frac{\partial \delta_{B,k}^L}{\partial M_A^R} \Delta M_{A,k}^R + \frac{\partial \delta_{B,k}^L}{\partial V_B^L} \Delta V_{B,k}^L + \frac{\partial \delta_{B,k}^L}{\partial M_B^L} \Delta M_{B,k}^L \\
&= \delta_{B,k}^R + \frac{\partial \delta_{B,k}^R}{\partial V_B^R} \Delta V_{B,k}^R + \frac{\partial \delta_{B,k}^R}{\partial M_B^R} \Delta M_{B,k}^R
\end{aligned} \tag{3.6}$$

A, B 점에서 적합 조건식 4개를 이용하여 총 8개의 단면력 구해야 하므로 한 절단면에 작용하는 단면력은 서로 그 크기가 같고 방향이 반대라는 평형 방정식을 추가로 이용한다.

$$\begin{aligned}
 \Delta V_A^L + \Delta V_A^R &= 0 \\
 \Delta M_A^L + \Delta M_A^R &= 0 \\
 \Delta V_B^L + \Delta V_B^R &= 0 \\
 \Delta M_B^L + \Delta M_B^R &= 0
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

식(3.6)에 식(3.7)을 대입하여 적합 조건식을 4개의 미지수(ΔV_A^L , ΔM_A^L , ΔV_B^L , ΔM_B^L)에 대해 표현하면 다음과 같다. 식(3.8)에는 연직방향 처짐에 관한 증분형 방정식만을 표기하였으며 회전각에 대하여 같은 방법으로 증분형 방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 &\delta_{A,k}^L + \frac{\partial \delta_{A,k}^L}{\partial V_A^L} \Delta V_{A,k}^L + \frac{\partial \delta_{A,k}^L}{\partial M_A^L} \Delta M_{A,k}^L \\
 &= \delta_{A,k}^R - \frac{\partial \delta_{A,k}^R}{\partial V_A^R} \Delta V_{A,k}^L - \frac{\partial \delta_{A,k}^R}{\partial M_A^R} \Delta M_{A,k}^L + \frac{\partial \delta_{A,k}^R}{\partial V_B^L} \Delta V_{B,k}^L + \frac{\partial \delta_{A,k}^R}{\partial M_B^L} \Delta M_{B,k}^L \\
 &\delta_{B,k}^L - \frac{\partial \delta_{B,k}^L}{\partial V_A^R} \Delta V_{A,k}^L - \frac{\partial \delta_{B,k}^L}{\partial M_A^R} \Delta M_{A,k}^L + \frac{\partial \delta_{B,k}^L}{\partial V_B^L} \Delta V_{B,k}^L + \frac{\partial \delta_{B,k}^L}{\partial M_B^L} \Delta M_{B,k}^L \\
 &= \delta_{B,k}^R - \frac{\partial \delta_{B,k}^R}{\partial V_B^R} \Delta V_{B,k}^L - \frac{\partial \delta_{B,k}^R}{\partial M_B^R} \Delta M_{B,k}^L
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

3.2.3. 민감도 계산

본 절에서는 3.2.1과 3.2.2절의 적합 조건식 풀이에 사용되는 변위의 민감도를 산정하는 방법에 대하여 서술하고자 한다. 변위 민감도는 분리된 구조물에 대한 TCUD 해석이 끝난 상태에서 구조물의 강성도 방정식을 미분하여 구할 수 있다. 구조물에 대한 평형 방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_F \mathbf{u} + \sum_e \mathbf{F}_C^e = \mathbf{P} \quad (3.9)$$

여기서 \mathbf{K}_F , \mathbf{u} , \mathbf{F}_C^e , \mathbf{P} 는 각각 뼈대구조물의 강성도 행렬, 변위 벡터, 케이블 요소의 부재력, 외력을 의미한다. 식(3.9)를 분리된 절점에 작용하는 어떤 단면력 F_m 으로 미분하면 아래와 같다.

$$\mathbf{K}_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial F_m} + \sum_e \frac{\partial \mathbf{F}_C^e}{\partial F_m} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial F_m} = \mathbf{I}_{F_m} \quad (3.10)$$

식(3.10)에서 \mathbf{I}_{F_m} 은 해당 힘이 작용하는 곳에서만 1이고 나머지 점에서는 모두 0인 단위 벡터이다. 두 번째 항은 2장에서 설명한 탄성현수선 케이블 요소의 적합 조건식을 미분하여 구할 수 있다. 식(2.2)를 단면력 F_m 으로 미분하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1^j}{\partial F_m} - \frac{\partial u_1^i}{\partial F_m} &= \frac{\partial f_1}{\partial F_m} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{F}^i} \frac{\partial \mathbf{F}^i}{\partial F_m} \\ \frac{\partial u_2^j}{\partial F_m} - \frac{\partial u_2^i}{\partial F_m} &= \frac{\partial f_2}{\partial F_m} + \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{F}^i} \frac{\partial \mathbf{F}^i}{\partial F_m}\end{aligned}\quad (3.11a)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_3^j}{\partial F_m} - \frac{\partial u_3^i}{\partial F_m} &= \frac{\partial f_3}{\partial F_m} + \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{F}^i} \frac{\partial \mathbf{F}^i}{\partial F_m} \\ \frac{\partial \mathbf{u}^j}{\partial F_m} - \frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial F_m} &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial F_m} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{F}^i} \frac{\partial \mathbf{F}^i}{\partial F_m}\end{aligned}\quad (3.11b)$$

구조물을 분리하는 점이 뼈대 구조물에 케이블이 연결되는 절점과 같지 않다면 우변의 첫 번째 항이 사라지게 되므로 주어진 단면력에 대한 케이블 i 단의 재단력의 미분은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{F}^i}{\partial F_m} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{F}^i} \right)^{-1} (\mathbf{u}^j - \mathbf{u}^i) = \mathbf{k}_c^e \left(\frac{\partial \mathbf{u}^j}{\partial F_m} - \frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial F_m} \right) \quad (3.12)$$

케이블 요소에 대한 평형방정식(식(2.5))으로부터 j 단에 대해서도 다음과 같이 재단력의 미분을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{F}^j}{\partial F_m} = \frac{\partial (-\mathbf{F}^j - \mathbf{w}L_0^e)}{\partial F_m} = \frac{\partial (-\mathbf{F}^j)}{\partial F_m} = -\mathbf{k}_c^e \left(\frac{\partial \mathbf{u}^j}{\partial F_m} - \frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial F_m} \right) \quad (3.13)$$

