

공학석사 학위논문

탄소성 유한요소 모델에 의한 굴착 해석시 흙의  
물성치 평가를 위한 굴착 역해석

Excavation Inverse Analysis for Identifying Plastic-Material  
Properties by Elasto-Plastic Finite Element Model

1998 년 2 월

서울대학교 대학원

토목공학과

양 윤 석

## 초록

이 논문에서는 굴착시 주어지는 계측치로부터 소성 거동을 하는 지반의 물성치와 지층 형상을 추정하는 역해석 기법을 제안한다. 소성 거동을 하는 지반을 해석하기 위해 consistent tangent moduli 를 이용한 소성해석을 수행한다. 굴착 해석을 위해 굴착 전의 응력과 굴착 후 외력의 차로 정의되는 불평형 응력을 계산한다. 기하학적 형상을 모르는 지반에 대한 지배방정식의 변분식을 기지의 영역에 대하여 표시하기 위해 영역 변수화 기법을 적용하였다. 기지의 영역에 대해 표시된 변분식은 등매개변수 유한요소와 선형사상을 이용하여 이산화하였다.

역해석을 하기위한 최적화 기법으로 RQP(Recursive Quadratic Programming)를 쓴다. 최적화 과정 중 목적함수는 계산된 변위와 계측된 변위와의 차의 제곱의 합으로 정의된다. 변위의 1 차 민감도를 구하기 위해, 평형 방정식의 변분식을 해석적으로 직접 미분하는 직접 미분법을 이용한다. 소성 설계변수에 대한 민감도는 consistent tangent moduli 를 직접 미분함으로써 구할 수 있고, 기하 설계변수에 대한 미분은 기준영역에서 정의영역으로의 사상을 직접 미분함으로써 구할 수 있다. 최적화에 쓰이는 헤시안을 구하기 위해 변위의 2 차 민감도 대신 1 차 민감도만의 곱으로 표시되는 Gauss-Newton 근사법을 이용한다. 이 논문에서는 세개의 예제를 통해 제안된 역해석 기법의 타당성을 검증한다.

## 주요어

consistent tangent moduli, Gauss-Newton 근사법, 직접 미분법, RQP(Recursive Quadratic Programming), 영역변수화



## 목차

초록.....	i
목차.....	ii
그림목차.....	iv
표목차.....	v
1. 서론.....	1
2. 정해석.....	5
2.1 굴착 해석.....	5
2.2 소성 해석.....	7
3. 역해석.....	16
3.1 매개변수 추정법.....	16
3.2 소성 민감도.....	20
3.2 기하 민감도.....	23
4. 예제.....	27
4.1 지층 형상을 정확히 알 때의 역해석.....	27
4.2 수평 지층의 역해석.....	35
4.3 경사 지층의 역해석.....	39
5. 결론.....	44

참고문헌.....	47
Abstract.....	49

## 그림목차

그림 2.1 경계조건을 받고 있는 고체의 기준형상.....	6
그림 2.2 굴착시의 불평형 응력.....	7
그림 3.1 영역 변수화를 위한 사상.....	24
그림 3.2 지층 깊이의 변화를 고려한 영역 이산화.....	25
그림 4.1 지층 형상을 정확히 아는 경우의 지반 조건.....	28
그림 4.2 계층치와 벽체의 변형형상.....	33
그림 4.3 벽체의 토압 분포.....	34
그림 4.4 기하 설계변수를 고려할 때와 고려하지 않을 때의 벽체의 변 형 비교.....	37
그림 4.5 기하 설계변수를 고려할 때와 고려하지 않을 때의 벽체에 미 치는 토압 비교.....	38
그림 4.6 지층이 경사져 있는 경우의 지반조건.....	39
그림 4.7 기하 설계변수를 고려할 때와 고려하지 않을 때의 벽체의 변 위 비교.....	42
그림 4.8 기하 설계변수를 고려할 때와 고려하지 않을 때, 벽체에 미치 는 토압 분포 비교.....	43

## 표목차

표 4.1	지반의 물성치.....	29
표 4.2	벽체와 스트럿의 물성치.....	29
표 4.3	각 지층의 물성치의 정해와 초기 가정치.....	30
표 4.4	계측 오차가 있는 경우와 없는 경우의 역해석 결과.....	31
표 4.5	설계변수의 정해와 초기 가정치.....	35
표 4.6	기하 설계변수를 고려할 때와 고려하지 않을 때의 역해석 결과 비교.....	36
표 4.7	기하 설계변수를 고려한 경우와 고려하지 않은 경우의 역해석 결과.....	40

## 1. 서론

최근 들어 도시가 고밀도화 되면서, 기존의 건물들이 밀집되어 있는 도심지에서 깊은 굴착을 해야 하는 경우가 잦아지고 있다. 이에 따라 기존의 건물에 인접하여 깊은 굴착을 하는 경우가 많은데, 이런 경우 대부분 흙막이 벽체와 스트러트로부터 배면측 지반을 지지하게끔 하여 시공을 한다. 그런데, 배면측 지반의 물성치 및 지층 형상등을 측정할 때 오차가 생긴다면, 정확한 지반의 거동을 예측할 수 없다. 이에 따라 앞으로의 지반의 거동을 예측하는 자료로서, 기존의 지반조사에 의해 구해진 물성치와 지층형상을 보정할 수 있는 자료가 필요하다.

이 논문에서는 지반의 물성치와 지층 형상을 구하기 위해 역해석 기법을 이용한다. 역해석이란, 지반의 물성치 또는 지층 형상과 같이 구조계의 특성을 결정짓는 변수를 결정하는 방법으로서 매개변수 추정법이라고도 한다. 이때 구조계의 특성을 결정짓는 변수를 설계변수라고 하며 설계변수를 추정하는 기법으로 RQP(Recursive Quadratic Programming)라는 최적화 기법을 이용한다. RQP에서는 계측된 변위와 가정된 설계변수에 의해 정해석되어 구해진 변위의 차의 제곱의 합으로 표시되는 목적함수를 정의한다. 정해석에서는 소성 거동을 하는 지반을 해석하기 위해 소성 해석을 하며, 굴착시 지반의 거동을 해석하기 위해 굴착해석을 수행한다.

소성 해석은 소성변형도 - 응력 관계식을 일반화된 중앙값 정리에 의해 적분했을 때 유도되는 consistent tangent moduli 를 이용하여 수행한다(Sim 85). Consistent tangent moduli 를 이용할 경우, 종래의 continuum tangent moduli 를 이용할 때 보다 수치적 거동이 안정되어 있고, 수렴속도도 빠르다고 알려져 있다.

굴착해석은, 평형상태에 있는 굴착 전의 지반에 대하여 그 중 일부가 굴착됐을 때 발생하는 불평형 응력을 계산하여 수행된다. 여기서, 불평형 응력은 굴착되지 않고 남아있는 잔여영역에 대하여, 평형 상태일 때 지반에 발생한 응력과 외력과의 차를 계산하여 구해진다. 불평형응력을 계산한 뒤, *consistent tangent moduli* 를 이용하여 유한요소 모델링을 하면 절점 변위를 구할 수 있다.

최적화에서는 목적함수를 최소화하는 설계변수의 집합을 찾기 위해 목적함수의 설계변수에 대한 *gradient* 가 0 이라는 최적화의 1 차 필요조건인 Kuhn-Tucker 조건을 구한다 (Kuh51). Kuhn-Tucker 조건을 만족시키는 해를 찾기 위해 반복계산을 수행하며, 반복계산에서의 설계변수의 증분을 구하기 위해 Kuhn-Tucker 조건을 설계변수에 대해 선형화한다. 설계변수의 증분을 구한 뒤, 이전 반복단계에서 구한 설계변수에 증분을 더해주면 현재의 반복단계에서의 설계변수를 구할 수 있다. 이 과정을 설계변수가 충분히 수렴할 때까지 반복하면 이것이 곧 최적의 해가 된다.

선형화된 Kuhn-Tucker 조건식을 구하기 위해 목적함수의 설계변수에 대한 2 차 미분항인 헤시안을 구해야 하는데, 그러기 위해 변위의 2 차 민감도를 구해야 한다. 그러나, 소성 문제에서는 변위의 2 차 민감도를 구하기 힘들므로 1 차 민감도 만의 곱으로 표시되는 Gauss-Newton 근사법을 이용한다.

Kuhn-Tucker 조건을 선형화함에 따라 설계변수의 증분, 즉 탐색방향에 오차가 생기게 된다. 이런 오차를 보정하기 위해 탐색방향을 따라가며 목적 함수값을 최소화하는 *step length* 를 찾는 *line search* 를 한다. *Step length* 를 찾는 방법으로는 목적 함수값을 재귀적으로 확인하는 *golden search* 가 있고, 탐색방향으로의 *gradient* 가 0 이 되는 지점을 *secant method* 로 찾는 방법이 있다. 이 논문에서는 위의 두

개의 방법을 사용한다.

변위의 1차 민감도를 구하는 방법으론 유한 차분법, 직접 미분법 (Vid92, Vid93), Adjoint 방법 (Phe89)등이 있다. 유한 차분법은 간단하지만 차분의 크기를 정하기 힘들고, 민감도를 구하기 위해 정해석을 다시 수행해야 하는 단점이 있다. Adjoint 방법은 상반의 정리에 기초한 방법으로 계산도 간편하고 수학적으로 잘 정립된 방법이긴 하지만 이력의존성 재료에는 적용하기 힘든 단점이 있다. 그러므로, 이 논문에서는 소성 물성치에 대한 민감도인 소성 민감도를 구하기 위해, consistent tangent moduli 를 설계변수에 대해 직접 미분하여 해석적인 미분값을 구한다.

지층 깊이에 대한 민감도인 기하 민감도를 구하기 위해, 평형 방정식의 변분식을 직접 미분한다. 그런데, 지층의 기하학적 형상을 모르는 경우, 미지의 정의 영역에 대해 표시된 평형방정식의 변분식을 직접 미분할 수 없으므로, 지층의 기하학적 형상을 이미 알고 있는 기준영역에서의 변분식으로 유도한 다음 미분한다. 이 때, 기준영역으로의 변분식을 유도하기 위해 영역 변수화를 적용한다. 영역 변수화란, 기지의 기준영역을 미지의 정의영역에 일대일로 대응시키는 사상을 설계변수화하는 기법이다.

이 논문에서는 제안된 역해석 기법을 검증하기 위해 다음의 예제를 수행한다. 여러 개의 층으로 나뉘어 있는 지층의 형상은 정해로 주고, 단지 지반의 물성치만을 설계변수로 가정하여 합리적인 물성치를 찾음을 확인한다. 이 때 계측시 발생하는 계측오차에 대해 역해석된 해의 안정성을 검토해 본다. 또한 지층의 형상이 설계변수에 포함되어 고려되어야 하는 타당성을 검증하기 위해 지층의 깊이를 고려한 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어 비교한다. 또한 경사진 지층구조에서

각 지층의 깊이를 설계변수로 고려하는 방법의 장점을 확인하고, 지층의 깊이가 설계변수로 고려되지 않는 방법과 비교한다.

## 2. 정해석

굴착 문제는 시간이 지남에 따라 정의영역이 바뀌는 문제로서, 굴착되지 않고 남아있는 지반에 대해 불평형 응력을 계산하여 해석된다.

소성 거동을 하는 지반을 해석하기 위해 소성 해석을 수행한다. 소성 해석은, 변화율 형태로 되어있는 소성 지배 방정식들을 일반화된 중앙값 정리를 이용하여 수치 적분함으로써 구해지는 consistent tangent moduli 를 이용함으로써 수행될 수 있다.

### 2.1 굴착 해석

굴착 해석이 수행되는 정의 영역은 그림 2.1 과 같이 경계 조건을 받고 있는 유한한 고체로서 구성방정식을 제외한 지배 방정식은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{in } V \times ]0 \times t[ \quad (2.1.1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{in } V \times ]0 \times t[ \quad (2.1.2)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{in } V \times ]0 \times t[ \quad (2.1.3)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } S_u \times ]0 \times t[ \quad (2.1.4a)$$

$$T_i = \bar{T}_i \quad \text{on } S_t \times ]0 \times t[ \quad (2.1.4b)$$

여기서,  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $u_i$  는 각각 응력 텐서, 변형도 텐서, 체적력, 변위이다.  $\bar{u}_i$  와  $\bar{T}_i$  는 경계면에서 정의되는 변위, 표면력이다.  $S$  는 주어진 영역의 경계이고,  $S_u$  와  $S_t$  는 변위 경계조건과 표면력 경계조건이 주어진 경계이며  $S_t \cup S_u = S$ ,

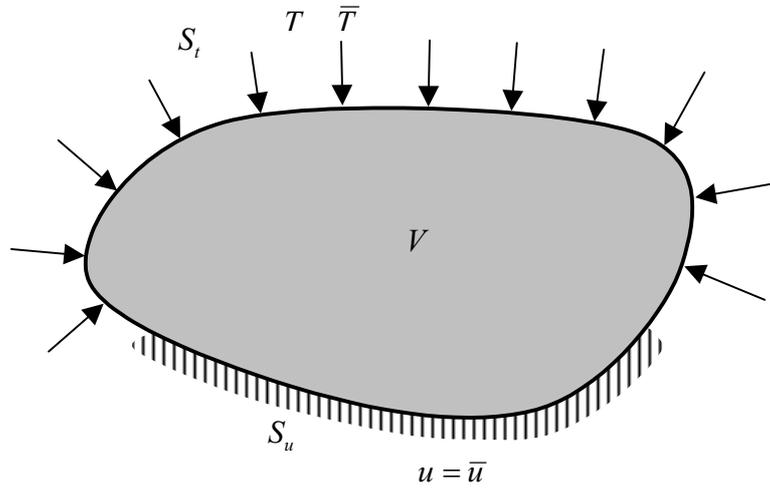


그림 2.1 경계조건을 받고 있는 고체의 기준형상

$S_t \cap S_u = \emptyset$  이다. 식 (2.1.1)은 평형 방정식, 식 (2.1.2)는 변형도-변위 관계식, 식(2.1.3)은 응력 조건, 그리고 식 (2.1.4)는 경계 조건이다. 시간에 따라 정의 영역이 변하는 굴착 문제에서 표면력이 없다고 하면, 식 (2.1.1)은 굴착을 하기 전 time step t 에 대해 그림 2.2 에서와 같이 전 영역(  $V_r + V_e$  )에 대해 다음과 같이 변분식으로 나타낼 수 있다.

$$\int_{V_r+V_e} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV = \int_{V_r+V_e} \hat{u}_i b_i dV \quad (2.1.5)$$

그러나, 굴착 후 time step t+ $\Delta t$  에서는 잔여영역  $V_r$  에 대해 다음과 같이 새로운 평형 상태가 성립해야 한다.

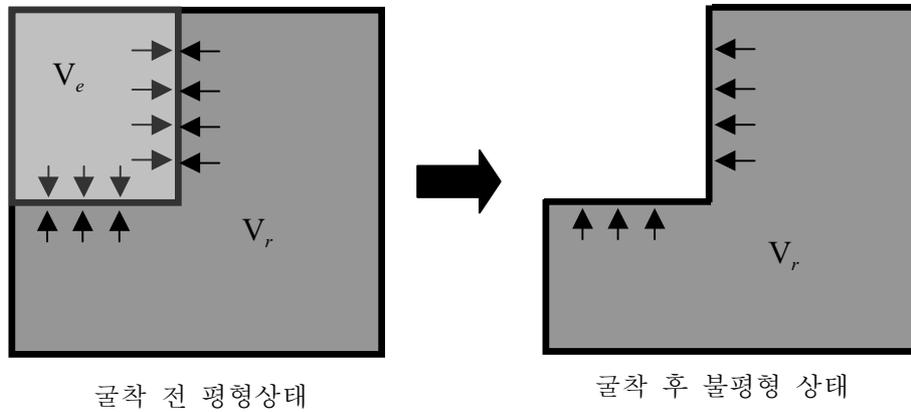


그림 2.2 균착시의 불평형 응력

$$\int_{V_r} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} dV = \int_{V_r} \hat{u}_i b_i dV \quad (2.1.6)$$

균착 후 증가된 응력  $\Delta \sigma_{ij}$  는  ${}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} - {}^t \sigma_{ij}$  이므로, 영역이 변하는 균착문제에서 평형 방정식의 변분식은 다음과 같이 된다.

$$\int_{V_r} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} \Delta \sigma_{ij} dV = - \int_{V_r} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} {}^t \sigma_{ij} dV + \int_{V_r} \hat{u}_i b_i dV \quad (2.1.7)$$

식 (2.1.7)에서 우측항이 불평형 응력에 의한 하중이다.

## 2.2 소성 해석

소성 거동을 하는 고체에서의 항복 함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\Psi(\sigma_{ij}, h) = \phi(\sigma_{ij}) - \chi(h) = 0 \quad (2.2.1)$$

여기서  $\sigma_{ij}$ ,  $h$ ,  $\phi$ ,  $\chi$  는 각각 응력텐서, 경화변수, 항복함수, 경화함수를 나타낸다. associative flow rule 은 다음과 같이 적용된다.

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.2.2)$$

$\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  는 소성 변형도 변화율이며,  $\dot{\lambda}$  는 소성 변형도를 계수로서 식 (2.2.1)에서 주어진 항복 기준과 일반화된 Hooke 의 법칙을 이용하여 결정할 수 있다. 경화변수의 변화율은 소성 변형도의 변화율의 함수로 나타낼 수 있으며, 이는 다음과 같다.

$$\dot{h} = f(\dot{\varepsilon}_{ij}^p) = f\left(\dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}}\right) = \dot{\lambda} F\left(\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}}\right) \quad (2.2.3)$$

변화율의 형태로 표현된 식 (2.2.2)와 식 (2.2.3)을 시간에 대해 적분하고, 다른 소성 지배 방정식들을 정리하면 다음과 같다.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) \quad \text{in } V \times ]0 \times t[ \quad (2.2.4)$$

$$\phi(\sigma_{ij}) - \chi(h) = 0 \quad \text{in } V \times ]0 \times t[ \quad (2.2.5)$$

$$\varepsilon_{ij}^p = {}^0\varepsilon_{ij}^p + \int_0^t \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} dt \quad \text{in } V \times ]0 \times t[ \quad (2.2.6)$$

$$h = {}^0h + \int_0^t \dot{\lambda} F\left(\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}}\right) dt \quad \text{in } V \times ]0 \times t[ \quad (2.2.7)$$

$$\varepsilon_{ij}^p(X, 0) = {}^0\varepsilon_{ij}^p \quad \text{in } V \quad (2.2.8a)$$

$$h(X, 0) = {}^0h \quad \text{in } V \quad (2.2.8b)$$

식 (2.2.4)부터 식 (2.2.7)까지는 지배 방정식이고, 식 (2.2.8)는 초기 조건이다.

적분형태로 표현되어 있는 지배방정식을 일반화된 중간값의 정리에 의해 time step 에 대한 증분 형태로 바꾸면 다음과 같다.

$${}^{t+\Delta t}(\varepsilon_{ij}^p)_r = {}^t\varepsilon_{ij}^p + \int_t^{t+\Delta t} \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} dt \cong {}^t\varepsilon_{ij}^p + {}^{t+\Delta t} \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \Big|_{\sigma_{ij} = {}^{t+a\Delta t} \sigma_{ij}} \quad (2.2.9)$$

$${}^{t+\Delta t}h_r = {}^th + \int_t^{t+\Delta t} \dot{\lambda} F\left(\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}}\right) dt \cong {}^th + {}^{t+\Delta t} \lambda F\left(\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}}\right) \Big|_{\sigma_{ij} = {}^{t+a\Delta t} \sigma_{ij}} \quad (2.2.10)$$

여기서, 왼쪽 위첨자는 해석단계를 나타내는 시간변수,  $a$ 는 0에서 1 사이의 값으로서 중간값의 정리에 의해 정의되는 적분매개변수이다.  $0.5 \leq a \leq 1$ 이면 일반화된 중앙값 방법은 시간 증분의 크기에 상관없이 안정하다고 알려져 있다 (Ori85).  $r$ 는 바깥쪽 반복계산 횟수이다. 바깥쪽 반복계산이란 평형조건식을 만족시키기 위한 반복계산으로서, 변형도  $\varepsilon_{ij}$ 의 증분을 구하는 과정이다. 편의상 다음과 같은 표현식을 사용한다.

$${}^{t+\Delta t}(\ )_r = {}^{t+\Delta t}(\ )_{r-1} + \Delta(\ ) = \underline{\underline{(\ )}} + \Delta(\ ) \quad (2.2.11a)$$

$$\underline{\underline{(\ )}} = {}^{t+a\Delta t}(\ )_{r-1} = (1-a)^t(\ ) + a {}^{t+\Delta t}(\ )_{r-1} \quad (2.2.11b)$$

$$\underline{\underline{(\ )}} = {}^{t+\Delta t}(\ )_{r-1} \quad (2.2.11c)$$

식 (2.2.9)의 우변을 Taylor 전개하여 일차 증분항만 포함시키면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}(\varepsilon_{ij}^p)_r &= {}^t\varepsilon_{ij}^p + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} + \Delta \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} + \alpha \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \Delta \sigma_{kl} \\ &= \underline{\underline{\varepsilon_{ij}^p}} + \Delta \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} + \alpha \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \Delta \sigma_{kl} \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

따라서 위식은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \Delta \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} + \alpha \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \Delta \sigma_{kl} \quad (2.2.13)$$

한편, 일반화된 Hooke 의 법칙은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\Delta\varepsilon_{kl} - \Delta\varepsilon_{kl}^p) \quad (2.2.14)$$

$$C_{ijkl}^{-1} \Delta\sigma_{kl} = \Delta\varepsilon_{ij} - \Delta\varepsilon_{ij}^p \quad (2.2.15)$$

따라서 flow rule 과 일반화된 Hooke 의 법칙을 결합하면 다음과 같다.

$$(C_{ijkl}^{-1} + \alpha\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}) \Delta\sigma_{kl} = \Delta\varepsilon_{ij} - \Delta\lambda \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}} \quad (2.2.16a)$$

따라서, 식 (2.2.16a) 을 정리하면, 다음과 같다.

$$\Delta\sigma_{ij} = \Xi_{ijkl} (\Delta\varepsilon_{kl} - \Delta\lambda \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}}) \quad (2.2.16b)$$

여기서,  $\Xi_{ijkl} = (C_{ijkl}^{-1} + \alpha\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}})^{-1}$  이다. 항복 조건의 증분식은 항복조건을 응

력과 경화변수에 대해 1 차 Taylor 전개하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$${}^{t+\Delta t} \phi_r - {}^{t+\Delta t} \chi_r \cong \phi_r - \chi_r + \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}} \Delta\sigma_{ij} - \frac{\partial\chi}{\partial h} \Delta h = \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}} \Delta\sigma_{ij} - \chi' \Delta h = 0 \quad (2.2.17)$$

경화변수에 대한 증분식은 식 (2.2.10)을 다음과 같이 응력과 Lagrange multiplier 에

대해 1 차 Taylor 전개 함으로써 구할 수 있다.

$${}^{t+\Delta t} h_r \cong {}^t h + \int_t^{t+\Delta t} \dot{\lambda} F \left( \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}} \right) dt \cong {}^t h + {}^{t+\Delta t} \lambda_r {}^{t+\alpha\Delta t} F_r \quad (2.2.18a)$$

$${}^{t+\Delta t} h_r \cong {}^t h + \underline{\lambda} F + \Delta\lambda F + \alpha\lambda \frac{\partial F}{\partial\sigma_{ij}} \Delta\sigma_{ij}$$

따라서, 식 (2.2.18a)를 정리하면 다음과 같다.

$$\Delta h = \Delta \lambda \underline{F} + \alpha \lambda \frac{\partial \underline{F}}{\partial \sigma_{ij}} \Delta \sigma_{ij} \quad (2.2.18b)$$