식(3.12)와 식(3.13)으로부터 하나의 케이블 요소에 대해 재단력의 미분을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{F}_C^e}{\partial F_m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}^i}{\partial F_m} \\ \frac{\partial \mathbf{F}^i}{\partial F_m} \\ \frac{\partial \mathbf{F}^i}{\partial F_m} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_C^e & \mathbf{k}_C^e \\ \mathbf{k}_C^e & -\mathbf{k}_C^e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}^i}{\partial F_m} \\ \frac{\partial \mathbf{u}^j}{\partial F_m} \\ \frac{\partial \mathbf{u}^k}{\partial F_m} \end{pmatrix} = \mathbf{K}_C^e \frac{\partial \mathbf{u}_C^e}{\partial F_m} \quad (3.14)$$

식(3.14)를 식(3.10)에 대입하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial F_m} + \sum_e (\mathbf{K}_C^e \frac{\partial \mathbf{u}_C^e}{\partial F_m}) = \mathbf{K}_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial F_m} + \mathbf{K}_C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial F_m} = \mathbf{I}_{F_m} \quad (3.15)$$

위의 식(3.15)를 풀면 주어진 단면력에 대한 변위의 민감도를 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial F_m} = (\mathbf{K}_F + \mathbf{K}_C)^{-1} \mathbf{I}_{F_m} \quad (3.16)$$

계산된 민감도 벡터 중 구조물이 분리된 점에서 처짐과 처짐각에 관한 항들을 추출함으로써 3.2.1절과 3.2.2절의 적합 방정식 풀이에 사용되는 변위 민감도들을 구할 수 있고 식(3.4) 또는 식(3.8)을 풀어 k 번째 반복 계산 단계에서 단면력의 증분값을 구할 수 있다.

3.3. 키 세그먼트 요소의 길이 결정

앞서 언급하였듯이 TCUD 조건과 절단면에서 적합 조건을 만족시키도록 하는 반복 계산을 수행한 뒤 분리된 절점이 한 점에서 정확하게 만나지 않을 수 있다. 그림 3.4와 같이 TCUD 해석 후 분리된 절점의 위치가 일치 하지 않으면 이를 일치 시키기 위하여 양측 절점의 초기 위치를 수정하여야 한다. 그림 3.4에서 X_n^L , X_n^R 은 각각 좌측과 우측 구조물에서 분리된 절점의 초기 위치이고 ΔX_n^L , ΔX_n^R 은 TCUD 해석 후 좌·우 구조물의 분리된 절점에서 발생하는 수평방향 변위이다. 아래첨자 n은 반복 계산의 횟수를 나타낸다. 따라서 $X_n^L + \Delta X_n^L$ 과 $X_n^R + \Delta X_n^R$ 은 n번째 TCUD 해석 후 분리된 절점의 최종 위치를 의미한다.

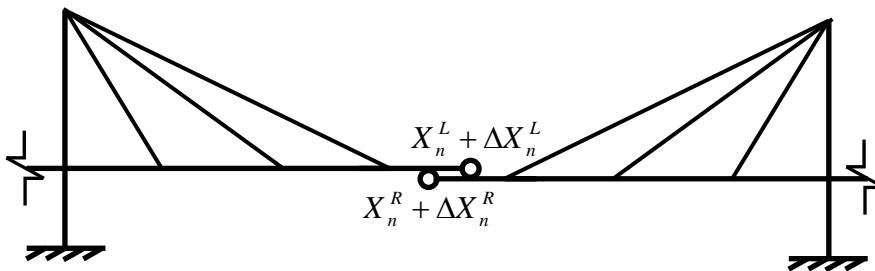


그림3.4. TCUD 해석 후 분리점의 절점 위치

n 번째 TCUD 해석 후 분리된 두 구조물이 한 점에서 만나기 위한 적합 조건은 다음과 같다.

$$X_n^L + \Delta X_n^L = X_n^R + \Delta X_n^R \quad (3.17)$$

분리점의 수립된 위치가 일치하지 않을 때 그 불일치량을 ε_n 이라 하면 그 값은 식(3.15)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\varepsilon_n = (X_n^R + \Delta X_n^R) - (X_n^L + \Delta X_n^L) \quad (3.18)$$

식(3.16)의 불일치량만큼 절점의 초기 위치를 조정하여 TCUD 해석을 다시 수행하면 다음 반복 계산 단계에서 불일치량이 줄어들 것이라고 예상할 수 있다. 절점의 초기 위치 조정량은 해석하는 사람의 판단에 따라 한 쪽 구조물의 절점만을 수정하거나 양 쪽 구조물의 절점을 모두 수정할 수 있는데 이는 최종 해석 결과에는 영향을 미치지 않고 다만 완성된 구조물에서 볼 때 분리하는 점의 위치가 달라지게 되는 효과가 있다. 대칭형 사장교에 적용하는 경우 대칭 조건을 이용하는 것이 편리할 수 있으므로 식(3.19)와 같이 다음 단계의 TCUD 해석을 위한 절점의 초기 위치를 결정할 수 있다.

$$\begin{aligned}
X_{n+1}^L &= X_n^L + \frac{1}{2}(X_n^R + \Delta X_n^R - X_n^L - \Delta X_n^L) \\
&= X_n^L + \frac{1}{2}\varepsilon_n = X_1^L + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \\
X_{n+1}^R &= X_n^R + \frac{1}{2}(X_n^L + \Delta X_n^L - X_n^R - \Delta X_n^R) \\
&= X_n^R - \frac{1}{2}\varepsilon_n = X_1^R - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \varepsilon_i
\end{aligned} \tag{3.19}$$

반복 계산 과정에서 민감도를 사용하지 않고 불일치량으로부터 해에 근접하는 방향으로 절점의 위치를 수정하기 때문에 successive iteration을 통해 최종 해를 찾게 된다.