식 (2.2.18b)에서 구해진 경화변수를 식 (2.2.17)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \Delta \sigma_{ij} - \chi' \Delta h \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \Delta \sigma_{ij} - \chi' (\Delta \lambda \underline{F} + \alpha \lambda \frac{\partial \underline{F}}{\partial \sigma_{ij}} \Delta \sigma_{ij}) \\ &= \left( \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} - \alpha \chi' \lambda \frac{\partial \underline{F}}{\partial \sigma_{ij}} \right) \Xi_{ijmn} \Delta \varepsilon_{mn} - \\ & \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} - \alpha \chi' \lambda \frac{\partial \underline{F}}{\partial \sigma_{ij}} \right) \Xi_{ijmn} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{mn}} \right) + \chi' \underline{F} \Delta \lambda = 0 \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

따라서, 식 (2.2.19)을  $\Delta \lambda$ 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\Delta \lambda = \frac{\left( \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} - \alpha \chi' \lambda \frac{\partial \underline{F}}{\partial \sigma_{ij}} \right) \Xi_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl}}{\left( \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} - \alpha \chi' \lambda \frac{\partial \underline{F}}{\partial \sigma_{ij}} \right) \Xi_{ijkl} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{kl}} + \chi' \underline{F}} \quad (2.2.20)$$

이렇게 하여 구해진  $\Delta \lambda$ 를 식 (2.2.16b)에 대입하고 정리하면, 다음과 같이 consistent tangent moduli가 구해진다(Sim85).

$$\Delta\sigma_{ij} = \left[ \begin{array}{c} \Xi_{ijmn} \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{mn}} \left( \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}} - \alpha \underline{\chi}' \underline{\lambda} \frac{\partial F}{\partial\sigma_{pq}} \right) \Xi_{pqkl} \\ \Xi_{ijkl} - \frac{\Xi_{ijmn} \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{mn}} \left( \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}} - \alpha \underline{\chi}' \underline{\lambda} \frac{\partial F}{\partial\sigma_{pq}} \right) \Xi_{pqkl}}{\left( \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{mn}} - \alpha \underline{\chi}' \underline{\lambda} \frac{\partial F}{\partial\sigma_{mn}} \right) \Xi_{mnpq} \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{pq}} + \underline{\chi}' F} \end{array} \right] \Delta\varepsilon_{kl} \quad (2.2.21)$$

$$= D_{ijkl}^{ep} \Delta\varepsilon_{kl}$$

식 (2.1.6)을 바깥쪽 반복계산 횟수  $r$ 에 대한 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\int_{V_r} \hat{u}_{i,j}^{t+\Delta t} (\sigma_{ij})_r d\Omega = \int_{V_r} \hat{u}_i^{t+\Delta t} b_i d\Omega \quad \forall \hat{u} \in \mathbf{v}$$

$$\int_{V_r} \hat{u}_{i,j} \Delta\sigma_{ij} d\Omega = - \int_{V_r} \hat{u}_{i,j} \underline{\sigma}_{ij} d\Omega + \int_{V_r} \hat{u}_i^{t+\Delta t} b_i d\Omega \quad \forall \hat{u} \in \mathbf{v} \quad (2.2.22)$$

식 (2.2.21)를 식 (2.2.22)에 대입하여 유한요소로 이산화하면, 다음과 같이 stiffness matrix가 구해진다.

$$\int_{V_r} \hat{u}_{i,j} D_{ijkl}^{ep} \Delta u_{k,l} d\Omega = - \int_{V_r} \hat{u}_{i,j} \underline{\sigma}_{ij} d\Omega + \int_{V_r} \hat{u}_i^{t+\Delta t} b_i d\Omega \quad \forall \hat{u} \in \mathbf{v} \quad (2.2.23)$$

$$[K](\Delta u) = (\Delta f) \quad (2.2.24)$$

따라서, 반복단계  $r$ 에서 변위는 다음과 같이 구해진다.

$$({}^{t+\Delta t} \underline{u}_i)_r = \underline{u}_i + \Delta u_i \quad (2.2.25)$$

식 (2.2.25)에서 구한 변위 및 변형도는 평형조건식은 만족하지만, 구성방정식을 만족시키지 않기 때문에 구성방정식을 만족시킬 때까지 반복계산을 해야 한다. 여기서의 반복계산을 안쪽 반복계산이라고 하고, 반복계산 횟수를  $s$ 라고 하면,  $s$  단계에서 만족시켜야 할 일반화된 Hooke의 법칙은 다음과 같다.

$$G(({}^{t+\Delta t} \sigma_{ij})_s) = {}^{t+\Delta t} (G_{ij})_s = D_{ijkl}^{-1} {}^{t+\Delta t} (\sigma_{kl})_s - ({}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} - {}^{t+\Delta t} (\varepsilon_{ij}^p)_s) = 0 \quad (2.2.26)$$

함수  ${}^{t+\Delta t}(G_{ij})_s$  를 소성 변수  $\sigma_{ij}$  와  $\varepsilon_{ij}^p$  에 대해 1 차 taylor 전개를 하면 다음과 같다.

$${}^{t+\Delta t}(G_{ij})_s = \underline{\underline{G_{ij}}} + C_{ijkl}^{-1} \Delta \sigma_{kl} + \Delta \varepsilon_{ij}^p = 0 \quad (2.2.27)$$

여기서, 편의상 다음과 같은 표현식을 쓴다.

$${}^{t+\Delta t}(\underline{\underline{\quad}})_s = {}^{t+\Delta t}(\underline{\underline{\quad}})_{s-1} + \Delta(\underline{\underline{\quad}}) = \underline{\underline{\quad}} + \Delta(\underline{\underline{\quad}}) \quad (2.2.28a)$$

$$\underline{\underline{\quad}} = {}^{t+a\Delta t}(\underline{\underline{\quad}})_{s-1} = (1-a)^t(\underline{\underline{\quad}}) + a {}^{t+\Delta t}(\underline{\underline{\quad}})_{s-1} \quad (2.2.28b)$$

$$\underline{\underline{\quad}} = {}^{t+\Delta t}(\underline{\underline{\quad}})_{s-1} \quad (2.2.28c)$$

반복단계 s 에서 만족시켜야 하는 항복 조건은 다음과 같다.

$${}^{t+\Delta t} \Psi_s = {}^{t+\Delta t} \phi_s - {}^{t+\Delta t} \chi_s = 0 \quad (2.2.29)$$

함수  ${}^{t+\Delta t} \Psi_s$  를 소성 변수에 대해 1 차 taylor 전개를 하면 다음과 같다.

$${}^{t+\Delta t} \Psi_s = {}^{t+\Delta t} \Psi_{s-1} + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \Delta \sigma_{ij} - \frac{\partial \chi}{\partial h} \Delta h = \underline{\underline{\phi}} - \underline{\underline{\chi}} + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \Delta \sigma_{ij} - \underline{\underline{\chi'}} \Delta h = 0 \quad (2.2.30)$$

한편 flow rule 에 대한 증분식은 다음과 같으며,  $\Delta$  는 안쪽 반복계산에서의 증분을 의미한다.

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \Delta \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} + \alpha \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \Delta \sigma_{kl} \quad (2.2.31)$$

경화변수에 대한 증분식은 다음과 같다.

$${}^{t+\Delta t} h_s \cong {}^t h + \underline{\underline{\lambda F}} + \Delta \lambda \underline{\underline{F}} + \alpha \lambda \frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial \sigma_{ij}} \Delta \sigma_{ij} \quad (2.2.32a)$$

따라서, 식 (2.1.35a)에서  $\Delta h$  는 다음과 같이 구해진다.

$$\Delta h = \Delta\lambda \underline{F} + \alpha \underline{\lambda} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{\sigma}_{ij}} \Delta \underline{\sigma}_{ij} \quad (2.2.32b)$$

식 (2.2.31)을 식 (2.2.27)에 대입하고 응력 증분에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$\Delta \underline{\sigma}_{ij} = -\underline{\Xi}_{ijkl} (\underline{G}_{ij} + \Delta\lambda \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{\sigma}_{ij}}) \quad (2.2.33)$$

또 식 (2.2.32b)를 식 (2.2.30)에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \underline{\Psi} + \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{\sigma}_{ij}} \Delta \underline{\sigma}_{ij} - \underline{\chi}' \Delta h \\ &= \underline{\Psi} - \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{\sigma}_{ij}} - \alpha \underline{\chi}' \underline{\lambda} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{\sigma}_{ij}} \right) \underline{\Xi}_{ijmn} \underline{G}_{mn} - \\ & \left( \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{\sigma}_{ij}} - \alpha \underline{\chi}' \underline{\lambda} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{\sigma}_{ij}} \right) \underline{\Xi}_{ijmn} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{\sigma}_{mn}} \right) + \underline{\chi}' \underline{F} \Delta \lambda = 0 \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

따라서, 다음과 같이  $\Delta \lambda$  를 구할 수 있다.

$$\Delta \lambda = \frac{\underline{\Psi} - \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{\sigma}_{ij}} - \alpha \underline{\chi}' \underline{\lambda} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{\sigma}_{ij}} \right) \underline{\Xi}_{ijkl} \underline{G}_{kl}}{\left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{\sigma}_{ij}} - \alpha \underline{\chi}' \underline{\lambda} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{\sigma}_{ij}} \right) \underline{\Xi}_{ijkl} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{\sigma}_{kl}} + \underline{\chi}' \underline{F}} \quad (2.2.35)$$

이렇게 하여  $\Delta \lambda$  를 구한 뒤 식 (2.2.33)에 대입하면 응력의 증분을 구할 수 있으며, 소성변형도와 경화변수는 다음과 같이 구한다.

$${}^{t+\Delta t}(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p)_s = {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p + \int_t^{t+\Delta t} \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{ij}} dt \cong {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p + {}^{t+\Delta t} \lambda_s \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{ij}} \Big|_{\boldsymbol{\sigma}_{ij} = ({}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}_{ij})_s} \quad (2.2.36)$$

$${}^{t+\Delta t} h_s = {}^t h + \int_t^{t+\Delta t} \dot{\lambda} F\left(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{ij}}\right) dt \cong {}^t h + {}^{t+\Delta t} \lambda_s F\left(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{ij}}\right) \Big|_{\boldsymbol{\sigma}_{ij} = ({}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}_{ij})_s} \quad (2.2.37)$$

이 과정을  $\lambda$ 가 수렴할 때까지 반복계산하면 구성방정식을 만족시키는 소성 변수들을 구할 수 있다.

안쪽 반복계산을 통하여 구한 응력은 다시 평형조건을 만족시키지 않게 되므로, 식 (2.2.23)에서와 같이 불평형응력을 계산하여 변형도의 증분을 구한다. consistent tangent moduli를 구할 때, quadratic convergence를 보장하기 위해 현재의 바깥쪽 반복계산 단계에서의 소성물성치를 이용하여 tangent moduli  $D_{ijkl}^{ep}$ 를 구성한다.

### 3. 역해석

이 장에서는 구조계에 가해지는 하중을 알 때, 제한된 계측치로써 구조계의 물성치와 기하학적 형상을 추정하는 역해석 기법을 제안한다. 역해석 방법으로 매개변수 추정법을 이용하며, 이 때 필요한 변위의 민감도를 구하기 위해 직접 미분법을 이용한다.

#### 3.1 매개변수 추정법

구조계를 결정짓는 물성치와 기하학적 형상등을 설계변수라 한다. 설계변수가 물리적으로 의미 있는 값을 가지기 위해서 설계변수에 대한 구속조건이 필요하다. 따라서 우리가 풀어야 하는 문제는 구속조건이 있으면서 목적함수를 최소화하는 최적화 문제로서 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{nd}) \\
 & \underset{\mathbf{X}}{\text{minimize}} \quad \Pi(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (u_i(\mathbf{X}) - \bar{u}_i)^2 \\
 & \text{subject to} \quad c_j(\mathbf{X}) = 0 \quad j = 1, \dots, n_{neq} \\
 & \quad \quad \quad c_j(\mathbf{X}) \leq 0 \quad j = n_{neq} + 1, \dots, n_{neq} + n_{nin}
 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

여기서,  $nd$  는 설계변수의 개수,  $\bar{u}$  는 계측치,  $u$  는 임의의 설계변수로 정해석한 결과,  $N$  은 계측점의 개수,  $neq$  는 등식형 구속조건의 개수이며,  $nin$  은 부등식형 구속조건의 개수이다. 등식형 구속조건만 있다고 할 때, 목적함수를 최소화하기 위해서 다음과 같이 gradient 가 0 이 되도록 하는 조건이 필요하다.

$$\frac{\partial \Pi(\mathbf{X})}{\partial X_m} + \sum_{j=1}^{neq} \Lambda_j \frac{\partial c_j(\mathbf{X})}{\partial X_m} = 0 \tag{3.1.2}$$

$$c_j(\mathbf{X}) = 0$$

이 조건을 Kuhn-Tucker 조건이라고 하며, 식 (3.1.1)의 1차 필요조건이 된다(Kuh51). 여기서  $c_j$ 는 구속 조건식을 나타내는 벡터이고,  $\Lambda_j$ 는 라그랑즈 계수를 나타내는 벡터이다. 그런데, 식 (3.1.2)는 비선형 조건식이므로  $\mathbf{X}$ 에 대해 반복계산을 수행해야 한다.  $X_m$ 과  $\Lambda_j$ 가 변수일 때, k번째 반복단계에서 설계변수에 대한 증분을  $\Delta X_m$ , 라그랑즈 계수에 대한 증분을  $\Delta \Lambda_j$ 라고 하면,  $\Delta X_m, \Delta \Lambda_j$ 는 다음 식에서 구해질 수 있다.

$$\begin{aligned} H_{mn}^k \Delta X_n + \frac{\partial \Pi^k}{\partial X_m} + A_{jm}^k (\Lambda_j^k + \Delta \Lambda_j) &= 0 \\ A_{jm}^k \Delta X_m + c_j^k &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

여기서, 위 식에서의 헤시안( $H_{mn}^k$ ) 및 각 변수에 대한 정의는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^k}{\partial X_m} &= \frac{\partial \Pi(\mathbf{X}^k)}{\partial X_m} \\ H_{mn}^k &= \frac{\partial^2 \Pi^k}{\partial X_m \partial X_n} + \Lambda_j^k \frac{\partial^2 c_j^k}{\partial X_m \partial X_n} \\ c_j^k &= c_j(\mathbf{X}^k) \\ A_{jm}^k &= \frac{\partial c_j^k}{\partial X_m} \end{aligned}$$

식 (3.1.3)은 다음과 같은 quadratic programming 문제의 1차 필요조건이 된다.

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{X} &= (\Delta X_1, \dots, \Delta X_{nd}) \\
\underset{\Delta \mathbf{X}}{\text{minimize}} \quad & \frac{\partial \Pi^k}{\partial X_m} \Delta X_m + \frac{1}{2} \Delta X_m H_{mn}^k \Delta X_n \\
\text{subject to} \quad & A_{jm}^k \Delta X_m + c_j^k = 0
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

식 (3.1.4)의 형태를 부등식형 구속조건을 가지는 최적화 문제에 유사하게 적용시키게 되면, 다음과 같이 부등식형 구속조건을 갖는 quadratic programming 을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{X} &= (\Delta X_1, \dots, \Delta X_{nd}) \\
\underset{\Delta \mathbf{X}}{\text{minimize}} \quad & \frac{\partial \Pi^k}{\partial X_m} \Delta X_m + \frac{1}{2} \Delta X_m H_{mn}^k \Delta X_n \\
\text{subject to} \quad & A_{jm}^k \Delta X_m + c_j^k = 0 \quad j = 1, \dots, neq \\
& A_{jm}^k \Delta X_m + c_j^k \leq 0 \quad j = neq + 1, \dots, neq + nin
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

식 (3.1.5)는 RQP 의 종속문제가 되며, 식 (3.1.1)의 문제를 풀기 위해 종속문제를 푼다.

한편, 정확한 헤시안을 구하기 위해선 식 (3.1.6)에서와 같이 변위의 2 차 민감도가 필요하다.

$$\begin{aligned}
H_{mn}^k &= \frac{\partial^2 \Pi^k}{\partial X_m \partial X_n} + \Lambda_j^k \frac{\partial^2 c_j^k}{\partial X_m \partial X_n} \\
\frac{\partial^2 \Pi^k}{\partial X_m \partial X_n} &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial u_i^k}{\partial X_m} \frac{\partial u_i^k}{\partial X_n} + (u_i^k - \bar{u}_i) \frac{\partial^2 u_i^k}{\partial X_m \partial X_n} \right)
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

여기서,  $u_i^k = u_i(\mathbf{X}^k)$  이다. 그러나, 소성 문제에서는 변위의 2 차 민감도를 구할 수 없으므로, 헤시안을 직접 구할 수 없다. 따라서 다음과 같이, 변위의 1 차 민

감도 만의 곱으로 표시되는 Gauss-Newton 근사법을 이용한다.

$$H_{mn}^k \cong_{GN} H_{mn}^k = \frac{\partial^2 \Pi^k}{\partial X_m \partial X_n} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i^k}{\partial X_m} \frac{\partial u_i^k}{\partial X_n} \quad (3.1.7)$$

이 경우 해가 충분히 정해에 수렴했을 때,  $u_i^k - \bar{u}_i$  이 0 이 되므로 헤시안이 정확하게 구해진다. 따라서, 해가 정해에 충분히 수렴했을 때 빠른 수렴성을 보장한다.

이와 같이 구한 탐색방향  $\Delta \mathbf{X}$  는 정확한 헤시안을 쓰지 않고 근사된 헤시안을 쓴 이유로 오차가 발생하게 된다. 따라서 RQP 에서는 이를 보완하기 위해, 탐색방향을 따라가며 목적함수가 최소화되는 경우를 찾는 line search 를 하게 된다. line search 는 각 step length 에서의 목적함수값을 재귀적으로 확인하며 목적함수가 최소로 되는 step length 를 찾는 과정으로 이루어져 있다. 위와 같이 하여 설계변수의 탐색 방향을 결정한 뒤 step length 를 구할 때는 목적함수의 값을 재귀적으로 확인하며, 목적함수를 최소화 시키는 step length 를 찾게 된다. m 개의 등식형 구속조건과 n 개의 부등식형 구속조건이 있는 문제에서 k 번째 반복계산에서의 step length  $\beta^k$  는 다음 식에서 구해진다.

$$\begin{aligned} \text{minimize}_{\beta^k} \quad & \Pi(\mathbf{X}^k + \beta^k \Delta \mathbf{X}) + l \left[ \sum_{i=1}^{neq} |c_i(\mathbf{X}^k + \beta^k \Delta \mathbf{X})| + \right. \\ & \left. \sum_{i=neq+1}^{neq+nin} \max[c_i(\mathbf{X}^k + \beta^k \Delta \mathbf{X}), 0] \right] \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

여기서,  $l$  은 모든 라그랑즈 계수의 절대값보다 큰 값이다.

이상의 RQP 알고리즘을 정리하면 다음과 같다.

- [1] 초기설계변수  $X_m^0$  를 가정하고, 반복계산회수  $k$  는 0 으로 놓는다.
- [2] 식 (3.1.5)의 종속문제를 풀어 탐색방향  $\Delta \mathbf{X}$  을 결정한다.
- [3] 탐색방향  $\Delta \mathbf{X}$  에 따라 식 (3.1.8)을 만족시키는 step length  $\beta^k$  를 구한다.
- [4]  $X_m^k + \beta^k \Delta X_m$  을  $X_m^{k+1}$  로 놓고, 반복횟수  $k$  를  $k+1$  로 증가시킨 다음 다시 [2] 로 돌아간다. 만일 수렴조건을 만족시키면  $X_m^{k+1}$  이 최적의 해가 된다.

### 3.2 소성 민감도

매개 변수 추정법에서 gradient 와 헤시안을 구하기 위해 변위의 민감도를 구해야 한다. 이는 식 (2.1.6)의 평형 조건식을 설계변수에 대해 1 차 미분하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial X_m} \int_{V_r} \hat{u}_{i,j}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} dV = \frac{\partial}{\partial X_m} \int_{V_r} \hat{u}_i b_i dV \quad (3.2.1)$$

이때, 소성 설계변수  $X_m$  은 체적력, 가중함수, geometry 에 독립적인 변수라고 하면, 식 (3.2.1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_{V_r} \hat{u}_{i,j}^{t+\Delta t} \sigma_{ij,m} dV = 0 \quad (3.2.2)$$

여기서,  $(\ )_{,m} = \frac{\partial(\ )}{\partial X_m}$  이다.

소성 변수(  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}^p$ ,  $h$ ,  $\lambda$  )들의 설계변수에 대한 민감도는 수치적분된 형태로 주어진 소성 지배방정식을 미분함으로써 구해질 수 있다. Flow rule 을 미분하

면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
{}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p &= {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p + \int_t^{t+\Delta t} \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} dt = {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p + {}^{t+\Delta t} \lambda \frac{\partial {}^{t+\alpha \Delta t} \phi}{\partial \sigma_{ij}} \\
{}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij,m}^p &= {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_{ij,m}^p + {}^{t+\Delta t} \lambda_{,m} \frac{\partial {}^{t+\alpha \Delta t} \phi}{\partial \sigma_{ij}} + {}^{t+\Delta t} \lambda \frac{\partial^2 {}^{t+\alpha \Delta t} \phi}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \sigma_{kl,m} + {}^{t+\Delta t} \lambda \frac{\partial^2 {}^{t+\alpha \Delta t} \phi}{\partial X_m \partial \sigma_{ij}}
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Generalized Hook's Law 를 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
{}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} &= {}^t \sigma_{ij} + C_{ijkl} (\Delta \varepsilon_{kl} - \Delta \varepsilon_{kl}^p) \\
{}^{t+\Delta t} \sigma_{ij,m} &= {}^t \sigma_{ij,m} + C_{ijkl} (\Delta \varepsilon_{kl,m} - \Delta \varepsilon_{kl,m}^p) + C_{ijkl,m} (\Delta \varepsilon_{kl} - \Delta \varepsilon_{kl}^p)
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

식 (3.2.3)을 식 (3.2.4)에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$${}^{t+\Delta t} \sigma_{ij,m} = {}^t \sigma_{ij,m} + \tilde{\sigma}_{ij,m} + \Xi_{ijkl} \left( \frac{\partial \Delta \varepsilon_{kl}}{\partial X_m} - \frac{\partial \lambda}{\partial X_m} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{kl}} \right) \tag{3.2.5}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
\underline{(\ )} &= {}^{t+\alpha \Delta t} (\ ) = (1-\alpha) {}^t (\ ) + \alpha {}^{t+\Delta t} (\ ) \\
\underline{\underline{(\ )}} &= {}^{t+\Delta t} (\ )
\end{aligned} \text{이고,}$$

$$\tilde{\sigma}_{ij,m} = -\lambda \Xi_{ijkl} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \sigma_{kl} \partial \sigma_{pq}} {}^t \sigma_{pq,m} - \lambda \Xi_{ijkl} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X_m \partial \sigma_{kl}} + \Xi_{ijkl} C_{klpq}^{-1} C_{pqrs,m} (\Delta \varepsilon_{rs} - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{rs}})$$

이다. 항복조건식을 미분하면 다음과 같다.

$${}^{t+\Delta t} \Psi_{,m} = {}^{t+\Delta t} \phi_{,m} - {}^{t+\Delta t} \chi_{,m} = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij,m} + \phi_{,m}^{ex} - \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \chi}{\partial h} {}^{t+\Delta t} h_{,m} - \chi_{,m}^{ex} = 0 \tag{3.2.6}$$

여기서,  $(\ )_{,m}^{ex}$  는 설계변수  $X_m$  에 대한 explicit 미분항이다. 경화변수를 미분하면

다음과 같다.