이와 같은 반복 계산을 통해 결과적으로 식(3.17)의 적합 조건을 만족시키는 분리된 절점의 초기 위치를 구할 수 있다. n+1 번의 반복 계산 단계에서 식(3.17)의 적합 조건이 만족되었다면, 이 때 절점 위치의 총 수정량은 식(3.20)과 같고 이를 통해 제작하여야 할 키 세그먼트 요소의 길이를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
X_{n+1}^L - X_1^L &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \\
X_{n+1}^R - X_1^R &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \varepsilon_i
\end{aligned} \tag{3.20}$$

4. 해석 예제

이 장에서는 3장에서 제안한 TCUD 분리 해석법을 fan type 사장교 예제와 사장-현수 복합교 예제에 적용하여 그 적용성을 검증하고자 한다. 분리된 점에서의 연직 처짐과 회전각에 대한 적합 조건식 풀이와 축 방향 적합 조건식 풀이를 위한 수렴 척도를 각각 식(4.1), 식(4.2)으로 설정하였다. 연직 처짐과 회전각에 관한 해석은 Newton-Raphson 방법을 사용하는데 비해 축방향의 적합조건을 만족시키기 위한 해석 과정은 successive iteration을 이용하므로 효율적인 해석을 위하여 수렴 척도를 낮게 설정하였다.

$$\frac{\|\Delta \mathbf{F}_k\|}{\|\mathbf{F}_{k+1}\|} \leq 10^{-10} \quad (4.1)$$

$$\frac{\|\Delta \mathbf{X}_n\|}{\|\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_1\|} \leq 10^{-6} \quad (4.2)$$

4.1. Fan type 사장교 예제

Fan type 사장교 예제는 Wang[3]의 논문에서 사용되었던 대칭형 사장교 예제를 채택하였고, 본 논문에서 제안한 방법론의 적용성을 검토하기 위한 목적에 부합하도록 경계조건을 변경하였다. 제안하는 방법을 사장교 예제에 적용하여 그 타당성을 확인하고 기존의 TCUD 해석법을 적용하였을 때와 제안하는 방법을 제안하였을 때의 초기형상 해석 결과를 비교하였다.

예제 교량의 총 경간은 610m 이고 양 끝 단에서 회전단 지점에 의해 구속되어 있고 주탑 위치에서 이동단 지점에 의해 구속되어 있는 것으로 설정하였다. 주탑의 높이는 61m 이고 하부에서 고정단 지점에 의해 지지되며 거더와는 케이블 부재에 의해서만 연결된다. 케이블에 의해 지지되는 점 간의 간격은 모두 동일하다.

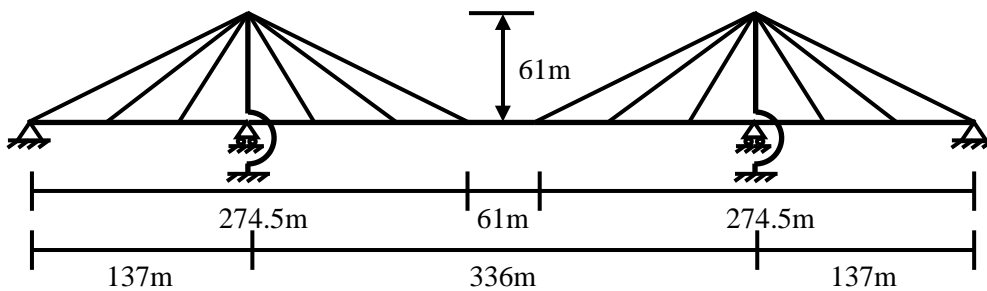


그림4.1. 사장교 적용 예제

표1. Fan type 사장교 예제의 재료 및 단면 특성

Member	E (GPa)	A (m ²)	I (m ⁴)	w (kN/m)
Exterior cable	207	0.042	-	3.2
Interior cable	207	0.016	-	1.2
Deck	207	0.320	1.131	87.5
Pylon(0.0 - 20.3m)	207	0.269	0.432	-
Pylon(20.3 - 40.6m)	207	0.228	0.345	-
Pylon(40.6 - 61.0m)	207	0.203	0.211	-

사장 케이블은 하나의 탄성현수선 케이블 요소로 모델링하여 TCUD 해석 시 사장 케이블 하나 당 무응력 길이에 대한 미지수가 하나씩 증가하도록 하였다. 또한 거더나 주탑에서 축력에 의한 영향을 정교하게 해석하기 위하여 모멘트 증폭 효과를 고려하는 보-기둥 요소를 사용하였다. 예제 교량을 구성하는 부재들에 대한 재료 및 단면 특성은 표 1에 요약되어 있다. 표 1에서 exterior cable은 측경간 끝 단에 연결된 케이블과 주경간의 가장 중앙부에 연결된 케이블을 나타낸다.

본 논문에서 제안하고 있는 키 세그먼트의 축력을 조정할 수 있는 TCUD 해석법을 적용하기 위해 3장에서 설명한 바와 같이 교량의 정 중앙에 위치하는 키 세그먼트 부분에서 교량을 분리하였다. 사장교의 시공 단계에서 생각하면 키 세그먼트 부분에서 아무런 힘이 걸리지 않은 상태

로 접합을 하는 것이 일반적이므로 키 세그먼트의 부분의 축력이 없어지도록 해석을 수행하였다. 해석 결과 분리된 점에서의 적합 조건식에 관련된 두 가지 반복 계산이 모두 세 번 만에 식(4.1)과 식(4.2)의 수렴 척도를 만족하여 매우 안정적이고 빠르게 수렴한다는 것을 확인할 수 있었다. 반복 계산 횟수에 따른 수렴 정도는 그림 4.2에 나타내었다. 그림 4.2에서 inner iteration은 해석의 순서 상 내부 반복계산에 해당되는 연직 방향과 회전각에 대한 해석을 의미하고 따라서 outer iteration은 수평 방향 적합조건에 대한 해석을 의미한다.

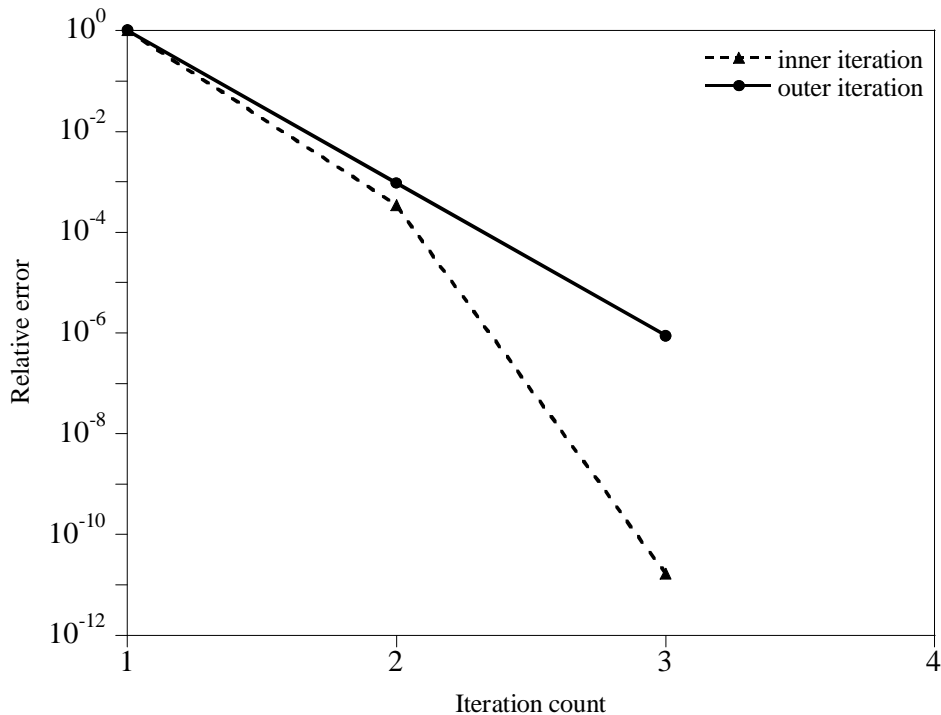


그림4.2. 사장교에 대한 분리 해석법의 수렴성

표2. Fan type 사장교 예제의 해석 결과

Quantity	Direction	Left	Right
Configuration	Longitudinal	304.8 m	304.8 m
	Vertical	2.08 cm	2.08 cm
Displacement	Longitudinal	-6.74 cm	6.74 cm
	Vertical	2.08 cm	2.08 cm
	Rotational	0.00 rad	0.00 rad

해석 결과 분리된 지점의 좌·우에서 축 방향과 연직 방향에 대한 절점의 위치가 같고 회전각 또한 같음을 표2를 통해 확인할 수 있고 이를 통해 제안하는 방법론의 타당성을 확인할 수 있다. 한편 분리된 점의 왼쪽과 오른쪽 절점의 초기 위치는 각각 오른쪽과 왼쪽으로 6.74cm씩 수정된 결과를 얻게 된다. 이는 곧 키 세그먼트 요소의 길이를 초기의 모델링에서의 길이 보다 13.48cm 길게 제작해야 한다는 것을 의미한다.

다음으로 기존의 TCUD 해석법을 적용한 결과와 제안한 방법을 통한 해석 결과를 비교해 보았다. 두 가지 경우 모두 사하중 상태에서의 목표 형상에 대한 조건을 만족하고 있으므로 거더의 형상은 비슷하지만 거더가 받고 있는 축력의 크기에서 차이가 발생한다. 해석 결과 축력의 차이는 그림 4.3에서 확인 할 수 있다. 기존의 방법으로 TCUD 해석을 수행한 결과 키 세그먼트 위치에서 15MN 정도의 인장력이 발생하던 것

에 반해 본 논문에서 제안한 방법을 적용하였을 때에는 의도한 바와 같이 축력이 발생하지 않는 상태가 되는 것을 볼 수 있다. 또한 교량 양 끝 단 지점에서 발생하는 반력의 교축 방향 성분을 살펴보면 기존 TCUD 해석의 결과에서는 키 세그먼트에 발생하는 인장력의 크기와 같은 크기의 반력이 발생하지만 제안하는 방법을 적용하였을 때는 반력이 발생하지 않는다. 즉, 제안하는 해석 방법을 통해 사하중 상태에서 키 세그먼트에 발생하는 축력과 지점의 반력에 대한 설계 조건을 정확히 만족시키는 결과를 얻을 수 있다.

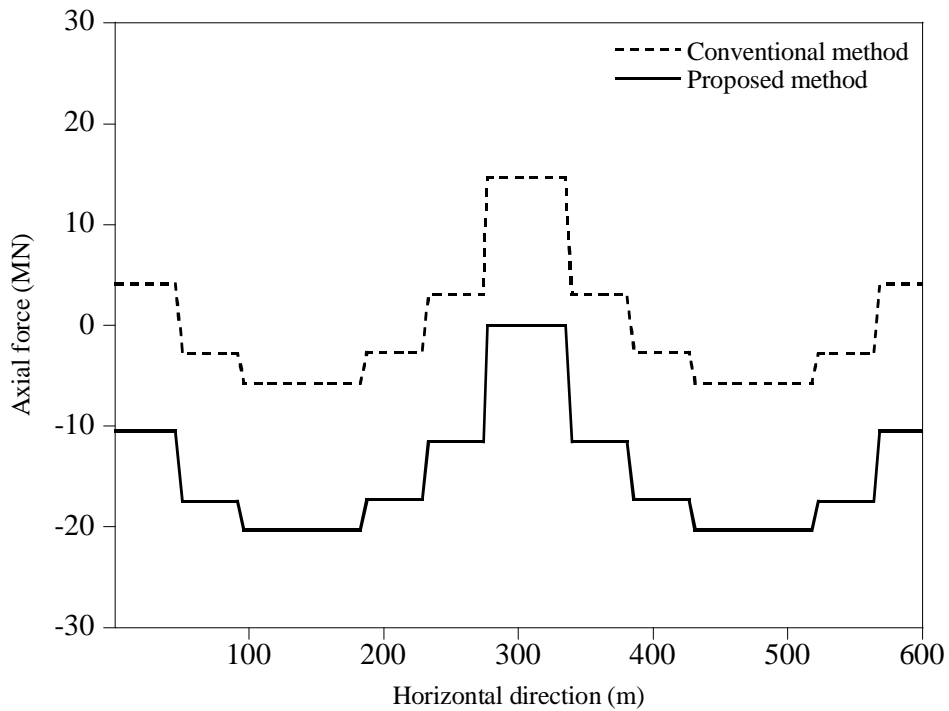


그림4.3. fan type 사장교 예제에 대한 거더의 축력 비교

4.2. 사장-현수 복합교 예제

사장-현수 복합교의 예제는 현재 초장대교량 사업단 과제의 일환으로 예비 설계된 Prototype 사장-현수 복합교이다. 사장교 예제에서와 마찬가지로 제안하는 방법을 적용하여 그 타당성을 검증하고 기존의 TCUD 해석법을 적용하였을 때와 비교하였다.