$${}^{t+\Delta t} h_{,m} = {}^t h_{,m} + {}^{t+\Delta t} \lambda_{,m} \underline{F} + {}^{t+\Delta t} \lambda \underline{F}_{,m} + {}^{t+\Delta t} \lambda \frac{\partial \underline{F}}{\partial \sigma_{ij}} \left( \alpha {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij,m} + (1-\alpha) {}^t \sigma_{ij,m} \right) \quad (3.2.7)$$

식 (3.2.7)을 식(3.2.6)에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\lambda_{,m} = \frac{\left( \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} - \alpha \underline{\kappa}' \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \right) \Xi_{ijkl} \frac{\partial \Delta \varepsilon_{kl}}{\partial X_m}}{\left( \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} - \alpha \underline{\kappa}' \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \right) \Xi_{ijkl} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{kl}} + \underline{\varphi} \underline{\kappa}'} + P_{,m} \quad (3.2.8)$$

여기서,

$$P_{,m} = \frac{\left( \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} - \alpha \underline{\kappa}' \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \right) ({}^t \sigma_{ij,m} + \tilde{\sigma}_{ij,m}) + \phi_{,m}^{ex}}{\left( \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} - \alpha \underline{\kappa}' \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \right) \Xi_{ijkl} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{kl}} + \underline{\varphi} \underline{\kappa}'}$$

$$- \frac{\underline{\kappa}' ({}^{t-p} e_{,m} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} (1-\alpha) {}^t \sigma_{ij,m} + \lambda \phi_{,m}^{ex}) - \underline{\kappa}_{,m}^{ex}}{\left( \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} - \alpha \underline{\kappa}' \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \right) \Xi_{ijkl} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{kl}} + \underline{\varphi} \underline{\kappa}'}$$

이다. 따라서 여기서 구한  $\lambda_{,m}$ 을 식 (3.2.5)에 대입하여 정리하면, 다음과 같다.

$${}^{t+\Delta t} \sigma_{ij,m} = {}^t \sigma_{ij,m} + \tilde{\sigma}_{ij,m} - P_{,m} \Xi_{ijkl} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{kl}} + D_{ijkl}^{ep} \frac{\partial \Delta \varepsilon_{kl}}{\partial X_m} \quad (3.2.9)$$

식 (3.2.9)를 식 (3.2.2)에 대입하면, 다음과 같이 변위의 민감도를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
& \int_{V_r} \hat{u}_{i,j} D_{ijkl}^{ep} \frac{\partial \Delta u_{k,m}}{\partial x_l} dV \\
& = - \int_{V_r} \hat{u}_{i,j} ({}^t \sigma_{ij,m} + \tilde{\sigma}_{ij,m} - P_{,m} \Xi_{ijkl} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{kl}}) dV
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

식 (3.2.10)을 유한요소로 이산화하면 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$[K](\Delta u^{nod})_{,m} = (q) \tag{3.2.11}$$

여기서,  $(q)$ 는 pseudo-load 벡터이다. 따라서, time step  $t + \Delta t$ 에서 변위의 민감도는 다음과 같이 구해질 수 있다.

$${}^{t+\Delta t} u_{k,m} = {}^t u_{k,m} + \Delta u_{k,m} \tag{3.2.12}$$

### 3.3 기하 민감도

이 장에서는 기하 설계변수에 대한 변위의 민감도를 구하는 방법을 설명한다. 그러기 위해 영역변수화를 설명하고 그에 따라 기하 설계변수를 정의한다.

영역 변수화란, 미지의 정의영역  $V$ 를 기지의 기준영역  $\Omega$ 에 일대일로 대응시키는 사상을 정의하고, 이 사상에 따라 정의영역에서의 변분식을 기준영역에서의 변분식으로 표현해 주는 기법이다. 그림 3.1에서 정의영역은 매개변수 추정법에서의 반복단계에 따른 기하 설계변수에 따라 달라지지만, 기준영역은 반복단계와 무관한 일정한 형상을 갖는다. 이 논문에서 적용하는 사상은, 기준이 되는 절점의 좌표가 기준영역과 정의영역에서 각각 과  $\Phi_m(r^c)$ 으로 정해질 때, 정의영역에서 다른 절점의 좌표가 이에 따라 선형적으로 정해지는 사상이다. 기준이 되

는 절점의 정의영역에서의 좌표를 기하 설계변수로 잡으면, 정의영역의 모양은 기하 설계변수에 따라 달라지게 된다. 이 사상을 식으로 정리하면 다음과 같다.

$$x_i(r_j) = \Psi_i(r_j, \Phi_m(r^{c^m})) = \Psi_i(r_j, X_m) \quad (3.3.1)$$

여기서,  $X_m$ 는 기하 설계변수,  $r_j$ 는 기준영역에서의 좌표,  $x_i$ 는 정의영역에서의 좌표이다. 따라서, 기준영역에서 정의영역으로의 사상  $\Psi_i$ 의 Jacobian과 역 Jacobian은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{ij}(r_k) &\equiv \frac{\partial x_i(r_k)}{\partial r_j} \equiv \frac{\partial \Psi_i(r_k, X_m)}{\partial r_j} \\ \bar{J}_{ij}(r_k) &= \frac{\partial \Psi_i^{-1}(r_k, X_m)}{\partial r_j} = \tilde{J}^{-1}_{ij} \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

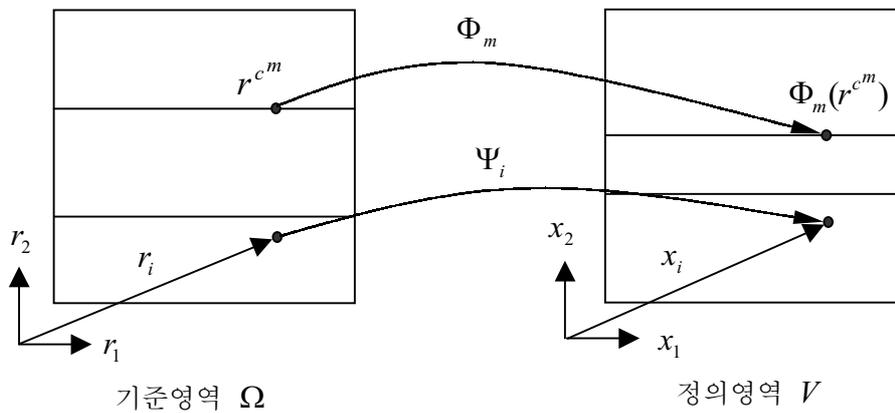


그림 3.1 영역 변수화를 위한 사상

이 논문에서는 기준이 되는 절점의  $x_2$  좌표  $\Phi_m(r^{c^m})$  만 변할 수 있다고 가정한다. 즉, 정의영역에 있는 여러 개 지층의 경계면의 깊이를 기하설계변수로 정의한다. 이럴 경우, 지층경계면의 깊이가 변하면, 모든 절점의  $x_2$  좌표가 따라서 변하게 된다. 그러나, 벽체에 위치하고 있는 계측점의 위치는 일정해야 하므로, 그림 3.2 와 같이 벽체 앞면의 좌표는 일정하게 고정시킨다. 즉, 기하불변영역이 된다. 그러나, 벽체 뒷면의 기하학적 형상은 지층경계면의 깊이에 따라 변해야 하므로, 중간에 interface element 를 둔다. 따라서, Interface element 의 왼쪽 절점은 고정되어 있어야 하고, 오른쪽은 지층경계면의 깊이에 따라 변해야 한다.

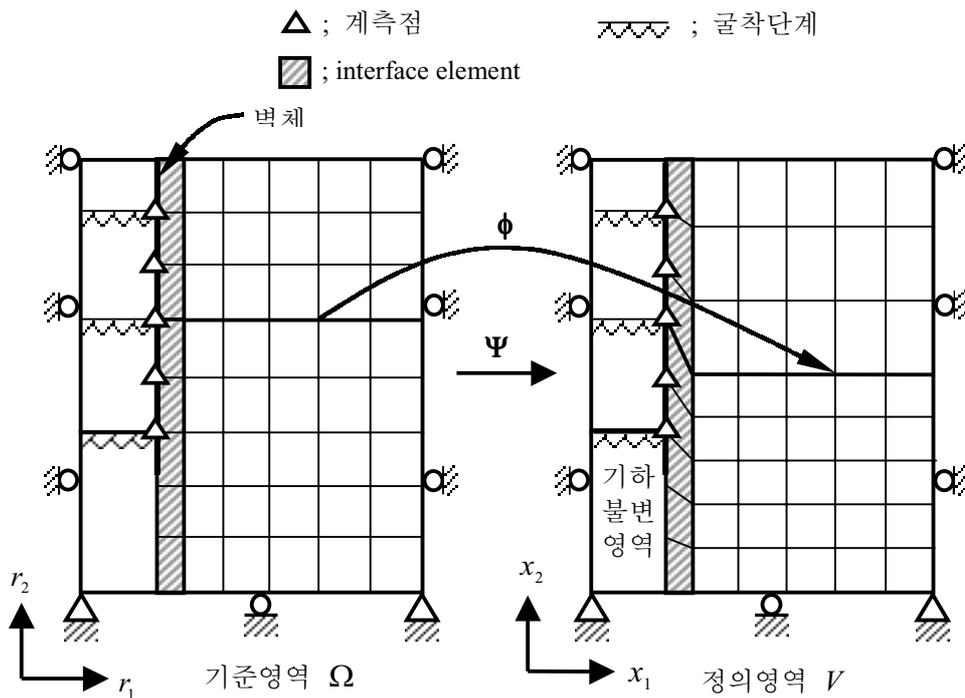


그림 3.2 지층 깊이의 변화를 고려한 영역 이산화

식 (3.2.1)에서  $X_m$ 이 기하 설계변수일 때, 소성 설계변수일 때와는 달리 체적력과 기하학적 형상이 설계변수의 함수이므로 기준영역에 대해 적분하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{\Omega} (\hat{u}_{i,j})_{,m}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} \tilde{J} d\Omega + \int_{\Omega} \hat{u}_{i,j}^{t+\Delta t} \sigma_{ij,m} \tilde{J} d\Omega + \int_{\Omega} \hat{u}_{i,j}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} \tilde{J}_{,m} d\Omega = \int_{\Omega} \hat{u}_i^{t+\Delta t} b_i \tilde{J}_{,m} d\Omega \quad (3.3.3)$$

여기서,  $\tilde{J}$ 는 Jacobian의 행렬값으로서  $dV = \tilde{J}d\Omega$ 이다. 식 (3.3.3)을 전개하면, 다음과 같이 변위의 증분의 민감도를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial r_p} \frac{\partial r_p}{\partial x_j} D_{ijkl}^{ep} \frac{\partial}{\partial r_q} \left( \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_m} \right) \frac{\partial r_q}{\partial x_l} \tilde{J} d\Omega &= \int_{\Omega} \hat{u}_i^{t+\Delta t} b_i \tilde{J}_{,m} d\Omega - \\ & \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial r_p} \frac{\partial r_p}{\partial x_j} \sigma_{ij,m} \tilde{J} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial r_p} \frac{\partial}{\partial X_m} \left( \frac{\partial r_p}{\partial x_j} \right)^{t+\Delta t} \sigma_{ij} \tilde{J} d\Omega - \\ & \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial r_p} \frac{\partial r_p}{\partial x_j} \sigma_{ij} \tilde{J}_{,m} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial r_p} \frac{\partial r_p}{\partial x_j} D_{ijkl}^{ep} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial r_q} \frac{\partial}{\partial X_m} \left( \frac{\partial r_q}{\partial x_l} \right) \tilde{J} d\Omega \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

유한요소로 이산화한 뒤, 변위증분의 민감도를 구할 수 있고, 다음 식에서 time step  $t + \Delta t$ 에서의 변위민감도를 구할 수 있다.

$${}^{t+\Delta t} u_{k,m} = {}^t u_{k,m} + \Delta u_{k,m} \quad (3.3.5)$$

## 4. 예제

앞에서 제안한 역해석 기법을 지반 굴착예제에 적용시켜 그 타당성을 검증한다. 지층의 깊이가 고정된 기존의 방법과 지층의 깊이를 설계변수로 고려하여 변할 수 있게끔 한 방법을 비교한다. 또한 계측과정에서 생길 수 있는 계측치 오차에 대해 최적화된 해가 얼마나 안정한 지를 검토한다. 해의 안정성을 검토하기 위해 예제 4.1을 수행했고, 지층의 깊이를 설계변수화하는 방법의 장점을 확인하기 위해 예제 4.2, 4.3을 수행했다.