예제 교량은 총 경간장과 주 경간장이 각각 2888m, 2000m이고 거더 위 주탑의 높이가 230.5m인 타정식 사장-현수 복합교이다. 3차원으로 구조로 모델링 하였으며 주탑은 H 형이다. 주탑의 한 면에 정착되어 있는 사장 케이블의 개수는 32개로 총 256개의 사장 케이블이 존재한다. 측경간의 교각 사이 11개의 사장 케이블은 8m 간격으로 배치되어 있고, 행어 케이블과 겹쳐진 케이블을 제외한 나머지 사장 케이블들 간의 간격은 16m 이다. 행어 케이블은 한 면에 45개씩 총 90개이고 행어 케이블 간

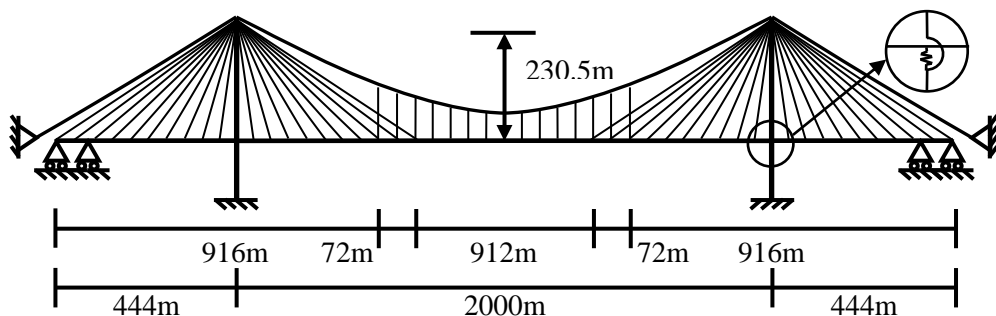


그림4.4. 사장-현수 복합교 적용 예제

의 간격은 24m 이다. 사장 구간과 현수구간 사이 전이 구간에 존재하는 겹쳐진 행어 케이블은 각각 4개씩 총 16개이고 현수 구간의 케이블들과 같은 간격으로 배치되어 있다. 현재 예비 설계된 내용으로는 주탑과 거더 사이에 연직 방향의 연결만 존재하는 상태이고, 측경간에 존재하는 교각 부분에서도 연직 방향의 구속만 존재하고 교축 방향의 구속은 없다. 예제 교량의 대략적인 모식도는 그림 4.4와 같다.

사장 케이블은 각각 하나의 탄성현수선 케이블 요소를 사용하였고, 행어 케이블들은 각각 하나의 트러스 요소를 사용하였다. 주 케이블은 주탑 및 행어 연결 지점들 사이의 케이블을 하나의 요소로 모사하여 주 케이블 하나 당 탄성현수선 케이블 요소의 수는 48개이다. 교각의 경우 추가적인 모델링 없이 지점으로 모사되었고 거더와 주탑은 축방향력에

표3. Prototype 사장-현수 복합교의 재료 및 단면 특성

Member	E (GPa)	A (m ²)	I (m ⁴)	w (kN/m)
Main span cable	200	0.273	-	21.05
Side span cable	200	0.297	-	22.84
Stay cable	200	0.015	-	1.185
Hanger cable	200	0.006	-	0.420
Deck	205	1.170	2.712	166.0
Main tower	31.9	20.00-49.02	86.87-887.1	490.4-1202.0

의한 모멘트 증폭 효과를 고려한 보-기둥 요소를 사용하여 모델링하였다. 특히 주탑은 하부의 단면적이 크고 상부의 단면적이 작은 변단면 요소로 이루어져있다. 교량에 사용된 부재들에 대한 재료 특성과 단면 특성은 표3과 같다.

TCUD 법 적용을 위한 사하중 상태에서의 목표 형상에 대한 설계 조건은 2장에서 설명한 바와 같다. 사장 케이블 중 교각 근처의 케이블에 대해서는 주탑의 수평 변위에 대한 조건이나 거더의 처짐에 대한 조건을 쓸 수 있는데 해석의 편의 상 거더의 처짐에 대한 조건을 사용하여 초기 형상 해석을 수행 하였다. 또한 제안한 방법을 적용하기 위해 교량에서 순수 현수 구간을 분리하여야 하는데, 이를 위해 분리 지점을 마지막 겹침 행어와 그 다음 행어 케이블의 중간점으로 설정하였다.

사장 구간과 현수 구간 사이의 전이 구간에서는 행어의 장력 분담에 대한 특별한 설계 조건이 존재하지 않았기 때문에 장력 분담에 대한 적절한 조건을 설정하는 과정이 필요하였다. 이를 위해 먼저 전이 구간의 행어 케이블을 모두 제거 한 뒤 초기형상 해석을 수행하였다. 그 결과 전이 구간의 사장 케이블들이 과도하게 큰 힘을 받는 것을 볼 수 있었다. 사장 케이블들이 모두 고르게 힘을 받도록 하는 것이 타당하다고 생각되어 전이 구간 사장 케이블의 수직 분력이 사장 구간 케이블들의 수직 분력과 비슷한 값을 가지도록 행어의 장력을 결정하였다. 이렇게 결정된

장력을 행어의 양 끝 연결 지점에 절점력으로 가하여 초기형상 해석을 다시 수행하면 사장 케이블들이 적절한 힘을 받는 상태가 된다. 그림 4.5는 왼쪽 주탑 좌·우에 정착된 사장 케이블의 장력을 나타낸 것이며, 1000m 부근에 위치 해 있는 마지막 4개의 케이블이 전이구간에 위치하는 사장 케이블이다. 언급한 케이블들의 장력을 비교해 보면 행어의 장력 결정 후 사장 케이블의 장력이 고르게 분포되는 것을 확인할 수 있다.