세 예제 모두 인장력에 약한 지반의 특성을 반영하기 위해 식 (4.1)의 Drucker-Prager 항복조건을 적용시켰다.

$$\begin{aligned}\phi &= \alpha \delta_{ij} \sigma_{ij} + \sqrt{\frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} \\ \chi &= k\end{aligned}\quad (4.1)$$

여기서,  $\delta_{ij}$ 는 kronecker-delta이며,  $\alpha$ 와  $k$ 는 평면 변형 상태일 때, 흙의 내부 마찰각  $\phi$ 와 점착력  $c$ 의 함수로서 다음과 같이 주어진다.

$$\alpha = \frac{\tan \phi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}} \quad (4.2a)$$

$$k = \frac{3c}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}} \quad (4.2b)$$

### 4.1 지층 형상을 정확히 알 때의 역해석

지층 형상을 정확히 아는 경우, 즉 지하 설계변수가 필요없는 경우에는 물성치만을 설계변수로 하여 역해석을 수행한다. 해석 예제는 폭 16m, 깊이



표 4.1 지반의 물성치

	점착력, $c$ ( $t/m^2$ )	내부 마찰각, $\phi$ ( $^\circ$ )	탄성계수, $E$ ( $t/m^2$ )	포아송비, $\nu$	단위중량, ( $t/m^3$ )
지층1	2.0	25.0	1000	0.35	2.53
지층2	3.5	30.0	4000	0.33	2.64
지층3	10.0	30.0	11000	0.30	3.10
지층4	80.0	40.0	100000	0.25	3.50

표 4.2 벽체와 스트럿의 물성치

벽체		스트럿	
단면 2차 모멘트 ( $m^4/m$ )	$2.04 \times 10^{-3}$	단면적( $m^2/m$ )	$5.625 \times 10^{-4}$
탄성계수( $t/m^2$ )	$2.1 \times 10^7$	탄성계수( $t/m^2$ )	$2.1 \times 10^7$
전단계수 $\times$ 유효단 면적( $G \times A_0$ ) ( $t/m$ )	$1.0 \times 10^4$		

가정하고 벽체의 축방향 강성은 무시했다. 지반의 유한요소 모델링은 Q8요소로 했으며, 벽체의 모델링은 지반의 Q8요소와 변위에 대한 적합조건을 성립시킬 수 있도록 변위가 2차식으로 표현되는 mindlin 형상 함수를 이용했다. 계측은 벽체에서만 했으며 수평 변위만 계측하였다. 계측점은 벽체의 맨 위치점부터 6단

굴착면까지 1m씩 등간격으로 위치하고 있다.

계측은 실제로 하지 않고 정해석 결과를 이용했다. 즉, 임의의 설계변수의 집합을 정하고, 그것을 정해석하여 나온 결과를 계측치로 삼았다. 계측치를 정의하기 위해 사용한 설계변수의 집합을 정해라고 하면, 정해는 표 4.3과 같다. 계측치를 구한 뒤 역해석을 하는데, 이 때 설계변수의 초기 가정치는 정해와 최대 30% 정도 오차가 있도록 했으며, 그 값은 표 4.3과 같다.

표 4.3 각 지층의 물성치의 정해와 초기 가정치

물성치		정해	초기 가정치
지층 1	$\phi_1$	25.0	25.81
	$c_1$	2.0	1.56
	$E_1$	1000.0	1177.3
지층 2	$\phi_2$	30.0	24.02
	$c_2$	3.5	3.24
	$E_2$	4000.0	3334.5
지층 3	$\phi_3$	30.0	26.01
	$c_3$	10.0	12.74
	$E_3$	11000.0	10503.9
지층 4	$\phi_4$	40.0	29.58
	$c_4$	80.0	91.19
	$E_4$	100000.0	81347.7

내부 마찰각  $\phi$ 와 점착력  $c$ 는 소성 물성치로서 구조물에 생긴 소성변형의 영향을 반영하는데 있어 상호 보완적이다. 따라서, 두 개의 물성치 중 한 개만을 설계변수로 채택해도 소성의 영향을 반영하는데 별 문제가 없다. 여기서는 점착력을 고정시키고 내부 마찰각만을 설계변수로 채택한다.

계측시에 발생하는 오차에 대한 해의 안정성을 검토하기 위해 계측치에 20%의 상대오차를 임의로 발생시켰다. 역해석 결과, 계측오차가 있는 경우와 없는 경우의 해가 표 4.4에 비교되어 있다.

표 4.4 계측오차가 있는 경우와 없는 경우의 역해석 결과

물성치		정해	계측오차 없을 때	계측오차 있을 때
지층 1	$\phi_1$	25.0	25.81	25.81
	$c_1$	2.0	-	-
	$E_1$	1000.0	969.6	2000.0(U)
지층 2	$\phi_2$	30.0	32.64	30.57
	$c_2$	3.5	-	-
	$E_2$	4000.0	4034.8	3373.9
지층 3	$\phi_3$	30.0	22.92(L)	22.92(L)
	$c_3$	10.0	-	-
	$E_3$	11000.0	8806.0	12368.2
지층 4	$\phi_4$	40.0	29.58	29.58
	$c_4$	80.0	-	-
	$E_4$	100000	102832.5	99886.1

표 4.4에서  $\phi_1$  과  $\phi_4$ 는 지반이 초기 반복계산 단계부터 탄성 상태이므로, 민감도가 0이 되어 변할 수가 없다. 즉, 무의미한 설계 변수가 되는 것이다. 한편, 설계변수가 물리적으로 무의미한 값을 가지지 않도록 구속조건을 적용시키게 되는데, 표 4.4에서 (L)은 부등식형 구속조건 중 하한값에 대한 구속조건이며, (U)는 상한값에 대한 구속조건이다.

계측오차가 없는 경우에 비해 계측오차가 있는 경우, 역해석 결과가 다소 비합리적으로 나옴을 알 수 있으나, 그림 4.2에서 보듯이 지층 1이 속한 구간의 변위가 작으므로, 목적함수의  $E_1$ 에 대한 gradient 또한 작게 된다. 즉, 다른 설계 변수에 비해 목적함수에 미치는 영향이 작다. 따라서,  $E_1$ 은 반복 계산 단계별로 큰 편차를 가지며 변화할 수 있고, 그 결과 계측오차가 있을 때, 상한 구속조건에 걸린 것으로 추측된다.

그림 4.2에서 계측오차가 있는 경우에도 계측오차가 없는 경우와 비슷하게 정해에 의한 계측치를 잘 모사하고 있음을 알 수 있다.



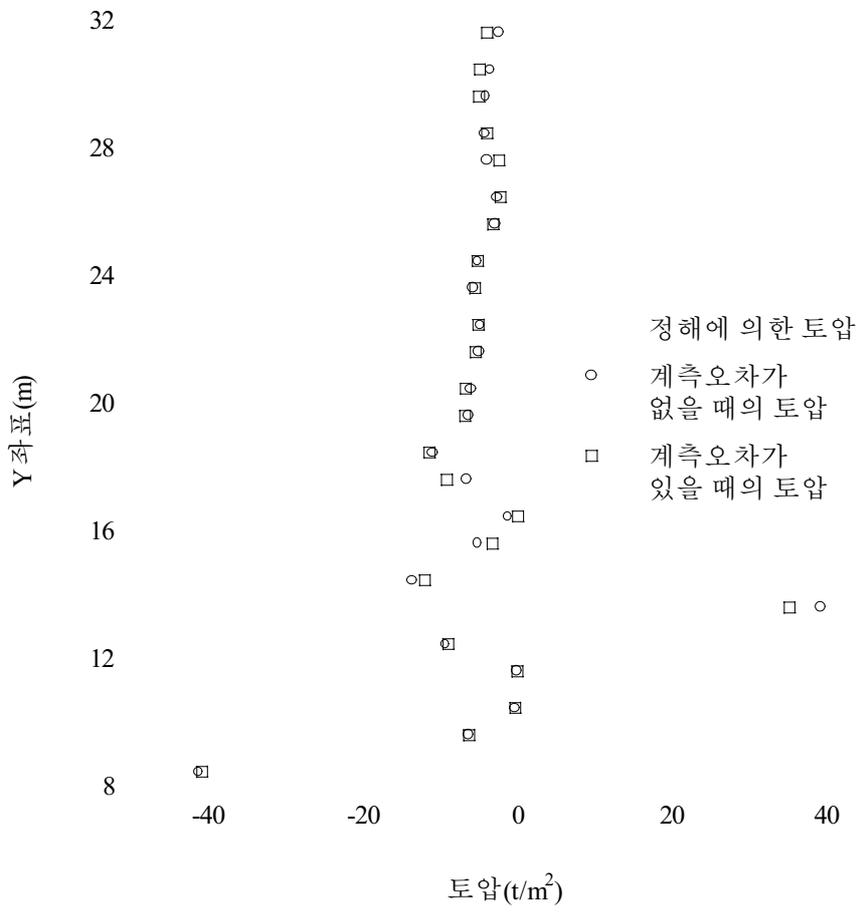


그림 4.3 벽체의 토압분포

## 4.2 수평 지층의 역해석

서로 다른 두 지반은 그 경계가 확실하지 않고 연속적으로 변하면서 이어진다. 이와 같은 지층 깊이의 불확실성 때문에, 지반 조사시 구해진 지층의 깊이는 고정된 값이 아닌 기하 설계변수로 가정하는 것이 타당하다. 이 예제에서는 실제 지층이 수평하게 되어 있을 때, 지층 깊이를 기하 설계변수로 가정할 때와 그렇지 않을 때를 비교한다. 정해에 의한 계측치를 구하기 위한 지반조건과 구조물의 조건은 예제 4.1과 같으며, 정해와 초기 가정치는 표 4.5와 같다.

표 4.5 설계변수의 정해와 초기 가정치

설계변수		정해	초기 가정치
지층 1	$\phi_1$	25.0	25.81
	$C_1$	2.0	1.56
	$E_1$	1000.0	1177.0
지층 2	$\phi_2$	30.0	24.02
	$C_2$	3.5	3.24
	$E_2$	4000.0	3335.0
지층 3	$\phi_3$	30.0	26.01
	$C_3$	10.0	12.74
	$E_3$	11000.0	10504.0
지층 4	$\phi_4$	40.0	29.58
	$C_4$	80.0	91.19
	$E_4$	100000.0	81348.0
지층 깊이	$h_1$	14.0	15.62
	$h_2$	18.0	18.63
	$h_3$	28.0	24.90

역해석 결과 구해진 해는 표 4.6와 같다.

표 4.6에서 (탄)은 탄성 상태를 의미하므로 소성 설계변수는 무의미하게 된다. 또한 (L)은 설계변수가 하한값에 대한 구속조건, (U)는 상한값에 대한 구속조건에 각각 걸려있는 상태이다. 구해진 해는, 기하 설계변수를 고려할 때 훨씬 합리적인 값을 알 수 있다.

기하 설계변수를 고려할 때와 고려하지 않을 때의 벽체의 변형형상은 그림

표 4.6 기하 설계변수를 고려할 때와 고려하지 않을 때의 역해석 결과 비교

설계변수		정해	고려할 때	고려하지 않을 때
지층 1	$\phi_1$	25.0	29.84(탄)	33.23(U)
	$c_1$	2.0	-	-
	$E_1$	1000.0	919.6	2000.0(U)
지층 2	$\phi_2$	30.0	31.58	35.77
	$c_2$	3.5	-	-
	$E_2$	4000.0	4296.9	4419.3
지층 3	$\phi_3$	30.0	22.92(L)	22.92(L)
	$c_3$	10.0	-	-
	$E_3$	11000.0	8546.0	6000.0(L)
지층 4	$\phi_4$	40.0	29.58(탄)	29.58(탄)
	$c_4$	80.0	-	-
	$E_4$	100000.0	99823.3	71666.1
지층 깊이	$h_1$	14.0	14.11	-
	$h_2$	18.0	17.98	-
	$h_3$	28.0	28.08	-

4.4 와 같다. 역시 기하 설계변수를 고려하는 것이 계측치를 잘 모사함을 알 수 있다. 벽체에 미치는 수평 토압의 분포는 그림 4.5와 같다. 이 역시 기하 설계변수를 고려하는 것이 정해를 잘 모사함을 알 수 있다.