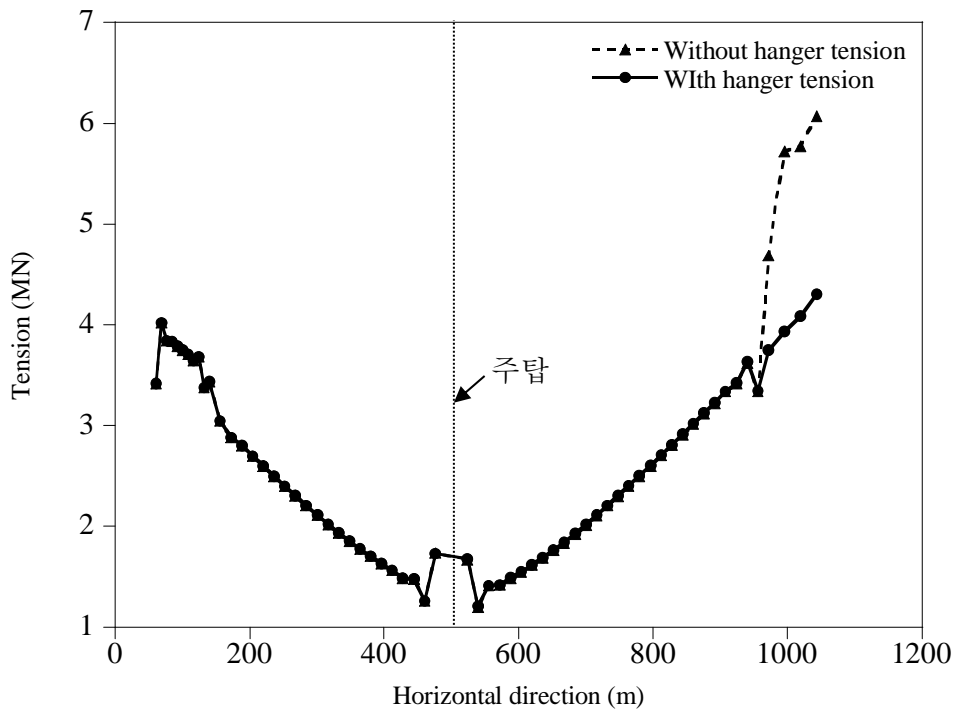


그림4.5. 행어의 장력 분담 결정 전후 사장 케이블의 장력

사장교 예제에서와 마찬가지로 시공 상태를 고려하였을 때 현수 구간에서 축력이 발생하지 않는 것이 일반적이고, 키 세그먼트의 집합 과정에서 아무런 축력이 발생하지 않는다. 따라서 키 세그먼트에서 발생하는 축력이 0이 되도록 제안한 방법을 적용하여 해석하였다. 해석 결과 분리된 점에서의 적합 조건식에 관련된 두 가지 반복 계산이 각각 5번과 6번만에 식(4.1)과 식(4.2)의 수렴 척도를 만족하였다. 사장교 예제보다 구조물이 복잡하기 때문에 반복 계산 횟수가 많지만 안정적으로 수렴하였다. 반복 계산 횟수에 따른 수렴 정도는 그림 4.6에 나타내었다.

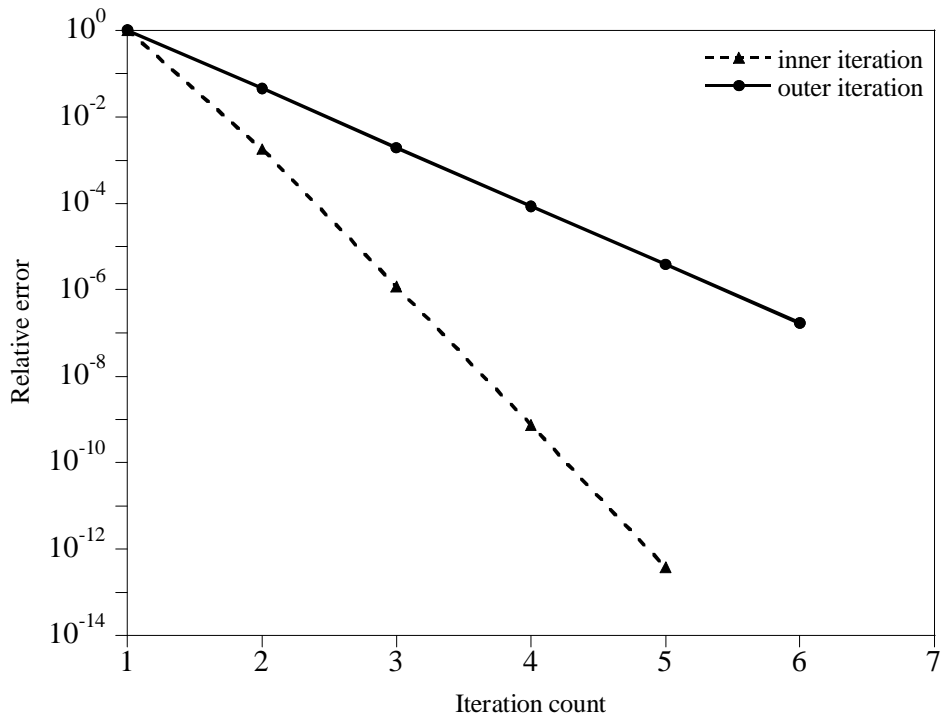


그림4.6. 사장-현수 복합교에 대한 분리 해석법의 수렴성

표4. 사장-현수 복합교 예제의 해석 결과

Quantity	Direction	Left	Right
Configuration	Longitudinal	1056.00 m	1056.00 m
	Vertical	27.04 m	27.04 m
Displacement	Longitudinal	0.291 cm	0.000 cm
	Vertical	0.023 cm	0.027 cm
	Rotational	0.000 rad	0.000 rad

또한 해석 결과 분리된 지점의 왼쪽과 오른쪽에서 축 방향과 연직 방향에 대한 절점의 위치가 같고 회전각 또한 같음을 위의 표4를 통해 확인할 수 있다. 표4의 내용은 교량의 두 분리지점 중 왼쪽 주탑에서 가까운 점에 대한 정보이다. 거더가 일직선 상에 놓인 것이 아니라 캠버가 있는 상태이기 때문에 연직 방향에 대한 초기 위치가 다르고, 따라서 수직 처짐량이 다르지만 해석 결과 최종적인 위치는 같다. 한편 현수 구간 쪽에서는 수평 방향으로의 변위가 발생하지 않았지만 사장교 구간에 위치한 절점은 0.3cm 가량 이동하는 것을 볼 수 있다. 이는 사장 케이블에 의해 도입되는 수평력의 불평형량에 의해 발생하는 변위이다. 이로부터 기존의 TCUD 해석방법을 적용할 때 수평 지점이 없는 경우에도 사장 케이블의 수평 장력 불평형에 의해 키 세그먼트에 축력이 발생할 수 있음을 추측할 수 있다.