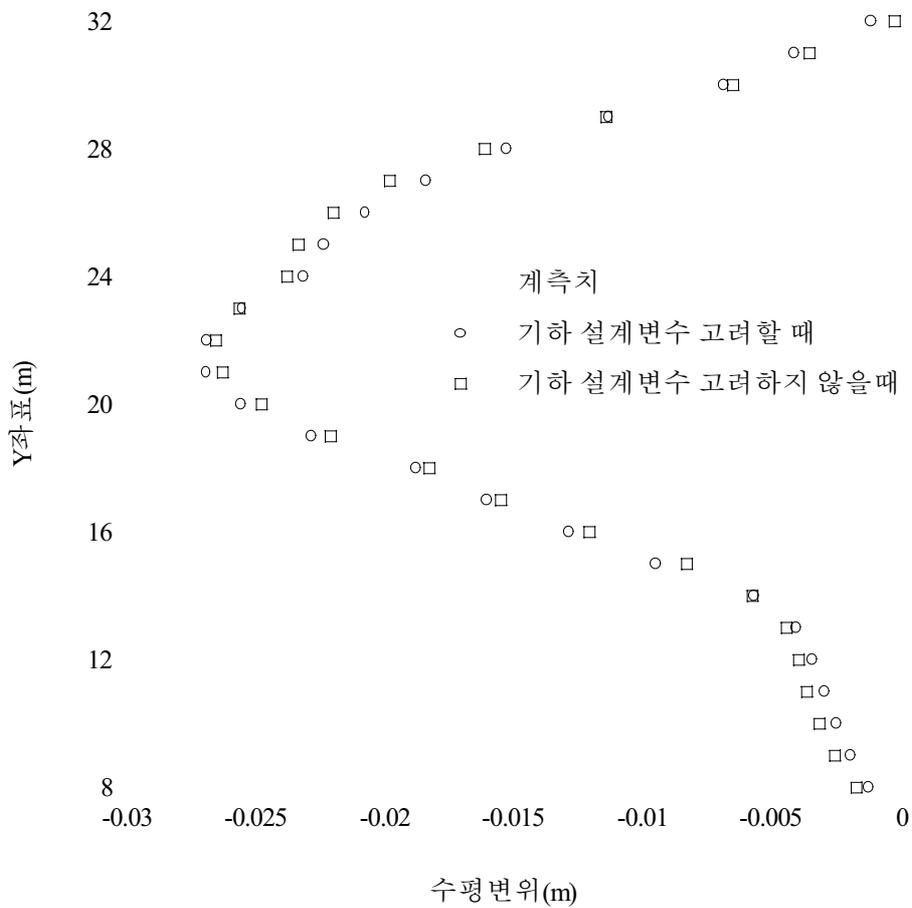


그림 4.4 기하 설계변수를 고려할 때와 고려하지 않을 때의 벽체의 변형 비교

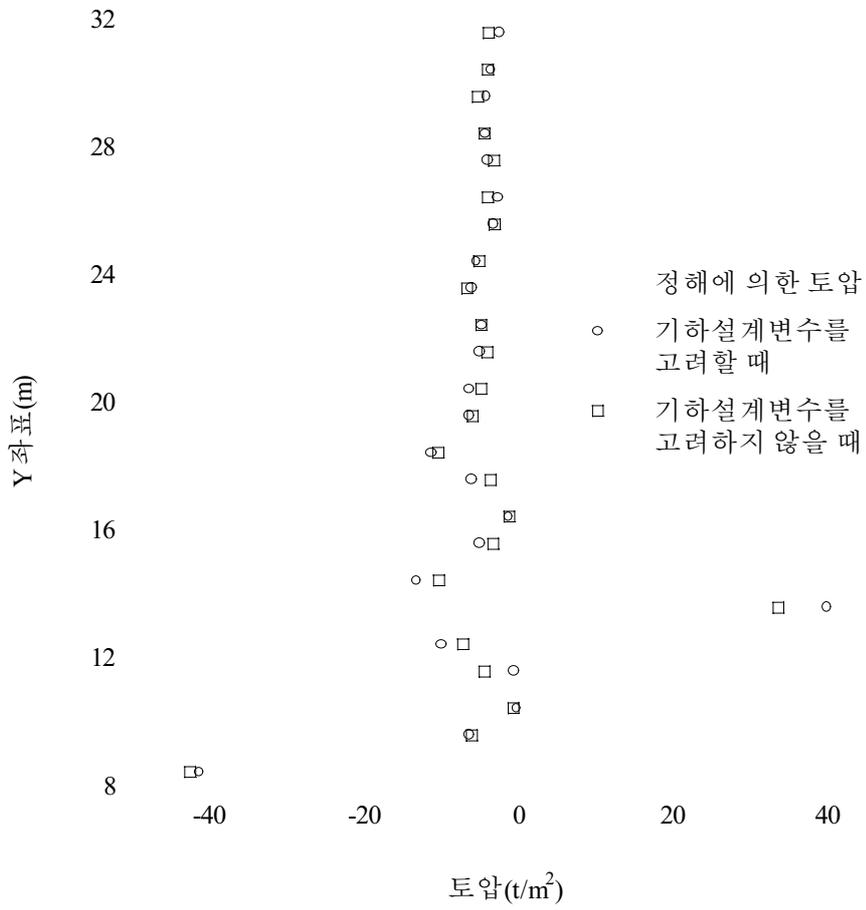


그림 4.5 기하 설계변수를 고려할 때와 고려하지 않을 때의 벽체에 미치는 토압 비교

### 4.3 경사 지층의 역해석

지층이 경사져 있을 경우, 수평지층의 경우와 달리 지층의 깊이는 벽체로부터의 수평거리에 따라 달라지게 된다. 이 예제에서는 경사진 지층에서 지층의 깊이를 설계변수로 한 경우와 고정시킨 경우를 비교하여 이 논문에서 제안한 기하 설계변수 도입의 타당성을 검증한다.

지반의 형상 및 벽체와 스트럿의 위치는 그림 4.6과 같다. 경사지층을 모사하기 위해 계단식으로 요소를 배치했다.

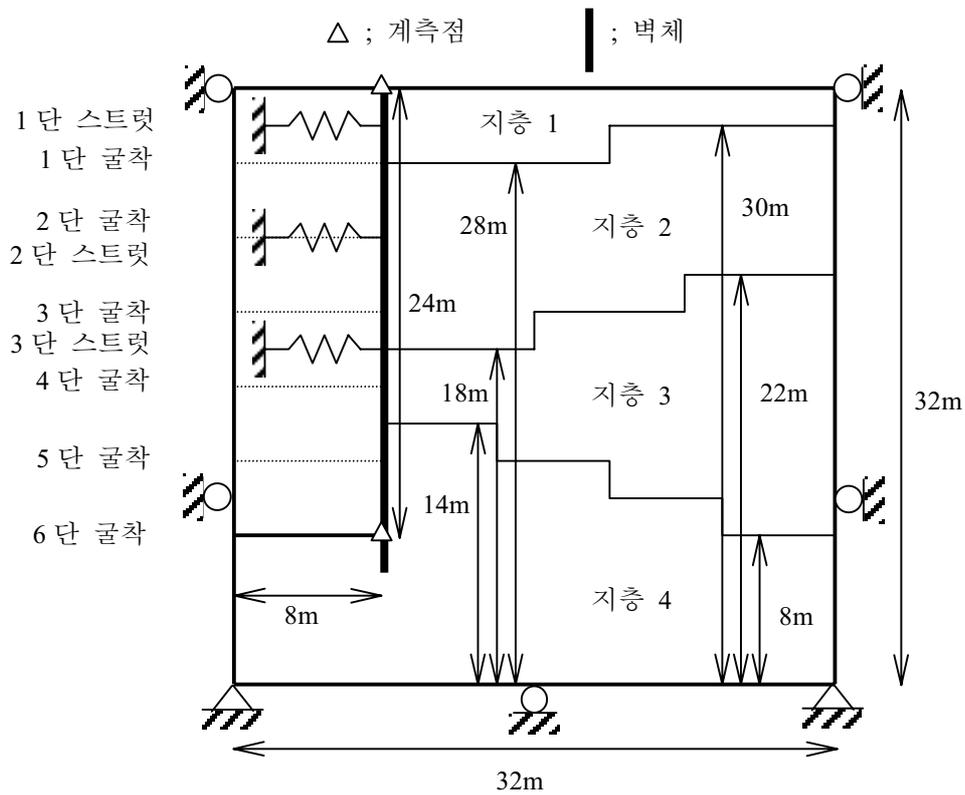


그림 4.6 지층이 경사져 있는 경우의 지반조건

벽체로부터 18m 떨어진 지점에서 지반조사를 했다고 하면, 지층의 깊이는 각각 8m, 22m, 30m로 계측하게 될 것이다. 따라서, 지층의 깊이의 초기 가정치를 각각 8m, 22m, 30m로 한다.

기하 설계변수를 고려한 경우와 그렇지 않은 경우의 역해석 결과는 표 4.7 과 같다. 표 4.7에서 (탄)은 지반이 탄성 상태이므로 소성 설계변수가 무의미함을

표 4.7 기하설계변수를 고려한 경우와 고려하지 않은 경우의 역해석 결과

설계변수		정해	고려할 때	고려하지 않을 때
지층 1	$\phi_1$	25.0	25.81(탄)	17.27(탄)
	$c_1$	2.0	-	-
	$E_1$	1000.0	1234.7	2000.0(U)
지층 2	$\phi_2$	30.0	28.25	22.92(L)
	$c_2$	4.5	-	-
	$E_2$	4000.0	4688.8	2593.5
지층 3	$\phi_3$	30.0	31.03	38.96(U)
	$c_3$	14.0	-	-
	$E_3$	11000.0	13118.2	17126.4
지층 4	$\phi_4$	40.0	29.58(탄)	29.58(탄)
	$c_4$	80.0	-	-
	$E_4$	100000.0	86909.0	200000.0(U)
지층 깊이	$h_1$	14.0~8.0	16.00(U)	-
	$h_2$	18.0~22.0	17.56	-
	$h_3$	28.0~30.0	27.88	-

의미한다. 표 4.7에서 (L)은 설계변수가 하한값에 대한 구속조건, (U)는 상한값에 대한 구속 조건에 각각 걸려 있는 상태를 의미한다. 구해진 결과를 보면, 기하 설계변수를 고려한 경우는 구해진 물성치들이 정해와 비슷하며 합리적인 값을 추정하는 반면, 기하 설계변수를 고려하지 않는 경우는 추정된 물성치들이 구속조건에 많이 걸려 있으며, 정해와 동떨어진 비합리적인 값을 찾았음을 알 수 있다. 기하 설계변수를 고려하는 경우와 고려하지 않는 경우의 벽체의 변형형상과 토압분포는 각각 그림 4.7, 그림 4.8과 같다.