기존의 방법으로 TCUD 해석을 수행해 본 결과 앞서 언급하였듯이 사장 케이블의 수평 장력 차에 의해 키 세그먼트에 축력이 발생하는데 예제의 경우에는 그 양이 14kN 정도이다. 본 예제의 경우 거더에 수평 방향의 구속 없고 사장케이블 또한 대칭에 가깝게 배치되어 있기 때문에 장력 불평형에 의해 발생하는 축력이 매우 작다. 제안한 방법을 통해 정확하게 축력이 0이 되도록 초기형상 해석을 수행할 수 있지만 그림 4.7에서 보이듯이 적용여부에 따른 거더의 축력 변화가 미비하다.

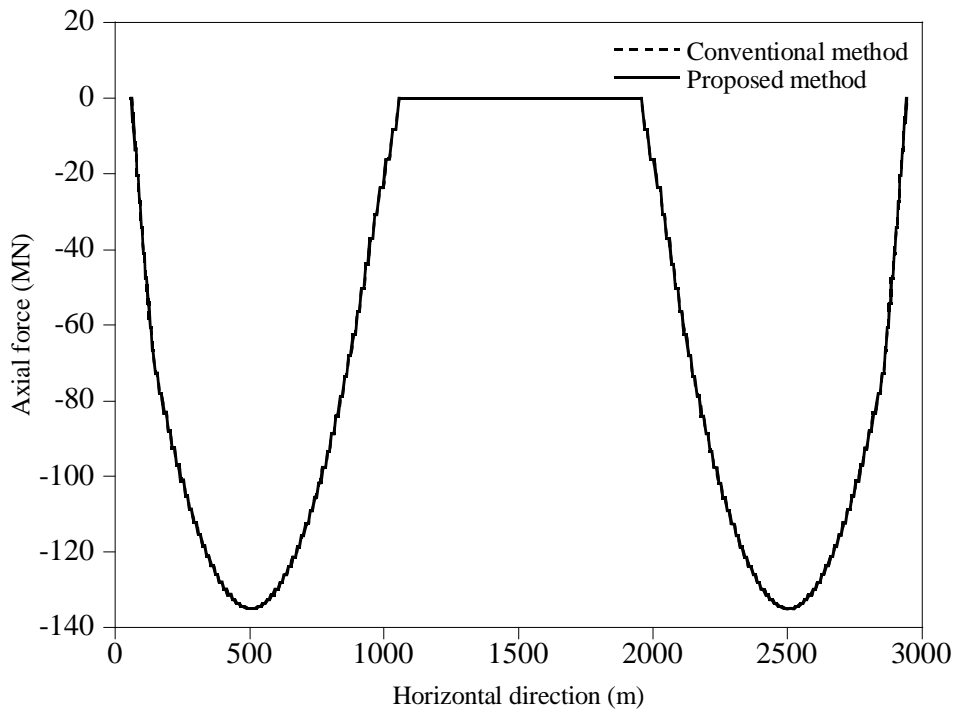


그림4.7. 사장-현수 복합교 예제에 대한 거더의 축력 비교

사장교 예제의 경우와 같이 거더의 수평 구속이 존재하는 경우 키 세그먼트의 길이에 따라 거더에 발생하는 축력이 크게 변동될 수 있으므로 거더의 축력에 대해 고려하는 것이 보다 중요해지고 제안한 방법론을 적용해야 할 필요성 또한 커질 것이다. 또한 수평 방향의 구속이 없더라도 사장교 구간의 비대칭성이 큰 교량의 경우 사장 케이블의 장력 비대칭에 의해 키 세그먼트에 비교적 큰 축력이 발생할 수 있으므로 이 때에도 키 세그먼트의 축력에 대한 고려가 반드시 필요할 것이라고 예상된다.

5. 결론

본 논문에서는 사장교와 사장-현수 복합교에서 키 세그먼트에 발생하는 축력을 조정할 수 있도록 하는 개선된 초기형상해석법을 제안하였다. 먼저 구조물의 평형 방정식과 사하중 상태에서 구조물의 설계 조건을 Newton-Raphson 방법으로 함께 풀어 초기 평형상태 해석을 수행하는 기존의 TCUD 해석법에 대해 기술하였다. 그리고 나서 기존의 TCUD 해석법을 바탕으로 하여 교량에서 분리 지점을 설정하고 분리된 점에서 발생하는 축력을 조정할 수 있는 해석법을 제안하였고, 이를 위해 분리된 점에서 적합 조건식을 푸는 방법 또한 제시하였다.

연직 방향과 회전각에 대한 적합조건과 축 방향의 적합조건을 만족시키는 구체적인 반복 계산 방법을 본 논문에 기술하였다. 분리된 면에 작용하는 단면력의 크기를 적절하게 계산함으로써 연직 방향과 회전각에 대한 적합조건을 만족시킬 수 있는데, 이 단면력의 크기는 힘에 대한 변위의 민감도를 계산하여 업데이트 함으로써 반복 계산을 통해 구할 수 있다. 한편 축 방향의 적합 조건은 초기형상해석 후 분리된 절점의 축 방향 위치 불일치량만큼 절점의 초기 좌표를 이동시켜 그 불일치량을 줄여나가는 방법으로 만족시킬 수 있다. 최종적으로 절점의 초기 좌표가 결정되면 키 세그먼트 요소의 제작 길이를 구할 수 있다.

제안된 방법을 사장교 예제와 사장-현수 복합교 예제에 적용하여 그 타당성을 검증하였으며 기존의 초기형상해석 방법을 적용하였을 때와 비교하여 유효성을 보였다. 분리된 점에서 적합조건을 만족시키는 두 가지 반복 계산 방법에 대하여 수렴성이 확보되었고 계산 결과 사하중 상태의 목표형상과 분리된 점에서의 적합조건을 모두 만족하였다. 또한 기존의 해석방법을 적용하였을 때 키 세그먼트에서 임의의 축력이 발생하던 것에 비해 제안된 방법을 적용하였을 때 키 세그먼트에 원하는 크기의 축력이 발생하도록 조정할 수 있었다.

제안된 방법은 사장교와 사장-현수 복합교에 대해 키 세그먼트에서 발생하는 축력을 조정하여 실제 설계나 시공 상황에 더욱 부합하는 초기형상해석 결과를 도출할 수 있다는 점에서 공학적 의미가 있다고 생각된다. 또한 설계 조건으로부터 얻은 키 세그먼트의 축력을 정확하게 만족시키는 해를 구할 수 있다는 강점이 있다. 본 논문에서는 TCUD 해석법을 바탕으로 하여 키 세그먼트의 축력을 조정하는 방법을 설명하였지만 초기형상해석을 위해 최적화 등 다른 방법을 사용하더라도 본 논문에서 제안한 키 세그먼트의 축력 조정법을 그대로 적용할 수 있다.

참고문헌

- [1] Kim K. S., Lee H. S. (2001) Analysis of target configuration under dead loads for cable supported bridges. *Computers and Structures*, Vol. 79, Issue 29-30, pp.2681-2692.
- [2] Kim H. K., Lee M. J., Chang S. P. (2002) Non-linear shape-finding analysis of a self-anchored suspension bridge. *Engineering Structures*, Vol. 24, No. 12, pp. 1547-1559.
- [3] Wang, P. H., Yang C. G. (1996) Parametric studies on cable-stayed bridges. *Computer and Structures*, Vol. 60, No. 2, pp. 243-260.
- [4] 이해성 등(2004) 계측 자료를 이용한 강사장교의 시공단계별 형상관리 시스템 개발. 연구보고서, 현대건설 기술연구소, 현대건설주식회사.
- [5] 이민권, 이해성(2006) 대칭형 강 사장교의 폐합해석과 시공오차의 예측. *대한토목학회 논문집*, 대한토목학회, 제26권, 제1A호, pp. 55-65.
- [6] 김호경(1993) 시공상태를 고려한 현수교의 3차원 해석. 공학박사학위논문, 서울대학교.
- [7] 김기석(1999) **Newton-Raphson** 방법에 의한 케이블 구조물의 초기 평형상태 해석. 공학석사학위논문, 서울대학교.
- [8] 김규환(2011) 사장-현수 복합케이블 교량에 대한 초기평형상태 해석. 공학석사학위논문, 서울대학교.
- [9] 박재영, 전공렬, 김정웅(2003) 강사장교, 기술과 변천. 도서출판 과학기술.
- [10] 이병철(2005) 사장교의 설계와 시공. 도서출판 건설정보사.

부록

A. 탄성현수선 케이블 요소의 연성도 행렬

식(2.3)의 자세한 식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial f_1}{\partial F_1^i} = -\frac{L^e}{EA} - \frac{1}{w} \ln \left(\frac{F_3^i + wL^e + T^j}{F_3^i + T^i} \right) - \frac{(F_1^i)^2}{w} \left\{ \frac{1}{T^j(F_3^i + wL^e + T^j)} - \frac{1}{T^i(F_3^i + T^i)} \right\}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial F_2^i} = -\frac{F_1^i F_2^i}{w} \left\{ \frac{1}{T^j(F_3^i + wL^e + T^j)} - \frac{1}{T^i(F_3^i + T^i)} \right\}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial F_3^i} = -\frac{F_1^i}{w} \left(\frac{1}{T^j} - \frac{1}{T^i} \right)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial F_1^i} = -\frac{F_1^i F_2^i}{w} \left\{ \frac{1}{T^j(F_3^i + wL^e + T^j)} - \frac{1}{T^i(F_3^i + T^i)} \right\}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial F_2^i} = -\frac{L^e}{EA} - \frac{1}{w} \ln \left(\frac{F_3^i + wL^e + T^j}{F_3^i + T^i} \right) - \frac{(F_2^i)^2}{w} \left\{ \frac{1}{T^j(F_3^i + wL^e + T^j)} - \frac{1}{T^i(F_3^i + T^i)} \right\}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial F_3^i} = -\frac{F_2^i}{w} \left(\frac{1}{T^j} - \frac{1}{T^i} \right)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial F_1^i} = -\frac{F_1^i}{w} \left(\frac{1}{T^j} - \frac{1}{T^i} \right)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial F_2^i} = -\frac{F_2^i}{w} \left(\frac{1}{T^j} - \frac{1}{T^i} \right)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial F_3^i} = -\frac{L^e}{EA} - \frac{1}{w} \left(\frac{F_3^i + wL^e}{T^j} - \frac{F_3^i}{T^i} \right)$$

식(2.9) 의 자세한 식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial f_1}{\partial L^e} = -F_1^i \left(\frac{1}{EA} + \frac{1}{T^j} \right)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial L^e} = -F_2^i \left(\frac{1}{EA} + \frac{1}{T^j} \right)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial L^e} = -(F_3^i + wL^e) \left(\frac{1}{EA} + \frac{1}{T^j} \right)$$

여기서 T^i 와 T^j 는 다음과 같다.

$$T^i = \|\mathbf{F}^i\| = \sqrt{(F_1^i)^2 + (F_2^i)^2 + (F_3^i)^2}$$

$$T^j = \|\mathbf{F}^j\| = \sqrt{(F_1^j)^2 + (F_2^j)^2 + (F_3^j)^2} = \sqrt{(F_1^i)^2 + (F_2^i)^2 + (F_3^i + wL^e)^2}$$

ABSTRACT

An Initial Equilibrium State Analysis for the Adjustments of the Axial Forces in Key Segments of Cable-stayed and Cable-stayed-suspension Hybrid Bridges

Yeseul Im

Civil and Environmental Engineering

The Graduate School

Seoul National University

This paper presents an initial equilibrium analysis which can adjust the axial forces in key segments of cable-stayed and cable-stayed-suspension hybrid bridges. The proposed method is based on an analysis of target configurations under dead loads by Newton-Raphson method. The details for adjusting the axial forces of key segments by disconnecting the bridges are described in this paper. The adjustment of the axial forces of key segments is achievable by calculating the sectional forces and the fitting lengths of key segments, which make the compatibility conditions at the separated section satisfied, when the exact axial forces are acting on the section. The sectional forces are analyzed by iterative updating using the sensitivity of the displacements to achieve the compatibility conditions for the vertical and the rotational displacements, and the initial coordinates of the disconnected points are altered by successive iteration to achieve the compatibility condition for the longitudinal displacement. It is possible to achieve not only the target configurations un-

der dead loads but also the given axial forces of key segments by the method proposed. The two examples for the cable-stayed and cable-stayed-suspension bridges are presented to demonstrate the validity and the effectiveness of the proposed method.

Keywords: initial equilibrium state analysis, TCUD, cable-stayed bridge, cable-stayed-suspension hybrid bridge, axial force of key segment

Student Number: 2011-23401