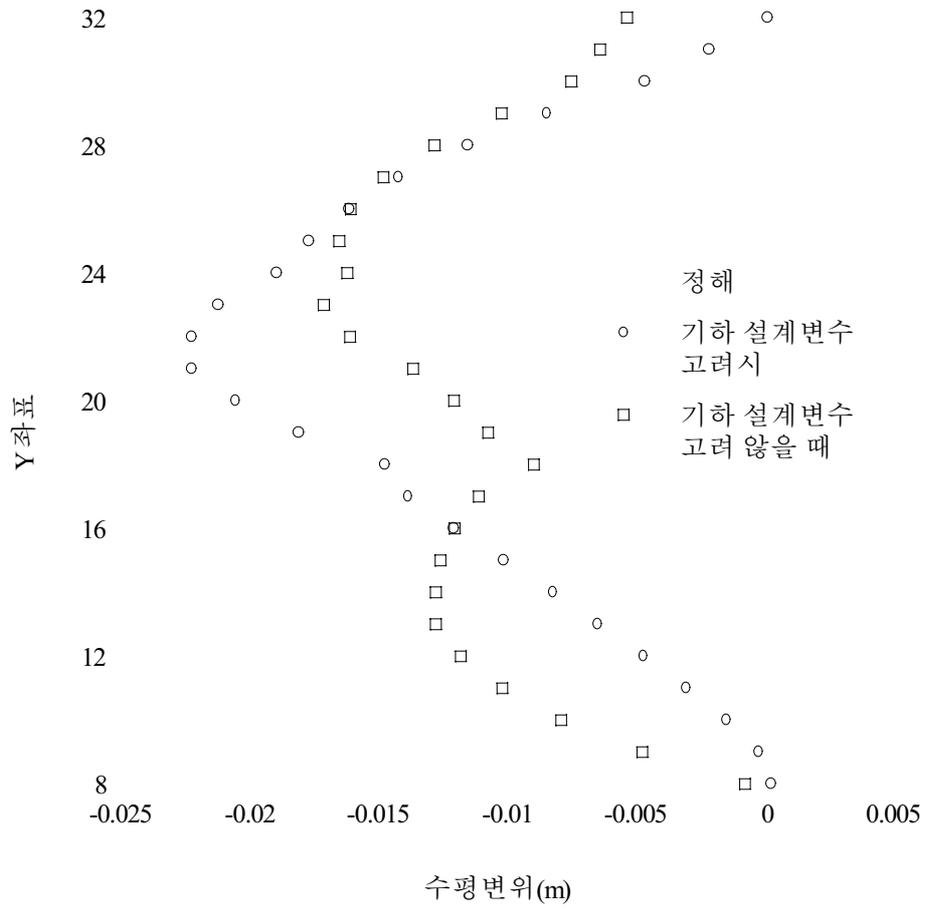


그림 4.7 기하 설계변수를 고려할 때와 고려하지 않을 때의  
벽체의 변위 비교

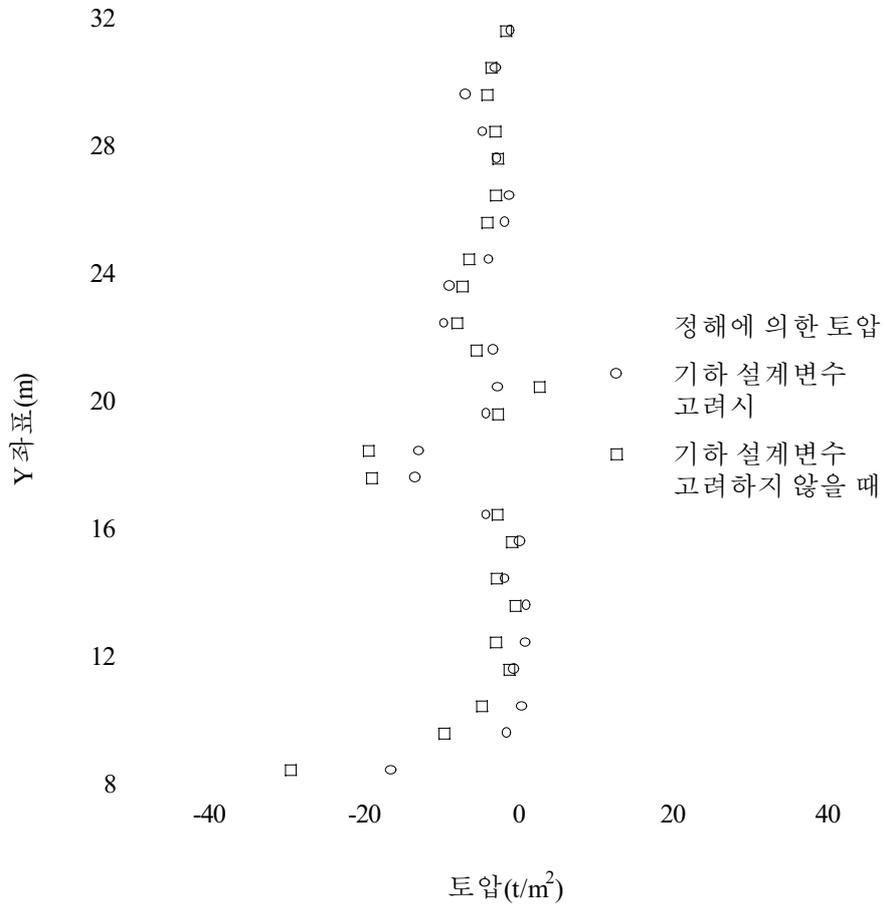


그림 4.8 기하 설계변수를 고려할 때와 고려하지 않을 때, 벽체에 미치는 토압 분포 비교

## 5. 결론

이 논문에서는 굴착시 주어지는 계측치로부터 소성 거동을 하는 지반의 물성치와 지층 형상을 추정하는 굴착 역해석 기법을 제안하였다. 소성 거동을 하는 지반을 해석하기 위해 소성 해석을 수행했으며, 소성 해석은 소성변형도 - 응력 관계식을 일반화된 중앙값 정리에 의해 적분했을 때 유도되는 consistent tangent moduli를 이용하여 수행됐다.

굴착 해석을 위해 굴착 전 평형 상태일 때의 응력과 굴착 후 외력의 차로 정의되는 불평형 응력을 계산했다. 구성방정식으로 consistent tangent moduli를, 외력으로 불평형 응력을 사용하여 유한요소 모델링을 했다.

역해석은 지반의 물성치 또는 지층 형상과 같이 구조계의 특성을 결정짓는 변수를 결정하는 방법이다. 여기서, 구조계의 특성을 결정짓는 변수를 설계변수라고 하며, 역해석을 하기 위해 다음과 같이 최적화를 했다. 설계변수에 의해 정해석된 변위와 계측된 변위와의 차의 제곱의 합을 목적함수로 정의했다. 목적함수를 최소화하는 설계변수의 집합을 찾기 위해 목적함수의 gradient가 0이라는 Kuhn-Tucker 조건을 구했다. 따라서, Kuhn-Tucker 조건은 최적화의 1차 필요조건이다. Kuhn-Tucker 조건을 만족시키는 해를 찾기 위해 반복계산을 하는데, 반복계산에서의 설계변수의 증분을 구하기 위해 Kuhn-Tucker 조건을 설계변수에 대해 선형화했다. 매 반복단계에서 이미 구해진 설계변수에 증분을 더함으로써 새로운 설계변수를 구했다.

선형화된 Kuhn-Tucker조건식을 구하기 위해 목적함수의 설계변수에 대한 2차

미분항인 헤시안을 구해야 한다. 이 논문에서는 헤시안을 구하기 위해 변위의 2차 민감도 대신 1차 민감도 만의 곱으로 표시되는 Gauss-Newton 근사법을 이용했다.

Kuhn-Tucker 조건을 선형화함으로써 설계변수의 증분, 즉 탐색방향에 오차가 생기게 된다. 이런 오차를 보정하기 위해 탐색방향을 따라가며 목적함수값을 최소화하는 지점을 찾는 line search를 했다. 목적함수값을 재귀적으로 확인하는 golden search 방법과 탐색방향으로의 gradient가 0이 되는 지점을 secant method로 찾는 방법을 line search방법으로 동시에 사용했다.

변위의 1차 민감도를 구하기 위해, 평형 방정식의 변분식을 해석적으로 직접 미분함으로써 민감도를 구하는 직접 미분법을 이용했다. 소성 물성치에 대한 민감도를 구하기 위해, consistent tangent moduli를 소성물성치에 대해 직접 미분했고, 기하 설계변수에 대한 민감도를 구하기 위해 기준영역에서 정의영역으로의 사상을 기하 설계변수에 대해 직접 미분했다. 여기서, 정의영역이란 실제로 변분식이 정의되는 영역으로서, 기하학적 형상은 모른다. 기준영역이란 기하학적 형상을 이미 알고 있는 영역으로서, 정의영역에서의 변분식을 적분하기 위해 만든 영역이다. 정의영역에서 기준영역으로의 사상을 설계변수화하는 영역변수화를 적용했다.

이 논문에서는 제안된 역해석 기법을 검증하기 위해 수평 지층과 경사지층에서 기하 설계변수를 도입한 것과 그렇지 않은 것을 비교했다. 그 결과, 기하 설계변수를 도입한 방법이 보다 합리적인 지반의 물성치를 찾아냄을 알 수 있었으며, 벽체의 변형 형상과 벽체에 미치는 토압분포등도 보다 합리적으로 묘사하고 있음을 알 수 있었다. 또한, 계측오차에 대한 해의 안정성 평가를 위해

임의의 계측오차에 대해 역해석을 실시해 본 결과, 20%의 상대오차에 대해 비교적 합리적인 해를 찾아냄을 알 수 있었다.

예제 문제에서와 같이 기하 설계변수를 고려하는 것이 고려하지 않는 기존의 방법에 비해 보다 합리적으로 지반의 거동을 모사하며, 보다 합리적인 지반의 물성치를 구해냄을 알 수 있었다.

## 참고문헌

Ban93.

Banan, M.R. and Hjelmstad, K. D. "Identification of Structural Systems from Measured Response," *Civil Engineering Studies, Structural Research Series No.579* pp.7-36, 140-151, 1993

Ban94.

Banan, M. R. and Hjelmstad, K. D., "Parameter Estimation of Structures From Static Response. I. Computational Aspects," *Journal of Structural Engineering*, Vol 120, No. 11, pp. 3243-3283., 1994

Kuh51.

Kuhn, H. W., and Tucker, A.W., "Nonlinear Programming," in Proc. Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, J. Neyman (Ed.), University of California Press, Berkeley, Calif., pp 481-492, 1951

Ori85

Ortiz, M. and Popov, E. P., "Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations," *Int. J. Num. Methods Engrg.*, Vol. 21, pp. 1561-1576, 1985

Phe89.

Phelan and Haber, R.B., "Sensitivity Analysis of Linear Elastic Systems using Domain Parameterization and a mixed Mutual Energy Principle," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 77, pp. 31-59, 1989

Sim85.

Simo, J.C. and Taylor, R.L., "Consistent Tangent Operators for Rate Independent Elastoplasticity", *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol.48, pp101-118, 1985.

Vid92.

Vidal, C.A., Lee, H.-S. and Haber, R.B., "The Consistent Tangent Operator for Design Sensitivity Analysis of History-Dependent Response," *Computing Systems in Engineering*, Vol. 2, No. 5/6, pp. 509-523, 1992

Vid93.

Vidal, C. A and Haber, R. B., "Design Sensitivity Analysis for Rate-independent Elastoplasticity," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* Vol. 107,

pp. 393-431., 1993

## ABSTRACT

In this paper, an inverse analysis scheme which estimates material properties and geometric shape of ground with plastic behavior from observation data under excavation is suggested. To analyze the ground with plastic behavior, consistent tangent moduli is adopted for plastic analysis. For an excavation analysis, we calculate the unbalanced stress defined as the difference between the stresses before and after excavation. The domain parameterization technique is adopted to deal with the shape variation of ground. Variational statement in the referential configuration is discretized by utilizing isoparametric mapping and linear mapping.

RQP (Recursive Quadratic Programming) is used for optimization algorithm. In optimization algorithm, the object function is defined as the least squared error between the measured data and the calculated data. The direct differentiation of the equilibrium equation with variational form is used to obtain the 1<sup>st</sup> order sensitivity of displacement. Sensitivity with regard to plasticity design variable can be obtained by direct differentiation of consistent tangent moduli, and sensitivity with regard to geometry design variable can be obtained by direct differentiation of mapping from the reference coordinate to the real coordinate. In this paper, the validity of proposed inverse analysis technique is demonstrated through three examples.

### Key Word

Consistent tangent moduli, Gauss-Newton approximation, direct differentiation, RQP (Recursive Quadratic Programming), domain parameterization